BILINGUA® Italiano-Inglese

Alonso/Finn

Elementi di Fisica per l'Università

Fundamental University Physics

II Campi e Onde (Fields and Waves)

ELEMENTI DI FISICA PER L'UNIVERSITA

VOLUME II – CAMPI E ONDE

Traduzione a cura di:

M. BERTOLACCINI e C. BUSSOLATI
Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico di Milano

F. DEMICHELIS
Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico di Torino

Coordinatore:

E. GATTI
Istituto di Fisica Sperimentale del Politecnico di Milano

FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS

VOLUME II – FIELDS AND WAVES

MARCELO ALONSO
Department of Physics, Georgetown University

EDWARD J. FINN
Department of Physics, Georgetown University

BILINGUA®

ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY London · Reading, Massachusetts · Menlo Park, California · Don Mills, Ontario

EDIZIONE BILINGUA ADDISON-WESLEY

Questa edizione BILINGUA è l'unica edizione autorizzata in Italiano/Inglese di FUNDAMENTAL UNIVERSITY PHYSICS di Marcelo Alonso e Edward J. Finn.

Copyright © 1969 by Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form without written permission of the copyright holder. Printed in Malta. Library of Congress Catalog Card No. 77—105103.

PREFAZIONE ALL'EDIZIONE ITALIANA

Sono lieto di presentare la traduzione in lingua italiana del testo di "Elementi di Fisica per l'Università" di M. Alonso e E. J. Finn: l'esigenza di un testo moderno ed aggiornato per quanto riguarda sia il piano didattico che il modo di presentazione dei singoli argomenti era assai sentita. Si tratta di un testo che, come dice il titolo stesso, cura con particolare riguardo gli aspetti fondamentali della Fisica, prescindendo in parte dalle superate distinzioni tra Meccanica, Acustica, Ottica, ecc., per porre l'accento sui principi fondamentali che unificano le varie branche della Fisica. Al tempo stesso però, con una accurata ed intelligente scelta di esempi ed esercizi, gli Autori riescono a fornire una valida rassegna delle applicazioni più moderne, fornendo, ad esempio, allo studente che legga attentamente il trattato, una chiara idea del principio di funzionamento di un acceleratore di particelle o di un reattore nucleare.

Riprendendo l'esperimento già introdotto dalla Addison-Wesley Publishers per la traduzione italiana della "Fisica di Feynman" si è adottata la soluzione di una edizione bilingue inglese-italiano.

Indubbiamente questo comporta una certa durezza nel testo italiano, in quanto si è dovuto fare una traduzione pressochè letterale. D'altro canto ci è parso che l'edizione bilingue (la quale risulta inoltre vantaggiosa da un punto di vista economico) potesse risultare assai utile per familiarizzare lo studente con l'inglese tecnico; ed è superfluo sottolineare quanto ciò sia importante.

Milano,
Giugno 1969

E. Gatti

AVVERTENZA IMPORTANTE

Per ragioni tipografiche è stata adottata anche per la versione italiana la notazione anglosassone per quanto riguarda sia l'uso del punto in luogo della virgola nella rappresentazione dei numeri non interi che l'indicazione del prodotto scalare mediante il simbolo · (anzichè ×) e del prodotto vettoriale mediante il simbolo × (anzichè ∧).

Esempi:

Notazione italiana	Notazione anglosassone
3,131	3.131
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

PREFAZIONE

La fisica è una scienza fondamentale che ha una profonda influenza su tutte le altre scienze. Perciò, non soltanto gli studenti di fisica e di ingegneria devono avere una completa conoscenza dei suoi concetti fondamentali, ma chiunque intenda seguire una carriera scientifica (compresi gli studenti di biologia, chimica, e matematica) deve avere questa stessa conoscenza.

Lo scopo principale del corso di fisica generale (e forse la sola ragione per la quale viene posto nel piano di studi) è di dare allo studente una visione unificata della fisica. Ciò deve essere fatto senza entrare in troppi dettagli, ma analizzando i principii fondamentali, le loro implicazioni, e le loro limitazioni. Lo studente imparerà le applicazioni nei corsi più specializzati che seguiranno. Perciò questo libro presenta quelle che noi crediamo siano le idee fondamentali che costituiscono il nocciolo della fisica moderna. Abbiamo preso in accurata considerazione le raccomandazioni della "Commission on College Physics" (Commissione sulla Fisica nelle Scuole) nel selezionare il contenuto degli argomenti e il metodo di presentazione.

Fino a poco tempo fa, la fisica veniva insegnata come se essa fosse un insieme di parecchie scienze, più o meno connesse, ma senza un punto di vista realmente unitario. La divisione tradizionale in ("scienza" della) meccanica, calore, acustica, ottica, elettromagnetismo, e fisica moderna non ha più ormai alcuna giustificazione. Noi ci siamo allontanati da questo accostamento tradizionale. Seguiamo, invece, una presentazione logica e unificata, mettendo in rilievo le leggi di conservazione, i concetti di campi ed onde, e la struttura atomica della materia. Nel testo viene ampiamente usata la teoria della relatività particolare come uno dei principii direttori che deve essere soddisfatto da ogni teoria fisica.

Il contenuto è stato diviso in cinque parti: (1) Meccanica, (2) Interazioni e Campi, (3) Onde, (4) Fisica Quantistica, e (5) Fisica Statistica. Iniziamo con la meccanica per stabilire i principii fondamentali necessari alla descrizione dei moti che osserviamo intorno a noi. Poichè tutti i fenomeni in natura sono il risultato di interazioni, e queste interazioni sono analizzate in termini di campi, consideriamo quindi nella parte 2ª quei tipi di interazione che meglio conosciamo: interazioni gravitazionale ed elettromagnetica, che sono le interazioni responsabili della maggior parte dei fenomeni macroscopici che osserviamo. Trattiamo molto dettagliatamente l'elettromagnetismo concludendo con la formulazione delle equazioni di Maxwell. Nella parte 3ª discutiamo i fenomeni ondulatori come conseguenza del concetto di campo. È in questa parte che abbiamo incluso molto del materiale compreso di solito sotto i titoli di acustica e ottica. Tuttavia, particolare rilievo è stato dato alle onde elettromagnetiche come estensione naturale delle equazioni di Maxwell. Nella parte 4ª analizziamo la struttura della materia — cioè, atomi, molecole, nuclei, e particelle fondamentali — analisi preceduta dalla necessaria conoscenza di base della meccanica quantistica. Infine, nella parte

FOREWORD

Physics is a fundamental science which has a profound influence on all the other sciences. Therefore, not only must physics majors and engineering students have a thorough understanding of its fundamental ideas, but anyone who plans a career in science (including students majoring in biology, chemistry, and mathematics) must have this same understanding.

The primary purpose of the general physics course (and perhaps the only reason it is in the curriculum) is to give the student a unified view of physics. This should be done without bringing in too many details, but by analyzing the basic principles, their implications, and their limitations. The student will learn specific applications in the more specialized courses that follow. Thus this book presents what we believe are the fundamental ideas that constitute the core of today's physics. We gave careful consideration to the recommendations of the Commission on College Physics in selecting the subject matter and its method of presentation.

Until recently, physics has been taught as if it were a conglomeration of several sciences, more or less related, but without any real unifying point of view. The traditional division into (the "science" of) mechanics, heat, sound, optics, electromagnetism, and modern physics no longer has any justification. We have departed from this traditional approach. Instead, we follow a logical and unified presentation, emphasizing the conservation laws, the concepts of fields and waves, and the atomic view of matter. The special theory of relativity is used extensively throughout the text as one of the guiding principles that must be met by any physical theory.

The subject matter has been divided into five parts: (1) Mechanics, (2) Interactions and Fields, (3) Waves, (4) Quantum Physics, and (5) Statistical Physics. We start with mechanics, in order to set up the fundamental principles needed to describe the motions we observe around us. Then, since all phenomena in nature are the result of interactions, and these interactions are analyzed in terms of fields, in Part 2 we consider the kinds of interactions we understand best: gravitational and electromagnetic interactions, which are the interactions responsible for most of the macroscopic phenomena we observe. We discuss electromagnetism in considerable detail, concluding with the formulation of Maxwell's equations. In Part 3 we discuss wave phenomena as a consequence of the field concept. It is in this part that we have included much of the material usually covered under the headings of acoustics and optics. The emphasis, however, has been placed on electromagnetic waves as a natural extension of Maxwell's equations. In Part 4 we analyze the structure of matter—that is, atoms, molecules, nuclei, and fundamental particles—an analysis preceded by the necessary background in quantum mechanics. Finally, in Part

5ª, trattiamo le proprietà macroscopiche della materia. Presentiamo prima i principii della meccanica statistica, e li applichiamo ad alcuni casi semplici ma fondamentali. Discutiamo la termodinamica dal punto di vista della meccanica statistica, e concludiamo con un capitolo sulle proprietà termiche della materia, facendo vedere come vengono applicati i principii della meccanica statistica e della termodinamica.

Questo testo è nuovo non soltanto nel modo di introdurre l'argomento ma anche nel suo contenuto, in quanto vi sono compresi alcuni argomenti fondamentali che non si trovano nella maggior parte dei testi di fisica generale e tralasciati altri che sono tradizionali. La matematica impiegata si può trovare in un qualsiasi testo classico di analisi. Presumiamo che lo studente abbia avuto una minima introduzione all'analisi matematica e stia seguendo simultaneamente un corso sull'argomento. Molte applicazioni dei principii fondamentali ed anche alcuni argomenti più avanzati appaiono sotto forma di esempi risolti. Questi possono, a giudizio del docente, venire discussi o proposti su una base selettiva, permettendo quindi una maggior flessibilità dell'organizzazione del corso.

Per tutte le scienze i programmi sono sottoposti a una grande pressione allo scopo di includere nuovi argomenti che stanno diventando sempre più importanti. Noi ci attendiamo che questo libro possa alleggerire questa pressione migliorando la capacità di apprendimento dei concetti fisici da parte dello studente e la sua abilità nel maneggiare le corrispondenti relazioni matematiche. Questo permetterà che molti corsi intermedi che attualmente costituiscono il programma del primo livello possano venire trasferiti a un livello superiore. I tradizionali corsi di primo livello in meccanica, elettromagnetismo, e fisica moderna trarranno un notevole beneficio da questo trasferimento al livello superiore. Lo studente terminerà perciò i suoi corsi di primo livello con una maggiore conoscenza —vantaggio importante per quelli che terminano i loro studi a questo punto. Ci sarà posto ora anche per più nuovi e interessanti corsi al livello superiore. Questa stessa tendenza si trova, in altre scienze, nei più recenti testi di base per corsi di primo e secondo anno.

Il testo è previsto per un corso di tre semestri. Esso può essere anche usato in quelle scuole in cui un corso di fisica generale in due semestri è seguito da un corso di un semestre in fisica moderna, offrendo quindi una presentazione più unificata sui tre semestri. Per comodità, il testo è stato diviso in tre volumi, ciascuno corrispondente all'incirca a un semestre. Il Volume I tratta la meccanica e l'interazione gravitazionale. Il Volume II riguarda le interazioni elettromagnetiche e le onde, considerando essenzialmente gli argomenti di elettromagnetismo e ottica. La fisica quantistica e statistica, compresa la termodinamica, sono incluse nel Volume III. Sebbene i tre volumi siano strettamente collegati e formino un unico testo, ciascuno può essere considerato come un testo introduttivo indipendente. In particolare, i Volumi I e II insieme sono l'equivalente di un corso di fisica generale in due semestri, comprendente la fisica non quantistica.

Noi speriamo che questo testo assisterà quei docenti di fisica più innovatori i quali costantemente si sforzano di migliorare i corsi che essi tengono. Speriamo anche che esso stimolerà molti studenti ai quali è bene offrire una presentazione della fisica più matura di quella dei corsi tradizionali.

Desideriamo esprimere la nostra gratitudine a tutti quelli che per la loro assistenza e il loro incoraggiamento, hanno reso possibile la realizzazione di questo lavoro. Siamo riconoscenti ai nostri eminenti colleghi, in particolare i Professori D. Lazarus e H. S. Robertson, che hanno letto il manoscritto originale; le loro critiche e i loro commenti ci aiutarono a correggere e migliorare molti aspetti del testo. Siamo anche grati al personale della Addison-Wesley per la sua abilità e dedizione. Infine, ma non ultime, ringraziamo sinceramente le nostre mogli, che ci hanno così pazientemente incoraggiati.

Washington, D.C. M.A.
Novembre 1966 E.J.F.

5, we talk about the properties of matter in bulk. First we present the principles of statistical mechanics, and apply them to some simple, but fundamental, cases. We discuss thermodynamics from the point of view of statistical mechanics, and conclude with a chapter on the thermal properties of matter, showing how the principles of statistical mechanics and of thermodynamics are applied.

This text is novel not only in its approach but also in its content, since we have included some fundamental topics not found in most general physics texts and deleted others that are traditional. The mathematics used can be found in any standard textbook on calculus. We assume that the student has had a minimal introduction to calculus and is taking a concurrent course in the subject. Many applications of fundamental principles, as well as a few more advanced topics, appear in the form of worked-out examples. These may be discussed at the instructor's convenience or proposed on a selective basis, thus allowing a greater flexibility in organizing the course.

The curricula for all sciences are under great pressure to incorporate new subjects that are becoming more relevant. We expect that this book will relieve this pressure by raising the level of the student's understanding of physical concepts and his ability to manipulate the corresponding mathematical relations. This will permit many intermediate courses presently offered in the undergraduate curriculum to be upgraded. The traditional undergraduate courses in mechanics, electromagnetism, and modern physics will benefit most from this upgrading. Thus the student will finish his undergraduate career at a higher level of knowledge than formerly—an important benefit for those who terminate their formal education at this point. Also there will now be room for newer and more exciting courses at the graduate level. This same trend is found in the more recent basic textbooks in other sciences for freshman and sophomore courses.

The text is designed for a three-semester course. It may also be used in those schools in which a two-semester general physics course is followed by a one-semester course in modern physics, thus offering a more unified presentation over the three semesters. For convenience the text has been divided into three volumes, each roughly corresponding to a semester. Volume I treats mechanics and the gravitational interaction. Volume II deals with electromagnetic interactions and waves, essentially covering the subjects of electromagnetism and optics. Quantum and statistical physics, including thermodynamics, are covered in Volume III. Although the three volumes are closely related and form a unified text, each one can be considered as a self-contained introductory text. In particular, Volumes I and II together are the equivalent of a two-semester general physics course, covering nonquantum physics.

We hope that this text will assist progressive physics instructors who are constantly struggling to improve the courses they teach. We also hope that it will stimulate the many students who deserve a presentation of physics which is more mature than that of the traditional course.

We want to express our gratitude to all those who, because of their assistance and encouragement, have made the completion of this work possible. We recognize our distinguished colleagues, in particular Professors D. Lazarus and H. S. Robertson, who read the original manuscript; their criticism and comments helped to correct and improve many aspects of the text. We are also grateful for the ability and dedication of the staff of Addison-Wesley. Last, but not least, we sincerely thank our wives, who have so patiently stood by us.

Washington, D.C. M.A.
November 1966 E.J.F.

NOTA PER IL DOCENTE

Per aiutare il docente nell'organizzazione del suo corso, presentiamo una breve traccia di questo volume e alcuni suggerimenti riguardanti i concetti importanti in ciascun capitolo. Come indicato nella prefazione, questo corso di fisica è stato sviluppato in una forma unificata cosicchè lo studente individua rapidamente le poche idee fondamentali sulle quali è basata la fisica (per esempio, le leggi di conservazione, e il fatto che i fenomeni fisici possono essere ridotti a interazioni tra particelle fondamentali). Lo studente dovrebbe riconoscere che per diventare un fisico o un ingegnere egli deve conseguire una chiara conoscenza di queste idee e sviluppare la capacità di usarle.

Il contenuto fondamentale forma il corpo del testo. Molti esempi risolti sono stati compresi in ciascun capitolo; alcuni sono semplici applicazioni numeriche della teoria da discutere, mentre altri sono o estensioni effettive della teoria o derivazioni matematiche. Si raccomanda di avvertire lo studente di tralasciare *tutti* gli esempi nella prima lettura di un capitolo. Dopo, nella seconda lettura, egli dovrebbe prendere in considerazione gli esempi svolti dal docente. In questo modo lo studente afferrerà le idee fondamentali separate dalle loro applicazioni e estensioni.

Alla fine di ciascun capitolo vi è un paragrafo di problemi. Alcuni di essi sono più difficili della media dei problemi di fisica generale e altri sono estremamente semplici. Essi sono disposti in un ordine che corrisponde circa ai paragrafi del capitolo, e con alcuni problemi più difficili alla fine. Il gran numero di svariati problemi dà al docente più libertà di scelta nell'adattare i problemi alla capacità dei suoi studenti.

Suggeriamo al docente di realizzare uno scaffale di riserva contenente il materiale bibliografico elencato alla fine di ciascun capitolo, e di incoraggiare lo studente ad usarlo in modo che esso possa sviluppare l'abitudine ad esaminare attentamente il materiale originale, ricavando più di una interpretazione di un argomento, e acquistando informazione storica circa la fisica.

Il presente volume è previsto per coprire il secondo semestre. Abbiamo suggerito come guida, sulla base della nostra esperienza, il numero di ore di lezione necessarie per svolgere comodamente tutta la materia. Il tempo indicato (43 ore di lezione) non comprende il tempo destinato alle interrogazioni e all'accertamento sull'apprendimento. Segue un breve commento su ciascun capitolo.

PARTE 2. INTERAZIONI E CAMPI

La parte 2ª tratta le interazioni elettromagnetiche che sono discusse nei Capitoli 14–17 (l'interazione gravitazionale è trattata nel Capitolo 13 nel Volume I). Questi quattro capitoli costituiscono una introduzione all'elettromagnetismo, salvo che essi non trattano le onde elettromagnetiche e la radiazione, che sono invece studiate nella parte 3ª. Alcuni concetti quantistici quali la quantizzazione dell'energia e momento della quantità di moto sono introdotti nei Capitoli 14 e 15. Questi argomenti saranno discussi più estesamente nel Volume III.

NOTE TO THE INSTRUCTOR

To assist the instructor in setting up his course, we present a brief outline of this volume and some suggestions concerning the important concepts in each chapter. As indicated in the foreword, this physics course has been developed in an integrated form so that the student quickly recognizes the few basic ideas on which physics is based (for example, the conservation laws, and the fact that physical phenomena can be reduced to interactions between fundamental particles). The student should recognize that to become a physicist or an engineer he must attain a clear understanding of these ideas and develop the ability to manipulate them.

The basic subject matter forms the body of the text. Many worked-out examples have been included in each chapter; some are simple numerical applications of the theory being discussed, while others are either actual extensions of the theory or mathematical derivations. It is recommended that in his first reading of a chapter the student be advised to omit *all* examples. Then, on the second reading, he should look into the examples chosen by the instructor. In this way the student will grasp the basic ideas separate from their applications or extensions.

There is a problem section at the end of each chapter. Some of them are more difficult than the average general physics problem and others are extremely simple. They are arranged in an order that roughly corresponds to the sections of the chapter, with a few more difficult problems at the end. The large number of varied problems gives the instructor more freedom of choice in matching problems with his own students' abilities.

We suggest that the instructor establish a reserve shelf based on the reference material listed at the end of each chapter, and encourage the student to use it so that he may develop the habit of checking source material, getting more than one interpretation of a topic, and acquiring historical information about physics.

The present volume is designed to cover the second semester. We have suggested as a guide, on the basis of our own experience, the number of lecture hours needed to comfortably cover the material. The time listed (43 lecture hours) does not include recitation or testing time. A brief comment on each chapter follows.

PART 2. INTERACTIONS AND FIELDS

Part 2 takes up electromagnetic interactions, which are discussed in Chapters 14 through 17 (gravitational interaction was presented in Chapter 13 in Volume I). These four chapters constitute an introduction to electromagnetism, except that they do not take up electromagnetic waves and radiation, which are discussed in Part 3. Some quantal concepts, such as the quantization of energy and of angular momentum, are introduced in Chapters 14 and 15. These topics will be discussed at greater length in Volume III.

Capitolo 14. *Interazione di tipo elettrico* (4 ore)

Questo capitolo si concentra sulla dinamica di una particella soggetta a interazione coulombiana, e considera la natura elettrica della materia. Il paragrafo 14.12 (che tratta multipoli elettrici) può essere tralasciato.

Capitolo 15. *Interazioni magnetiche* (4 ore)

La prima parte di questo capitolo introduce, in un modo dinamico, il concetto di campo magnetico, e studia il movimento di una particella carica in un campo magnetico. In seguito vengono discussi i campi magnetici di correnti con varie disposizioni geometriche. Il punto saliente è raggiunto alla fine del capitolo, con una discussione della trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico e una revisione del principio di conservazione della quantità di moto. Il docente dovrebbe dare grande importanza a questa parte del capitolo.

Capitolo 16. *Campi elettromagnetici statici* (5 ore)

In questo capitolo vengono introdotti parecchi concetti importanti, ma vi sono due scopi principali che il docente dovrebbe tenere presenti. Uno è di iniziare uno sviluppo della teoria generale del campo elettromagnetico (leggi di Gauss e Ampère) e l'altro di mettere in relazione le proprietà elettromagnetiche della materia con la sua struttura atomica. Argomenti quali i condensatori e i circuiti a corrente continua sono stati considerati meno importanti nel testo, ma maggiori attenzioni vengono date nei problemi alla fine del capitolo.

Capitolo 17. *Campi elettromagnetici dipendenti dal tempo* (4 ore)

La formulazione delle equazioni di Maxwell è il tema principale di questo capitolo. L'argomento relativo ai circuiti in corrente alternata viene trattato solo rapidamente nel testo, sebbene vi sia un buon numero di esempi risolti nel testo e problemi alla fine del capitolo per aiutare lo studente a raggiungere una qualche pratica nella loro trattazione. È importante per lo studente rendersi conto che le equazioni di Maxwell forniscono una descrizione concisa del campo elettromagnetico e che esse descrivono la stretta relazione tra le costituenti $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ di questo campo.

PARTE 3. ONDE

La parte 1ª ha dato allo studente una descrizione "particellare" dei fenomeni naturali. Ora, nella parte 3ª, presentiamo la descrizione complementare "ondulatoria" dei fenomeni naturali, basata sul concetto di campo, già introdotto nella parte 2ª. Le idee di solito discusse sotto i titoli di acustica e ottica sono qui considerate in una forma unificata.

Capitolo 18. *Propagazione per onde* (5 ore)

Questo capitolo considera il movimento di onde in generale, determinando in ciascun caso le sue proprietà specifiche dalle equazioni del campo che descrivono un particolare stato fisico, cosicchè non vi è necessità di usare un modello meccanico di molecole che si muovono su e giù. Due sono le idee fondamentali: una è conoscere l'equazione dell'onda, l'altra è rendersi conto che un'onda trasporta energia e quantità di moto.

Capitolo 19. *Onde elettromagnetiche* (5 ore)

Qui presentiamo le onde elettromagnetiche come previsto dalle equazioni di Maxwell e quindi lo studente deve conoscere a fondo i paragrafi 19.2 e 19.3. Questo capitolo considera anche

Chapter 14. *Electric Interaction* (4 hours)

This chapter concentrates on the dynamics of a particle subject to the Coulomb interaction, and considers the electrical nature of matter. Section 14.12 (which treats higher electric multipoles) may be omitted.

Chapter 15. *Magnetic Interaction* (4 hours)

The first part of this chapter introduces, in a dynamical way, the concept of a magnetic field, and discusses the motion of a charged particle in a magnetic field. Next the magnetic fields of currents with various geometries are discussed. The climax is reached at the end of the chapter, with a discussion of the Lorentz transformation of the electromagnetic field and a revision of the principle of conservation of momentum. The instructor should lay great stress on this part of the chapter.

Chapter 16. *Static Electromagnetic Fields* (5 hours)

Several important concepts are introduced in this chapter, but there are two principal goals which the instructor should keep in mind. One is to begin a development of the general theory of the electromagnetic field (Gauss' and Ampère's laws) and the other is to relate the electromagnetic properties of matter in bulk to its atomic structure. Subjects such as capacitors and dc circuits have been relegated to a secondary status in the text, but are given more attention in the problems at the end of the chapter.

Chapter 17. *Time-Dependent Electromagnetic Fields* (4 hours)

The formulation of Maxwell's equations is the main theme of this chapter. The subject of ac circuits is discussed only cursorily in the text, although there are a good many worked-out examples in the text and problems at the end of the chapter to assist the student in gaining some skill in manipulating them. It is important for the student to realize that the Maxwell equations provide a compact description of the electromagnetic field and that they illustrate the intimate relationship between the $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ parts of this field.

PART 3. WAVES

Part 1 gave the student a "particulate" description of natural phenomena. Now, in Part 3, we present the complementary "wave" description of natural phenomena, based on the concept of field, already introduced in Part 2. Ideas usually discussed under the headings of acoustics and optics are here considered in an integrated form.

Chapter 18. *Wave Motion* (5 hours)

This chapter considers wave motion in general, determining in each case its specific properties from the field equations that describe a particular physical situation, so that there is no need to use a mechanical picture of molecules moving up and down. Two ideas are fundamental: One is to understand the wave equation; the other is to realize that a wave carries both energy and momentum.

Chapter 19. *Electromagnetic Waves* (5 hours)

Here we present electromagnetic waves as predicted by Maxwell's equations, and hence the student must understand Sections 19.2 and 19.3 thoroughly. This chapter also con-

Capitolo 14. *Interazione di tipo elettrico* (4 ore)

Questo capitolo si concentra sulla dinamica di una particella soggetta a interazione coulombiana, e considera la natura elettrica della materia. Il paragrafo 14.12 (che tratta multipoli elettrici) può essere tralasciato.

Capitolo 15. *Interazioni magnetiche* (4 ore)

La prima parte di questo capitolo introduce, in un modo dinamico, il concetto di campo magnetico, e studia il movimento di una particella carica in un campo magnetico. In seguito vengono discussi i campi magnetici di correnti con varie disposizioni geometriche. Il punto saliente è raggiunto alla fine del capitolo, con una discussione della trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico e una revisione del principio di conservazione della quantità di moto. Il docente dovrebbe dare grande importanza a questa parte del capitolo.

Capitolo 16. *Campi elettromagnetici statici* (5 ore)

In questo capitolo vengono introdotti parecchi concetti importanti, ma vi sono due scopi principali che il docente dovrebbe tenere presenti. Uno è di iniziare uno sviluppo della teoria generale del campo elettromagnetico (leggi di Gauss e Ampère) e l'altro di mettere in relazione le proprietà elettromagnetiche della materia con la sua struttura atomica. Argomenti quali i condensatori e i circuiti a corrente continua sono stati considerati meno importanti nel testo, ma maggiori attenzioni vengono date nei problemi alla fine del capitolo.

Capitolo 17. *Campi elettromagnetici dipendenti dal tempo* (4 ore)

La formulazione delle equazioni di Maxwell è il tema principale di questo capitolo. L'argomento relativo ai circuiti in corrente alternata viene trattato solo rapidamente nel testo, sebbene vi sia un buon numero di esempi risolti nel testo e problemi alla fine del capitolo per aiutare lo studente a raggiungere una qualche pratica nella loro trattazione. È importante per lo studente rendersi conto che le equazioni di Maxwell forniscono una descrizione concisa del campo elettromagnetico e che esse descrivono la stretta relazione tra le costituenti $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ di questo campo.

PARTE 3. ONDE

La parte 1ª ha dato allo studente una descrizione "particellare" dei fenomeni naturali. Ora, nella parte 3ª, presentiamo la descrizione complementare "ondulatoria" dei fenomeni naturali, basata sul concetto di campo, già introdotto nella parte 2ª. Le idee di solito discusse sotto i titoli di acustica e ottica sono qui considerate in una forma unificata.

Capitolo 18. *Propagazione per onde* (5 ore)

Questo capitolo considera il movimento di onde in generale, determinando in ciascun caso le sue proprietà specifiche dalle equazioni del campo che descrivono un particolare stato fisico, cosicchè non vi è necessità di usare un modello meccanico di molecole che si muovono su e giù. Due sono le idee fondamentali: una è conoscere l'equazione dell'onda, l'altra è rendersi conto che un'onda trasporta energia e quantità di moto.

Capitolo 19. *Onde elettromagnetiche* (5 ore)

Qui presentiamo le onde elettromagnetiche come previsto dalle equazioni di Maxwell e quindi lo studente deve conoscere a fondo i paragrafi 19.2 e 19.3. Questo capitolo considera anche

Chapter 14. *Electric Interaction* (4 hours)

This chapter concentrates on the dynamics of a particle subject to the Coulomb interaction, and considers the electrical nature of matter. Section 14.12 (which treats higher electric multipoles) may be omitted.

Chapter 15. *Magnetic Interaction* (4 hours)

The first part of this chapter introduces, in a dynamical way, the concept of a magnetic field, and discusses the motion of a charged particle in a magnetic field. Next the magnetic fields of currents with various geometries are discussed. The climax is reached at the end of the chapter, with a discussion of the Lorentz transformation of the electromagnetic field and a revision of the principle of conservation of momentum. The instructor should lay great stress on this part of the chapter.

Chapter 16. *Static Electromagnetic Fields* (5 hours)

Several important concepts are introduced in this chapter, but there are two principal goals which the instructor should keep in mind. One is to begin a development of the general theory of the electromagnetic field (Gauss' and Ampère's laws) and the other is to relate the electromagnetic properties of matter in bulk to its atomic structure. Subjects such as capacitors and dc circuits have been relegated to a secondary status in the text, but are given more attention in the problems at the end of the chapter.

Chapter 17. *Time-Dependent Electromagnetic Fields* (4 hours)

The formulation of Maxwell's equations is the main theme of this chapter. The subject of ac circuits is discussed only cursorily in the text, although there are a good many worked-out examples in the text and problems at the end of the chapter to assist the student in gaining some skill in manipulating them. It is important for the student to realize that the Maxwell equations provide a compact description of the electromagnetic field and that they illustrate the intimate relationship between the $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ parts of this field.

PART 3. WAVES

Part I gave the student a "particulate" description of natural phenomena. Now, in Part 3, we present the complementary "wave" description of natural phenomena, based on the concept of field, already introduced in Part 2. Ideas usually discussed under the headings of acoustics and optics are here considered in an integrated form.

Chapter 18. *Wave Motion* (5 hours)

This chapter considers wave motion in general, determining in each case its specific properties from the field equations that describe a particular physical situation, so that there is no need to use a mechanical picture of molecules moving up and down. Two ideas are fundamental: One is to understand the wave equation; the other is to realize that a wave carries both energy and momentum.

Chapter 19. *Electromagnetic Waves* (5 hours)

Here we present electromagnetic waves as predicted by Maxwell's equations, and hence the student must understand Sections 19.2 and 19.3 thoroughly. This chapter also con-

i meccanismi della radiazione e dell'assorbimento. Inoltre, esso introduce l'importante concetto di fotone come un risultato naturale del fatto che le onde elettromagnetiche trasportano energia e quantità di moto, e che queste proprietà fisiche sono collegate dalla equazione $E = cp$. Sono anche brevemente discusse le transizioni per irraggiamento tra stati stazionari.

Capitolo 20. *Riflessione, rifrazione, polarizzazione* (4 ore)

I testi elementari ricorrono tradizionalmente al principio di Huygens quando essi trattano la riflessione e la rifrazione, anche se il principio che essi effettivamente usano è il teorema di Malus. Questo capitolo è nuovo in quanto esso affronta questa situazione. I paragrafi dal 20.8 al 20.13 possono essere omessi senza perdita di continuità.

Capitolo 21. *Geometria della propagazione per onde* (3 ore)

Questo capitolo, che in un certo senso è realmente un capitolo sull'ottica geometrica, può essere omesso interamente. In ogni caso, il docente dovrebbe mettere in rilievo il fatto che l'argomento di questo capitolo si applica non solo alle onde luminose, ma alle onde in generale. La convenzione sui segni adottata è la stessa di quella che appare nella "*Optics*" di Born e Wolf, Pergamon Press, 1965.

Capitolo 22. *Interferenza* (3 ore)

In questo capitolo viene usato sistematicamente il metodo del vettore rotante. Per lo studente può essere utile rileggere i paragrafi 12.7, 12.8, e 12.9 del Volume I. Il concetto di guida d'onda dato qui è così importante che esso non dovrebbe venire omesso.

Capitolo 23. *Diffrazione* (3 ore)

Questo capitolo si basa moltissimo sul precedente, e quindi il docente dovrebbe considerarli insieme. In questo capitolo, come nel precedente, noi abbiamo cercato di separare le derivazioni algebriche dal resto dell'argomento, cosicchè, esse possono, se il docente lo desidera, venire omesse.

Capitolo 24. *Fenomeni di trasporto* (3 ore)

L'importanza dei fenomeni di trasporto è ben riconosciuta poichè questi fenomeni trovano larga applicazione nella fisica, nella chimica, nella biologia, e nell'ingegneria. Questo capitolo costituisce una breve e coordinata introduzione a questi fenomeni e dà anche allo studente l'idea di altri tipi di propagazione di campo. Se il docente è incalzato dal tempo, egli può considerare questo capitolo soltanto come una lettura da assegnare, e tralasciare gli esempi e i problemi.

Questo è un punto conveniente in cui terminare il secondo semestre. Ma ora lo studente dovrebbe avere una solida conoscenza della fisica non quantistica, ed inoltre i concetti di fotone e di quantizzazione dell'energia e del momento della quantità di moto dovrebbero essere saldi nella sua mente. Il terzo semestre sarà dedicato alla fisica quantistica e statistica, che sarà presentata come un raffinamento delle idee fisiche a livello molto piccolo (microscopico) e a livello molto grande (macroscopico).

L'appendice matematica alla fine del libro fornisce un rapido riferimento alle formule più ampiamente usate nel testo, così come alcuni dati utili. Sono state aggiunte per comodità alcune formule relative all trasformazione di Lorentz. Esse sono ricavate nel Volume I.

siders the mechanisms of radiation and absorption. In addition, it introduces the important concept of the photon as a natural result of the fact that electromagnetic waves carry energy and momentum, and that these physical properties are related by the equation $E = cp$. Radiative transitions between stationary states are also briefly discussed.

Chapter 20. *Reflection, Refraction, Polarization* (4 hours)

Elementary texts traditionally invoke Huygens' principle when they are discussing reflection and refraction, although the principle they actually use is Malus' theorem. This chapter is novel in that it faces this fact. Sections 20.8 through 20.13 may be omitted without loss of continuity.

Chapter 21. *Wave Geometry* (3 hours)

This chapter, which in a sense is really a chapter on geometrical optics, may be omitted entirely. In any case, the instructor should emphasize the fact that the material in this chapter applies not just to light waves, but to waves in general. The sign convention adopted is the same as that in *Optics*, by Born and Wolf, Pergamon Press, 1965.

Chapter 22. *Interference* (3 hours)

The rotating-vector method is systematically used in this chapter. The student may find it helpful to reread Sections 12.7, 12.8, and 12.9 in Volume I. The concept of a wave guide given here is so important that it should not be omitted.

Chapter 23. *Diffraction* (3 hours)

This chapter relies heavily on the previous one, and hence the instructor should consider them together. In this chapter, as in the previous one, we have tried to separate the algebraic derivations from the rest of the material, so that they can be omitted if the instructor so desires.

Chapter 24. *Transport Phenomena* (3 hours)

The importance of transport phenomena is well recognized, since these phenomena are of great application in physics, chemistry, biology, and engineering. This chapter constitutes a brief and coordinated introduction to these phenomena, and also gives the student an idea of other types of field propagation. If the instructor is pressed for time, he can handle this chapter as a reading assignment only, and omit the examples and problems.

This is a convenient point at which to end the second semester. By now the student should have a sound understanding of nonquantum physics, and in addition, the ideas of the photon and of the quantization of energy and angular momentum should have been planted in his mind. The third semester will be dedicated to quantum and statistical physics, which will be presented as a refinement of the physical ideas at the very small (or microscopic) level and at the very large (or macroscopic) level.

The mathematical appendix at the end of the book provides a quick reference to the formulas most widely used in the text, as well as some useful data. Some formulas relating to the Lorentz transformation have been added for convenience. They were derived in Volume I.

RINGRAZIAMENTI

Ringraziamo le seguenti persone ed organizzazioni che ci hanno gentilmente permesso di pubblicare materiale illustrativo di loro proprietà: Brookhaven National Laboratory (Figura 15—6); General Electric Company (Figura 17—5b); Professor Harvey Fletcher (Figura 18—23); Educational Services, Incorporated (Figura 18—37a); U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Silver Spring, Md. (Figura 18—37b); *Vibration and Sound*, di Philip M. Morse, McGraw-Hill Book Co., 1948 (Figura 22—26); *Ripple Tank Studies of Wave Motion*, col permesso di W. Llowarch, The Clarendon Press, Oxford, Inghilterra (Figura 23—2); *Principles of Optics*, di Hardy e Pervin, McGraw-Hill Book Co., 1932 (Figura 23—12 e 23—14b); e il Professor B. E. Warren, del M.I.T. (Figura 23—42). Particolari ringraziamenti sono dovuti alla Educational Services, Incorporated, ed al Physical Science Study Committee, dal cui volume *PSSC Physics*, D. C. Heath e Co., 1960, abbiamo tratto le figure seguenti: 9—13a, 18—22, 18—22b, 20—6b, 20—10b, 20—11b, 20—16d ed e, 22—1 e 22—15.

F. De Michelis, M. Bertolaccini e C. Bussolati desiderano ringraziare i colleghi L. Braicovich, S. Cova, M. Rasetti e M. Vadacchino per la valida collaborazione ricevuta nella traduzione dell'opera.

ACKNOWLEDGMENTS

We wish to thank the following persons and organizations for their kindness in permitting us to publish illustrative material borrowed from them: Brookhaven National Laboratory (Figure 15–6); General Electric Company (Figure 17–5b); Professor Harvey Fletcher (Figure 18–23); Educational Services, Incorporated (Figure 18–37a); U. S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Silver Spring, Md. (Figure 18–37b); *Vibration and Sound*, by Philip M. Morse, McGraw-Hill Book Co., 1948 (Figure 22–26); *Ripple Tank Studies of Wave Motion*, by permission of W. Llowarch, The Clarendon Press, Oxford, England (Figure 23–2); *Principles of Optics*, by Hardy and Perrin, McGraw-Hill Book Co., 1932 (Figures 23–12 and 23–14b); and Professor B. E. Warren, of M.I.T. (Figure 23–42). Especial thanks are due to Educational Services, Incorporated, and the Physical Science Study Committee, from whose book *PSSC Physics*, D. C. Heath and Co., 1960, we have borrowed the following figures: 9–13a, 18–22, 18–28b, 20–6b, 20–10b, 20–11b, 20–16 d and e, 22–1, and 22–15.

NOTA PER LO STUDENTE

Questo è un libro riguardante i fondamenti della fisica scritto per gli studenti di scienze o ingegneria. I concetti e le idee che imparerete da questo libro diventeranno, con tutta probabilità, parte della vostra vita professionale e del vostro modo di pensare. Meglio lo conoscerete, più facili saranno i corsi successivi.

In questo corso, dovete essere preparati ad affrontare numerose questioni complicate. Impadronirsi delle leggi e delle tecniche della fisica, può essere, a volte, un processo lento e gravoso. Prima di penetrare in quelle regioni della fisica che fanno appello alla vostra immaginazione, dovete conoscerne a fondo altre, meno eccitanti, ma molto fondamentali, senza le quali non potete usare o capire correttamente la fisica.

Dovreste porvi due obiettivi principali prima di intraprendere questo corso. Primo: famigliarizzare profondamente con quelle poche leggi fondamentali e quei principii che costituiscono il noccio lo della fisica. Secondo: sviluppare la capacità ad usare queste idee e applicarle a casi concreti; in altre parole, a pensare e ad agire come un fisico. Potete raggiungere il primo obiettivo principalmente leggendo e rileggendo quei paragrafi a carattere più grande nel testo. Per aiutarvi a conseguire il secondo obiettivo, vi sono in tutto il testo molti esempi risolti, stampati con caratteri più piccoli, e alla fine di ciascun capitolo vi sono i problemi da fare a casa. Raccomandiamo vivamente di leggere prima il testo principale ed una volta che lo conoscerete, di procedere con quegli esempi e problemi che saranno assegnati dal docente. Gli esempi illustrano una applicazione della teoria a casi concreti, oppure estendono la teoria considerando nuovi aspetti del problema discusso. Talvolta, essi forniscono qualche giustificazione della teoria.

I problemi alla fine di ciascun capitolo variano nel grado di difficoltà. Essi vanno da quelli molto semplici fino a quelli complicati. In generale, è una buona idea provare a risolvere un problema prima in una forma simbolica o algebrica, e inserire i valori numerici alla fine. Se non potete risolvere un problema assegnato in un tempo ragionevole, mettete da parte il problema e fate un secondo tentativo più tardi. Per quei pochi problemi per i quali non arrivate a una soluzione, dovreste chiedere aiuto. Una fonte di aiuto che vi insegnerà il *metodo* di risolvere i problemi è il libro "*How to Solve It*" (seconda edizione), di G. Polya (Garden City, N.Y.: Doubleday, 1957).

La fisica è una scienza quantitativa, che ha bisogno della matematica per esprimere le sue idee. Tutta la matematica usata in questo libro può trovarsi in un testo classico di analisi, e dovreste consultare un tale testo ogni volta che non conoscete una derivazione matematica. Ma in nessun modo dovreste sentirvi scoragiati per una difficoltà matematica; nel caso di un intoppo matematico, consultate il vostro docente o uno studente più avanti di voi nei corsi. Per il fisico e l'ingegnere, la matematica è uno strumento ed è seconda in importanza

NOTE TO THE STUDENT

This is a book about the fundamentals of physics written for students majoring in science or engineering. The concepts and ideas you learn from it will, in all probability, become part of your professional life and your way of thinking. The better you understand them, the easier the rest of your undergraduate and graduate education will be.

In this course, you must be prepared to tackle numerous difficult puzzles. To grasp the laws and techniques of physics may be, at times, a slow and painful process. Before you enter those regions of physics that appeal to your imagination, you must master other, less appealing, but very fundamental ones, without which you cannot use or understand physics properly.

You should keep two main objectives before you while taking this course. First: become thoroughly familiar with the handful of basic laws and principles that constitute the core of physics. Second: develop the ability to manipulate these ideas and apply them to concrete situations; in other words, to think and act as a physicist. You can achieve the first objective mainly by reading and re-reading those sections in large print in the text. To help you attain the second objective, there are many worked-out examples, in small print, throughout the text, and there are the homework problems at the end of each chapter. We strongly recommend that you first read the main text and, once you are acquainted with it, proceed with those examples and problems assigned by the instructor. The examples either illustrate an application of the theory to a concrete situation, or extend the theory by considering new aspects of the problem discussed. Sometimes they provide some justification for the theory.

The problems at the end of each chapter vary in degree of difficulty. They range from the very simple to the complex. In general, it is a good idea to try to solve a problem in a symbolic or algebraic form first, and insert numerical values only at the end. If you cannot solve an assigned problem in a reasonable time, lay the problem aside and make a second attempt later. For those few problems that refuse to yield a solution, you should seek help. One source of self-help that will teach you the *method* of problem-solving is the book *How to Solve It* (second edition), by G. Polya (Garden City, N. Y.: Doubleday, 1957).

Physics is a quantitative science, which requires mathematics for the expression of its ideas. All the mathematics used in this book can be found in a standard calculus text, and you should consult such a text whenever you do not understand a mathematical derivation. But by no means should you feel discouraged by a mathematical difficulty; in case of mathematical trouble, consult your instructor or a more advanced student. For the physical scientist and engineer, mathematics is a tool, and is second in importance

alla comprensione delle idee fisiche. Per vostro comodo, alcune delle più utili formule matematiche sono elencate in un'appendice alla fine del libro.

Tutti i calcoli fisici devono essere eseguiti usando un sistema di unità di misura coerente. In questo libro è usato il sistema MKSC. Poichè esso differisce dal sistema anglosassone, in un primo tempo potete trovarlo non famigliare. Tuttavia, si richiede un piccolissimo sforzo per venirne a conoscenza. Inoltre, questo è il sistema ufficialmente approvato per la ricerca scientifica e usato dal "United States National Bureau of Standards" nelle sue pubblicazioni. Siate estremamente accurati nel controllare la coerenza della unità in tutti i vostri calcoli. Inoltre, è una buona idea usare un regolo all'inizio; la precisione alla terza cifra che anche il più semplice regolo fornisce vi risparmierà molte ore di calcoli. In alcuni casi, tuttavia, un regolo non può fornire la precisione richiesta.

Un elenco selezionato di riferimenti bibliografici è dato alla fine di ogni capitolo. Consultateli il più frequentemente possibile. Alcuni vi aiuteranno ad affrontare l'idea della fisica come una scienza in evoluzione, mentre altri amplieranno il materiale nel testo. In particolare troverete estremamente utile per informazioni sulla evoluzione delle idee nella fisica il libro di Holton e Roller, "*Foundations of Modern Physics*" (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958).

to understanding the physical ideas. For your convenience, some of the most useful mathematical relations are listed in an appendix at the end of the book.

All physical calculations must be carried out using a consistent set of units. In this book the MKSC system is used. Since it differs from the British system, you may find it unfamiliar at first. However, it requires very little effort to become acquainted with it. Also, this is the system officially approved for scientific work and used by the United States National Bureau of Standards in its publications. Be extremely careful to check the consistency of the units in all your calculations. Also, it is a good idea to use a slide rule from the start; the three-place accuracy of even the simplest slide rule will save you many hours of computation. In some instances, however, a slide rule may not provide the required accuracy.

A selected list of references is given at the end of each chapter. Consult them as often as possible. Some will help you to grasp the idea of physics as an evolving science, while others will amplify material in the text. In particular, you will find the book by Holton and Roller, *Foundations of Modern Physics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958) particularly useful for information about the evolution of ideas in physics.

INDICE

PARTE 2 **INTERAZIONI E CAMPI**

Capitolo 14 **Interazioni di tipo elettrico**

Introduzione 438 ☐ La carica elettrica 439 ☐ La legge di Coulomb 440 ☐ Il campo elettrico 442 ☐ Quantizzazione della carica elettrica 449 ☐ Struttura elettrica della materia 451 ☐ Struttura dell'atomo 454 ☐ Il potenziale elettrico 460 ☐ Bilanci energetici nei campi elettrici 464 ☐ La corrente elettrica 470 ☐ Il dipolo elettrico 471 ☐ Multipoli elettrici 478

Capitolo 15 **Interazioni magnetiche**

Introduzione 493 ☐ Forza magnetica su una carica in moto 494 ☐ Moto di una carica in un campo magnetico 497 ☐ Esempi di moto di particelle cariche in un campo magnetico 504 ☐ Forza magnetica su una corrente elettrica 510 ☐ Coppia magnetica su una corrente elettrica 512 ☐ Campo magnetico prodotto da una corrente chiusa 518 ☐ Campo magnetico di una corrente rettilinea 519 ☐ Forza tra correnti 521 ☐ Campo magnetico di una corrente circolare 524 ☐ Campo magnetico di una carica in moto (non relativistico) 529 ☐ Elettromagnetismo e principio di relatività 531 ☐ Il campo elettormagnetico di una carica in moto 535 ☐ Interazione elettromagnetica tra due cariche in moto 539

Capitolo 16 **Campi elettromagnetici statici**

Introduzione 556 ☐ Flusso di un campo vettoriale 556 ☐ Legge di Gauss per il campo elettrico 558 ☐ Legge di Gauss in forma differenziale 563 ☐ Polarizzazione della materia 566 ☐ Spostamento elettrico 570 ☐ Calcolo della suscettibilità elettrica 572 ☐ Capacità elettrica; condensatori 578 ☐ Energia del campo elettrico 581 ☐ Conduttività elettrica; legge di Ohm 585 ☐ Forza elettromotrice 590 ☐

CONTENTS

PART 2 **INTERACTIONS AND FIELDS**

Chapter 14 **Electric Interaction**

Introduction 438 ☐ Electric charge 439 ☐ Coulomb's law 440 ☐ Electric field 442 ☐ The quantization of electric charge 449 ☐ Electrical structure of matter 451 ☐ Atomic structure 454 ☐ Electric potential 460 ☐ Energy relations in an electric field 464 ☐ Electric current 470 ☐ Electric dipole 471 ☐ Higher electric multipoles 478

Chapter 15 **Magnetic Interaction**

Introduction 493 ☐ Magnetic force on a moving charge 494 ☐ Motion of a charge in a magnetic field 497 ☐ Examples of motion of charged particles in a magnetic field 504 ☐ Magnetic force on an electric current 510 ☐ Magnetic torque on an electric current 512 ☐ Magnetic field produced by a closed current 518 ☐ Magnetic field of a rectilinear current 519 ☐ Forces between currents 521 ☐ Magnetic field of a circular current 524 ☐ Magnetic field of a moving charge (nonrelativistic) 529 ☐ Electromagnetism and the principle of relativity 531 ☐ The electromagnetic field of a moving charge 535 ☐ Electromagnetic interaction between two moving charges 539

Chapter 16 **Static Electromagnetic Fields**

Introduction 556 ☐ Flux of a vector field 556 ☐ Gauss' law for the electric field 558 ☐ Gauss' law in differential form 563 ☐ Polarization of matter 566 ☐ Electric displacement 570 ☐ Calculation of electric susceptibility 572 ☐ Electric capacity; capacitors 578 ☐ Energy of the electric field 581 ☐ Electrical conductivity; Ohm's law 585 ☐ Electromotive force 590 ☐

Legge di Ampère per il campo magnetico 594 □ Legge di Ampère in forma differenziale 599 □ Flusso magnetico 600 □ Magnetizzazione della materia 601 □ Il campo magnetizzante 603 □ Calcolo della suscettibilità magnetica 605 □ Riassunto delle leggi per campi statici 610

Capitolo 17 Campi elettromagnetici dipendenti dal tempo

Introduzione 622 □ La legge di Faraday-Henry 622 □ Il betatrone 625 □ L'induzione elettromagnetica dovuta al moto relativo di un conduttore e di un campo magnetico 628 □ L'induzione elettromagnetica ed il principio di relatività 630 □ Potenziale elettrico e induzione elettromagnetica 631 □ La legge di Faraday-Henry in forma differenziale 632 □ L'autoinduzione 633 □ L'energia del campo elettromagnetico 637 □ Oscillazioni elettriche 640 □ Circuiti accoppiati 646 □ Il principio di conservazione della carica 649 □ La legge di Ampère-Maxwell 651 □ La legge di Ampère-Maxwell in forma differenziale 654 □ Le equazioni di Maxwell 655

PARTE 3 ONDE

Capitolo 18 Propagazione per onde

Introduzione 670 □ Descrizione matematica della propagazione 671 □ Analisi di Fourier del moto d'onda 675 □ Equazione differenziale del moto di un'onda 677 □ Onde elastiche in una sbarra solida 679 □ Onde di pressione in una colonna di gas 683 □ Onde trasversali in una corda 687 □ Onde di superficie in un liquido 691 □ Che cosa si propaga in un moto d'onda? 694 □ Onde in due o tre dimensioni 697 □ Onde sferiche in un fluido 702 □ Velocità di gruppo 704 □ Effetto Doppler 706 □ Suono; acustica 709

Capitolo 19 Onde elettromagnetiche

Introduzione 718 □ Onde elettromagnetiche piane 718 □ Energia e quantità di moto di un'onda elettromagnetica 722 □ Radiazione da un dipolo elettrico oscillante 726 □ Radiazione da un dipolo magnetico oscillante 731 □ Radiazione da multipoli oscillanti di ordine superiore 734 □ Radiazione da una carica accelerata 735 □ Assorbimento della radiazione elettromagnetica 742 □ Diffusione di onde elettromagnetiche da elettroni legati 743 □ Diffusione della radiazione elettromagnetica da parte di un elettrone libero: effetto Compton 745 □ Fotoni 749 □ Ancora sui fotoni: effetto fotoelettrico 752 □ Propagazione delle onde elettromagnetiche nella materia; dispersione 755 □ Effetto Doppler per onde elettromagnetiche 758 □ Lo spettro della radiazione elettromagnetica 763

Capitolo 20 Riflessione, rifrazione, polarizzazione

Introduzione 774 □ Principio di Huygens 774 □ Teorema di Malus 776 □ Riflessione e rifrazione di onde piane 778 □ Riflessione

Ampère's law for the magnetic field 594 □ Ampère's law in differential form 599 □ Magnetic flux 600 □ Magnetization of matter 601 □ The magnetizing field 603 □ Calculation of magnetic susceptibility 605 □ Summary of the laws for static fields 610

Chapter 17 Time-Dependent Electromagnetic Fields

Introduction 622 □ The Faraday-Henry law 622 □ The betatron 625 □ Electromagnetic induction due to relative motion of conductor and magnetic field 628 □ Electromagnetic induction and the principle of relativity 630 □ Electric potential and electromagnetic induction 631 □ Faraday-Henry law in differential form 632 □ Self induction 633 □ Energy of the magnetic field 637 □ Electrical oscillations 640 □ Coupled circuits 646 □ The principle of conservation of charge 649 □ The Ampère-Maxwell law 651 □ The Ampère-Maxwell law in differential form 654 □ Maxwell's equations 655

PART 3 WAVES

Chapter 18 Wave Motion

Introduction 670 □ Mathematical description of propagation 671 □ Fourier analysis of wave motion 675 □ Differential equation of wave motion 677 □ Elastic waves in a solid rod 679 □ Pressure waves in a gas column 683 □ Transverse waves in a string 687 □ Surface waves in a liquid 691 □ What propagates in a wave motion? 694 □ Waves in two and three dimensions 697 □ Spherical waves in a fluid 702 □ Group velocity 704 □ The Doppler effect 706 □ Sound; acoustics 709

Chapter 19 Electromagnetic Waves

Introduction 718 □ Plane electromagnetic waves 718 □ Energy and momentum of an electromagnetic wave 722 □ Radiation from an oscillating electric dipole 726 □ Radiation from an oscillating magnetic dipole 731 □ Radiation from higher-order oscillating multipoles 734 □ Radiation from an accelerated charge 735 □ Absorption of electromagnetic radiation 742 □ Scattering of electromagnetic waves by bound electrons 743 □ Scattering of electromagnetic radiation by a free electron; Compton effect 745 □ Photons 749 □ More about photons; the photoelectric effect 752 □ Propagation of electromagnetic waves in matter; dispersion 755 □ Doppler effect in electromagnetic waves 758 □ The spectrum of electromagnetic radiation 763

Chapter 20 Reflection, Refraction, Polarization

Introduction 774 □ Huygens' principle 774 □ Malus' theorem 776 □ Reflection and refraction of plane waves 778 □ Reflection

e rifrazione di onde sferiche 782 □ Ancora sulle leggi della riflessione e rifrazione 784 □ Riflessione e rifrazione di onde elettromagnetiche 789 □ Propagazione di onde elettromagnetiche in un mezzo anisotropo 792 □ Dicroismo 798 □ Doppia rifrazione 799 □ Attività ottica 804 □ Riflessione e rifrazione su superficie metalliche 808 □ Propagazione in un mezzo non omogeneo 809

Capitolo 21 Geometria della propagazione per onde

Introduzione 817 □ Riflessione su una superficie sferica 818 □ Rifrazione su una superficie sferica 824 □ Lenti 828 □ Strumenti ottici 834 □ Il prisma 838 □ Dispersione 839 □ Aberrazione cromatica 842 □ Principio di Fermat del tempo stazionario 846

Capitolo 22 Interferenza

Introduzione 857 □ Interferenza fra onde prodotte da due sorgenti coerenti 857 □ Interferenza fra più sorgenti coerenti 863 □ Onde stazionarie in una dimensione 869 □ Onde stazionarie ed equazione dell'onda 871 □ Onde elettromagnetiche stazionarie 877 □ Onde stazionarie in due dimensioni 880 □ Onde stazionarie in tre dimensioni; cavità risonanti 884 □ Guide d'onda 887

Capitolo 23 Diffrazione

Introduzione 901 □ Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer prodotti da una fenditura rettangolare 902 □ Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer prodotti da una apertura circolare 907 □ Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer prodotti da due fenditure parallele, uguali 909 □ Reticoli di diffrazione 911 □ Fenomeni di diffrazione di Fresnel 916 □ Diffusione 922 □ Diffusione di raggi x dai cristalli 922

Capitolo 24 Fenomeni di trasporto

Introduzione 934 □ Diffusione molecolare; legge di Fick 934 □ Conduzione termica; legge di Fourier 941 □ Trasporto con produzione e assorbimento 948 □ Viscosità 905 □ Cammino libero medio, frequenza di collisione, e sezione d'urto 954 □ Teoria molecolare dei fenomeni di trasporto 958 □ Conclusione 960

Appendice: Relazioni matematiche e tabelle A–3. Risposte ai problemi di numero dispari A–13. Indice analitico A–22

Tabella A–1 Tabella periodica degli elementi. Tabella A–2 Costanti fondamentali. Tabella A–3 Unità e simboli. Tabella A–4 Fattori di conversione

and refraction of spherical waves 782 □ More about the laws of reflection and refraction 784 □ Reflection and refraction of electromagnetic waves 789 □ Propagation of electromagnetic waves in an anisotropic medium 792 □ Dichroism 798 □ Double refraction 799 □ Optical activity 804 □ Reflection and refraction at metallic surfaces 808 □ Propagation in a nonhomogeneous medium 809

Chapter 21 Wave Geometry

Introduction 817 □ Reflection at a spherical surface 818 □ Refraction at a spherical surface 824 □ Lenses 828 □ Optical instruments 834 □ The prism 838 □ Dispersion 839 □ Chromatic aberration 842 □ Fermat's principle of stationary time 846

Chapter 22 Interference

Introduction 857 □ Interference of waves produced by two synchronous sources 857 □ Interference of several synchronous sources 863 □ Standing waves in one dimension 869 □ Standing waves and the wave equation 871 □ Standing electromagnetic waves 877 □ Standing waves in two dimensions 880 □ Standing waves in three dimensions; resonating cavities 884 □ Wave guides 887

Chapter 23 Diffraction

Introduction 901 □ Fraunhofer diffraction by a rectangular slit 902 □ Fraunhofer diffraction by a circular aperture 907 □ Fraunhofer diffraction by two equal, parallel slits 909 □ Diffraction gratings 911 □ Fresnel diffraction 916 □ Scattering 922 □ X-ray scattering by crystals 922

Chapter 24 Transport Phenomena

Introduction 934 □ Molecular diffusion; Fick's law 934 □ Thermal conduction; Fourier's law 941 □ Transport with production and absorption 948 □ Viscosity 950 □ Mean free path, collision frequency, and collision cross section 954 □ Molecular theory of transport phenomena 958 □ Conclusion 960

Appendix: Mathematical Relations and Tables A–3. Answers to Odd-Numbered Probelms A–13. Index A–22

Table A–1 Periodic Table of the Elements. Table A–2 Fundamental Constants. Table A–3 Units and Symbols. Table A–4 Conversion Factors

PARTE 2
INTERAZIONI E CAMPI

B. Elettromagnetismo

PART 2
INTERACTIONS AND FIELDS

B. Electromagnetism

Dopo aver appreso le leggi fondamentali che regolano il moto dei corpi, il passo successivo è quello di studiare le interazioni che provocano tali moti. Esistono parecchi tipi di interazioni. Una è l'*interazione gravitazionale*, che si manifesta nel moto dei pianeti e dei corpi materiali. La gravitazione, pur essendo la più debole tra le interazioni conosciute, è la prima interazione studiata accuratamente, poichè l'astronomia costituì una dei primi interessi dell'uomo, e poichè la gravitazione è responsabile di molti fenomeni che influiscono sulla nostra esistenza. Un'altra è l'*interazione elettromagnetica*, l'interazione meglio conosciuta e forse più importante dal punto di vista della vita quotidiana. Molti dei fenomeni che osserviamo svolgersi intorno a noi, ivi compresi i fenomeni chimici e biologici, risultano da interazioni elettromagnetiche tra atomi e molecole. Un terzo tipo di interazione è costituito dalla *interazione forte*, o *nucleare*, che è responsabile dei legami che tengono insieme protoni e neutroni (i cosiddetti nucleoni) nei nuclei atomici e di altri fenomeni collegati. Nonostante le assidue ed estese ricerche di cui è stata oggetto, la nostra conoscenza di questo tipo di interazione è ancora incompleta. Un quarto tipo é l'*interazione debole*, responsabile di taluni processi che hanno luogo tra particelle fondamentali, quale il decadimento beta. Il nostro grado di conoscenza è ancora assai incerto. L'intensità relativa di tali interazioni è, prendendo come riferimento l'intensità dell'interazione forte, posta pari ad 1; elettromagnetica $\sim 10^{-2}$, debole $\sim 10^{-5}$, gravitazionale $\sim 10^{-38}$. Uno dei problemi della fisica tuttora aperti è perchè sembra esistano solo quattro interazioni e perchè esiste una così grande differenza tra le relative intensità.

È interessante osservare come si espresse Isacco Newton circa 200 anni fa a proposito delle interazioni:

Non hanno le minuscole Particelle che costituiscono i Corpi certi Poteri, o Forze, con le quali esse agiscono . . . le une sulle altre per produrre gran Parte dei Fenomeni Naturali? Poichè è ben noto che i Corpi interagiscono mediante le Attrazioni di Gravità, Magnetismo, Elettricità, . . . e ciò non rende improbabile che esistano Poteri più intensamente attrattivi di questi . . . . Come queste attrazioni possono prodursi non sto qui a considerare. . . . Le Attrazioni di Gravità, Magnetismo, Elettricità, sono efficaci sino a distanze sensibili, . . . e possono esisterne anche altre efficaci a distanza così piccole che sinora sfuggono alla nostra osservazione; . . . . (*Opticks*, Libro III, Questione 31)

Per descrivere queste interazioni, introduciamo il concetto di *campo*. Per *campo* intendiamo una proprietà fisica che interessa una porzione di spazio e descritta da una funzione del tempo e della posizione. Nel caso di ciascuna interazione noi ipotizziamo che una particella produca intorno a sé un campo corrispondente. Il campo a sua volta agisce su una seconda particella per produrre l'interazione richiesta. La seconda particella genera a sua volta un proprio campo, che agisce sulla prima particella e ciò dà luogo all'interazione mutua.

Sebbene le interazioni possano essere descritte mediante campi, non tutti i campi corrispondono ad interazioni, il che è implicito nella definizione di campo. Ad esempio, un meteorologo può esprimere la pressione atmosferica e la temperatura in funzione della latitudine e della longitudine sulla superficie terrestre e della quota. In tal caso, abbiamo due campi scalari: il campo delle pressioni ed il campo delle temperature. In un fluido in movimento, la velocità del fluido in ciascun punto costituisce un campo vettoriale. Il concetto di campo è pertanto di grande e generale utilità in fisica.

L'interazione gravitazionale ed il campo gravitazionale sono stati discussi nel Capitolo 13 del Volume I. Nei capitoli di questo volume, compresi tra il 14 ed il 17, prenderemo in esame le interazioni elettromagnetiche. Parleremo delle restanti interazioni nel Volume III.

Once we have grasped the general rules governing motion, the next step is to investigate the interactions responsible for such motions. There are several kinds of interactions. One is *gravitational interaction*, which manifests itself in planetary motion and in the motion of matter in bulk. Gravitation, in spite of the fact that it is the weakest of all known interactions, is the first interaction to be carefully studied, because of man's early interest in astronomy and because gravitation is responsible for many phenomena that affect our lives directly. Another is *electromagnetic interaction*, the best understood and perhaps the most important interaction from the point of view of daily life. Most of the phenomena we observe around us, including chemical and biological processes, are the result of electromagnetic interactions between atoms and molecules. A third kind is the *strong* or *nuclear interaction*, which is responsible for holding protons and neutrons (known as nucleons) within the atomic nucleus, and other related phenomena. In spite of intensive research our knowledge of this interaction is still incomplete. A fourth kind is the *weak interaction*, responsible for certain processes among the fundamental particles, such as beta decay. Our understanding of this interaction also is still very meager. The relative strength of the above interactions is: strong, taken as 1; electromagnetic $\sim 10^{-2}$; weak $\sim 10^{-5}$; gravitational $\sim 10^{-38}$. One of the as-yet-unsolved problems of physics is why there appear to be only four interactions, and why there is such a wide difference in their strength.

It is interesting to see what Isaac Newton, 200 years ago, said about interactions:

Have not the small Particles of Bodies certain Powers, or Forces, by which they act . . . upon one another for producing a great Part of the Phaenomena of Nature? For it's well known, that Bodies act one upon another by the Attractions of Gravity, Magnetism, and Electricity; . . . and make it not improbable but that there may be more attractive Powers than these. . . . How these attractions may be perform'd, I do not here consider. . . . The Attractions of Gravity, Magnetism, and Electricity, reach to very sensible distances, . . . and there may be others which reach to so small distances as hitherto escape observation; . . . . (*Opticks*, Book III, Query 31)

To describe these interactions, we introduce the concept of *field*. By *field* we mean a physical property extended over a region of space and described by a function of position and time. For each interaction we assume that a particle produces around it a corresponding field. This field in turn acts on a second particle to produce the required interaction. The second particle produces its own field, which acts on the first particle, resulting in a mutual interaction.

Even though interactions can be described by means of fields, all fields do not necessarily correspond to interactions, a fact which is implicit in the definition of field. For example, a meteorologist may express the atmospheric pressure and temperature as a function of the latitude and longitude on the earth's surface and the height above it. We then have two scalar fields: the pressure field and the temperature field. In a fluid in motion, the velocity of the fluid at each point constitutes a vector field. The concept of field is thus of great and general usefulness in physics.

Gravitational interaction and the gravitational field were discussed in Chapter 13 of Volume I. In Chapters 14 through 17, which appear in this volume, we shall consider electromagnetic interactions. We shall talk about the remaining interactions in Volume III.

14
INTERAZIONI DI TIPO ELETTRICO

14.1 Introduzione
14.2 La carica elettrica
14.3 La legge di Coulomb
14.4 Il campo elettrico
14.5 Quantizzazione della carica elettrica
14.6 Struttura elettrica della materia
14.7 Struttura dell'atomo
14.8 Il potenziale elettrico
14.9 Bilanci energetici nei campi elettrici
14.10 La corrente elettrica
14.11 Il dipolo elettrico
14.12 Multipoli elettrici

14
ELECTRIC INTERACTION

14.1 Introduction
14.2 Electric Charge
14.3 Coulomb's Law
14.4 Electric Field
14.5 The Quantization of Electric Charge
14.6 Electrical Structure of Matter
14.7 Atomic Structure
14.8 Electric Potential
14.9 Energy Relations in an Electric Field
14.10 Electric Current
14.11 Electric Dipole
14.12 Higher Electric Multipoles

14.1 Introduzione

Prendiamo in esame un esperimento molto semplice: dopo esserci pettinati i capelli in una giornata molto secca, avviciniamo il pettine a dei piccoli pezzi di carta. Osserviamo che i pezzi di carta vengono immediatamente attratti dal pettine. Fenomeni del tutto analoghi possono essere osservati strofinando una sbarra di vetro con un drappo di seta o una bacchetta di ambra con un pezzo di pelliccia. Noi interpretiamo questi fenomeni dicendo che, a causa dello strofinio, i materiali hanno acquisito una proprietà che chiamiamo *elettricità* (dal vocabolo greco *elektron*, cioè ambra), e che tale proprietà elettrica dà luogo ad una interazione assai più intensa di quella gravitazionale. Tra le interazioni di tipo elettrico e gravitazionale sussistono peraltro alcune differenze fondamentali.

Glass rod = Sbarra di vetro
Amber rod = Sbarra di ambra
Amber = Ambra
Glass = Vetro

Fig. 14—1. Esperimenti con sbarre di vetro e di ambra elettrizzate.

In primo luogo, mentre si osserva un unico tipo di interazione gravitazionale, consistente nell'attrazione universale tra due masse qualsiasi, esistono due tipi di interazioni elettriche. Avviciniamo una sbarra di vetro elettrizzata ad una pallina di sughero appesa ad un filo: la sbarra attrae la pallina. Il medesimo fenomeno può essere osservato con una sbarra di ambra. Se però ora avviciniamo simultaneamente ambedue le sbarre, anziché una attrazione più forte, osserviamo una forza attrattiva più debole; in alcuni casi non osserviamo addirittura più alcuna attrazione (Fig. 14—1). Questi semplici esperimenti indicano che, pur esercitando sia la sbarra di vetro che quella di ambra una azione attrattiva sulla pallina di sughero, le loro azioni sono dovute a processi fisici opposti. Quando sono presenti ambedue le sbarre, le loro azioni opposte producono un effetto complessivo meno intenso o persino nullo. Concludiamo pertanto che esistono due tipi di stati di elettrizzazione: uno simile a quello del vetro e l'altro a quello dell'ambra. Chiameremo il primo stato *positivo* e il secondo *negativo*.

Si immagini ora di toccare due palline di sughero con una sbarra di vetro elettrizzata. Si può ritenere che le due palline si siano elettrizzate positivamente. Si può ora osservare che le due palline, se avvicinate, si respingono (Fig. 14—2a). Il medesimo risultato può essere ottenuto elettrizzando negativamente le due palline mediante una sbarra d'ambra (Fig. 14—2b). Viceversa, se tocchiamo una pallina con la sbarra di vetro, elettrizzandola positivamente, e l'altra con la sbarra d'ambra, elettrizzandola negativamente, si osserva un effetto attrattivo (Fig. 14—2c).

14.1 Introduction

Let us consider a very simple experiment. Suppose that after we comb our hair on a very dry day, we bring the comb close to tiny pieces of paper. We note that they are swiftly attracted by the comb. Similar phenomena occur if we rub a glass rod with a silk cloth or an amber rod with a piece of fur. We may conclude that, as a result of the rubbing, these materials acquire a new property which we may call *electricity* (from the Greek word *elektron* meaning amber), and that this electrical property gives rise to an interaction much stronger than gravitation. There are, however, several fundamental differences between electrical and gravitational interactions.

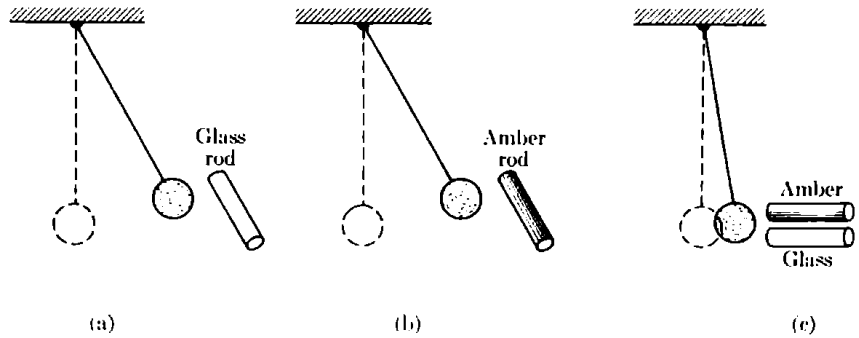


Fig. 14–1. Experiments with electrified glass and amber rods.

In the first place there is only one kind of gravitational interaction, resulting in a universal attraction between any two masses. However, there are two kinds of electrical interactions. Suppose that we place an electrified glass rod near a small cork ball hanging from a string. We see that the rod attracts the ball. If we repeat the experiment with an electrified amber rod, we observe the same attractive effect on the ball. However, if both rods approach the ball simultaneously, instead of a larger attraction we observe a smaller attractive force or even no attraction on the ball at all (Fig. 14–1). These simple experiments indicate that, although both the electrified glass rod and the amber rod attract the cork ball, they do it by opposite physical processes. When both rods are present they counteract each other, producing a smaller or even a nil effect. Therefore we conclude that there are two kinds of electrified states: one glasslike and the other amberlike. We may call the first *positive* and the other *negative*.

Suppose now that we touch two cork balls with an electrified glass rod. We may assume that the two balls also become positively electrified. If we bring the balls together we note that they repel each other (Fig. 14–2a). The same result occurs when we touch the balls with an electrified amber rod, so that they acquire negative electrification (Fig. 14–2b). However, if we touch one with the glass rod and the other with the amber rod, so that one has positive electrification and the other negative, we observe that they attract each other (Fig. 14–2c).

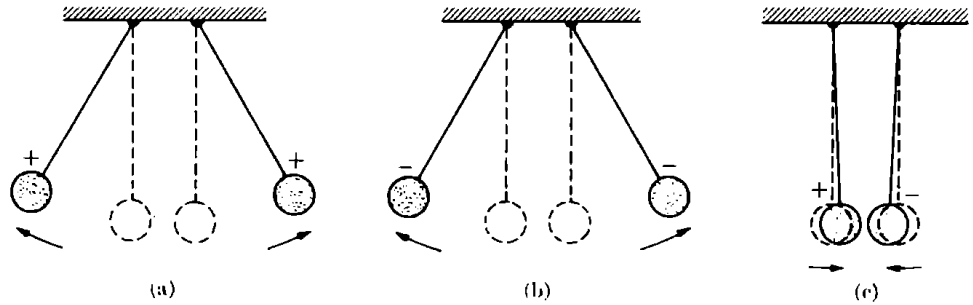


Fig. 14–2. Interazioni elettriche tra cariche dello stesso segno e di segno opposto.

Fig. 14–2. Electric interactions between like and unlike charges.

Pertanto, mentre l'interazione gravitazionale è sempre di tipo attrattivo, l'interazione elettrica può essere sia attrattiva che repulsiva.

> *Due corpi che possiedono lo stesso tipo di elettrizzazione (o positivo o negativo) si respingono, mentre si attraggono se possiedono tipi di elettrizzazione diversi (uno positivo e l'altro negativo).*

Questa situazione è mostrata schematicamente in Fig. 14—3. Se l'interazione elettrica fosse stata solo attrattiva o solo repulsiva, noi probabilmente non ci saremmo mai accorti della esistenza dell'interazione gravitazionale, assai meno intensa. Peraltro, la maggior parte dei corpi materiali appare costituita da quantità uguali di elettricità positiva e negativa, cosicchè l'interazione elettrica risultante tra due corpi macroscopici qualsiasi è piccola o nulla. Pertanto, come risultato dell'effetto cumulativo delle masse, l'interazione macroscopica predominante risulta essere l'interazione gravitazionale, di per sé assai più debole.

Therefore, although the gravitational interaction is always attractive, the electrical interaction may be either attractive or repulsive.

> *Two bodies with the same kind of electrification (either positive or negative) repel each other, but if they have different kinds of electrification (one positive and the other negative), they attract each other.*

This statement is indicated schematically in Fig. 14–3. Had the electrical interaction been only attractive or only repulsive, we probably would never have noticed the existence of gravitation, because electrical interaction is much stronger. However, most bodies seem to be composed of equal amounts of positive and negative electricity, so that the net electrical interaction between any two macroscopic bodies is very small or zero. Thus, as a result of a cumulative mass effect, the dominant macroscopic interaction appears to be the much weaker gravitational interaction.

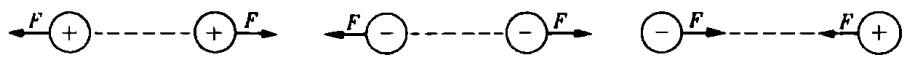


Fig. 14–3. Forze tra cariche elettriche dello stesso segno e di segno opposto.

Fig. 14–3. Forces between like and unlike electric charges.

14.2 *La carica elettrica*

Nello stesso modo in cui caratterizziamo l'intensità della interazione gravitazionale attribuendo a ciascun corpo materiale una massa gravitazionale, possiamo caratterizzare lo stato di elettrizzazione di un corpo definendo una *massa elettrica*, chiamata più comunemente *carica elettrica*, o semplicemente carica, che rappresentiamo mediante il simbolo q. Pertanto qualsiasi porzione di materia o qualsiasi particella è caratterizzata da due proprietà fondamentali indipendenti: la massa e la carica.

Ai due tipi di elettrizzazione sono associati due tipi di carica elettrica: positiva e negativa. Un corpo che mostra uno stato positivo di elettrizzazione possiede carica elettrica positiva, e uno con elettrizzazione negativa possiede carica elettrica negativa. La carica complessiva di un corpo è data dalla somma algebrica delle cariche negativa e positiva. Un corpo dotato di egual quantità di carica positiva e negativa (cioè, avente

14.2 *Electric Charge*

In the same way that we characterize the strength of the gravitational interaction by attaching to each body a gravitational mass, we characterize the state of electrification of a body by defining an *electrical mass*, more commonly called *electrical charge*, or simply charge, represented by the symbol q. Thus any piece of matter or any particle is characterized by two independent but fundamental properties: mass and charge.

Since there are two kinds of electrification, there are also two kinds of electrical charge: positive and negative. A body exhibiting positive electrification has a positive electric charge, and one with negative electrification has a negative electric charge. The net charge of a body is the algebraic sum of its positive and negative charges. A body having equal amounts of positive and negative charges (i.e., zero

Reference body = Carica di riferimento

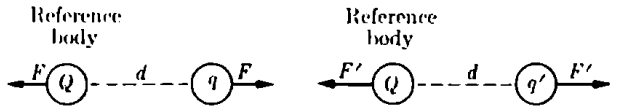


Fig. 14–4. Confronto tra le cariche elettriche q e q', eseguito in base all'interazione elettrica con una terza carica Q.

carica totale nulla) è detto elettricamente *neutro*. D'altro canto, una particella che possiede una carica elettrica totale diversa da zero è sovente chiamata *ione*. Poichè, in generale, i corpi materiali non esercitano complessivamente forze elettriche, possiamo ritenere che essi siano composti di cariche elettriche positive e negative in parti eguali.

Per definire operativamente la carica elettrica dei corpi elettrizzati si addotta il procedimento seguente. Scelto in modo arbitrario un corpo Q, carico elettricamente (Fig. 14–4), poniamo ad una distanza d da esso la carica q e misuriamo la forza F esercitata su q. Successivamente poniamo un'altra carica q' alla medesima distanza d da Q e misuriamo la nuova forza F'. Il valore delle cariche q e q' è per definizione proporzionale rispettivamente a quello delle forze F ed F'. Cioè:

Se ora assegniamo ad arbitrio valore unitario alla carica q', possiamo ricavare il valore numerico di q. Questo procedimento di confronto delle cariche elettriche è assai simile a quello introdotto nel Paragrafo 13.3 per confrontare le masse di due corpi. La nostra definizione di carica implica che, a parità di disposizione geometrica, la forza dovuta alle interazioni elettriche sia proporzionale alla carica delle particelle.

Si è constatato che, in tutti i fenomeni naturali osservati, la carica totale di un sistema isolato rimane costante. In altri termini,

> *la carica totale di un sistema isolato rimane invariata in qualsiasi fenomeno fisico.*

Non si è trovata alcuna eccezione a questa regola, nota come *principio di conservazione della carica elettrica*. Avremo occasione di tornare più avanti su questo punto quando ci occuperemo dei processi fisici che coinvolgono particelle elementari. Lo studente può ricordare che abbiamo già applicato questo principio nell'Esempio 11.11, in cui si è discussa la reazione $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + p^+ + p^-$. A sinistra, la carica totale è pari al doppio della carica del protone, mentre a destra i tre protoni contribuiscono con tre cariche protoniche positive e l'antiprotone contribuisce con una carica negativa eguale in valore assoluto a quella del protone. Il risultato netto pertanto è eguale ancora ad una carica positiva eguale al doppio della carica del protone.

14.3 Legge di Coulomb

Consideriamo l'interazione tra due cariche elettriche *a riposo* nel sistema inerziale di riferimento dell'osservatore, o al più in moto con velocità molto piccola; su interazioni di questo tipo, si fonda ciò che chiamiamo *elettrostatica*. L'interazione elettrostatica tra due cariche elettriche è descritta dalla *legge di Coulomb*, così chiamata

Fig. 14–4. Comparison of electric charges q and q', showing their electron interactions with a third charge Q.

net charge) is called electrically *neutral*. On the other hand, a particle having a nonzero net charge is often called an *ion*. Since matter in bulk does not exhibit gross electrical forces, we may assume that it is composed of equal amounts of positive and negative charges.

To define the charge of an electrified body operationally, we adopt the following procedure. We choose an arbitrary charged body Q (Fig. 14–4) and, at a distance d from it, we place the charge q. We then measure the force F exerted on q. Next, we place another charge q' at the same distance d from Q and measure the force F'. We define the values of the charges q and q' as proportional to the forces F and F'. That is,

$$q/q' = F/F'. \tag{14.1}$$

If we arbitrarily assign a value of unity to the charge q', we have a means of obtaining the value of q. This method of comparing charges is very similar to the one used in Section 13.3 for comparing the masses of two bodies. Our definition of charge implies that, all geometrical factors being equal, the force of electrical interaction is proportional to the charges of the particles.

It has been found that, in all processes observed in nature, the net charge of an isolated system remains constant. In other words,

> *the net or total charge does not change for any process occurring within an isolated system.*

No exception has been found to this rule, known as the *principle of conservation of charge*. We shall have occasion to discuss it later when we deal with processes involving fundamental particles. The student will recall that we have already applied this principle in Example 11.11, where the reaction $p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + p^+ + p^-$ was discussed. On the left the total charge is twice the proton charge and on the right the three protons contribute three times the proton charge, while the antiproton contributes a negative proton charge. This thus gives a net charge equal to twice the proton charge.

14.3 Coulomb's Law

Consider the electric interaction between two charged particles *at rest* in the observer's inertial frame of reference or, at most, moving with a very small velocity; the results of such an interaction constitute what is called *electrostatics*. The electrostatic interaction for two charged particles is given by *Coulomb's law*, so named

dal nome dell'ingegnere francese Charles A. de Coulomb (1736—1806), che fu il primo ad enunciarla, nel modo seguente:

L'interazione elettrostatica tra due particelle cariche è proporzionale alle loro cariche ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza, e la direzione della forza è quella della linea congiungente le cariche stesse.

Ciò può essere espresso matematicamente dalla relazione

dove r è la distanza tra le cariche q e q', F è la forza agente su ciascuna carica, e K_e è una costante che dipende dalle unità di misura usate. Questa legge è assai simile alla legge che descrive l'interazione gravitazionale. Possiamo pertanto applicare in questo caso molti risultati matematici dimostrati nel Capitolo 13 semplicemente sostituendo $\gamma mm'$ con $K_e qq'$.

Fig. 14—5. Bilancia di torsione di Cavendish per verificare la legge di interazione elettrica tra due cariche.

Possiamo verificare sperimentalmente la dipendenza nella (14.2) dall'inverso del quadrato della distanza, misurando la forza tra due cariche fisse poste a distanze diverse. In Fig. 14—5, è indicata una possibile disposizione sperimentale, simile a quella della bilancia di torsione di Cavendish di Fig. 13—3. La forza F tra la carica situata in B e quella situata in D è determinata misurando l'angolo θ di cui ruota la fibra elastica OC per ristabilire l'equilibrio.

La costante K_e nell'Eq. (14.2) è simile alla costante γ nella Eq. (13.1). Ma nel Capitolo 13 le unità di massa, distanza e forza erano già state introdotte ed il valore di γ era determinato sperimentalmente. Nel caso attuale, invece, mentre le unità di forza e distanza sono già state definite, l'unità di carica non è ancora stata introdotta (la definizione data nel Paragrafo 2.3 era unicamente preliminare). Se noi ora fissiamo, mediante una precisa definizione, l'unità di carica, allora dobbiamo determinare sperimentalmente K_e. Possiamo però procedere in modo inverso assegnando a K_e un valore conveniente, fissando in tal modo l'unità di carica. Adotteremo questo secondo procedimento e, usando il sistema MKSC, fissiamo per K_e il valore numerico $10^{-7}c^2 = 8.9874 \times 10^9$, dove c è (come precedentemente) la velocità della luce nel vuoto.* Per scopi pratici possiamo dire che il valore di K_e è 9×10^9. Pertanto, quando la distanza è misurata in metri e la forza in newton, l'Eq. (14.2) diviene

$$F = K_e \frac{qq'}{r^2}, \qquad (14.2)$$

Fissato il valore di K_e, resta fissata anche l'unità di carica. Questa unità è detta *coulomb*, ed è indicata col simbolo C. Possiamo quindi dare le seguente definizione: *Il coulomb è la carica che, posta alla distanza di un metro*

*La scelta di questo particolare valore per K_e sarà giustificata nel Paragrafo 15.9.

after the French engineer Charles A. de Coulomb (1736–1806), who was the first to state it, as follows:

The electrostatic interaction between two charged particles is proportional to their charges and to the inverse of the square of the distance between them, and its direction is along the line joining the two charges.

This may be expressed mathematically by

$$F = K_e \frac{qq'}{r^2}, \qquad (14.2)$$

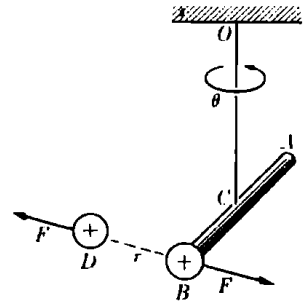


Fig. 14–5. Cavendish torsion balance for verifying the law of electric interaction between two charges.

where r is the distance between the two charges q and q', F is the force acting on either charge, and K_e is a constant to be determined by our choice of units. This law is very similar to the law for gravitational interaction. Thus we can apply here many mathematical results that we proved in Chapter 13 simply by replacing $\gamma mm'$ by $K_e qq'$.

We can experimentally verify the inverse-square law (14.2) by measuring the force between two given charges placed at several distances. A possible experimental arrangement has been indicated in Fig. 14–5, similar to the Cavendish torsion balance of Fig. 13–3. The force F between the charge at B and the charge at D is found by measuring the angle θ through which the fiber OC is rotated to restore equilibrium.

The constant K_e in Eq. (14.2) is similar to the constant γ in Eq. (13.1). But in Chapter 13 the units of mass, distance, and force were already defined, and the value of γ was determined experimentally. In the present case, however, although the units of force and distance have already been defined, the unit of charge is as yet undefined (the definition given in Section 2.3 was only preliminary). If we make a definite statement about the unit of charge, then we must determine K_e experimentally. We may proceed, however, in the reverse order, and assign to K_e a convenient value, in this way fixing the unit of charge. We shall adopt this second method and, using the MKSC system, set the numerical value of K_e to $10^{-7}c^2 = 8.9874 \times 10^9$, where (as before) c is the velocity of light in vacuum.* For practical purposes, we may say that K_e is equal to 9×10^9. Then, when the distance is measured in meters and the force in newtons, Eq. (14.2) becomes

$$F = 9 \times 10^9 \frac{qq'}{r^2}. \qquad (14.3)$$

Once we have decided on the value of K_e, the unit of charge is fixed. This unit is called a *coulomb*, and is designated by the symbol C. From this we may establish the following definition: *The coulomb is that charge which, when it is placed one meter*

* The choice of this particular value for K_e will be explained in Section 15.9.

da una carica eguale, nel vuoto, la respinge con una forza di 8.9874 × 10⁹ newton. La formula (14.3) è valida solo per cariche elettriche situate nel vuoto, cioè considerando le due cariche isolate in assenza di ogni altra carica o sostanza materiale (vedi Paragrafo 16.6). Si noti che, secondo l'Eq. (14.2), K_e è espresso in N m^2 C^{-2} oppure m^3 kg s^{-2} C^{-2}.

Per ragioni pratiche e di calcolo, è più conveniente esprimere K_e nella forma

dove la nuova costante ϵ_0 è detta *permettività del vuoto*. In relazione al valore numerico attribuito a K_e, essa vale

oppure

Perciò, scriveremo di solito l'Eq. (14.3) nella forma

Usando l'Eq. (14.6), le cariche q e q' debbono essere introdotte col loro segno. A valori negativi di F, corrispondono forze attrattive, mentre a valori positivi corrispondono forze repulsive.

ESEMPIO 14.1. Data la disposizione di Cariche di Fig. 14–6, in cui $q_1 = +1{,}5 \times 10^{-3}$ C, $q_2 = -0.5 \times 10^{-3}$ C, $q_3 = 0.2 \times 10^{-3}$ C, e $AC = 1.2$ m, $BC = 0.5$ m, trovare la forza risultante sulla carica q_3.

Soluzione: La forza F_1 tra q_1 e q_3 è repulsiva, mentre la forza F_2 tra q_2 e q_3 è attrattiva. I loro rispettivi valori, usando l'Eq. (14.6), sono:

Pertanto la forza risultante è:

14.4 Il campo elettrico

Ogni regione dello spazio in cui una carica elettrica sia soggetta ad una forza, è detta *campo elettrico*. La forza è causata dalla presenza nella regione interessata di altre cariche elettriche. Per esempio, una carica q posta in una regione contenente anche le cariche q_1, q_2, q_3, ecc. (Fig. 14–7) è soggetta alla forza $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots$, e noi diciamo che il campo elettrico è dovuto a q_1, q_2, q_3, ... (Ovviamente, pure q_1, q_2, q_3, ..., risentono di forze esercitate da q, ma al presente noi non ci occupiamo del loro comportamento.) Poichè la forza che ciascuna carica q_1, q_2, q_3, ... esercita su q è proporzionale a q,

from an equal charge in vacuum, repels it with a force of 8.9874×10^9 *newtons.* Formula (14.3) holds only for two charged particles in vacuum; that is, for two charged particles in the absence of any other charge or matter (see Section 16.6). Note that, according to Eq. (14.2), we express K_e in N m^2 C^{-2} or m^3 kg s^{-2} C^{-2}.

For practical and computational reasons, it is more convenient to express K_e in the form

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \tag{14.4}$$

where the new physical constant ϵ_0 is called the *vacuum permittivity*. According to the value assigned to K_e, it has the value

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{N^{-1}\,m^{-2}\,C^2} \quad \text{or} \quad \mathrm{m^{-3}\,kg^{-1}\,s^2\,C^2}. \tag{14.5}$$

Accordingly, we shall normally write Eq. (14.3) in the form

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{14.6}$$

When using Eq. (14.6), we must include the charges q and q' with their signs. A negative value of F corresponds to attraction and a positive value corresponds to repulsion.

EXAMPLE 14.1. Given the charge arrangement of Fig. 14-6, where $q_1 = +1.5 \times 10^{-3}$ C, $q_2 = -0.5 \times 10^{-3}$ C, $q_3 = 0.2 \times 10^{-3}$ C, and $AC = 1.2$ m, $BC = 0.5$ m, find the resultant force on charge q_3.

Solution: The force F_1 between q_1 and q_3 is repulsive, while the force F_2 between q_2 and q_3 is attractive. Their respective values, when we use Eq. (14.6), are

$$F_1 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 1.875 \times 10^3\ \mathrm{N}, \qquad F_2 = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = -3.6 \times 10^3\ \mathrm{N}.$$

Therefore the resultant force is

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 4.06 \times 10^3\ \mathrm{N}.$$

14.4 Electric Field

Any region where an electric charge experiences a force is called an *electric field*. The force is due to the presence of other charges in that region. For example, a charge q placed in a region where there are other charges q_1, q_2, q_3, etc. (Fig. 14–7) experiences a force $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \cdots$, and we say that it is in an electric field produced by the charges q_1, q_2, q_3, ... (The charge q of course also exerts forces on q_1, q_2, q_3, ..., but we are not concerned with them now.) Since the force that each charge q_1, q_2, q_3, ... produces on the charge q is proportional to q, the

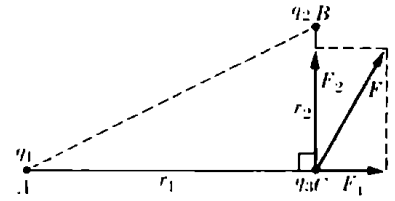


Fig. 14–6. Forza elettrica risultante su q_3 dovuta a q_1 e q_2.

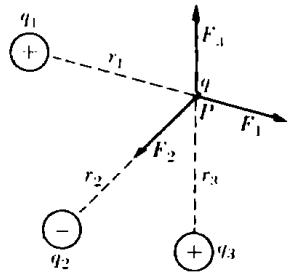


Fig. 14–7. Campo elettrico risultante prodotto in P da varie cariche.

Fig. 14–6. Resultant electric force on q_3 due to q_1 and q_2.

Fig. 14–7. Resultant electric field at P produced by several charges.

anche la forza risultante $\boldsymbol{F}$ sarà proporzionale a q. Pertanto, la forza che agisce su una particella posta in un campo elettrico è proporzionale alla carica della particella stessa.

Si definisce *intensità del campo elettrico* in un punto, e la si indica col simbolo $\mathfrak{E}$, la forza che agisce sull'unità di carica posta in quel punto. Pertanto

$$\mathfrak{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q} \qquad \text{oppure} \qquad \boldsymbol{F} = q\mathfrak{E}. \tag{14.7}$$

L'intensità del campo elettrico $\mathfrak{E}$ è espressa in newton/coulomb o N C^{-1}, oppure, usando le unità fondamentali, in m kg $s^{-2}C^{-1}$.

Si noti che, secondo la definizione (14.7), se q è positiva, la forza $\boldsymbol{F}$ agente sulla carica ha il medesimo verso del campo $\mathfrak{E}$, mentre se q è negativa ha verso opposto (Fig. 14–8). Pertanto, quando una regione di spazio contenente particelle o ioni sia positivi che negativi è sottoposta ad un campo elettrico, i corpi caricati positivamente o negativamente tenderanno a muoversi in direzioni opposte dando luogo ad una separazione delle cariche: tale effetto è talora chiamato *polarizzazione*.

Electric field = Campo elettrico
Positive charge = Carica positiva
Negative charge = Carica negativa

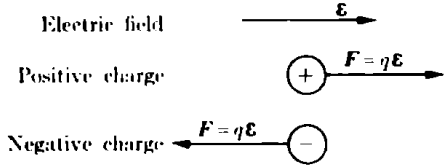


Fig. 14–8. Verso delle forze prodotte da un medesimo campo elettrico su cariche positive e negative.

Scriviamo ora l'Eq. (14.6) nella forma $F = q'(q/4\pi\epsilon_0 r^2)$. Questa relazione esprime la forza esercitata dalla carica q su una carica q' posta alla distanza r da q. Utilizzando l'Eq. (14.7), possiamo anche scrivere che il campo elettrico $\mathfrak{E}$ nella posizione occupata da q' è tale che $F = q'\mathfrak{E}$. Confrontando le due espressioni di F, possiamo dire quindi che il campo elettrico generato da una carica q alla distanza r vale $\mathfrak{E} = q/4\pi\epsilon_0 r^2$, oppure in forma vettoriale,

$$\mathfrak{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\boldsymbol{u}_r, \tag{14.8}$$

dove $\boldsymbol{u}_r$ rappresenta un vettore unitario spiccato da q in direzione radiale, poichè $\boldsymbol{F}$ agisce in tale direzione. L'espressione (14.8) vale sia per cariche positive che negative,

resultant force $\boldsymbol{F}$ is also proportional to q. Thus the force on a particle placed in an electric field is proportional to the charge of the particle.

The *intensity of the electric field* at a point is equal to the force per unit charge placed at that point. The symbol is $\mathfrak{E}$. Therefore

The electric field intensity $\mathfrak{E}$ is expressed in newtons/coulomb or N C^{-1}, or, using the fundamental units, m kg s^{-2} C^{-1}.

Note that, in view of the definition (14.7), if q is positive, the force $\boldsymbol{F}$ acting on the charge has the same direction as the field $\mathfrak{E}$, but if q is negative, the force $\boldsymbol{F}$ has the direction opposite to $\mathfrak{E}$ (Fig. 14–8). Therefore if we apply an electric field to a region where positive and negative particles or ions are present, the field will tend to move the positively and negatively charged bodies in opposite directions, resulting in a charge separation, an effect sometimes called *polarization*.

Let us write Eq. (14.6) in the form $F = q'(q/4\pi\epsilon_0 r^2)$. This gives the force produced by the charge q on the charge q' placed a distance r from q. We may also say, using Eq. (14.7), that the electric field $\mathfrak{E}$ at the point where q' is placed is such that $F = q'\mathfrak{E}$. Therefore, by comparing both expressions of F, we conclude that the electric field at a distance r from a point charge q is $\mathfrak{E} = q/4\pi\epsilon_0 r^2$, or in vector form,

where $\boldsymbol{u}_r$ is the unit vector in the radial direction, away from the charge q, since $\boldsymbol{F}$ is along this direction. Expression (14.8) is valid both for positive and negative

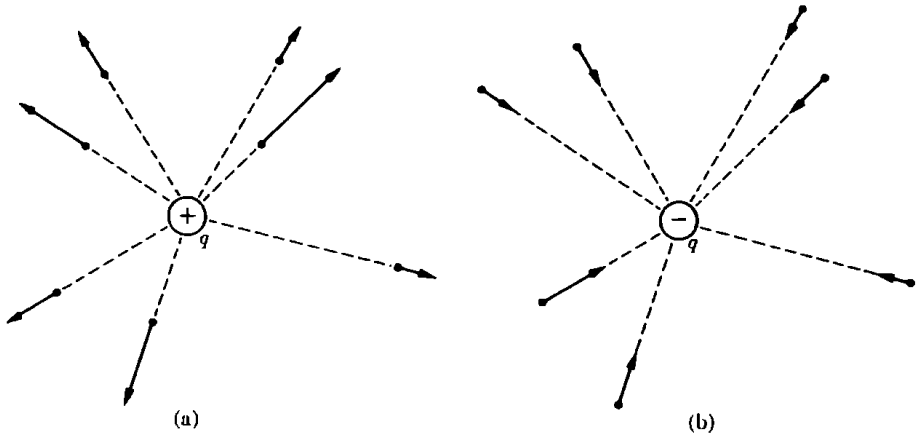


Fig. 14–9. Campo elettrico prodotto da una carica positiva e da una carica negativa.

poichè il *verso* di $\mathcal{E}$ rispetto ad u_r è determinato dal segno di q. Pertanto il verso di $\mathcal{E}$ è uscente dalle cariche positive ed entrante in quelle negative. Nella formula corrispondente per il campo gravitazionale (Eq. 13.15), il segno negativo era scritto in maniera esplicita poichè l'interazione gravitazionale è sempre attrattiva. La Fig. 14–9(a) indica il campo elettrico in prossimità di una carica positiva e la Fig. 14–9(b) quello in prossimità di una carica negativa.

I campi elettrici, come i campi gravitazionali, possono essere rappresentati mediante le linee di forza, che sono le linee tangenti, in ciascun punto, alla direzione del campo elettrico in quel punto. Le linee di forza rappresentate in Fig. 14–10(a) descrivono il campo elettrico dovuto ad una carica positiva e quelle di Fig. 14–10(b) quello dovuto ad una carica negativa. Si tratta di linee rette passanti per il punto in cui si trova la carica.

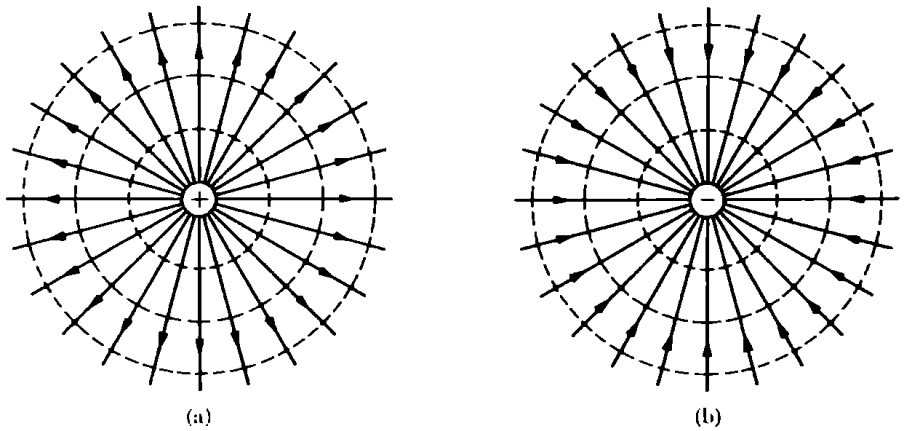


Fig. 14–10. Linee di forza e superfici equipotenziali del campo elettrico prodotto da una carica positiva e da una carica negativa.

Fig. 14–9. Electric field produced by a positive and a negative charge.

charges, with the direction of $\mathcal{E}$ relative to u_r given by the sign of q. Thus $\mathcal{E}$ is directed away from a positive charge and toward a negative charge. In the corresponding formula for the gravitational field (Eq. 13.15), the negative sign was written explicitly because the gravitational interaction is always attractive. Figure 14-9(a) indicates the electric field near a positive charge, and Fig. 14-9(b) shows the electric field near a negative charge.

Just as in the case of a gravitational field, an electric field may be represented by lines of force, which are lines that, at each point, are tangent to the direction of the electric field at the point. The lines of force in Fig. 14-10(a) depict the electric field of a positive charge, and those in Fig. 14-10(b) show the electric field of a negative charge. They are straight lines passing through the charge.

Fig. 14–10. Lines of force and equipotential surfaces of the electric field of a positive and a negative charge.

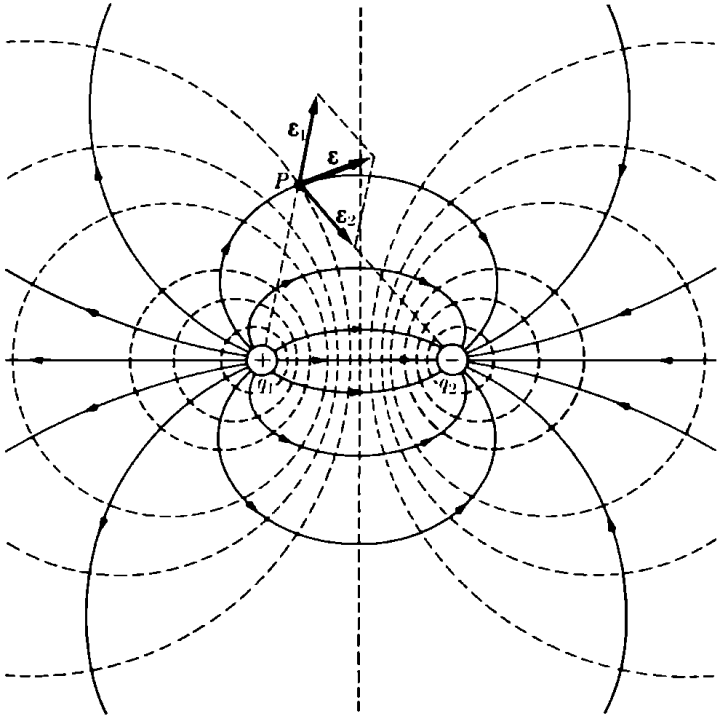


Fig. 14–11. Linee di forza e superfici equipotenziali del campo elettrico prodotto da due cariche uguali e di segno contrario.

Fig. 14–11. Lines of force and equipotential surfaces of the electric field of two equal but opposite charges.

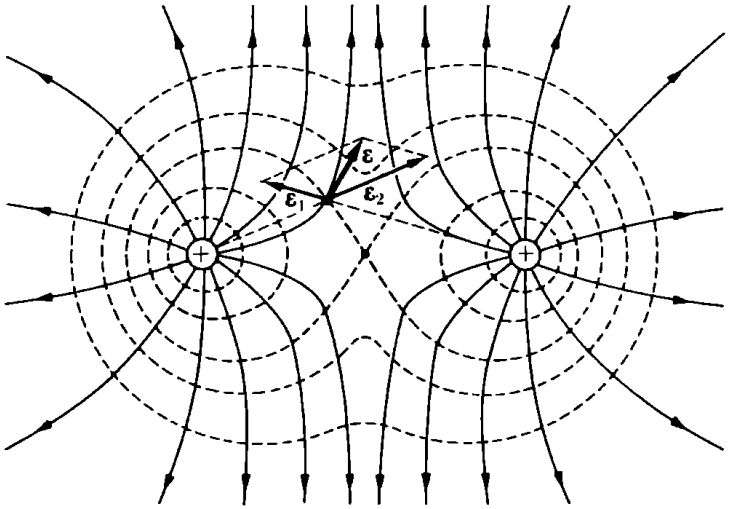


Fig. 14–12. Linee di forza e superfici equipotenziali del campo elettrico prodotto da due cariche elettriche identiche.

Fig. 14–12. Lines of force and equipotential surfaces of the electric field of two identical charges.

Volume of . . . = Regione occupata dalla distribuzione de cariche.

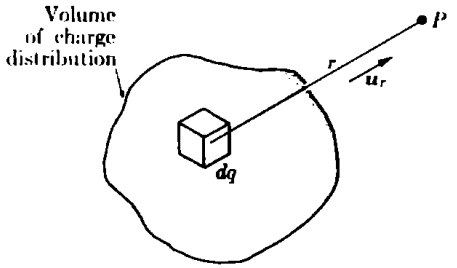


Fig. 14–13. Calcolo del campo elettrico prodotto da una distribuzione continua di cariche.

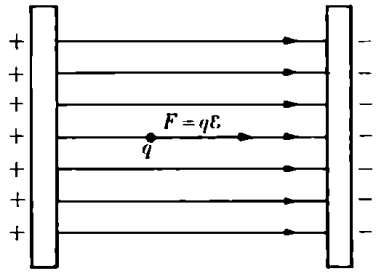


Fig. 14–14. Campo elettrico uniforme.

Quando siano presenti più cariche, come in Fig. 14–7, il campo elettrico risultante è dato dalla somma vettoriale dei campi prodotti da ciascuna carica considerata separatamente. Cioè:

La Fig. 14–11 mostra come può essere ottenuto il campo elettrico risultante prodotto in un punto P da una carica positiva ed una negativa di egual valore, quali, ad esempio, un protone ed un elettrone in un atomo di idrogeno. La Fig. 14–12 mostra le linee di forza del campo elettrico prodotto da due cariche positive eguali, quali i due protoni di una molecola d'idrogeno. In entrambe le figure sono rappresentate le linee di forza del campo prodotto dalle due cariche.

Nel caso di una distribuzione continua di carica (Fig. 14–13), possiamo suddividerla in piccoli elementi di carica dq e sostituire alla somma un integrale:

L'integrale va esteso a tutto lo spazio occupato dalla distribuzione di carica.

Un campo elettrico *uniforme* è caratterizzato dall'avere dovunque medesima intensità, direzione e verso. Ovviamente, un tale campo è rappresentato da linee di forza parallele (Fig. 14–14). Il miglior modo di produrre un campo uniforme è quello di caricare due lastre metalliche parallele con cariche eguali di segno opposto. Pure considerazioni di simmetria indicano già fin d'ora che il campo deve essere uniforme, comunque più avanti verificheremo matematicamente (Paragrafo 16.3) tale affermazione. (Si ricordi l'Esempio 13.8 in cui è trattato un caso analogo per il campo gravitazionale.)

ESEMPIO 14.2. Determinare il campo prodotto nel punto C della Fig. 14–6, dalle cariche q_1 e q_2 definite nell'Esempio 14.1.

Soluzione: Possiamo seguire due procedimenti. Poichè nel'Esempio 14.1, abbiamo calcolato la forza F agente su q_3 situata in C, risulta, utilizzando l'Eq. (14.7), che

Fig. 14–13. Calculation of the electric field of a continuous charge distribution.

Fig. 14–14. Uniform electric field.

When several charges are present, as in Fig. 14–7, the resultant electric field is the vector sum of the electric fields produced by each charge. That is,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \cdots = \sum_i \mathcal{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} u_{ri}.$$

Figure 14–11 shows how to obtain the resultant electric field at a point P in the case of a positive and a negative charge of the same magnitude, such as a proton and an electron in a hydrogen atom. Figure 14–12 shows the lines of force for two equal positive charges, such as the two protons in a hydrogen molecule. In both figures the lines of force of the resultant electric field produced by the two charges have also been represented.

If we have a continuous charge distribution (Fig. 14–13), we divide it into small charge elements dq and replace the sum by an integral, resulting in

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} u_r.$$

The integral must extend over the entire space occupied by the charges.

A *uniform* electric field has the same intensity and direction everywhere. Obviously a uniform field is represented by parallel lines of force (Fig. 14–14). The best way of producing a uniform electric field is by charging, with equal and opposite charges, two parallel metal plates. Symmetry indicates that the field is uniform, but later on (Section 16.3) we shall verify this assertion mathematically. (Recall Example 13.8 for a similar problem with regard to gravitational interaction.)

EXAMPLE 14.2. Determine the electric field produced by charges q_1 and q_2 at C in Fig. 14–6, charges which are defined in Example 14.1.

Solution: We have two alternative solutions. Since, in Example 14.1, we found the force F on charge q_3 at C, we have, using Eq. (14.7), that

$$\mathcal{E} = \frac{F}{q_3} = 2.03 \times 10^7 \text{ N C}^{-1}.$$

Il secondo procedimento consiste nel calcolare in primo luogo il campo elettrico prodotto in C (Fig. 14—15) separatamente da ciascuna carica, utilizzando l'Eq. (14.8). Ciò dà

e

Pertanto il campo risultante vale:

Fig. 14—15. Campo elettrico prodotto in C da q_1 e q_2.

I due risultati sono ovviamente identici.

ESEMPIO 14.3. Discussione del moto di una carica elettrica in un campo uniforme.

Soluzione: L'equazione del moto di una carica elettrica in un campo elettrico è:

oppure

Pertanto l'accelerazione di un corpo in un campo elettrico dipende dal rapporto q/m. Poichè tale rapporto è generalmente differente per particelle cariche, o ioni, differenti, in un campo elettrico saranno pure differenti le rispettive accelerazioni. Esiste quindi una netta distinzione tra l'accelerazione di un corpo carico in un campo elettrico e quella in un campo gravitazionale, che è la medesima per tutti i corpi. Se il campo $\mathcal{E}$ è uniforme, l'accelerazione $\boldsymbol{a}$ è costante e la traiettoria percorsa dalla carica elettrica è una parabola, come mostrato nel Paragrafo 5.7.

Un caso interessante è quello di una particella carica che attraversa un campo elettrico localizzato in una regione limitata di spazio (Fig. 14—16). Per semplicità, supporremo che la velocità iniziale v_0 della particella all'ingresso nella regione occupata dal campo abbia direzione perpendicolare alla direzione del campo stesso. Scegliamo l'asse X parallelo alla velocità iniziale della particella e l'asse Y parallelo al campo. La traiettoria AB seguita dalla particella nel suo moto attraverso il campo è parabolica. Dopo aver attraversato il campo, la particella torna a muoversi di moto rettilineo uniforme, ma con differente velocità v e in una direzione differente. Il campo elettrico produce pertanto una deflessione, misurata dall'angolo α, nella traiettoria della particella.

Fig. 14—16. Deflessione di una particella carica positivamente in un campo elettrico uniforme.

Another procedure is to compute first the electric field produced at C (Fig. 14–15) by each of the charges, using Eq. (14.8). This gives

$$\mathcal{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 9.37 \times 10^6 \text{ N C}^{-1}$$

and

$$\mathcal{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 18.0 \times 10^6 \text{ N C}^{-1}.$$

Therefore the resultant field is

$$\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2} = 2.03 \times 10^7 \text{ N C}^{-1}.$$

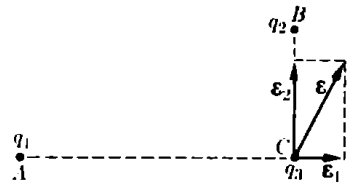


Fig. 14–15. Resultant electric field at C which is produced by q_1 and q_2.

The two results are obviously identical.

EXAMPLE 14.3. Discussion of the motion of an electric charge in a uniform field.

Solution: The equation of motion of an electric charge in an electric field is given by the equation

$$m\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{\mathcal{E}} \quad \text{or} \quad \boldsymbol{a} = \frac{q}{m}\boldsymbol{\mathcal{E}}.$$

The acceleration of a body in an electric field depends therefore on the ratio q/m. Since this ratio is in general different for different charged particles or ions, their accelerations in an electric field are also different. Thus there is a clear distinction between the acceleration of a charged body in an electric field and the acceleration in a gravitational field, which is the same for all bodies. If the field $\mathcal{E}$ is uniform, the acceleration $\boldsymbol{a}$ is constant and the path of the electric charge is a parabola, as explained in Section 5.7.

An interesting case is that of a charged particle passing through an electric field occupying a limited region in space (Fig. 14–16). For simplicity, we shall assume that the initial velocity v_0 of the particle when it enters the field is perpendicular to the direction of the electric field. The X-axis is placed parallel to the initial velocity of the particle and the Y-axis is placed parallel to the field. The path AB followed by the particle when it moves through the field is a parabola. After crossing the field, the particle resumes rectilinear motion, but with a different velocity v and in a different direction. We then say that the electric field has produced a deflection measured by the angle α.

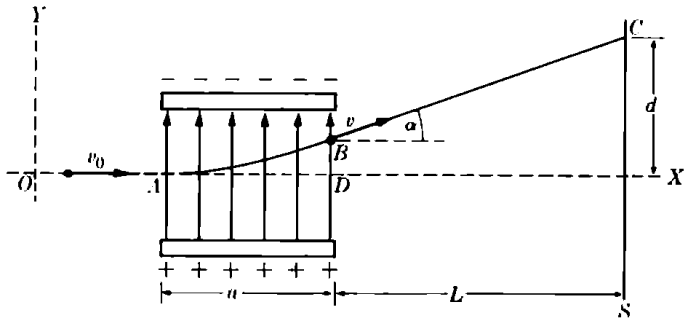


Fig. 14–16. Deflection of a positive charge by a uniform electric field.

Utilizzando i risultati del Paragrafo 5.7, troviamo che, quando la particella è in moto nel campo elettrico con accelerazione $a = (q/m\mathcal{E})$, le sue coordinate sono:

Eliminando il tempo t, determiniamo l'equazione della traiettoria

da cui risulta che la traiettoria stessa è una parabola. L'angolo α di deflessione è dato dalla pendenza dy/dx della traiettoria per $x = a$. Il risultato è:

Se poniamo uno schermo S alla distanza L, tutte le particelle caratterizzate da un medesimo valore del rapporto q/m e della velocità v_0 raggiungeranno lo schermo in un medesimo punto C. Poichè lo spostamento verticale BD è piccolo rispetto a d, se L è grande, possiamo approssimare tan α con d/L e pertanto:

Misurando d, L, a, ed $\mathcal{E}$, possiamo determinare la velocità v_0 (o l'energia cinetica) una volta noto q/m; oppure possiamo, in alternativa, determinare q/m se conosciamo v_0. Pertanto, quando un fascio di particelle, caratterizzate da un unico valore di q/m, passa attraverso un campo elettrico, la deflessione subita è funzione dei valori della velocità, o dell'energia.

Un dispositivo analogo a quello di Fig. 14–16 può essere usato come *analizzatore di energia*; esso separa particelle cariche identiche aventi differente energia cinetica. Ad esempio, i raggi β sono elettroni emessi da sostanze radioattive; se poniamo un emettitore β in O, tutti gli elettroni si concentrano in una unica macchia sullo schermo se hanno la medesima energia, ma si sparpagliano su una regione dello schermo se sono emessi con energie differenti. Sperimentalmente si osserva questa seconda situazione e ciò costituisce un fatto assai rilevante per ciò che riguarda la struttura dei nuclei.

Heater = Riscaldatore
Cathode = Catodo
Control grid = Griglia di controllo
Electron gun = Cannone elettronico
Focusing anode = Anodo di focalizzazione
Accelerating anode = Anodo acceleratore
Plates for horizontal . . . = Placche per la deflessione orizzontale
Plates for vertical . . . = Placche per la deflessione verticale
Metallic coating = Rivestimento metallico
Electron beam = Fascio elettronico
Fluorescent screen = Schermo fluorescente

Fig. 14–17. Moto di una carica in campi elettrici incrociati. Gli elettroni emessi dal catodo e accelerati da un intenso campo elettrico escono dal cannone elettronico attraverso un foro praticato nell'anodo acceleratore e passano attraverso due gruppi di placche deflettrici. Il rivestimento metallico interno al tubo impedisce l'esistenza di campi elettrici nella parte finale destra del tubo sia schermando eventuali sorgenti esterne che permettendo un cammino di ritorno per gli elettroni del fascio.

Using the results of Section 5.7, we find that the coordinates of the particle while it is moving through the field with an acceleration $a = (q/m)\mathcal{E}$ are given by

$$x = v_0 t, \qquad y = \tfrac{1}{2}(q/m)\mathcal{E}t^2.$$

Eliminating the time t, we obtain for the equation of the path,

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{\mathcal{E}}{v_0^2}\right)x^2,$$

thus verifying that it is a parabola. We obtain the deflection α by calculating the slope dy/dx of the path at $x = a$. The result is

$$\tan\alpha = (dy/dx)_{x=a} = q\mathcal{E}a/mv_0^2.$$

If we place a screen S at distance L, the particle with given q/m and velocity v_0 will reach a point C on the screen. Noting that tan α is also approximately equal to d/L because the vertical displacement BD is small compared with d if L is large, we have

$$\frac{q\mathcal{E}a}{mv_0^2} = \frac{d}{L}. \tag{14.9}$$

By measuring d, L, a, and $\mathcal{E}$, we may obtain the velocity v_0 (or the kinetic energy) if we know the ratio q/m; or, conversely, we may obtain q/m if we know v_0. Therefore when a stream of particles, all having the same ratio q/m, passes through the electric field, they are deflected according to their velocities or energies.

A device such as the one illustrated in Fig. 14–16 may be used as an *energy analyzer*, which separates identical charged particles moving with different energies. For example, the β-rays are electrons emitted by some radioactive materials; if we place a beta emitter at O, all the electrons will concentrate at the same spot on the screen if they have the same energy. But if they are emitted with different energies, they will be spread over a region of the screen. It is this second situation that is found experimentally, a result of great importance from the point of view of nuclear structure.

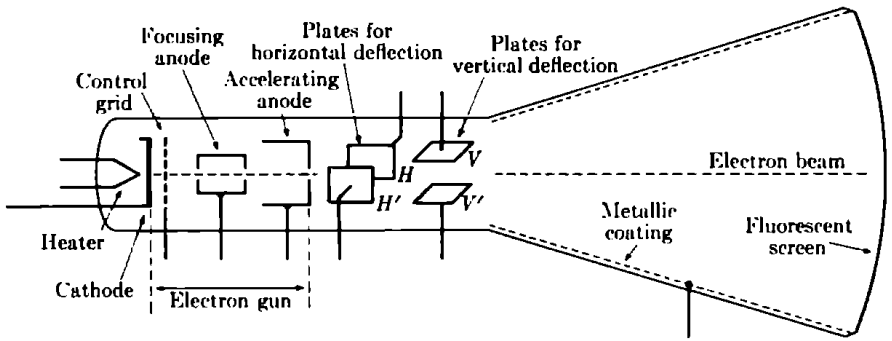


Fig. 14–17. Motion of a charge under crossed electric fields. The electrons are emitted from the cathode and accelerated by a large electric field. A hole in the accelerating anode allows the electrons to pass out of the electron gun and between the two sets of deflection plates. The metallic coating inside the tube keeps the right end free of electric fields by shielding external sources and by conducting away the electrons of the beam.

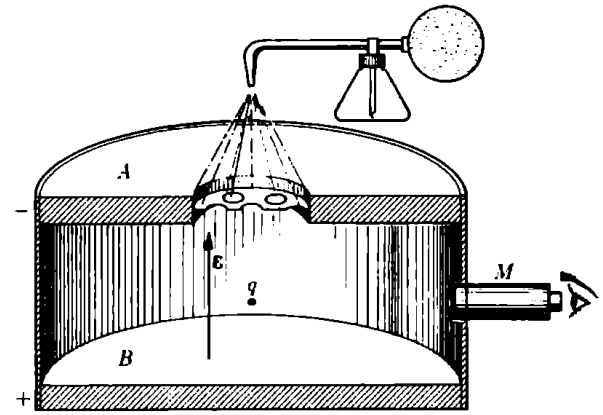


Fig. 14–18. Esperimento di Millikan della goccia d'olio. Il moto della goccia d'olio carica q è osservato mediante il microscopio M.

Fig. 14–18. Millikan oil-drop experiment. The motion of the charged oil drop q is observed through the microscope M.

Utilizzando due gruppi di placche parallele cariche possiamo produrre, come mostrato in Fig. 14–17, due campi elettrici mutuamente ortogonali, uno orizzontale diretto come HH' ed uno verticale diretto come VV'. Regolando l'intensità relativa dei campi, possiamo a nostro arbitrio far giungere il fascio elettronico in qualsiasi posizione dello schermo. Se i due campi variano, la macchia disegna una curva. Una pratica utilizzazione di tale effetto si trova nei tubi per televisione e negli oscillografi. In particolare, se l'intensità dei campi elettrici varia secondo una legge semplice di tipo armonico, la figura tracciata sarà una figura di Lissajous (Paragrafo 12.9).

By using two sets of parallel charged plates, we can produce two mutually perpendicular fields, one horizontal along HH' and another vertical along VV', as shown in Fig. 14–17. By adjusting the relative intensity of the fields, we can obtain an arbitrary deflection of the electron beam to any spot on the screen. If the two fields are variable, the spot on the screen will describe a certain curve. Practical applications of this effect occur in television tubes and in oscilloscopes. In particular, if the electric fields vary in intensity with simple harmonic motion, the pattern traced out will be a Lissajous figure (Section 12.9).

14.5 Quantizzazione della carica elettrica

Una caratteristica importante che è opportuno porre in evidenza prima di procedere oltre è che la carica elettrica non compare in quantità qualsiasi, ma solo come multiplo di una unità fondamentale, o quanto.

Tra i molti esperimenti ideati per mettere in evidenza questo fatto, è fondamentale quello condotto dal fisico americano Robert A. Millikan (1869–1953), nel corso di parecchi anni all'inizio del secolo e noto come l'*esperimento della goccia d'olio*. Nella disposizione adottata da Millikan, un campo elettrico $\mathcal{E}$ agente in direzione verticale tra due piatti orizzontali A e B (Fig. 14–18), poteva essere applicato e tolto. Nel centro del piatto superiore erano praticati alcuni piccoli fori attraverso i quali potevano essere introdotte delle goccie d'olio prodotte da uno spruzzatore. Molte delle goccie d'olio risultavano caricate elettricamente per strofinio dall'ugello dello spruzzatore.

Analizziamo innanzitutto questo esperimento dal punto di vista teorico. Chiamiamo m la massa ed r il raggio di una goccia d'olio. Per tale goccia, l'equazione del moto per caduta libera in assenza del campo elettrico $\mathcal{E}$ risulta essere, utilizzando l'Eq. (7.20) con K dato dall'Eq. (7.19), $ma = mg - 6\pi\eta r v$. La velocità finale della goccia v_1 (N.T.), quando $a = 0$, è

dove ρ rappresenta la densità dell'olio e si è utilizzata la relazione $m = (\frac{4}{3}\pi r^3)\,\rho$.

N.T. v_1 è positiva se diretta verso il basso

14.5 The Quantization of Electric Charge

An important aspect which we must elucidate before we proceed further is the fact that electric charge appears not just in any amount but as a multiple of a fundamental unit, or quantum.

Of the many experiments devised to determine this question, the classical one is that of the American physicist Robert A. Millikan (1869–1953), who for several years during the early part of this century performed what is now known as the *oil-drop experiment*. Millikan set up, between two parallel horizontal plates A and B (Fig. 14–18), a vertical electric field $\mathcal{E}$ which could be switched on and off. The upper plate had at its center a few small perforations through which oil drops, produced by an atomizer, could pass. Most of the oil drops were charged by friction with the nozzle of the atomizer.

Let us first analyze this experiment from a theoretical standpoint. We shall call m the mass and r the radius of one oil drop. For this drop, the equation of motion for free fall with the field $\mathcal{E}$ switched off, using Eq. (7.20), with K given by Eq. (7.19), is $ma = mg - 6\pi\eta r v$. The terminal velocity v_1 of the drop, when $a = 0$, is

$$v_1 = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{2\rho r^2 g}{9\eta}, \tag{14.10}$$

where ρ represents the oil density and we have used the relation $m = (\frac{4}{3}\pi r^3)\rho$.

(Per l'esattezza, si dovrebbe tener conto della spinta di Archimede dovuta all'aria scrivendo $\rho - \rho_a$ anzichè ρ, con ρ_a densità dell'aria.)

Se la goccia possiede una carica positiva q, quando si applica il campo elettrico, l'equazione del moto, scegliendo ora come verso positivo quello che va dal basso in alto, è

$$ma = q\mathcal{E} - mg - 6\pi\eta r v,$$

e la velocità finale della goccia v_2 (N.T.), quando $a = 0$, è

$$v_2 = \frac{q\mathcal{E} - mg}{6\pi\eta r}.$$

oppure, risolvendo rispetto a q, utilizzando l'Eq. (14.10) per eliminare mg, si ottiene

$$q = \frac{6\pi\eta r(v_1 + v_2)}{\mathcal{E}}. \tag{14.11}$$

Possiamo determinare il raggio della goccia misurando v_1 e risolvendo l'Eq. (14.10) rispetto ad r. Misurando v_2 si ottiene, mediante l'Eq. (14.11), il valore della carica q. Se la carica è negativa, il moto verso l'alto è prodotto applicando un campo elettrico diretto verso il basso.

Nella pratica viene peraltro seguita una diversa procedura. Il moto ascendente o discendente della goccia è osservato parecchie volte applicando e togliendo il campo elettrico. La velocità v_1 rimane sempre la stessa, mentre la velocità v_2 subisce delle variazioni occasionali, suggerendo un cambiamento di carica della goccia. Tali cambiamenti sono prodotti da occasionali ionizzazioni dell'aria circostante da parte dei raggi cosmici. La goccia può catturare nel suo moto attraverso l'aria alcuni di questi ioni. Cambiamenti nella carica possono pure essere provocati ponendo in prossimità dei piatti una sorgente di raggi x o γ, la quale aumenta la ionizzazione dell'aria.

Secondo l'Eq. (14.11), i cambiamenti di carica Δq e di velocità verso l'alto Δv_2 sono collegati secondo la relazione

$$\Delta q = \frac{6\pi\eta r}{\mathcal{E}} \Delta v_2. \tag{14.12}$$

Talvolta, Δq è positiva e talaltra negativa, a seconda della natura del cambiamento di carica. Ripetendo più volte l'esperimento della goccia d'olio, con differenti goccie, i fisici sono pervenuti alla conclusione che i cambiamenti di carica Δq sono sempre multipli di una carica fondamentale e (cioè $\Delta q = ne$), il cui valore è

$$e = 1.6021 \times 10^{-19}\ \text{C}. \tag{14.13}$$

La quantità e è detta la *carica elementare. Tutte le cariche osservate in natura sono eguali o sono multipli della carica elementare e*; finora non si sono osservate eccezioni a questa regola. La quantizzazione della carica elettrica appare pertanto una legge fondamentale della natura. Sino ad ora, nessuno ha trovato una spiegazione di questo fatto in termini di concetti più fondamentali.

Un secondo aspetto importante della carica elettrica è che la carica elementare è sempre accompagnata da una certa massa, dando luogo a ciò che possiamo chiamare una *particella elementare*. [Nel prossimo capitolo (Paragrafo 15.4), illustreremo alcuni metodi

N.T. v_2 è positiva se diretta verso l'alto

(In order to be accurate, we must also take the buoyancy of the air into account, by writing $\rho - \rho_a$ instead of ρ, where ρ_a is the air density.)

Assuming that the drop has a positive charge q, when we apply the electric field, the equation of motion in the upward direction is

and the terminal velocity of the drop v_2, when $a = 0$, is

Or, solving for q, and using Eq. (14.10) to eliminate mg, we have

We can find the radius of the drop by measuring v_1 and solving Eq. (14.10) for r. By measuring v_2 we obtain the charge q by applying Eq. (14.11). If the charge is negative, the upward motion is produced by applying a downward electric field.

A different procedure is followed in actual practice. The upward and downward motion of the drop is observed several times by successively switching on and off the field. The velocity v_1 remains the same but the velocity v_2 occasionally changes, suggesting a change in the charge of the drop. These changes are due to the occasional ionization of the surrounding air by cosmic rays. The drop may pick up some of these ions while moving through the air. Changes in charge can also be induced by placing near the plates a source of x- or γ-rays that increase the ionization of the air.

According to Eq. (14.11), the changes Δq and Δv_2 of charge and upward velocity are related by

Sometimes Δq is positive and at other times negative, depending on the nature of the charge modification. By repeating the oil-drop experiment many times, with different drops, physicists have concluded that the changes Δq are always multiples of a fundamental charge e (that is, $\Delta q = ne$), whose value is

The quantity e is called the *elementary charge. All charges observed in nature are equal to, or are multiples of, the elementary charge e;* so far no exception has been found to this rule. It therefore seems to be a fundamental law of nature that electric charge is quantized. Until the present time, no one has found an explanation for this fact in terms of more fundamental concepts.

A second important aspect of electric charge is that the elementary charge is always associated with some fixed mass, giving rise to what we may call a *fundamental particle*. [In the next chapter (Section 15.4), we shall explain some methods

per misurare il rapporto q/m, con cui, noto q, può essere determinato m. In tal modo, sono state individuate parecchie particelle elementari.] Per ora, possiamo indicare che sostanzialmente esistono tre elementi costruttivi fondamentali, o particelle, che entrano nella struttura di tutti gli atomi: l'*elettrone*, il *protone*, ed il *neutrone*. Le loro caratteristiche sono indicate nella tabella seguente.

Particella	Massa	Carica
Elettrone	$m_e = 9.1091 \times 10^{-31}$ kg	$-e$
Protone	$m_p = 1.6725 \times 10^{-27}$ kg	$+e$
Neutrone	$m_n = 1.6748 \times 10^{-27}$ kg	0

Si noti che il neutrone non possiede carica elettrica: comunque, esso ha altre proprietà elettriche, che saranno discusse nel Capitolo 15. Il fatto che la massa del protone sia circa 1840 volte più grande della massa dell'elettrone ha una profonda influenza su numerosi fenomeni fisici.

A questo punto, torniamo alla nostra definizione preliminare di coulomb data nel Paragrafo 2.3 e verifichiamo che il numero di elettroni o protoni necessari per produrre una carica negativa o positiva pari a un coulomb è $1/1.6021 \times 10^{-19} = 6.2418 \times 10^{18}$, che è il numero colà riportato.

Fig. 14–19. Elettrolisi. Gli ioni si muovono sotto l'azione del campo elettrico prodotto dagli elettrodi carichi.

Anode = Anodo
Cathode = Catodo
Electric field = Campo elettrico

14.6. *Struttura elettrica della materia.*

Abbiamo ricordato allo studente il fatto più volte osservato che i corpi costituiti da certe sostanze possono essere elettrizzati strofinandoli con pezzi di stoffa o di pelliccia. Molti altri esperimenti di laboratorio indicano che i costituenti basilari di tutti gli atomi sono particelle cariche. Ad esempio, un filamento metallico riscaldato emette elettroni, in modo simile a quello in cui le molecole di un liquido riscaldato vaporizzano. Tale fenomeno è chiamato emissione *termoionica*.

Un altro fenomeno interessante è quello della *elettrolisi*. Supponiamo di produrre un campo elettrico $\mathcal{E}$ (Fig. 14–19) in un sale fuso (quale KHF_2) o in una

for measuring the ratio q/m, so that if q is known, m can be obtained. In this way several fundamental particles have been identified.] For the present, we may indicate that basically there are three fundamental building blocks or particles entering into the structure of all atoms: the *electron*, the *proton*, and the *neutron*. Their characteristics are outlined in the following table.

Particle	Mass	Charge
Electron	$m_e = 9.1091 \times 10^{-31}$ kg	$-e$
Proton	$m_p = 1.6725 \times 10^{-27}$ kg	$+e$
Neutron	$m_n = 1.6748 \times 10^{-27}$ kg	0

Note that the neutron carries no electric charge; however, it does have other electrical properties, which will be discussed in Chapter 15. The fact that the proton mass is about 1840 times larger than the electron mass has a profound influence in many physical phenomena.

At this point let us go back to our preliminary definition of the coulomb given in Section 2.3 and verify that the number of electrons or protons necessary in order for there to be a negative or positive charge equal to one coulomb is $1/1.6021 \times 10^{-19} = 6.2418 \times 10^{18}$, which is the figure given there.

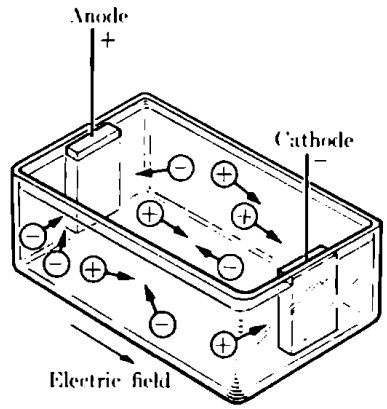


Fig. 14–19. Electrolysis. Ions move under the action of the electric field produced by the charged electrodes.

14.6 *Electrical Structure of Matter*

We have reminded the student of the frequently observed fact that bodies of certain substances can be electrified by rubbing them with cloth or fur. Many other laboratory experiments point to the fact that the basic constituents of all atoms are charged particles. For example, when a metallic filament is heated, it emits electrons, just as molecules are vaporized when a liquid is heated. This phenomenon is called *thermionic* emission.

Another interesting phenomenon is that of *electrolysis*. Let us suppose that an electric field $\mathcal{E}$ is produced (Fig. 14–19) in a molten salt (such as KHF_2) or in a

soluzione contenente un acido (come HCl), una base (come NaOH), o un sale (come NaCl). Il campo elettrico viene prodotto immergendo nella soluzione due sbarre o piastre, dette *elettrodi*, caricate elettricamente in modo opposto. Osserviamo allora che le cariche elettriche fluiscono, e che certi tipi di atomi carichi si muovono verso l'elettrodo positivo, o *anodo*, ed altri verso quello negativo, o *catodo*. Questo fenomeno suggerisce che le molecole della sostanza disciolta si siano separate (o dissociate) in due tipi di parti elettricamente cariche, o ioni. Alcuni sono carichi positivamente e si muovono nella direzione del campo elettrico; altri sono carichi negativamente e si muovono in direzione opposta a quella del campo elettrico. Ad esempio nel caso del NaCl, gli atomi Na si muovono verso il catodo e pertanto costituiscono ioni positivi, detti *cationi*, mentre gli atomi Cl vanno verso l'anodo e sono quidi ioni negativi, detti *anioni*. La dissociazione può essere scritta nella forma

Poichè le molecole normali di NaCl non mostrano alcuna palese carica elettrica, possiamo assumere che esse siano costituite in egual quantità di cariche positive e negative. Quando le molecole di NaCl si dissociano, le cariche non vengono spartite in parti eguali. Una parte della molecola assume un eccesso di carica negativa e l'altra un eccesso di carica positiva. Ciascuna delle due parti è pertanto uno ione. Noi abbiamo posto in evidenza che tutte le cariche sono multiple di una unità fondamentale di carica e. Supponiamo che gli ioni positivi portino una carica $+\nu e$ e che gli ioni negativi una carica $-\nu e$, dove ν è un numero intero da determinarsi. Quando gli ioni arrivano agli elettrodi, si neutralizzano, scambiando la loro carica con la carica disponibile agli elettrodi stessi. Generalmente ha luogo una serie di reazioni chimiche che ora non ci interessa, ma che serve ad identificare la natura degli ioni che si muovono verso ciascun elettrodo.

Dopo un certo tempo t, un certo numero N di atomi di ciascun tipo è andato verso ciascun elettrodo. La carica complessiva Q trasferita a ciascun elettrodo è pertanto, in valore assoluto, $Q = N\nu e$. Posto che m sia la massa di una molecola, la massa totale M depositata ad ambedue gli elettrodi è $M = Nm$. Dividendo la prima relazione per la seconda, si ottiene

Ma se N_A è il *numero di Avogadro* (il numero di molecole in una mole di qualsiasi sostanza), la massa di una mole della sostanza è $M_A = N_A m$. Pertanto, l'Eq. (14.14) può essere scritta nella forma

La quantità

è una costante universale detta *costante di Faraday*. Essa rappresenta la carica di una mole di ioni aventi $\nu = 1$. Il suo valore sperimentale è

solution containing an acid (such as HCl), a base (such as NaOH), or a salt (such as NaCl). We produce this field by immersing in the solution two oppositely charged bars or plates called *electrodes*. We then observe that electric charges flow, and that certain kinds of charged atoms move toward the positive electrode or *anode*, and others move to the negative electrode or *cathode*. This phenomenon suggests that the molecules of the dissolved substance have separated (or dissociated) into two different kinds of charged parts, or ions. Some are positively charged and move in the direction of the electric field; others are negatively charged and move in the direction opposite to the electric field. For example, in the case of NaCl, Na atoms move toward the cathode and therefore are positive ions, called *cations*, while the Cl atoms go to the anode and are negative ions, called *anions*. The dissociation may be written in the form

$$\mathrm{NaCl} \rightarrow \mathrm{Na}^+ + \mathrm{Cl}^-.$$

Since the normal molecules of NaCl do not exhibit any obvious electrical charge, we may assume that they are composed of equal amounts of positive and negative charges. When the NaCl molecules dissociate, the charges are not split evenly. One part of the molecule carries an excess of negative electricity, and the other part an excess of positive electricity. Each of the two parts is thus an ion. We have indicated that all charges are multiples of a fundamental unit charge e. Let us suppose that the positive ions carry a charge $+\nu e$ and the negative ions a charge $-\nu e$, where ν is an integer to be determined later. When the ions arrive at each electrode, they become neutralized by exchanging their charge with the charge available at the electrodes. Usually there follows a series of chemical reactions that are of no concern to us here, but that serve to identify the nature of the ions that move to each electrode.

After a certain time t, a number N of atoms of each kind has gone to each electrode. The total charge Q transferred at each electrode is then, in absolute value, $Q = N\nu e$. Assuming that m is the mass of each molecule, the total mass M deposited at both electrodes is $M = Nm$. Dividing the first relation by the second, we have

$$Q/M = \nu e/m. \tag{14.14}$$

But if N_A is *Avogadro's constant* (the number of molecules in one mole of any substance), the mass of one mole of the substance is $M_A = N_A m$. Therefore Eq. (14.14) can be written in the form

$$\frac{Q}{M} = \frac{\nu e}{m} = \frac{N_A \nu e}{N_A m} = \frac{F\nu}{M_A}. \tag{14.15}$$

The quantity

$$F = N_A e \tag{14.16}$$

is a universal constant called the *Faraday constant*. It represents the charge of one mole of ions having $\nu = 1$. Its experimental value is

$$F = 9.6487 \times 10^4 \text{ C mole}^{-1}. \tag{14.17}$$

Dal valore di questa costante e da quello precedentemente trovato di e, otteniamo per il numero di Avogadro

valore in accordo con calcoli eseguiti con procedimenti differenti.

L'Eq. (14.15) è stata verificata sperimentalmente e si è trovato che v è uguale alla *valenza chimica* degli ioni interessati. Il fatto che v sia pari alla valenza chimica suggerisce che due atomi, legandosi per formare una molecola, scambiano una carica ve, divenendo l'uno ione positivo e l'altro ione negativo. I due ioni sono tenuti insieme dall'interazione elettrica. Possiamo anche con sicurezza ritenere che le particelle scambiate siano elettroni, essendo questi assai più leggeri dei protoni e perciò più mobili. Dobbiamo considerare questa raffigurazione di legame chimico, detto legame *ionico*, alla stregua di una discussione preliminare suscettibile di ulteriori revisioni e critiche.

Nel Paragrafo 13.9, abbiamo mostrato che le interazioni gravitazionali non sono sufficientemente intense per produrre la forza attrattiva necessaria a legare due atomi per formare una molecola o due molecole per formare un corpo materiale, essendo deboli per un fattore 10^{35}. Confrontiamo ora l'ordine di grandezza delle forze gravitazionali ed elettriche. A parità di distanze, la forza di natura elettrica è determinata dal fattore $q_1q_2/4\pi\epsilon_0$, e quella gravitazionale da $\gamma m_1 m_2$. Pertanto

$$\frac{\text{Interazione elettrica}}{\text{Interazione gravitazionale}}$$

Per ottenere l'ordine di grandezza, poniamo $q_1 = q_2 = e$ e $m_1 = m_2 = m_p$, per cui per due protoni o due ioni idrogeno.

$$\frac{\text{Interazione elettrica}}{\text{Interazione gravitazionale}} =$$

Questo valore è circa pari a quello di cui le forze gravitazionali mancano per produrre l'interazione richiesta. Nel caso di interazione tra un protone ed un elettrone ($m_1 = m_p$, $m_2 = m_e$), il fattore di cui sopra è ancor più grande: 2.76×10^{40}. Possiamo quindi concludere che

> *l'interazione elettrica è dell'ordine di grandezza richiesto per produrre il legame tra atomi per formare molecole, o tra elettroni e protoni per formare atomi.*

La conclusione è ora ovvia. I processi chimici (ed in generale, il comportamento dei corpi materiali) sono dovuti alle interazioni elettriche tra atomi e molecole. Una profonda conoscenza della struttura elettrica degli atomi e delle molecole è pertanto essenziale per spiegare i processi chimici e, in generale, per spiegare tutti i fenomeni che quotidianamente osserviamo sia nella materia inerte che in quella vivente. Lo scopo delle scienze fisiche è, come abbiamo detto nel Capitolo 1, di renderci capaci di capire la struttura dei componenti fondamentali della materia e di spiegare, in base alle loro interazioni, il comportamento dei corpi materiali. Per completare questo programma

From this value and the one previously found for e, we obtain for Avogadro's constant

$$N_A = 6.0225 \times 10^{23}\ \text{mole}^{-1}, \tag{14.18}$$

in agreement with other calculations of this constant.

Equation (14.15) has been verified experimentally, and it has been found that v is equal to the *chemical valence* of the ion concerned. The fact that v is the chemical valence suggests that two atoms, when they bind together to make a molecule, exchange the charge ve, one becoming a positive ion and the other a negative ion. The electrical interaction between the two ions holds them together. We may also safely assume that the electrons are the particles that are exchanged, since they are much lighter than the protons and more easily moved. We must consider this picture of chemical binding, called *ionic* binding, as being only a preliminary discussion and subject to further revision and criticism.

In Section 13.9 we indicated that gravitational forces were not strong enough to produce the attraction necessary to bind two atoms together to make a molecule, or two molecules together to form a piece of matter, and that they were short by a factor of 10^{35}. Let us now compare the order of magnitude of the electrical and gravitational forces. Assuming that the distances are the same, the strength of the electrical interaction is determined by the coupling constant $q_1q_2/4\pi\epsilon_0$, and that of the gravitational interaction by $\gamma m_1 m_2$. Therefore

$$\frac{\text{Electrical interaction}}{\text{Gravitational interaction}} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0\gamma m_1 m_2}.$$

To obtain the order of magnitude, we set $q_1 = q_2 = e$ and $m_1 = m_2 = m_p$, so that for two protons or two hydrogen ions,

$$\frac{\text{Electrical interaction}}{\text{Gravitational interaction}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\gamma m_p^2} = 1.5 \times 10^{36}.$$

This is just about the same as the factor by which the gravitational forces fell short of producing the required interaction. For the interaction between a proton and an electron ($m_1 = m_p$, $m_2 = m_e$), the above ratio is even larger: 2.76×10^{40}. Therefore we conclude that

> *the electrical interaction is of the order of magnitude required to produce the binding between atoms to form molecules, or the binding between electrons and protons to form atoms.*

The conclusion now is obvious: Chemical processes (and in general the behavior of matter in bulk) are due to electrical interactions between atoms and molecules. A thorough understanding of the electrical structure of atoms and molecules is thus essential for explaining chemical processes and, in general, for explaining all the phenomena we currently observe around us, in both inert and living matter. The aim of the science of physics is, as we said in Chapter 1, to enable us to understand the structure of the fundamental constituents of matter and to explain, in terms of their interactions, the behavior of matter in bulk. To fulfill this program,

noi dobbiamo innanzitutto capire le interazioni di tipo elettrico. Per questo motivo molti dei successivi capitoli saranno dedicati ai fenomeni elettrici.

Ogniqualvolta sono presenti corpi elettricamente carichi, le forze gravitazionali sono in genere trascurabili. Le forze gravitazionali sono importanti solo quando si ha a che fare con corpi dotati di massa e privi di carica elettrica, o la cui carica sia molto piccola. Tale è il caso del moto dei pianeti o del moto dei corpi in vicinanza della superficie terrestre.

14.7 Struttura dell'atomo

Da quanto detto nel paragrafo precedente, lo studente avrà compreso come il capire la struttura dell'atomo sia uno dei problemi fondamentali della fisica. Cerchiamo pertanto di raccogliere alcune idee preliminari e costruire un soddisfacente modello dell'atomo. Noi sappiamo che generalmente gli atomi sono elettricamente neutri, poichè i corpi materiali non esercitano forze elettriche. Pertanto gli atomi debbono contenere eguali quantità di carica positiva e negativa, o in altri termini egual numero di elettroni e di protoni. Il numero eguale di protoni ed elettroni è detto *numero atomico* ed è indicato col simbolo Z. Pertanto l'atomo consiste in una carica positiva $+Ze$ dovuta ai protoni ed una eguale carica negativa dovuta agli elettroni.

Vengono in mente due possibili modelli di atomo. Nel primo, possiamo assumere che i protoni, più pesanti degli elettroni, siano raggruppati intorno al centro dell'atomo, formando una specie di *nucleo*, intorno a cui ruotano gli elettroni, come nel nostro sistema planetario. Nell'altro modello, i protoni, distribuiti in tutto il volume dell'atomo, e gli elettroni che si muovono in mezzo ad essi, formano una specie di miscela gassosa di cariche positive e negative detta *plasma*. Il primo modello appare più attraente a causa della nostra familiarità col sistema solare. Comunque, oltre ad altre difficoltà cui ci conduce questo modello, resta da spiegare come possono stare uniti i protoni nel nucleo nonostante le intense repulsioni di natura elettrica. Questa complicazione richiede l'esistenza di altre interazioni oltre a quelle di tipo elettrico.

Per chiarire la distribuzione degli elettroni e dei protoni nell'atomo, dobbiamo esplorare sperimentalmente l'interno dell'atomo inviando un fascio di particelle cariche veloci, quali ioni idrogeno (cioè protoni) o ioni elio (cioè *particelle* α) contro l'atomo ed osservando le interazioni prodotte. Si tratta di un esperimento di *diffusione*, le cui basi analitiche sono già state presentate nel Capitolo 7. Considerazioni di simmetria ci suggeriscono di considerare gli atomi sferici, con raggio dell'ordine di 10^{-10} m, come già precedentemente indicato. Poichè le interazioni elettriche seguono la legge $1/r^2$, valgono per il campo elettrico i medesimi risultati ottenuti nel Paragrafo 13.7 per il campo gravitazionale. È solo necessario sostituire $qq'/4\pi\epsilon_0$ a $\gamma mm'$ o $q/4\pi\epsilon_0$ a γm. Pertanto, una sfera carica di raggio a, avente una carica Q distribuita su tutto il volume, produce nei punti esterni ad essa ($r > a$) un campo elettrico dato da

we must first understand electrical interactions. For that reason most of the succeeding chapters will be devoted to electrical phenomena.

Whenever electrically charged bodies are present, gravitational forces are in general negligible. Gravitational forces are important only when we deal with massive bodies with no net electrical charge, or very small charge compared with their masses. This is the case for planetary motion or the motion of bodies near the earth's surface.

14.7 Atomic Structure

The student will have gathered, from what was said in the previous section, that understanding atomic structure is one of the basic problems of physics. Let us therefore obtain some preliminary ideas and devise a satisfactory model of the atom. We know that atoms are normally electrically neutral, since matter in bulk does not exhibit gross electrical forces. Therefore atoms must contain equal amounts of positive and negative electricity, or in other words equal numbers of protons and electrons. The equal number of protons and electrons is called the *atomic number* and is designated by Z. Therefore the atom consists of a positive charge $+Ze$ due to the protons and an equal negative charge due to the electrons.

Two possible models for an atom come to our mind. In one we may assume that the protons, being more massive than the electrons, are clustered around the center of mass of the atom, forming a sort of *nucleus*, and the electrons are revolving around it, as in our planetary system. In the other model the protons may be spread over all the volume of the atom, with the electrons moving between them, forming a sort of gaseous mixture of positive and negative charges called a *plasma*. The first model is more appealing because of our familiarity with the solar system. However, among other difficulties we have to face with this model, we have to explain how the protons are held together in the nucleus in spite of their strong electrical repulsion. This complication requires the existence of other interactions in addition to the electrical interaction.

To elucidate the distribution of electrons and protons in an atom, we must probe the interior of the atom experimentally by sending a stream of fast charged particles such as hydrogen ions (that is, protons) or helium ions (called *alpha particles*) against the atom and observing the interactions produced. The experiment is one of *scattering*, of which the basic mathematical framework has already been presented in Chapter 7. Symmetry suggests that we may consider atoms as spherical, with a radius of the order of 10^{-10} m, as has been indicated previously. Because the electrical interactions follow a $1/r^2$ law, the results proved in Section 13.7 for the gravitational field also hold true for the electric field. It is only necessary to replace $\gamma mm'$ by $qq'/4\pi\epsilon_0$ or γm by $q/4\pi\epsilon_0$. Therefore a charged sphere of radius a with the charge Q uniformly distributed throughout all its volume produces an electric field at all exterior points ($r > a$) given by

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \qquad r > a, \tag{14.19}$$

ed un campo elettrico nei punti interni ($r < a$) dato da

Questo campo è rappresentato in Fig. 14–20.

Nel modello a plasma, il raggio a è pari al raggio atomico e la carica effettiva Q è molto piccola, poichè le cariche protoniche positive e quelle elettroniche negative sono mescolate uniformemente. La deflessione subìta da particelle di carica q che si avvicinano all'atomo senza attraversarlo è calcolabile utilizzando l'Eq. (7.42), con $k = Qq/4\pi\epsilon_0$, e si ottiene

In questo caso il parametro d'urto b deve essere maggiore del raggio atomico $a \sim 10^{-10}$m. Nell'ipotesi che le particelle abbiano un'energia dell'ordine di 1.6×10^{-13} J, o un MeV (il che è nel campo delle energie ottenibili in laboratorio per questo tipo di esperimenti), e che Q e q siano dell'ordine di e, troviamo che ϕ è inferiore a 30″ di arco. In pratica, perciò, non si ha deflessione. Per valori più piccoli di b, se la particella incidente ha energia sufficiente per penetrare all'interno dell'atomo, immediatamente sente un campo decrescente e l'Eq. (14.21) non è più applicabile. Ma allora la deflessione, anziché risultare più forte, rimane ancora molto piccola, poichè il campo elettrico diviene più debole. In altri termini, il modello a plasma non può spiegare forti deflessioni delle particelle bombardanti. In effetti, sperimentalmente, si trova che molte particelle vengono deflesse a grandi angoli ed in alcuni casi anche di 180°. Pertanto, *dobbiamo* scartare il modello a plasma sulla base di questo semplice ma conclusivo esperimento.

Consideriamo ora il modello nucleare in cui tutti i protoni sono raggruppati in una ristretta regione attorno al centro dell'atomo (Fig. 14–21). In tal caso, l'Eq. (14.21) rimane valida per valori

$$\mathcal{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3}, \qquad r < a. \tag{14.20}$$

This field is represented in Fig. 14–20.

In the plasma model, the radius a is the same as the atomic radius and the effective charge Q is very small because the positive proton charges and the negative electron charges are mixed together uniformly. The deflection experienced by particles of charge q approaching the atom, but not passing through it, is computed by using Eq. (7.42), with $k = Qq/4\pi\epsilon_0$, resulting in

$$\cot \tfrac{1}{2}\phi = \frac{4\pi\epsilon_0 m v_0^2}{Qq} b. \tag{14.21}$$

In this case the impact parameter b must be larger than the atomic radius $a \sim 10^{-10}$ m. Assuming particles with an energy of the order of 1.6×10^{-13} J, or one MeV (which is in the range of energies available in the laboratory for this kind of experiment), and that Q and q are of the order of e, we find that $\cot \frac{1}{2}\phi$ is less than 30″ of an arc. Practically speaking, then, there is no deflection. For smaller values of b, if the impinging particle has enough energy to penetrate the inside of the atom, it immediately feels a decreasing field and Eq. (14.21) is no longer applicable. But then the deflection, instead of being larger, is again very small, because of the smaller field. In other words, the plasma model cannot account for very large deflections of the bombarding particles. However, experimentally it is found that many particles are deflected at large angles and in some cases even through 180°. Therefore we *must* rule out the plasma model on the basis of this simple but conclusive experiment.

Consider now the nuclear model, in which all protons are clustered in a very small region at the center of the atom (Fig. 14–21). Then Eq. (14.21) holds for values

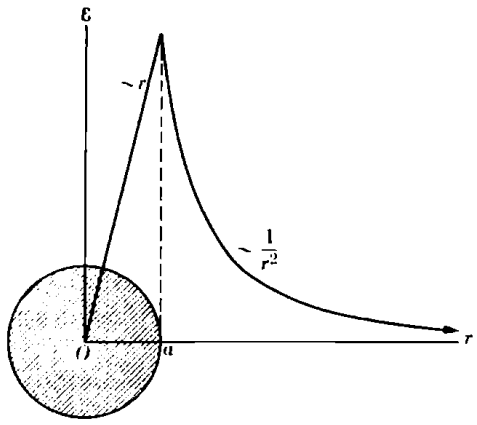


Fig. 14–20. Campo elettrico di una sfera carica di raggio a.

Fig. 14–20. Electric field of a charged sphere of radius a.

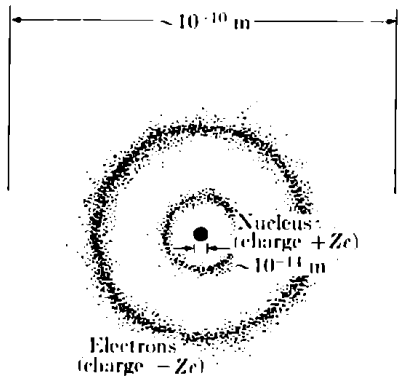


Fig. 14–21. Distribuzione degli elettroni in un atomo.

Fig. 14–21. Electron distribution in an atom.

Nucleus = Nucleo
charge $+Ze$ = carica $+Ze$
Electrons = Elettroni
charge $-Ze$ = carica $-Ze$

di b molto più piccoli del raggio atomico, e pertanto sono possibili forti deflessioni. A questo punto osserviamo che gli elettroni muovendosi rapidamente "schermano" la carica nucleare positiva rispetto ad ogni particella carica che si trovi esternamente al raggio atomico, riducendo così la carica nucleare effettiva. Il risultato netto è che, per valori di b maggiori di 10^{-10}m, il modello nucleare e il modello a plasma si comportano in modo essenzialmente identico. Per valori inferiori di b, invece, si ottengono deflessioni più forti per il modello nucleare, che risulta perciò assai differente da quello a plasma. Ad esempio, per $b \sim 10^{-14}$m e $Q \sim 10e$, utilizzando il medesimo valore di energia di prima, si ottiene $\cot \frac{1}{2}\phi \sim 1$, cioè $\phi \sim 90°$.

Nel modello nucleare, $Q = Ze$, e ponendo per la particella incidente $q = \nu e$ ($\nu = 1$ per i protoni, $\nu = 2$ per le particelle α), si ottiene, dall'Eq. (14.21),

Nella realizzazione sperimentale, si dirigono parecchie particelle contro un foglio sottile e si osservano le deflessioni subìte. Poichè non si può controllare b, essendo impossibile mirare ad un particolare atomo, si deve fare un'analisi statistica per interpretare i risultati sperimentali.

Supponiamo di disporre di un sottile foglio metallico di spessore t, contenente n atomi della sostanza diffondente per unità di volume. Se sul foglio incidono N particelle per unità di superficie, alcune di esse passeranno vicino ad un atomo del foglio (parametro d'urto piccolo) subendo una forte deflessione. Altre passeranno a distanze sufficientemente grandi (grande parametro d'urto) e saranno poco deflesse. Il risultato di un'analisi statistica mostra (vedi Esempio 14.4) che il numero dN di particelle deviate in un angolo solido $d\Omega$ (in corrispondenza ad angoli di diffusione compresi tra ϕ e $\phi + d\phi$, relativamente alla direzione d'incidenza) è dato da

Il segno negativo è dovuto al fatto che dN rappresenta il numero di particelle sottratte al fascio incidente in seguito alla diffusione, e ciò corrisponde ad una diminuzione di N.

Il risultato previsto dall'Eq. (14.22) è che le particelle diffuse per unità di angolo solido sono distribuite, statisticamente, secondo la legge $\csc^4 \frac{1}{2}\phi$. La verifica per tutti i valori dell'angolo di deflessione di questa previsione costituisce pertanto la prova indiretta che l'intera carica è concentrata vicino al centro dell'atomo. Tale prova è stata ottenuta per la prima volta nel corso degli esperimenti condotti nel periodo 1911–1913 da H. Geiger ed E. Marsden, sotto la guida del fisico inglese Ernest Rutherford (1871–1937). Questi esperimenti costituirono la base del modello nucleare dell'atomo, che fu d'allora in poi accettato come quello valido.

Per ciascun valore del parametro d'urto b, esiste una distanza di massimo avvicinamento della particella incidente dal centro dell'atomo. La distanza minima si ha per $b = 0$. Calcoli di questa distanza, relativamente a differenti condizioni sperimentali, eseguiti con metodi dinamici (vedi Esempio 14.5), indicano che essa è dell'ordine di 10^{-14} m per energie dell'ordine di 10^{-13} J (o un MeV). Questa

of b much smaller than the atomic radius, and large deflections are possible. Here we recognize that the rapidly moving electrons "screen" the positive nuclear charge from any charged particle that is outside the radius of the atom, thus reducing the effective nuclear charge. The net result is that, at values of b greater than 10^{-10} m from the center, the nuclear atom and the plasma atom are essentially the same. At smaller values of b, however, larger deflections may occur in the nuclear model, making it quite different from the plasma model. For example, for $b \sim 10^{-14}$ m and $Q \sim 10e$, using the same energy value as before, we obtain $\cot \frac{1}{2}\phi \sim 1$ or $\phi \sim 90°$.

In the nuclear model, $Q = Ze$, and setting $q = \nu e$ for the bombarding particle ($\nu = 1$ for protons, $\nu = 2$ for α-particles), we have, from Eq. (14.21),

$$b = \frac{\nu Z e^2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2} \cot \tfrac{1}{2}\phi.$$

In the experimental arrangement several particles are directed against a very thin foil and the deflections are observed. Since b cannot be controlled because it is impossible to aim directly at a particular atom, we must make a statistical analysis to interpret the experimental results.

Suppose that we have a thin metallic foil of thickness t, having n atoms of the scattering material per unit volume. If N particles per unit area of the foil impinge on the foil, some will pass close to an atom of the foil (small impact parameter), thereby suffering a large deflection. Some will pass at a relatively large distance from the atoms in the foil (large impact parameter) and suffer a small deflection. The result of a statistical analysis (see Example 14.4) shows that the number of particles dN deviated within the solid angle $d\Omega$ (corresponding to the scattering angles ϕ and $\phi + d\phi$ relative to the direction of incidence) is given by

$$\frac{dN}{d\Omega} = -\frac{N n \nu^2 Z^2 e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 v_0^4} \csc^4 \tfrac{1}{2}\phi. \tag{14.22}$$

The negative sign is due to the fact that dN represents the particles removed from the incident beam as a consequence of scattering, and this removal corresponds to a decrease in N.

The result predicted by Eq. (14.22) is that the particles scattered per unit solid angle must be distributed, statistically, according to a $\csc^4 \frac{1}{2}\phi$ law. To verify this prediction for all angles is thus to prove indirectly that all positive charge is concentrated near the center of the atom. This proof was obtained by experiments performed for the first time during the period 1911–1913 by H. Geiger and E. Marsden, under the direction of the British physicist Ernest Rutherford (1871–1937). These experiments were the foundation for the nuclear model of the atom, which has been accepted since then as the correct one.

For each value of the impact parameter b, there is a distance of closest approach at which the bombarding particle is closest to the center. The minimum distance occurs for $b = 0$. Calculation of this distance for different experimental conditions, using dynamical methods (see Example 14.5), indicates that this distance is of the order of 10^{-14} m for energies of the order of 10^{-13} J (or one MeV). This

distanza fornisce un limite superiore del raggio del nucleo atomico. Possiamo quindi concludere che i protoni sono concentrati in una regione avente dimensioni dell'ordine di 10^{-14} m. Se si considera che il raggio atomico è dell'ordine di 10^{-10} m, si vede che la maggior parte del volume atomico è occupata dagli elettroni in moto, ed in pratica è vuota.

Per piccolissimi valori del parametro d'urto ed alte energie, quando la particella incidente passa assai vicino al nucleo, si osserva che la legge $\csc^4 \frac{1}{2}\phi$ non è più rispettata. Ciò indica la presenza di altre interazioni: le *forze nucleari*. Analizzando le discrepanze rispetto alla pura diffusione coulombiana data dalla Eq. (14.22), si ottengono utili informazioni circa le forze nucleari.

Gli atomi più semplici e leggeri sono gli atomi di idrogeno. La loro massa è pari a quella di un protone più un elettrone. Si può quindi concludere che un atomo di idrogeno è composto da un elettrone che ruota intorno a un protone. In tal caso, $Z = 1$; il nucleo dell'atomo di idrogeno consiste quindi in un solo protone (questa può anche essere considerata la definizione di protone). Poichè l'elettrone è soggetto ad una forza attrattiva del tipo $1/r^2$, possiamo attenderci, per la stessa ragione fornita nel caso del moto dei pianeti nel Capitolo 13, che le orbite siano ellittiche ed il protone occupi uno dei fuochi. Prima di poter discutere delle orbite elettroniche è, però, necessario poter disporre di tecniche particolari in quanto alcune peculiari caratteristiche le rendono differenti dalle orbite dei pianeti. Queste tecniche consistono nella meccanica quantistica. Possiamo però introdurre in anticipo due dei risultati più importanti della meccanica quantistica:

(1) *L'energia associata al moto degli elettroni è quantizzata.* Ciò significa che l'energia degli elettroni può assumere solo certi valori $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$. Gli stati corrispondenti a questi valori dell'energia sono detti *stati stazionari*. Lo stato corrispondente al livello di energia più basso è detto *stato fondamentale*. La determinazione dell'energia degli stati stazionari costituisce uno dei compiti della meccanica quantistica. Poichè l'energia (nel senso classico) determina le "dimensioni" dell'orbita, ne risulta che il moto dell'elettrone può avvenire solo in certe regioni di spazio. Questo è schematicamente indicato, in Fig. 14–21, dalle regioni ombreggiate.

(2) *Il momento della quantità di moto associato al moto dell'elettrone è quantizzato sia in modulo che in direzione.* Ciò significa che il modulo del momento della quantità di moto di un elettrone può assumere solo certi valori discreti e che il vettore momento della quantità di moto può assumere solo certe particolari orientazioni. Quest'ultima proprietà è talvolta chiamata *quantizzazione spaziale*. Per usare ancora una terminologia classica, potremmo interpretare questa seconda caratteristica dicendo che le orbite elettroniche possono assumere solo certe "forme" particolari.

Nel caso di atomi più pesanti di quello dell'idrogeno, la massa complessiva risulta maggiore della massa degli Z protoni costituenti il nucleo. La differenza può essere attribuita alla presenza nel nucleo di *neutroni*. Il numero totale di particelle contenute nel nucleo è detto *numero di massa*, ed è indicato con la lettera A. Pertanto, un atomo ha Z elettroni, Z protoni, ed $A - Z$ neutroni. I neutroni sono apparentemente necessari per rendere stabile il nucleo. Se i protoni fossero unicamente soggetti alle mutue interazioni elettriche, si respingerebbero, essendo tutti carichi positivamente. Il fatto che essi possano coesistere in un nucleo indica che, oltre alle interazioni elettriche, esistono altre interazioni assai intense, corrispondenti alle cosiddette *forze nucleari*, che equilibrano le repulsioni elettriche. I neutroni contribuiscono alle forze nucleari

distance gives an upper limit for the radius of the atomic nucleus. Therefore we conclude that the protons are concentrated in a region whose dimensions are of the order of 10^{-14} m. When we consider the fact that the atomic radius is of the order of 10^{-10} m, we realize that most of the atomic volume is occupied by the moving electrons, and is in fact empty.

For very small values of the impact parameter and high energy, when the incoming particle comes very close to the nucleus, we observe that the $\csc^4 \frac{1}{2}\phi$ law is not followed. This indicates the presence of other interactions, the *nuclear forces*. By analyzing the discrepancies from the pure coulomb scattering given by Eq. (14.22), we obtain valuable information about nuclear forces.

The simplest and lightest of all atoms are hydrogen atoms. Their mass is equal to that of a proton plus an electron. Therefore we conclude that a hydrogen atom is composed of one electron revolving around a single proton. Then $Z = 1$, and the nucleus of the hydrogen atom is just one proton (this may also be taken as the definition of a proton). Since the electron is subject to a $1/r^2$ attractive force, we may expect, for the same reason given in Chapter 13 for planetary motion, that the orbits will be ellipses, with the proton at one focus. Electron orbits, however, require that we have special techniques before we can discuss them, since there are some special features that make them different from planetary orbits. These techniques correspond to quantum mechanics. However, we may state, in advance, two of the most important results of quantum mechanics:

(1) *The energy of electronic motion is quantized.* This means that the energy of the electrons can have only certain values $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$. The states corresponding to these energies are called *stationary states*. The state having the lowest possible energy is the *ground state*. To determine the energies of the stationary states is one of the tasks of quantum mechanics. Since the energy (in a classical sense) determines the "size" of the orbit, only certain regions of space are available for the electronic motion. This is indicated schematically by the shaded region in Fig. 14–21.

(2) *The angular momentum of the electronic motion is quantized both in magnitude and direction.* This means that the magnitude of the angular momentum of an electron may have only certain discrete values and that, since angular momentum is a vector, it can point only along certain directions. This last property is sometimes referred to as *space quantization*. To use classical terminology again, we may interpret this second property as implying that the electron orbits can attain only certain "shapes."

For atoms heavier than hydrogen, the mass is greater than the mass of the Z protons they contain. The difference may be attributed to the presence of *neutrons* in the nucleus. The total number of particles in a nucleus is called the *mass number*, and is designated by A. Therefore an atom has Z electrons, Z protons, and $A - Z$ neutrons. Neutrons are apparently necessary to stabilize the nucleus. If protons were subject to their own electrical interaction alone, they would repel each other, since they are all charged positively. The fact that they stay together in a nucleus indicates that besides their electrical interaction, there are other very strong interactions, corresponding to the so-called *nuclear forces*, which counterbalance the electrical repulsion. The neutrons contribute to the nuclear forces

senza aggiungere repulsione elettrica, producendo quindi un effetto stabilizzante. A questo punto, dobbiamo dire che la nostro conoscenza delle forze nucleari non è altrettanto completa quanto quella delle forze elettriche.

Poichè il comportamento chimico di un atomo è dovuto ad effetti elettrici, esso è determinato dal numero atomico Z. Ciascun elemento chimico è costituito da atomi aventi tutti il medesimo numero atomico Z. Possono aversi, però, a pari valore di Z differenti valori del numero di massa A. In altri termini, ad un dato numero di protoni in un nucleo possono corrispondere diversi numeri di neutroni. Atomi aventi ugual numero atomico ma differente numero di massa sono detti *isotopi*. Essi corrispondono ad un unico elemento chimico. Differenti isotopi di un elemento chimico sono indicati col simbolo dell'elemento (il quale identifica pure il numero atomico) insieme ad un numero soprascritto a sinistra indicante il numero di massa. Ad esempio, l'idrogeno ($Z = 1$) ha tre isotopi: ^{1}H,^{2}H o deuterio, e ^{3}H o trizio. Parimenti, due dei più importanti isotopi del carbonio ($Z = 6$) sono ^{12}C e ^{14}C. L'isotopo ^{12}C è quello usato per definire l'unità atomica di massa.

ESEMPIO 14.4. Dedurre l'Eq. (14.22) per la diffusione coulombiana.

Soluzione: Sia n il numero di atomi per unità di volume del materiale diffusore. Allora, nt sarà il numero di atomi diffusori in un foglio sottile di spessore t ed area unitaria. Il numero di atomi contenuti in un anello di raggio b e spessore db (e pertanto area $2\pi b\,db$) sarà $(nt)(2\pi nb\,db)$, come mostrato in Fig. 14–22. Se sul foglio incidono N particelle per unità d'area, il numero di atomi aventi il parametro d'urto compreso tra b e $b + db$ è $dN = N(nt)(2\pi nb\,db)$. Ma, differenziando l'espressione precedentemente scritta per il parametro d'urto b, si ottiene $db = -\frac{1}{2}(vZe^2/4\pi\epsilon_0 mv_0^2)\csc^2\frac{1}{2}\phi d\phi$. Pertanto.

Per gli atomi leggeri, dobbiamo sostituire alla massa m della perticella la massa ridotta del sistema particella più atomo.

Se tracciamo due coni, di apertura rispettivamente ϕ e $\phi + d\phi$, aventi come vertice l'atomo (Fig. 14–23), tutte le particelle date dall'Eq. (14.23) saranno deflesse nell'angolo solido compreso tra le due superfici coniche. La misura dell'angolo solido è ottenuta dividendo l'area tratteggiata per il quadrato del raggio. L'area tratteggiata vale $(2\pi r \sin\phi)(r\,d\phi) = 2\pi r^2 \sin\phi\,d\phi$. Pertanto, a causa della definizione (2.7),

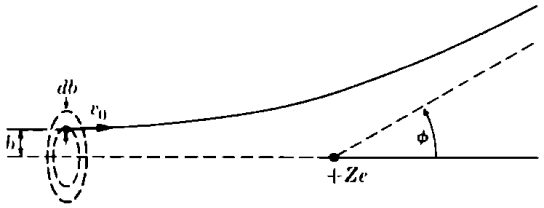


Fig. 14–22. Deflessione di uno ione positivo causata dalla repulsione coulombiana del nucleo.

Figura 14–23

without adding electrical repulsion, thus producing a stabilizing effect. We may say at this point that our knowledge of nuclear forces is not as complete as our knowledge of electrical forces.

The chemical behavior of an atom, since it is an electrical effect, is determined by the atomic number Z. Thus each chemical element is composed of atoms having the same atomic number Z. However, for a given Z there may be several values of the mass number A. In other words, to a given number of protons in a nucleus there may correspond different numbers of neutrons. Atoms having the same atomic number but different mass number are called *isotopes*. They all correspond to the same chemical element. Different isotopes of a chemical element are designated by the symbol of the chemical element (which also identifies the atomic number) along with a superscript to the left which indicates the mass number. For example, hydrogen ($Z = 1$) has three isotopes: ^{1}H, ^{2}H or deuterium, and ^{3}H or tritium. Similarly, two of the most important isotopes of carbon ($Z = 6$) are ^{12}C and ^{14}C. The isotope ^{12}C is the one used to define the atomic mass unit.

EXAMPLE 14.4. Derive Eq. (14.22) for coulomb scattering.

Solution: Let n be the number of atoms per unit volume of the scatterer. Then nt will be the number of scattering atoms in a thin foil of thickness t and unit area. The number of atoms in a ring of radius b and width db (and therefore of area $2\pi b\,db$) will be $(nt)(2\pi b\,db)$, as shown in Fig. 14–22. If N particles impinge on the unit area of the foil, the number of atoms whose impact parameter is between b and $b + db$ is $dN = N(nt)(2\pi b\,db)$. But differentiating the expression for the impact parameter b given above yields $db = -\frac{1}{2}(vZe^2/4\pi\epsilon_0 mv_0^2)\csc^2\frac{1}{2}\phi\,d\phi$. Therefore

$$dN = -\frac{\pi N n v^2 Z^2 e^4 t}{(4\pi\epsilon_0)^2 m^2 v_0^4} 4\cot\tfrac{1}{2}\phi\csc^2\tfrac{1}{2}\phi\,d\phi. \tag{14.23}$$

For light atoms, we must replace the mass m of the particle by the reduced mass of the system of particle plus atom.

If we draw two cones of angles ϕ and $\phi + d\phi$ around the atom (Fig. 14–23) all particles given by Eq. (14.23) will be deflected through the solid angle between the two conical surfaces. The solid angle is measured by dividing the shaded area by the square of its radius. The shaded area is $(2\pi r \sin\phi)(r\,d\phi) = 2\pi r^2 \sin\phi\,d\phi$. Therefore, in view of defini-

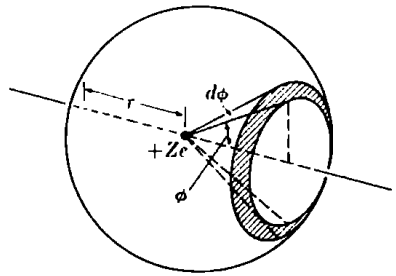


Fig. 14–22. Deflection of a positive ion due to the coulomb repulsion of the nucleus.

Figure 14–23

ed utilizzando la relazione sin $\phi = 2 \sin \frac{1}{2}\phi \cos \frac{1}{2}\phi$, l'angolo solido risulta essere $d\Omega = 2\pi \sin \phi \, d\phi = 4\pi \sin \frac{1}{2}\phi \cos \frac{1}{2}\phi d\phi$. La distribuzione angolare è data dal numero di particelle diffuse per unità d'angolo solido. Pertanto

relazione coincidente con l'Eq. (14.22).

Talvolta, i risultati degli esperimenti di diffusione sono meglio espressi utilizzando il concetto di *sezione d'urto*. La sezione d'urto differenziale per un processo è definita come

Le sbarre verticali indicano che si usa il valore assoluto di $dN/d\Omega$. La quantità $\sigma(\phi)$ rappresenta la probabilità che una particella incidente sia deflessa di un angolo compreso tra ϕ e $\phi + d\phi$. Essa è espressa in unità di area (m^2), poichè n è una densità (m^{-3}) e t una lunghezza (m) (si noti che le unità di N si elidono). Pertanto, sostituendo nell'Eq. (14.24) l'Eq. (14.22), si ottiene la *sezione d'urto differenziale* per la diffusione coulombiana,

ESEMPIO 14.5 Calcolare la distanza di massimo avvicinamento di una particella di carica ve diretta con velocità v_0 verso un atomo di numero atomico Z.

Soluzione: In Figura 14–24, sono mostrate le caratteristiche geometriche del problema. Secondo la nostra discussione nel Paragrafo 13.5, le particelle descrivono un ramo d'iperbole col nucleo + Ze situato nel fuoco più lontano, F'. La distanza di massimo avvicinamento è $R = F'A$. Sia $b = F'D$ il paramento d'urto. Dimostreremo innanzitutto che b è uguale all'asse verticale dell'iperbole OB. L'angolo $\phi = POQ$ tra gli asintoti è l'angolo di cui viene deviata la particella a causa della repulsione coulombiana del nucleo. La distanza $OA = OA' = a$ costituisce l'asse orizzontale, e, dalle proprietà dell'iperbole, si ha che $OF' = OC$. Pertanto, i triangoli $OF'D$ ed OCA' sono uguali, per cui $b = F'D = C'A' = OB$. Dalle caratteristiche geometriche della figura, si deduce che $OF' = b \csc \alpha$ e $OA = a = b \cot \alpha$. Pertanto, $R = F'A = b$ (csc α + cot α). Ma $2\alpha + \phi = \pi$, per cui $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\phi$. Pertanto

Utilizzando il risultato (14.21), con $Q = Ze$ e $q = ve$, si ottiene l'espressione

che dà la distanza di massimo avvicinamento in funzione dell'energia iniziale della particella, $\frac{1}{2}mv_0^2$,

Figura 14–24

tion (2.7), the solid angle is $d\Omega = 2\pi \sin \phi \, d\phi = 4\pi \sin \frac{1}{2}\phi \cos \frac{1}{2}\phi \, d\phi$, where we have used the relation $\sin \phi = 2 \sin \frac{1}{2}\phi \cos \frac{1}{2}\phi$. The angular distribution is given by the number of particles scattered per unit solid angle. Then

$$\frac{dN}{d\Omega} = -\frac{Nnv^2Z^2e^4t}{2(4\pi\epsilon_0)^2m^2v_0^4}\csc^4 \tfrac{1}{2}\phi,$$

which is Eq. (14.22).

Sometimes the results of scattering experiments are better expressed by using the concept of *cross section*. The differential cross section for a process is defined by

$$\sigma(\phi) = \frac{1}{Ntn}\left|\frac{dN}{d\Omega}\right| . \tag{14.24}$$

The vertical bars indicate that we use the absolute value of $dN/d\Omega$. The quantity $\sigma(\phi)$ represents the probability that an incident particle will be deflected through an angle between ϕ and $\phi + d\phi$. It is expressed in units of area (m^2), since n is a density (m^{-3}) and t is a distance (m) (note that the units of N cancel out). Therefore, substituting Eq. (14.22) in Eq. (14.24), we obtain the *differential cross section* for coulomb scattering,

$$\sigma(\phi) = \frac{v^2Z^2e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2m^2v_0^4}\csc^4 \tfrac{1}{2}\phi. \tag{14.25}$$

EXAMPLE 14.5. Obtain the distance of closest approach of a particle of charge ve directed with velocity v_0 against an atom whose atomic number is Z.

Solution: Figure 14–24 shows the geometry of the problem. According to our discussion of Section 13.5, the particle describes a branch of a hyperbola with the nucleus $+Ze$ at the most distant focus F'. The distance of closest approach is $R = F'A$. Let $b = F'D$ be the impact parameter. We shall first prove that b is equal to the vertical axis OB of the hyperbola. The angle $\phi = POQ$ between the two asymptotes is the angle by which the particle has been deviated by the coulomb repulsion of the nucleus. The distance $OA = OA' = a$ is the horizontal axis, and from the properties of the hyperbola we have that $OF' = OC$. Therefore triangles $OF'D$ and OCA' are equal, so that $b = F'D = CA' = OB$. From the geometry of the figure we see that $OF' = b \csc \alpha$ and $OA = a = b \cot \alpha$. Therefore $R = F'A = b(\csc \alpha + \cot \alpha)$. But $2\alpha + \phi = \pi$, so that $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\phi$. Therefore

$$R = b(\sec \tfrac{1}{2}\phi + \tan \tfrac{1}{2}\phi) = \frac{b(1 + \csc \frac{1}{2}\phi)}{\cot \frac{1}{2}\phi}.$$

Using result (14.21), with $Q = Ze$ and $q = ve$, we obtain

$$R = \frac{vZe^2}{4\pi\epsilon_0(mv_0^2)}(1 + \csc \tfrac{1}{2}\phi),$$

which gives the distance of closest approach in terms of the initial energy of the particle, $\frac{1}{2}mv_0^2$,

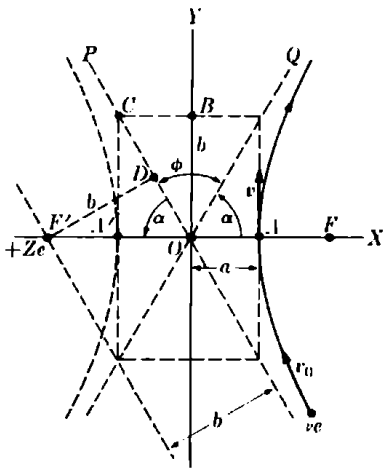


Figure 14–24

e dell'angolo di diffusione ϕ. Nel caso di una collisione frontale, la particella rimbalza ed è deflessa di un angolo pari a π. Pertanto, csc $\frac{1}{2}\phi = 1$ e

Per esempio, sostituendo i valori numerici $\nu = 1$, $Z = 6$ (corrispondente al carbonio), ed $E = \frac{1}{2}mv_0^2 = 1.6 \times 10^{-13}$ J o 1 MeV, si ottiene $R \sim 10^{-14}$m. Questo è proprio l'ordine di grandezza dato prima per le dimensioni del nucleo.

14.8 *Il potenziale elettrico*

Una particella carica, posta in un campo elettrico, possiede, a cuasa dell'interazione col campo, energia potenziale. Il *potenziale elettrico* in un punto è definito come l'energia potenziale posseduta da una carica unitaria posta in quel punto. Indicando il potenziale elettrico con V e l'energia potenziale di una carica q con E_p, si ha

oppure

Il potenziale elettrico è misurato in joule/coulomb o J C^{-1}; a tale unità è stato dato il nome *volt*, abbreviato V in onore dello scienziato italiano Alessandro Volta (1745—1827). In termini delle unità fondamentali, V = m^2 kg s^{-2} C^{-1}.

Si noti che le definizioni di campo elettrico e potenziale elettrico sono simili a quelle di campo gravitazionale e potenziale gravitazionale. Essi sono collegati da una relazione analoga alla Eq. (13.21). Cioè, le componenti cartesiane ortogonali del campo elettrico $\mathcal{E}$ sono date da

O, in generale, la componente secondo la direzione corrispondente allo spostamento ds è

Questo può essere scritto nella forma compatta

come già mostrato nei Capitoli 8 e 13. Per trovare il potenziale elettrico V quando è noto $\mathcal{E}$, e viceversa, si usano le Eq. (14.27) o (14.28).

Consideriamo il caso semplice di un campo elettrico uniforme (Fig. 14—25). La prima delle Eq. (14.27) dà, per un asse X parallelo al campo, $\mathcal{E} = -dV/dx$. Poichè $\mathcal{E}$ è costante, integrando, posto $V = 0$ per $x = 0$, si ha

oppure

and the angle of scattering ϕ. For a head-on collision, the particle bounces back so that it is scattered through an angle equal to π. Therefore csc $\frac{1}{2}\phi = 1$ and

$$R = \frac{\nu Ze^2}{4\pi\epsilon_0(\frac{1}{2}mv_0^2)}.$$

For example, substituting numerical values with $\nu = 1$, $Z = 6$ (corresponding to carbon), and $E = \frac{1}{2}mv_0^2 = 1.6 \times 10^{-13}$ J or 1 MeV, as an illustration, we get $R \sim 10^{-14}$ m. This is just the order of magnitude quoted before for nuclear dimensions.

14.8 Electric Potential

A charged particle placed in an electric field has potential energy because of its interaction with the field. The *electric potential* at a point is defined as the potential energy per unit charge placed at the point. Designating the electric potential by V and the potential energy of a charge q by E_p, we have

$$V = \frac{E_p}{q} \quad \text{or} \quad E_p = qV. \tag{14.26}$$

The electric potential is measured in joules/coulomb or J C^{-1}, a unit called a *volt*, abbreviated V, in honor of the Italian scientist Alessandro Volta (1745–1827). In terms of the fundamental units, V = m^2 kg s^{-2} C^{-1}.

We note that the definitions of electric field and electric potential are similar to those of gravitational field and gravitational potential. They are related in the same way as in Eq. (13.21). That is, the rectangular components of the electric field $\mathcal{E}$ are given by

$$\mathcal{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad \mathcal{E}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad \mathcal{E}_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{14.27}$$

Or, in general, the component along the direction corresponding to a displacement ds is

$$\mathcal{E}_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \tag{14.28}$$

This may be written in the compact form

$$\mathcal{E} = -\text{grad } V, \tag{14.29}$$

as has been shown before in Chapters 8 and 13. Equation (14.27) or (14.28) are used to find the electric potential V when the field $\mathcal{E}$ is known, and conversely.

Let us consider the simple case of a uniform electric field (Fig. 14–25). The first of Eqs. (14.27) gives, for an X-axis which is parallel to the field, $\mathcal{E} = -dV/dx$. Since $\mathcal{E}$ is constant, and we assume $V = 0$ at $x = 0$, by integration we have

$$\int_0^V dV = -\int_0^x \mathcal{E}\,dx = -\mathcal{E}\int_0^x dx \quad \text{or} \quad V = -\mathcal{E}x. \tag{14.30}$$

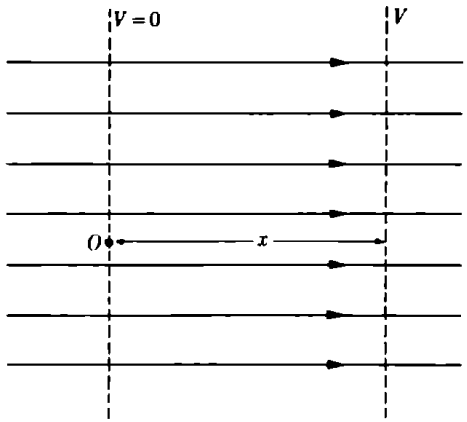


Fig. 14–25. Campo elettrico uniforme.

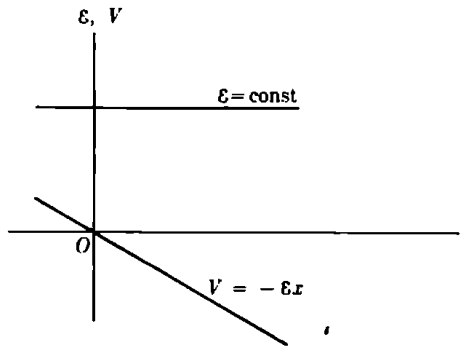


Fig. 14–26. Andamento di $\mathcal{E}$ e V in un campo elettrico uniforme.

Fig. 14–25. Uniform electric field.

Fig. 14–26. Variations of $\mathcal{E}$ and V for a uniform electric field.

Questa utile relazione è stata rappresentata in Fig. 14–26. Si può osservare che, a causa del segno negativo che compare nell'Eq. (14.29) o nell'Eq. (14.30), il campo elettrico è diretto nel senso in cui il potenziale elettrico decresce. Considerando due posizioni x_1 e x_2, l'Eq. (14.30) fornisce $V_1 = -\mathcal{E}x_1$ e $V_2 = -\mathcal{E}x_2$. Sottraendo, si ottiene $V_2 - V_1 = -\mathcal{E}(x_2 - x_1)$; oppure, introducendo $d = x_2 - x_1$, si ha

This is a very useful relation which has been represented graphically in Fig. 14–26. We may note that, because of the negative sign in Eq. (14.29) or Eq. (14.30), the electric field points in the direction in which the electric potential decreases. When we consider two points x_1 and x_2, Eq. (14.30) gives $V_1 = -\mathcal{E}x_1$ and $V_2 = -\mathcal{E}x_2$. Subtracting, we have $V_2 - V_1 = -\mathcal{E}(x_2 - x_1)$; or, calling $d = x_2 - x_1$, we obtain

$$\mathcal{E} = -\frac{V_2 - V_1}{d} = \frac{V_1 - V_2}{d}. \tag{14.31}$$

Sebbene questa relazione sia valida solo per campi elettrici uniformi, essa può essere usata per *stimare* il campo elettrico tra due punti distanti d, una volta nota la differenza di potenziale $V_1 - V_2$. Se la differenza di potenziale $V_1 - V_2$ è positiva, il campo elettrico è diretto da x_1 a x_2 e se è negativa in verso opposto. L'Eq. (14.31) [o, in effetti, anche l'Eq. (14.27) o l'Eq. (14.28)] indica che un campo elettrico può essere espresso in volt/metro, unità equivalente al newton/coulomb introdotta precedentemente. Questo può essere visto nel modo seguente:

Although this relation is valid only for uniform electric fields, it can be used to *estimate* the electric field between two points separated by a distance d, if the potential difference $V_1 - V_2$ between them is known. If the potential difference $V_1 - V_2$ is positive, the field points in the direction from x_1 to x_2, and if it is negative it points in the opposite direction. Equation (14.31) [or in fact also Eq. (14.27) or Eq. (14.28)] indicates that the electric field can also be expressed in volts/meter, a unit which is equivalent to the newtons/coulomb given before. This can be seen in the following way:

$$\frac{\text{volt}}{\text{metro}} = \frac{\text{joule}}{\text{coulomb-metro}} = \frac{\text{newton-metro}}{\text{coulomb-metro}} = \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}.$$

$$\frac{\text{volt}}{\text{meter}} = \frac{\text{joule}}{\text{coulomb-meter}} = \frac{\text{newton-meter}}{\text{coulomb-meter}} = \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}.$$

Nell'uso comune, il termine volt/metro, abbreviato in V m^{-1}, è preferito al termine N C^{-1}.

Per calcolare il potenziale elettrico prodotto da una carica puntiforme, poichè il campo elettrico è diretto radialmente, si usa l'Eq. (14.28), sostituendo ad s la distanza r; cioè, $\mathcal{E} = -\partial V/\partial r$. Ricordando l'Eq. (14.8), si può scrivere

By common usage, the term volt/meter, abbreviated V m^{-1}, is preferred to N C^{-1}.

To obtain the electric potential due to a point charge, we use Eq. (14.28), with s replaced by the distance r, since the electric field it produces is along the radius; that is, $\mathcal{E} = -\partial V/\partial r$. Remembering Eq. (14.8), we may write

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Integrando, ed assumendo $V = 0$ per $r = \infty$, come nel caso del campo gravitazionale, si ottiene

Integrating, and assuming $V = 0$ for $r = \infty$, as in the gravitational case, we obtain

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{14.32}$$

Questa espressione poteva essere anche ottenuta sostituendo $q/4\pi\epsilon_0$ a $-\gamma m$ nell'Eq. (13.18). Il potenziale elettrico è positivo o negativo a seconda del segno della carica elettrica q che l'ha prodotto.

This expression could also have been obtained by replacing $-\gamma m$ in Eq. (13.18) by $q/4\pi\epsilon_0$. The electric potential V is positive or negative depending on the sign of the charge q producing it.

Se si hanno più cariche $q_1, q_2, q_3, \ldots$, il potenziale elettrico in un punto P (Fig. 14–7) è pari alla somma scalare dei singoli potenziali ivi prodotti da ciascuna carica. Cioè,

If we have several charges q_1, q_2, q_3, . . . , the electric potential at a point P (Fig. 14–7) is the scalar sum of their individual potentials. That is,

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_3} + \cdots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}. \tag{14.33}$$

Pertanto, è generalmente più semplice calcolare il potenziale risultante dovuto a una distribuzione di cariche e da esso dedurre il campo risultante che non viceversa. Per calcolare il potenziale elettrico di una distribuzione continua di carica, si suddivide la carica complessiva in piccoli elementi dq e si sostituisce alla somma di Eq. (14.33) un integrale (si ricordi la Fig. 14–13), ottenendo

Therefore it is in general easier to compute the resultant potential due to a distribution of charges and from it to calculate the resultant field than to calculate in the reverse order. To compute the electric potential of a continuous charge distribution, we divide the charge into small charge elements dq and replace the sum in Eq. (14.33) by an integral (remember Fig. 14–13), resulting in

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}, \tag{14.34}$$

dove l'integrale è esteso a tutto lo spazio occupato dalla distribuzione di carica.

where the integral must extend over all the space occupied by the charges.

Le superfici aventi in tutti i punti egual valore del potenziale—cioè V = cost—sono dette *superfici equipotenziali*. In ciascun punto di una superficie equipotenziale, il campo elettrico è diretto perpendicolarmente alla superficie; cioè, le linee di forza sono ortogonali alle superfici equipotenziali. (La spiegazione di ciò è stata data in Paragrafo 13.6.) Nel caso di un campo elettrico uniforme si vede, dalla Eq. (14.30), che V = cost implica che x = cost, e pertanto le superfici equipotenziali sono piani, come indicato dalle linee tratteggiate in Fig. 14–25. Per una carica puntiforme, l'Eq. (14.32) indica che le superfici equipotenziali sono le sfere r = cost, indicate dalle linee tratteggiate in Fig. 14–10(a) e (b). Nel caso di parecchie cariche, le superfici equipotenziali sono determinate, in base all'Eq. (14.33), dalla relazione $\Sigma_i(q_i/r_i)$ = cost. Nel caso di due cariche, le superfici equipotenziali sono indicate dalle linee trattegiate nelle Figg. 14–11 e 14–12.

Surfaces having the same electric potential at all points—that is, V = const—are called *equipotential surfaces*. At each point of an equipotential surface, the direction of the electric field is perpendicular to the surface; that is, the lines of force are orthogonal to the equipotential surfaces. (The reason for this was given in Section 13.6.) For a uniform field we see, from Eq. (14.30), that V = const implies x = const, and therefore that the equipotential surfaces are planes, as indicated by the dashed lines in Fig. 14–25. For a point charge, Eq. (14.32) indicates that the equipotential surfaces are the spheres r = const, indicated by dashed lines in Fig. 14–10(a) and (b). For several charges the equipotential surfaces are given by $\sum_i (q_i/r_i)$ = const, according to Eq. (14.33). For two charges the equipotential surfaces have been indicated by dashed lines in Figs. 14–11 and 14–12.

ESEMPIO 14.6. Calcolare l'energia potenziale elettrica della carica q_3 nell'Esempio 14.1.

EXAMPLE 14.6. Compute the electric potential energy of charge q_3 in Example 14.1.

Soluzione: Facciamo riferimento alla Fig. 14–6 ed utilizziamo l'Eq. (14.32). I potenziali elettrici prodotti in C dalle cariche q_1 e q_2 poste in A e in B sono, rispettivamente,

Solution: Let us refer back to Fig. 14–6 and use Eq. (14.32). The electric potentials produced at C by charges q_1 and q_2 at A and B are, respectively,

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} = 11.25 \times 10^6\ \text{V}, \qquad V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} = -9 \times 10^6\ \text{V}.$$

Pertanto, il potenziale elettrico complessivo in C è

Thus the total electric potential at C is

$$V = V_1 + V_2 = 2.25 \times 10^6\ \text{V}.$$

L'energia potenziale della carica q_3 è perciò

The potential energy of charge q_3 is then

$$E_p = q_3 V = (0.2 \times 10^{-3}\ \text{C})(2.25 \times 10^6\ \text{V}) = 4.5 \times 10^2\ \text{J}.$$

Confrontando questo esempio con l'Esempio 14.2, si vede quale differenza vi sia tra il maneggiare il campo elettrico ed il potenziale elettrico.

When we compare this example with Example 14.2, we see the difference between handling the electric field and the electric potential.

ESEMPIO 14.7. Calcolare il campo elettrico ed il potenziale elettrico generati da un filamento molto lungo e sottile che porta una carica λ per unità di lunghezza.

EXAMPLE 14.7. Compute the electric field and the electric potential produced by a very long, straight filament carrying a charge λ per unit length.

Soluzione: Suddividiamo il filamento in piccoli tratti, ciascuno di lunghezza ds (Fig. 14–27), portanti una carica $dq = \lambda\, ds$. L'intensità del campo elettrico prodotto dall'elemento ds in P è

Solution: Let us divide the filament into small portions, each of length ds (Fig. 14–27), and therefore carrying a charge $dq = \lambda\, ds$. The magnitude of the electric field that the element ds produces at P is

$$d\mathcal{E} = \frac{\lambda\, ds}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

ed il campo è diretto secondo AP. Ma, per la simmetria del problema, ad ogni elemento ds posto ad una distanza s sopra O, ne corrisponde un altro posto alla medesima distanza sotto O. Pertanto, quando sommiamo i campi elettrici prodotti da tutti gli elementi, le componenti parallele al filamento dànno un valore complessivo nullo. Dobbiamo quindi considerare solo le componenti parallele ad OP, date da $d\mathcal{E}\cos\alpha$, ed il campo elettrico risultante è diretto secondo OP. Pertanto

and is directed along the line AP. But, due to the symmetry of the problem, for every element ds at distance s above O, there is another element at the same distance below O. Therefore, when we add the electric fields produced by all elements, their components parallel to the filament give a total value of zero. Thus we have to consider only the components parallel to OP, given by $d\mathcal{E}\cos\alpha$, and the resultant electric field is along OP. Therefore

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E}\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{ds}{r^2}\cos\alpha.$$

Dalla figura, si vede che $r = R\sec\alpha$ ed $s = R\tan\alpha$, per cui $ds = R\sec^2\alpha\, d\alpha$. Facendo queste sostituzioni, integrando da $\alpha = 0$ ad $\alpha = \pi/2$, e moltiplicando per due (poichè le due metà del filamento dànno lo stesso contributo), otteniamo

From the figure we note that $r = R\sec\alpha$ and $s = R\tan\alpha$, so that $ds = R\sec^2\alpha\, d\alpha$. Making these substitutions, integrating from $\alpha = 0$ to $\alpha = \pi/2$, and multiplying by two (since the two halves of the filament make the same contribution), we obtain

$$\mathcal{E} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Pertanto il campo elettrico del filamento varia come R^{-1}. In forma vettoriale,

So the electric field of the filament varies as R^{-1}. In vector form,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\mathbf{u}_R.$$

Per determinare il potenziale elettrico, usiamo la relazione $\mathcal{E} = -\partial V/\partial R$, che si dà

To find the electric potential, we use the relation $\mathcal{E} = -\partial V/\partial R$, which gives us

$$\frac{dV}{dR} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Integrando, si ottiene

Integration yields

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln R + C.$$

È consuetudine, in questo caso, assegnare valore nullo al potenziale del punto per cui $R = 1$, ottenendo $C = 0$.

It is customary in this case to assign the zero of the potential to the point where $R = 1$, giving $C = 0$.

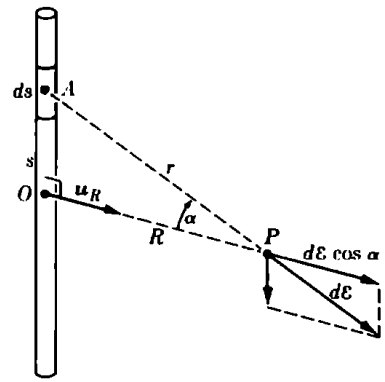


Fig. 14–27. Campo elettrico prodotto da un filo carico.

Fig. 14–27. Electric field of a charged filament.

Pertanto troviamo che il potenziale elettrico è

Suggeriamo che lo studente risolva il medesimo problema in ordine inverso, trovando prima il potenziale e determinando poi il campo elettrico.

14.9 *Bilanci energetici nei campi elettrici*

L'energia totale di una particella carica o ione di massa m e carica q in moto in un campo elettrico è

Quando lo ione va dalla posizione P_1 (dove il potenziale elettrico è V_1) alla posizione P_2 (dove il potenziale è V_2), l'Eq. (14.35), unitamente al principio di conservazione dell'energia, ci dà

Oppure ricordando dalla Eq. (8.11) che $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ è il lavoro fatto sulla particella carica che si sposta da P_1 a P_2, si ha

L'Equazione (14.37) ci permette di dare una precisa definizione del volt: esso è uguale alla variazione di potenziale elettrico che una carica di un coulomb deve effettuare per aumentare la propria energia di un joule.

Si noti dall'Eq. (14.37) che una particella carica positivamente ($q > 0$) aumenta la propria energia cinetica quando si sposta verso potenziali inferiori ($V_1 > V_2$), mentre una particella carica negativamente ($q < 0$), per acquisire energia, deve muoversi da un potenziale più basso ad un più elevato ($V_1 < V_2$).

Se scegliamo come punto in cui il potenziale è nullo P_2 ($V_2 = 0$) e disponiamo l'esperimento in modo tale che in P_1 lo ione abbia velocità nulla ($v_1 = 0$), l'Eq. (14.36) diviene (eliminando gli indici)

espressione che dà l'energia cinetica acquisita da una particella carica che subisce una variazione V di energia potenziale. Questo è, ad esempio, il principio applicato negli *acceleratori elettrostatici*.

Un tipico acceleratore (Fig. 14–28) consiste in un tubo, in cui si è effettuato il vuoto, tra le cui estremità è applicata una differenza di potenziale V. Ad una estremità una sorgente S di ioni inietta particelle cariche nel tubo. Le particelle arrivano all'altra estremità con un'energia data dall'Eq. (14.38). Gli ioni veloci cadono su un bersaglio T, costituito di un materiale scelto in base al tipo di esperimento che si vuole eseguire. Il risultato di questa collisione è una reazione nucleare.

Therefore we find that the electric potential is

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln R.$$

We suggest that the student solve this problem in the reverse order, by first finding the potential and afterward the field.

14.9 Energy Relations in an Electric Field

The total energy of a charged particle or ion of mass m and charge q moving in an electric field is

$$E_T = E_k + E_p = \tfrac{1}{2}mv^2 + qV. \tag{14.35}$$

When the ion moves from position P_1 (where the electric potential is V_1) to position P_2 (where the potential is V_2), Eq. (14.35), combined with the principle of conservation of energy, gives

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + qV_2. \tag{14.36}$$

Or, remembering from Eq. (8.11) that $W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ is the work done on the charged particle when it moves from P_1 to P_2, we have

$$W = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = q(V_1 - V_2). \tag{14.37}$$

Equation (14.37) allows us to give a precise definition of the volt as being equal to the electric potential difference through which a charge of one coulomb has to move to gain an amount of energy equal to one joule.

Note from Eq. (14.37) that a positively charged particle ($q > 0$) gains kinetic energy when moving from a larger to a smaller potential ($V_1 > V_2$), while a negatively charged particle ($q < 0$), to gain energy, has to move from a lower to a higher potential ($V_1 < V_2$).

If we choose the zero of electric potential at P_2 ($V_2 = 0$) and arrange our experiment so that at P_1 the ions have zero velocity ($v_1 = 0$), Eq. (14.36) becomes (dropping the subscripts)

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = qV, \tag{14.38}$$

an expression that gives the kinetic energy acquired by a charged particle when it moves through an electric potential difference V. This is, for example, the principle applied in *electrostatic accelerators*.

A typical accelerator (Fig. 14–28) consists of an evacuated tube through which an electric potential difference V is applied between its extremes. At one end there is an ion source S injecting charged particles into the tube. The particles arrive at the other end with an energy given by Eq. (14.38). These fast ions impinge on a target T, made of a material which is chosen according to the nature of the experiment to be performed. The result of this collision is some kind of nuclear reac-

Pressure vessel = Contenitore in pressione
Positively charged sphere = Sfera caricata positivamente
Ion source, S = Sorgente di ioni, S
Collector = Collettore
Voltage distrib . . . = Resistenze di distribuzione della tensione
Insulating rings = Anelli di isolamento
High-pressure . . . = Entrata del gas ad alta pressione
Charge supply = Generatore di carica
Evacuated . . . = Tubo acceleratore sotto vuoto
Accelerated particles = Particelle accelerate
Target = Bersaglio

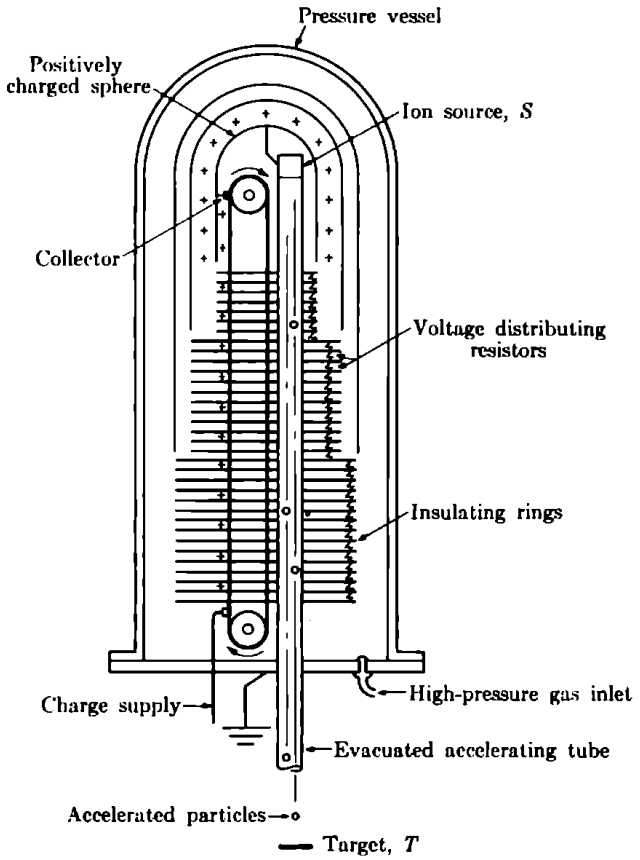


Fig. 14–28. Sezione semplificata di un acceleratore elettrostatico di Van de Graaff. Un motore trascina ad alta velocità una cinghia di materiale isolante avvolta su due puleggie. La cinghia raccoglie in basso la carica elettrica da una sorgente e la trasporta in alto. Un collettore raccoglie la carica e la fornisce alla sfera metallica situata in cima caricandola ad un potenziale elevato. Gli ioni positivi prodotti a tale terminale ad elevato potenziale sono accelerati in basso dalla differenza di potenziale esistente tra la sfera carica ed il potenziale di terra dell'altro terminale.

Fig. 14–28. Simplified cross section of a Van de Graaff electrostatic accelerator. A high-speed motor runs a belt, made of an insulating material, over two pulleys. Electric charge from a voltage source is picked up by the belt at the lower end and conveyed upward. A collector draws the charge off onto the metal sphere at the top, building up a high electric potential on it. Positive ions are produced at this high voltage end and are accelerated downward by the potential difference between the charged sphere and the ground potential at the other end.

L'energia degli ioni incidenti è trasferita al bersaglio, il quale deve quindi essere continuamente raffreddato affinchè non fonda o vaporizzi.

Esistono parecchi tipi di acceleratori elettrostatici (Cockroft-Walton, Van de Graaff, ecc.). Ciascuno è basato su un differente metodo di produrre la differenza di potenziale V. In ogni caso, la limitazione in energia per gli acceleratori elettrostatici proviene dalla massima differenza di potenziale che può essere applicata senza produrre una scarica elettrica nel materiale isolante. Questa differenza di potenziale non può superare alcuni milioni di volt.

Considerando che le particelle fondamentali ed i nuclei hanno carica eguale, o multipla della unità fondamentale e, l'Eq. (14.37) suggerisce di

tion. The energy of the impinging ions is transferred to the target, which therefore must be constantly cooled, since otherwise it would melt or vaporize.

There are several types of electrostatic accelerator (Cockroft-Walton, Van de Graaff, etc.). Each depends on a different method for producing the potential difference V. In any case, the electrostatic accelerators are limited in energy by the maximum voltage difference that can be applied without producing an electrical breakdown of the materials used. This potential difference cannot exceed a few million volts.

Considering that the fundamental particles and nuclei have a charge which is equal to, or is a multiple of, the fundamental charge e, Eq. (14.37) suggests that

definire una nuova unità di energia, già introdotta nel Paragrafo 8.5, detta *elettronvolt*, abbreviata in eV. Un elettronvolt è pari all'energia acquisita da una particella di carica e spostandosi tra due punti la cui differenza di potenziale è di un volt. Usando quindi il valore di e dato dall'Eq. (14.13), otteniamo l'equivalenza data nel Paragrafo 8.5:

Una particella di carica ve, nuovendosi tra due posizioni aventi differenza di potenziale ΔV, acquista un'energia di $v\,\Delta V$ e V. Utili multipli dell'elettronvolt sono il *kiloelettronvolt* (keV) ed il *megaelettronvolt* (MeV).

È molto utile esprimere in queste unità la massa di riposo delle particelle fondamentali. I risultati sono:

ESEMPIO 14.8. Nell'ipotesi che il moto di un elettrone in un atomo possa essere descritto mediante le leggi della meccanica newtoniana, discutere le possibili orbite di un elettrone singolo intorno a un nucleo di carica Ze. Il caso $Z = 1$ corrisponde all'atomo di idrogeno, $Z = 2$ a quello di un atomo di elio ionizzato una volta, He^+ (cioè, un atomo di elio che ha perso un elettrone), $Z = 3$ a un atomo di litio ionizzato due volte Li^{++} (cioè, un atomo di litio che ha perso due elettroni), e così via.

Soluzione: L'interazione di tipo elettrico che vincola l'elettrone nel suo moto interno al nucleo è del medesimo tipo—decrescente col quadrato della distanza—dell'interazione gravitazionale che vincola un pianeta nel suo moto intorno al sole, e pertanto sono qui direttamente applicabili i risultati dedotti nel Capitolo 13, sostituendo, nelle espressioni corrispondenti, $Ze^2/4\pi\epsilon_0$ a $\gamma mm'$. Ad esempio, le orbite saranno delle ellissi (o cerchi) aventi il nucleo in uno dei fuochi. Comunque, per chiarezza, ripetiamo alcuni passaggi.

Consideriamo due cariche, q_1 e q_2, separate di una distanza r, in moto con velocità v_1 e v_2. La loro energia potenziale è $E_p = q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$ e l'energia totale è

Per inciso, osserviamo che nel caso di più particelle cariche, come in un atomo o in una molecola, la energia totale è

$$\sum_{\substack{\text{all}\\ \text{particles}}} \tfrac{1}{2}m_i v_i^2 + \sum_{\substack{\text{all}\\ \text{pairs}}} \frac{q_iq_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}.$$

all particles = tutte le particelle
all pairs = tutte le coppie

Come spiegato nell'Esempio 9.9, l'energia, nel caso di due particelle, scegliendo un sistema di riferimento solidale col centro di massa, può essere scritta nella forma

$$E = \tfrac{1}{2}\mu v^2 + \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r}, \tag{14.39}$$

dove μ è la massa ridotta del sistema delle due particelle [Eq.(9.17)] e v è la loro velocità relativa.

we define a new unit of energy, called the *electron volt*, abbreviated eV, which was first introduced in Section 8.5. An electron volt is equal to the energy gained by a particle of charge e when it moves through a potential difference of one volt. Thus, using the value of e from Eq. (14.13), we have

$$\text{eV} = (1.6021 \times 10^{-19}\ \text{C})(1\ \text{V}) = 1.6021 \times 10^{-19}\ \text{J},$$

which is the equivalence given in Section 8.5. A particle of charge ve in moving through a potential difference ΔV gains an energy of $v\,\Delta V$ eV. Convenient multiples of the electron volt are the *kiloelectron volt* (keV) and the *megaelectron volt* (MeV).

It is very useful to express the rest mass of the fundamental particles in this unit. The results are

$$E_e = m_e c^2 = 8.1867 \times 10^{-14}\ \text{J} = 0.5110\ \text{MeV},$$
$$E_p = m_p c^2 = 1.5032 \times 10^{-10}\ \text{J} = 938.26\ \text{MeV},$$
$$E_n = m_n c^2 = 1.5053 \times 10^{-10}\ \text{J} = 939.55\ \text{MeV}.$$

EXAMPLE 14.8. Assuming that the motion of an electron in an atom can be described by the laws of newtonian mechanics, discuss the possible orbits of a single electron about a nucleus having a nuclear charge Ze. The case $Z = 1$ corresponds to the hydrogen atom, $Z = 2$ to a singly ionized helium atom He^+ (i.e., a helium atom that has lost one electron), $Z = 3$ to a doubly ionized lithium atom Li^{++} (i.e., a lithium atom that has lost two electrons), and so on.

Solution: The inverse-square electrical interaction involved in the motion of an electron around a nucleus is dynamically identical to the gravitational interaction involved in the motion of a planet around the sun, and therefore the results derived in Chapter 13 are directly applicable if, in the corresponding expressions, we replace $\gamma mm'$ by $Ze^2/4\pi\epsilon_0$. For example, the orbits will have to be ellipses (or circles) with the nucleus at one focus. However, for clarity, we shall repeat some of the steps.

Let us consider two charges, q_1 and q_2, separated a distance r and moving with velocities v_1 and v_2. Their electric potential energy is $E_p = q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r$ and their total energy is

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Incidentally, in the case of several charged particles, as in an atom or a molecule, the total energy is

$$E = \sum_{\substack{\text{All}\\ \text{particles}}} \tfrac{1}{2}m_iv_i^2 + \sum_{\substack{\text{All}\\ \text{pairs}}} \frac{q_iq_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}.$$

As explained in Example 9.9, the energy, in the case of two particles referred to their center of mass, can be written in the form

where μ is the reduced mass of the system of two particles [Eq. (9.17)] and v is their relative velocity.

Nel caso di un elettrone in moto intorno a un nucleo, $q_1 = -e$ e $q_2 = Ze$. Inoltre, poichè la massa del nucleo è molto maggiore della massa dell'elettrone, possiamo sostituire alla massa ridotta del sistema elettrone-nucleo la massa m_e dell'elettrone. L'effetto della massa ridotta può essere rivelato solo nel caso degli atomi più leggeri, come quelli dell'idrogeno e dell'elio. Pertanto in questa approssimazione, otteniamo per l'energia totale dell'atomo,

In the case of an electron moving around a nucleus, $q_1 = -e$ and $q_2 = Ze$. Also, since the mass of the nucleus is much greater than the mass of the electron, we may replace the reduced mass of the electron–nucleus system by the electron mass m_e. Only in the lightest atoms, such as hydrogen and helium, can the effect of the reduced mass be detected. Therefore, within this approximation, we have for the total energy of the atom,

$$E = \tfrac{1}{2}m_e v^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Nell'ipotesi che l'orbita sia circolare, l'equazione del moto dell'elettrone è, secondo l'Eq. (7.28), $m_e v^2/r = F_N$, oppure

Assuming that the orbit is circular, the equation of motion of the electron according to Eq. (7.28) is $m_e v^2/r = F_N$, or

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

da cui $m_e v^2 = Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$. Introdotto nelle precedenti equazioni per l'energia totale, questo valore dà

from which $m_e v^2 = Ze^2/4\pi\epsilon_0 r$. When inserted in the previous equation for the total energy, this value gives

$$E = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} = -9 \times 10^9 \frac{Ze^2}{2r}, \tag{14.40}$$

dove il valore della permettività è stato espresso in unità del sistema MKSC. Usando tale valore, E è espresso in J quando r è in m ed e in C. Questa espressione è in accordo con l'Eq. (13.6) relativa al caso gravitazionale sostituendo $Ze^2/4\pi\epsilon_0$ a $\gamma mm'$.

L'espressione (14.40) per l'energia del sistema elettrone-nucleo sarà riconsiderata più oltre per tener conto di effetti relativistici e magnetici (Esempi 14.10 e 15.15). Per l'atomo di idrogeno ($Z = 1$), E rappresenta l'energia richiesta per separare l'elettrone dal protone, cioè, l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno. Il valore sperimentale della energia di ionizzazione è 2.177×10^{-18} J o 13,6 eV, da cui deduciamo che il raggio dell'orbita elettronica è $r = 0.53 \times 10^{-10}$ m. Il fatto che questo valore sia del medesimo ordine di grandezza della nostra stima delle dimensioni atomiche ci offre una buona verifica del modello nucleare dell'atomo.

where the electrostatic constant has been given in MKSC units. With this value, E is in J when r is in m and e is in C. This expression agrees with Eq. (13.6) for the gravitational case if we replace $\gamma mm'$ by $Ze^2/4\pi\epsilon_0$.

Expression (14.40) for the energy of the electron–nucleus system will be revised later to take into account relativistic and magnetic effects (Examples 14.10 and 15.15). For the hydrogen atom ($Z = 1$), E represents the energy required to separate the electron from the proton; that is, the ionization energy of the hydrogen atom. The experimental value for this ionization energy is 2.177×10^{-18} J or 13.6 eV, from which we find that the radius of the electron orbit is $r = 0.53 \times 10^{-10}$ m. The fact that this radius is of the same order of magnitude as our estimate of atomic dimensions offers good verification of our nuclear model of the atom.

Nel Paragrafo 14.7 abbiamo indicato che l'energia associata al moto di un elettrone in un atomo è quantizzata. Nel caso di atomi con un solo elettrone, le possibili energie degli stati stazionari sono date, secondo la meccanica quantistica, dall'espressione

In Section 14.7 we indicated that the energy of the electronic motion in an atom is quantized. In the case of atoms with only one electron, the possible energies of the stationary states, according to quantum mechanics, are given by the expression

$$E_n = -\frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2},$$

dove n è un numero intero che può assumere i valori 1, 2, 3, ... ed $h = 2\pi\hbar = 6.6256 \times 10^{-34}$ J s è la costante di Planck, introdotta nell'Esempio 7.15 in connessione col momento della quantità di moto dell'elettrone in un atomo d'idrogeno. Introducendo i valori numerici, si ha

where n is an integer having the values 1, 2, 3, ... and $h = 2\pi\hbar = 6.6256 \times 10^{-34}$ J s is Planck's constant, introduced in Example 7.15 in connection with the angular momentum of the electron in the hydrogen atom. Introducing numerical values, we have that

$$E_n = -\frac{2.177 \times 10^{-18} Z^2}{n^2} \text{ J} = -\frac{13.598 Z^2}{n^2} \text{ eV}.$$

Lo stato fondamentale corrisponde ad $n = 1$, poichè questa è l'energia minima possibile per l'atomo. Confrontando l'espressione di E_n sopra riportata con l'Eq. (14.40), abbiamo una stima

The ground state corresponds to $n = 1$, since this is the minimum possible energy for the atom. By comparing the above expression of E_n with Eq. (14.40), we have an estimate

delle dimensioni delle corrispondenti orbite permesse. Il risultato è

dove

$$r = -\frac{n^2h^2\epsilon_0}{\pi Ze^2m_e} = \frac{n^2a_0}{Z},$$

$$a_0 = h^2\epsilon_0/\pi e^2m_e = 5.292 \times 10^{-11}\ \text{m}$$

è detto *raggio di Bohr*. Esso corrisponde al raggio dell'atomo di idrogeno nello stato fondamentale. Abbiamo precedentemente accennato al fatto che nel caso del moto degli elettroni non si può parlare di orbite ben definite, come nel caso dei pianeti. Pertanto, non si deve attribuire un significato troppo preciso al valore di r. Esso va, viceversa, inteso come un'indicazione dell'ordine di grandezza delle dimensioni della regione di spazio in cui presumibilmente si trova l'elettrone.

ESEMPIO 14.9. Usando il principio di conservazione dell'energia calcolare, nel caso di collisione frontale di una particella con un nucleo atomico, la distanza di massimo avvicinamento.

Soluzione: Se la carica del nucleo è Ze e quella della particella ve, corrispondenti a q_1 e q_2 dell'Eq. (14.39), l'energia totale del sistema costituito dal proiettile e dal nucleo è

$$E = \tfrac{1}{2}\mu v^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

dove μ è la massa ridotta del sistema. Se la massa del nucleo è molto maggiore di quella del proiettile, o il nucleo è immerso in un cristallo, possiamo sostituire a μ la massa del proiettile m, ottenendo

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \frac{\nu Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Ma se invece dirigiamo protoni contro protoni ($\nu = Z = 1$), dobbiamo usare la massa ridotta, che, in tal caso, vale $\mu = \frac{1}{2}m_p$ (si ricordi l'Esempio 9.3). Quando la particella è molto lontana dal nucleo, la sua energia cinetica è $\frac{1}{2}mv_0^2$. Chiamiamo v la velocità nel punto A di massimo avvicinamento (Fig. 14–24), quando $r = R$. La conservazione dell'energia richiede che

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \frac{\nu Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Nel punto A di massimo avvicinamento, la velocità è interamente trasversale e pertanto il momento della quantità di moto è $L = mRv$. Poichè L è una costante del moto, possiamo usare quest'ultima relazione per eliminare la velocità v in A. Pertanto,

$$\frac{L^2}{2mR^2} + \frac{\nu Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \tfrac{1}{2}mv_0^2.$$

Questa è un'equazione di secondo grado in $1/R$ che ci permette di ottenere R in funzione dell'energia e del momento della quantità di moto della particella. Per una collisione frontale $L = 0$ e

$$R = \frac{\nu Ze^2}{4\pi\epsilon_0(\frac{1}{2}mv_0^2)},$$

of the size of the corresponding allowed electronic orbits. The result is

where

is called the *Bohr radius*. It corresponds to the radius of the hydrogen atom in its ground state. We have previously implied that electronic motion does not correspond to well-defined orbits, as in the case of planets. Therefore the value of r must not be taken too literally. Instead it can be considered as only an indication of the order of magnitude of the region in which the electron is likely to be found.

EXAMPLE 14.9. Using the principle of conservation of energy, compute the distance of closest approach for a head-on collision of a charged particle directed against an atomic nucleus.

Solution: If the charge of the nucleus is Ze and that of the projectile is ve, corresponding to q_1 and q_2 in Eq. (14.39), the total energy of the system of projectile plus nucleus is

where μ is the reduced mass of the system. If the mass of the nucleus is much greater than that of the projectile, or if the nucleus is embedded in a crystal, we may replace μ by the projectile mass m, resulting in

But if, for example, we direct protons against protons ($\nu = Z = 1$), we must use the reduced mass, which is $\mu = \frac{1}{2}m_p$ (remember Example 9.3). When the particle is very far away, all its energy is kinetic and equal to $\frac{1}{2}mv_0^2$. We call v its velocity at the point of closest approach A (Fig. 14–24) when $r = R$. The conservation of energy requires that

At the point of closest approach A, the velocity is all transverse, and therefore the angular momentum is $L = mRv$. We may use this relation to eliminate the velocity v at A, since L is a constant of the motion. Therefore

This is an equation of second degree in $1/R$ which allows us to obtain R in terms of the energy and the angular momentum of the particle. For a head-on collision, $L = 0$ and

in accordo col risultato precedentemente ottenuto nell'Esempio 14.5. Si noti che, in una collisione frontale, nel punto di massimo avvicinamento, $v = 0$ e tutta l'energia cinetica si è trasformata in energia potenziale.

ESEMPIO 14.10. Stimare l'ordine di grandezza della correzione dovuta agli effetti relativistici per l'espressione dell'energia di un elettrone che percorre un'orbita atomica.

Soluzione: Sia nel Capitolo 13 che in questo capitolo, quando si è discusso il moto provocato da forze decrescenti col quadrato della distanza, come nell'Esempio 14.8, si è usata la meccanica newtoniana, trascurando tutti gli effetti relativistici. Questo metodo è corretto per la trattazione di quasi tutti i moti planetari, ma, in molti casi, non è giustificato nel caso del moto degli elettroni in un atomo. Gli elettroni più interni degli atomi si muovono con velocità sufficientemente grandi perchè le correzioni relativistiche siano rilevabili sperimentalmente. Stimiamo ora l'ordine di grandezza dell'effetto relativistico.

Usando l'Eq. (14.18), si trova che l'energia totale di un elettrone veloce in un atomo (sottraendo l'energia dovuta alla massa di riposo) è

Assumendo che la quantità di moto p sia molto più piccola di $m_e c$, possiamo sviluppare la radice fino al termine di secondo ordine, ottenendo

I due termini tra parentesi quadre costituiscono l'approssimazione nonrelativistica dell'energia, data nel caso di orbite circolari dall'Eq. (14.40). Pertanto, l'ultimo termine è la correzione relativistica di primo ordine all'energia totale dell'elettrone e la indicheremo con ΔE_r. Così

I due termini tra parentesi corrispondono all'energia cinetica non relativistica dell'elettrone. Utilizzando i risultati dell'Esempio (14.8), possiamo scrivere per il primo termine

Per il secondo, possiamo scrivere $p^2/2m_e = \frac{1}{2}m_e v^2$. Pertanto,

Perciò, la correzione relativistica è dell'ordine di $(v/c)^2$ volte l'energia dell'elettrone. Nell'atomo di idrogeno, ad esempio, v/c è dell'ordine di 10^{-2}, e pertanto $\Delta E_r \sim 10^{-5}E$, o circa $0.001\%\, E$, quantità che può essere facilmente rivelata in laboratorio con le tecniche attualmente in uso.

which is in agreement with the result previously obtained in Example 14.5. Note that for a head-on collision, $v = 0$ at the point of closest approach and all the kinetic energy has been transformed into potential energy.

EXAMPLE 14.10. Estimate the order of magnitude of the correction to the energy of an orbiting electron in an atom due to relativistic effects.

Solution: Both in Chapter 13 and in this chapter, whenever we have discussed motion under an inverse-square law, such as in Example 14.8, we have used newtonian mechanics, neglecting all relativistic effects. This method is correct for almost all planetary motion, but for the electrons in an atom it is in many cases not justified. The inner electrons in atoms move with velocities large enough so that the relativistic corrections can be measured experimentally. Let us now estimate the order of magnitude of the relativistic effect.

Using Eq. (11.18), we find that the total energy of a fast electron in an atom (subtracting its rest-mass energy) is

$$E = c\sqrt{m_e^2 c^2 + p^2} + (-eV) - m_e c^2.$$

Assuming that the momentum p is much smaller than $m_e c$, we may expand the radical up to the second-order term, resulting in

$$E = \frac{1}{2m_e}p^2 - \frac{1}{8m_e^3 c^2}p^4 + \cdots + (-eV)$$

$$= \left[\frac{1}{2m_e}p^2 + (-eV)\right] - \frac{1}{8m_e^3 c^2}p^4 + \cdots$$

The two terms inside the brackets give the nonrelativistic approximation for the energy, which for circular orbits is given by Eq. (14.40). Therefore the last term is the first-order relativistic correction to the total energy of the electron, which we shall designate by ΔE_r. Thus

$$\Delta E_r = -\frac{1}{8m_e^3 c^2}p^4 = -\frac{1}{2m_e c^2}\left(\frac{p^2}{2m_e}\right)\left(\frac{p^2}{2m_e}\right).$$

The two terms inside the parentheses correspond to the nonrelativistic kinetic energy of the electron. So we may write (as a reasonable approximation) for the first one, using the result of Example 14.8,

$$\frac{p^2}{2m_e} = E - E_p = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} = -E.$$

For the second, we may write $p^2/2m_e = \frac{1}{2}m_e v^2$. Therefore

$$\Delta E_r = -\frac{1}{2m_e c^2}(-E)(\tfrac{1}{2}m_e v^2) = \frac{1}{4}\frac{v^2}{c^2}E.$$

Thus the relativistic correction is of the order of $(v/c)^2$ times the energy of the electron. In the hydrogen atom, for example, v/c is of the order of 10^{-2}, and therefore $\Delta E_r \sim 10^{-5}E$, or about 0.001% of E, a quantity that can easily be detected in the laboratory with experimental techniques now in use.

14.10 *La corrente elettrica*

L'esempio di acceleratore elettrostatico, dato nel Paragrafo 14.9, in cui una corrente di particelle cariche è accelerata rapidamente lungo il tubo, suggerisce di introdurre a questo punto il concetto fondamentale di *corrente elettrica*. Una corrente elettrica consiste in un flusso di particelle cariche o ioni. Questo concetto si applica tanto agli ioni in un acceleratore di qualsiasi tipo, in una soluzione elettrolitica o in un gas ionizzato, o plasma, che agli elettroni in un conduttore metallico. Per generare una corrente elettrica si deve applicare un campo elettrico che muova le particelle cariche in una direzione ben definita.

L'*intensità* di una corrente elettrica è definita come la carica elettrica che fluisce nella unità di tempo attraverso una sezione della regione di spazio attraversata dalla corrente, come, ad esempio, la sezione di un tubo acceleratore o di un filo metallico. Pertanto se, nel tempo t, N particelle, ciascuna portante una carica q, attraversano una sezione del mezzo conduttore, portando una carica totale $Q = Nq$, l'intensità di corrente è

In effetti, l'espressione sopra riportata fornisce solo la corrente media nel tempo t; la corrente istantanea è

La corrente elettrica è espressa in coulomb/secondo o s^{-1} C, unità chiamata *ampere* (abbreviata A) in onore del fisico francese André M. Ampère (1775–1836). Un ampere è l'intensità di una corrente corrispondente alla carica di un coulomb che attraversa una sezione del conduttore nell'unità di tempo.

La direzione ed il verso di una corrente sono per definizione quelli con cui si muovono le cariche elettriche positive. Sono la medesima direzione ed il medesimo verso del campo elettrico o della differenza di potenziale che genera il moto delle particelle cariche (Fig. 14–29a). Pertanto, se una corrente è dovuta al moto di particelle

(a) Cariche positive (b) Cariche negative (c) Cariche positive e negative

Fig. 14–29. Moto di ioni positivi e negativi, dovuto a un campo elettrico $\mathcal{E}$, che dà luogo ad una corrente elettrica I.

14.10 *Electric Current*

The example of an electrostatic accelerator with a stream of charged particles swiftly accelerated along its tube, given in Section 14.9, suggests that we introduce at this time the very important concept of *electric current*. An electric current consists of a stream of charged particles or ions. This applies to the ions in an accelerator of any kind, to those in an electrolytic solution, to those in an ionized gas or plasma, or to the electrons in a metallic conductor. In order for an electric current to be produced, an electric field must be applied to move the charged particles in a well-defined direction.

The *intensity* of an electric current is defined as the electric charge passing per unit time through a section of the region where it flows, such as a section of an accelerator tube or of a metallic wire. Therefore if, in time t, N charged particles, each carrying a charge q, pass through a section of the conducting medium, the total charge passing being $Q = Nq$, the intensity of the current is

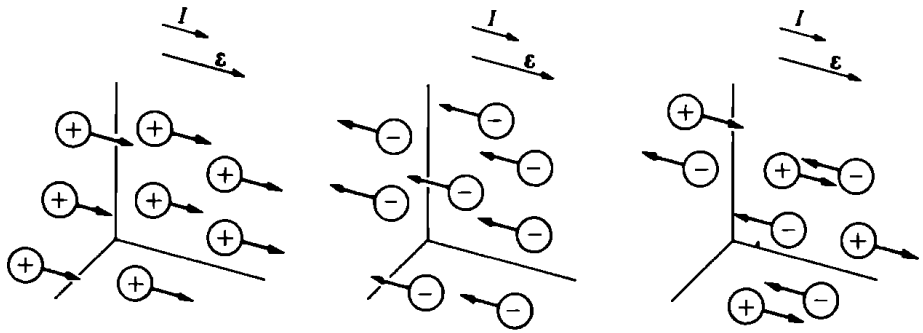
$$I = Nq/t = Q/t. \tag{14.41}$$

Actually the above expression gives the average current in time t; the instantaneous current is

$$I = dQ/dt. \tag{14.42}$$

The electric current is expressed in coulombs/second or s^{-1} C, a unit called the *ampere* (abbreviated A) in honor of the French physicist André M. Ampère (1775–1836). An ampere is the intensity of an electric current corresponding to a charge of one coulomb passing through a section of the material.

The direction of an electric current is assumed to be that of the motion of the moving positively charged particles. It is the same direction as that of the applied electric field or of the potential drop which produces the motion of the charged particles (Fig. 14–29a). Therefore, if a current is due to the motion of negatively



(a) Positive charges (b) Negative charges (c) Positive and negative charges

Fig. 14–29. Motion of positive and negative ions resulting in an electric current I produced by an electric field $\mathcal{E}$.

cariche negativamente, quali gli elettroni, il verso della corrente è opposto a quello del moto effettivo degli elettroni (Fig. 14–29b).

Per mantenere una corrente elettrica bisogna spendere energia, poichè gli ioni sono accelerati dal campo elettrico. Si immagini che N ioni, ciascuno di carica q, si muovano nel tempo t attraverso una differenza di potenziale V. La variazione di energia subita da ciascuno ione è qV, e quindi l'energia totale acquistata dagli ioni è $NqV = QV$. L'energia per unità di tempo, o potenza, richiesta per mantenere la corrente è perciò

Quest'espressione fornisce, ad esempio, la potenza necessaria per far funzionare l'acceleratore descritto nel paragrafo precedente. Essa determina pure la potenza che giunge al bersaglio dell'acceleratore, e pertanto la potenza che deve essere portata via dal sistema di raffreddamento del bersaglio. L'Espressione (14.43) è quindi di validità generale e determina la potenza richiesta per mantenere una corrente I tra due punti di un conduttore la cui differenza di potenziale è V. Si noti che dall'Eq. (14.43),

$$\text{volt} \times \text{ampere} = \frac{\text{joule}}{\text{coulomb}} \times \frac{\text{coulomb}}{\text{secondo}} = \frac{\text{joule}}{\text{secondo}} = \text{watt},$$

per cui le unità di misura sono congruenti.

charged particles, such as electrons, the direction of the current is opposite to the actual motion of the electrons (Fig. 14–29b).

Maintaining an electric current requires energy because the moving ions are accelerated by the electric field. Suppose that in time t there are N ions, each with charge q, which move through a potential difference V. Each ion gains an energy qV, and the total energy they gain is $NqV = QV$. The energy per unit time, or the power required to maintain the current, is then

$$P = QV/t = VI. \tag{14.43}$$

This gives, for example, the power required to drive the accelerator discussed in the previous section. It also gives the rate at which energy is transferred to the accelerator's target, and therefore the rate at which energy must be removed by the target's coolant. Expression (14.43) is thus of general validity, and gives the power required to maintain an electric current I through a potential difference V applied to two points of any conducting media. Note from Eq. (14.43) that

$$\text{volts} \times \text{amperes} = \frac{\text{joules}}{\text{coulomb}} \times \frac{\text{coulombs}}{\text{second}} = \frac{\text{joules}}{\text{second}} = \text{watts},$$

so that the units are consistent.

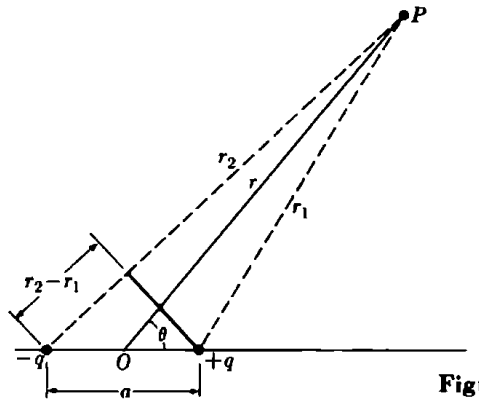


Figura 14–30

Figure 14–30

14.11 Il dipolo elettrico

Una disposizione interessante di cariche elettriche è il dipolo elettrico. Esso consiste in due cariche uguali ed opposte $+q$ e $-q$, poste ad una piccolissima distanza a l'una dall'altra (Fig. 14–30).

Il momento di dipolo elettrico $\boldsymbol{p}^*$ è definito come

dove $\boldsymbol{a}$ è il vettore spostamento che va dalla posizione occupata dalla carica negativa a quella della carica positiva. Il potenziale

*Si noti che, per convenzione, i simboli rappresentativi della quantità di moto e del momento elettrico di dipolo sono identici.

14.11 Electric Dipole

An interesting arrangement of charges is an electric dipole. It consists of two equal and opposite charges $+q$ and $-q$, separated a very small distance a (Fig. 14–30).

The electric dipole moment $\boldsymbol{p}^*$ is defined by

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{a}, \tag{14.44}$$

where $\boldsymbol{a}$ is the displacement from the negative to the positive charge. The electric

*Note that, due to convention, the symbols for momentum and electric dipole moment are the same.

elettrico prodotto in un punto P dal dipolo elettrico, in base all'Eq. (14.33), è

Se la distanza a è molto piccola rispetto ad r, possiamo scrivere

e

ottenendo

oppure

Potremmo esprimere l'Eq. (14.45) in coordinate cartesiane ortogonali e usare l'Eq. (14.29) per calcolare l'intensità del campo elettrico (si ricordi l'Esempio 13.7). Lasciamo, tuttavia, questo come esercizio per lo studente. Calcoleremo, viceversa, le componenti di $\mathcal{E}$ in coordinate polari, utilizzando l'Eq. (14.28). Per ottenere la componente radiale $\mathcal{E}_r$, si osservi che $ds = dr$. Pertanto,

Per la componente trasversale $\mathcal{E}_\theta$, utilizziamo la relazione $ds = r\,d\theta$, ottenendo

Queste due componenti sono rappresentate in Fig. 14—31. Le linee di forza sono raffigurate in Fig. 14—32. Nonostante, nel dipolo elettrico, le due cariche siano uguali ed opposte, e quindi la carica totale sia nulla, il fatto che esse siano leggermente separate è sufficiente per causare un campo elettrico non trascurabile.

Line of force = Linea di forza

Figura 14–31

In generale, se abbiamo più cariche q_1, q_2, q_3 ... localizzate in P_1, P_2, P_3, ..., il momento di dipolo elettrico dell'intera distribuzione di cariche è

[Questa definizione coincide con quella dell'Eq. (14.44), poichè, se si hanno solo due cariche uguali ed opposte, $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{r}_1 - q\boldsymbol{r}_2 = q(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = q\boldsymbol{a}$.] Se facciamo coincidere l'asse Z col vettore $\boldsymbol{p}$, dalla espressione sopra riportata, si ricava che il modulo del momento elettrico di dipolo complessivo della distribuzione di cariche vale

dove r_i è la distanza di ciascuna carica dall'origine, θ_i l'angolo che r_i fa con l'asse Z e $z_i = r_i \cos\theta_i$.

potential at a point P due to the electric dipole is, using Eq. (14.33),

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q(r_2 - r_1)}{r_1 r_2}.$$

If the distance a is very small compared with r, we can set

$$r_2 - r_1 = a\cos\theta \qquad \text{and} \qquad r_1 r_2 = r^2,$$

resulting in

$$V = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad \text{or} \qquad V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{14.45}$$

We may express Eq. (14.45) in rectangular coordinates and use Eq. (14.29) to obtain the electric field intensity (remember Example 13.7). We leave this, however, as an exercise for the student. Instead we shall compute the components of $\mathcal{E}$ in polar coordinates, using Eq. (14.28). To obtain the radial component $\mathcal{E}_r$, we note that $ds = dr$. Then

$$\mathcal{E}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{14.46}$$

For the transverse component $\mathcal{E}_\theta$, we use $ds = r\,d\theta$, resulting in

$$\mathcal{E}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{14.47}$$

These two components are shown in Fig. 14–31. The lines of force are indicated in Fig. 14–32. Although in an electric dipole the two charges are equal and opposite, giving a zero net charge, the fact that they are slightly displaced is enough to produce a nonvanishing electric field.

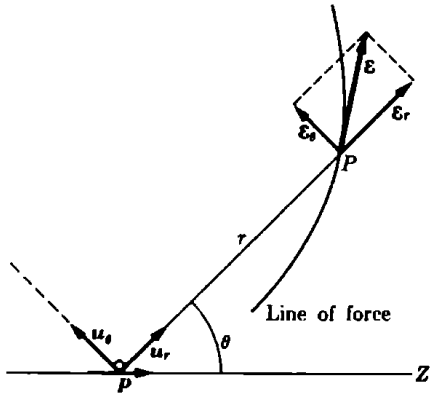


Figure 14–31

In general, if we have several charges q_1, q_2, q_3, ... at points P_1, P_2, P_3, ..., the electric dipole moment of the charge distribution is

$$\boldsymbol{p} = q_1\boldsymbol{r}_1 + q_2\boldsymbol{r}_2 + q_3\boldsymbol{r}_3 + \cdots = \sum_i q_i\boldsymbol{r}_i.$$

[This definition coincides with Eq. (14.44), because, since there are only two equal and opposite charges, then $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{r}_1 - q\boldsymbol{r}_2 = q(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = q\boldsymbol{a}$.] Taking the Z-axis in the direction of $\boldsymbol{p}$, the above expression for the electric dipole moment of several charges becomes, in magnitude,

$$p = \sum_i q_i z_i = \sum_i q_i r_i \cos\theta_i, \tag{14.48}$$

where r_i is the distance of each charge to the origin, θ_i the angle that r_i makes with the Z-axis, and $z_i = r_i\cos\theta_i$.

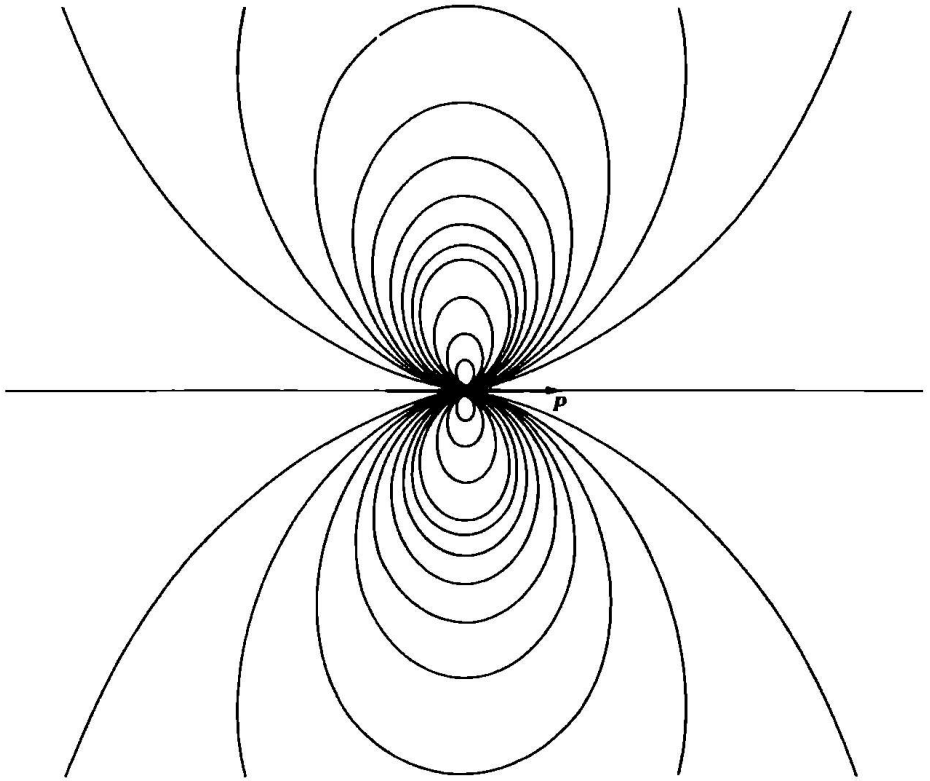
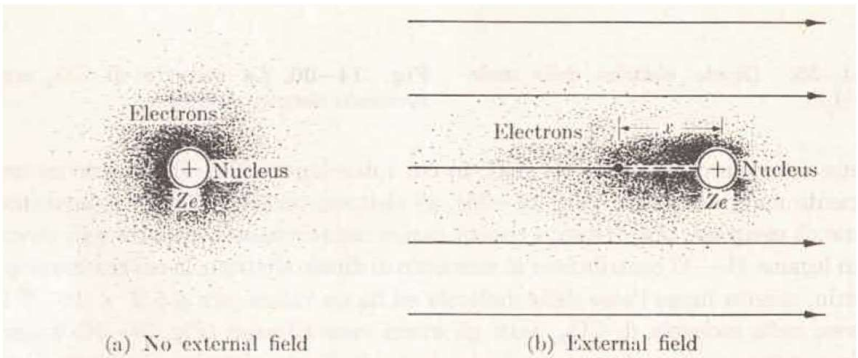


Fig. 14–32. Linee di forza del campo elettrico di un dipolo elettrico.

Fig. 14–32. Lines of force of the electric field of an electric dipole.

Electrons = Elettroni
Nucleus = Nucleo



(a) Senza campo esterno (b) In presenza di campo esterno.

Fig. 14–33. Polarizzazione di un atomo sotto l'azione di un campo elettrico esterno.

Fig. 14–33. Polarization of an atom under an external electric field.

Negli atomi, il centro di massa degli elettroni coincide col nucleo, e pertanto il momento di dipolo elettrico medio dell'atomo è nullo (Fig. 14—33a). Ma se si applica un campo esterno, le orbite degli elettroni vengono distorte ed il centro di massa degli elettroni viene a trovarsi spostato rispetto al nucleo di una distanza x (Fig . 14—33b). L'atomo è così polarizzato e possiede un momento elettrico di dipolo $\boldsymbol{p}$. Questo momento è proporzionale al campo esterno $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

In atoms the center of mass of the electrons coincides with the nucleus, and therefore the average electric dipole moment of the atom is zero (Fig. 14–33a). But if an external field is applied, the electronic motion is distorted, and the center of mass of the electrons is displaced the distance x relative to the nucleus (Fig. 14–33b). The atom is thus polarized and becomes an electric dipole of moment $\boldsymbol{p}$. This moment is proportional to the external field $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

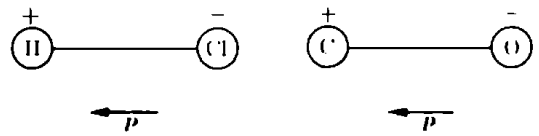


Fig. 14–34. Molecole diatomiche polari.

Fig. 14–34. Polar diatomic molecules.

Le molecole, invece, possono possedere un momento di dipolo elettrico permanente. Le molecole di questo tipo sono dette *polari*. Per esempio, nelle molecole di HCl (Fig. 14–34), l'elettrone dell'atomo di H nel suo moto si trova più a lungo in vicinanza dell'atomo di Cl che dell'atomo di H. Pertanto, il centro delle cariche negative non coincide più col centro delle cariche positive, e la molecola possiede un momento di dipolo diretto dall'atomo di Cl verso l'atomo di H. Cioè, possiamo scrivere H^+Cl^-. Il momento di dipolo elettrico della molecola di HCl vale $p = 3.43 \times 10^{-30}$ *C m. Nella molecola* di CO, la distribuzione di carica è solo leggermente asimmetrica, ed il momento di dipolo elettrico è relativamente piccolo, circa 0.4×10^{-30} C m; l'atomo di carbonio è situato in corrispondenza al polo negativo della molecola e l'atomo di ossigeno in quello positivo.

Molecules, on the other hand, may have a permanent electric dipole moment. Such molecules are called *polar*. For example, in the HCl molecule (Fig. 14–34), the electron of the H atom spends more time moving around the Cl atom than around the H atom. Therefore the center of negative charges does not coincide with that of the positive charges, and the molecule has a dipole moment directed from the Cl atom to the H atom. That is, we may write H^+Cl^-. The electric dipole of the HCl molecule is $p = 3.43 \times 10^{-30}$ C m. In the CO molecule, the charge distribution is only slightly asymmetric and the electric dipole moment is relatively small, about 0.4×10^{-30} C m, with the carbon atom corresponding to the positive and the oxygen atom to the negative end of the molecule.

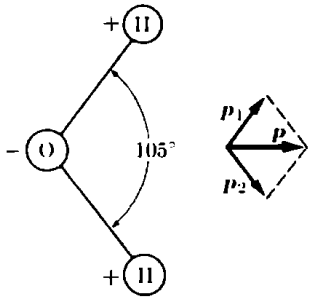


Fig. 14–35. Dipolo elettrico della molecola di H_2O.

Fig. 14–35. Electric dipole of H_2O molecule.

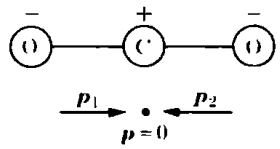


Fig. 14–36. La molecola di CO_2 non ha momento elettrico di dipolo.

Fig. 14–36. The CO_2 molecule has no electric dipole.

In una molecola come quella di H_2O, in cui i due legami H—O formano un angolo leggermente maggiore di 90° (Fig. 14–35), gli elettroni cercano di raggrupparsi intorno all'atomo di ossigeno, che pertanto risulta carico negativamente rispetto agli atomi H. Ciascun legame H—O contribuisce al momento di dipolo elettrico, la cui risultante è, per simmetria, diretta lungo l'asse della molecola ed ha un valore pari a 6.2×10^{-30} C m. Viceversa, nella molecola di CO_2, tutti gli atomi sono allineati (Fig. 14–36) lungo una medesima retta, e, per simmetria, il momento di dipolo elettrico risultante è nullo. Pertanto, i momenti di dipolo elettrico possono fornire utili informazioni circa la struttura delle molecole. I valori di p relativi a parecchie molecole polari sono riportati in Tabella 14–1.

Quando un dipolo elettrico è posto in un campo elettrico, su ciascuna carica del dipolo agisce una forza (Fig. 14–37). La forza risultante è

In a molecule such as H_2O, where the two H—O bonds are at an angle slightly over 90° (Fig. 14–35), the electrons try to crowd around the oxygen atom, which thereupon becomes slightly negative relative to the H atoms. Each H—O bond thus contributes to the electric dipole moment, whose resultant, because of symmetry, lies along the axis of the molecule and has a value equal to 6.2×10^{-30} C m. But in the CO_2 molecule, all the atoms are in a straight line (Fig. 14–36), and the resultant electric dipole moment is zero because of the symmetry. Thus electric dipole moments can provide useful information about the structure of molecules. The values of p for several polar molecules are given in Table 14–1.

When an electric dipole is placed in an electric field, a force is produced on each charge of the dipole (Fig. 14–37). The resultant force is

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{\mathcal{E}} - q\boldsymbol{\mathcal{E}}' = q(\boldsymbol{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\mathcal{E}}').$$

Si consideri il caso particolare in cui il campo elettrico è orientato come l'asse X e il

Consider the special case in which the electric field is along the X-axis and the

TABELLA 14–1. Momenti Elettrici di Dipolo per alcune Molecole Polari*

Molecule = Molecola	p, m C
HCl	3.43×10^{-30}
HBr	2.60×10^{-30}
HI	1.26×10^{-30}
CO	0.40×10^{-30}
H_2O	6.2×10^{-30}
H_2S	5.3×10^{-30}
SO_2	5.3×10^{-30}
NH_3	5.0×10^{-30}
C_2H_5OH	3.66×10^{-30}

*Tra le molecole aventi momento elettrico di dipolo nullo sono: CO_2, H_2, CH_4 (metano), C_2H_6 (etano), e CCl_4 (tetracloruro di carbonio).

Fig. 14–37. Dipolo elettrico posto in un campo elettrico esterno.

TABLE 14-1 Electric Dipole Moments for Selected Polar Molecules*

Molecule	p, m C
HCl	3.43×10^{-30}
HBr	2.60×10^{-30}
HI	1.26×10^{-30}
CO	0.40×10^{-30}
H_2O	6.2×10^{-30}
H_2S	5.3×10^{-30}
SO_2	5.3×10^{-30}
NH_3	5.0×10^{-30}
C_2H_5OH	3.66×10^{-30}

* Molecules with zero dipole moment include: CO_2, H_2, CH_4 (methane), C_2H_6 (ethane), and CCl_4 (carbon tetrachloride).

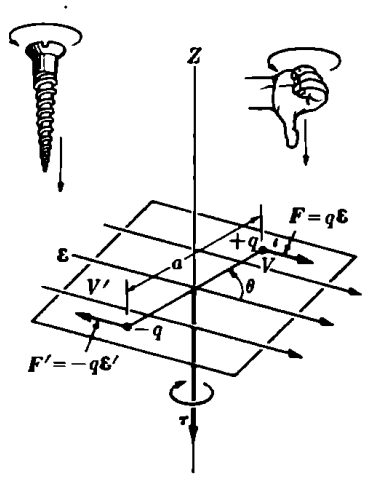


Fig. 14–37. Electric dipole in an external electric field.

dipolo è orientato parallelamente al campo. Allora, considerando solo i moduli, $\mathcal{E} - \mathcal{E}' = (d\mathcal{E}/dx)a$, e pertanto $F = p(d\mathcal{E}/dx)$. Questo risultato mostra che *un dipolo elettrico orientato parallelamente al campo elettrico è sollecitato a muoversi nella direzione in cui il campo elettrico aumenta*. Risultato opposto si ottiene se il dipolo è orientato in modo antiparallelo al campo. Lo studente può osservare che, se il campo elettrico è uniforme, la forza risultante sul dipolo elettrico è nulla.

L'energia potenziale del dipolo è

dipole is oriented parallel to the field. Then, considering magnitudes only, $\mathcal{E} - \mathcal{E}' = (d\mathcal{E}/dx)a$, and therefore $F = p(d\mathcal{E}/dx)$. This result shows that *an electric dipole oriented parallel to the electric field tends to move in the direction in which the field increases*. The opposite result is obtained if the dipole is oriented antiparallel to the field. The student should note that if the electric field is uniform, the resultant force on the electric dipole is zero.

The potential energy of the dipole is

$$E_p = qV - qV' = q(V - V') = -qa\left(-\frac{V - V'}{a}\right),$$

ed utilizzando l'Eq. (14.31), si trova che, chiamando θ l'angolo formato dal dipolo col campo elettrico, l'ultimo fattore è proprio la componente $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}\cos\theta$ del campo $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ nella direzione di $\boldsymbol{a}$. Pertanto, $E_p = -qa\mathcal{E}_a$, oppure

and by using Eq. (14.31), we find that, if θ is the angle between the dipole and the electric field, the last factor is just the component $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}\cos\theta$ of the field $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ parallel to $\boldsymbol{a}$. Therefore $E_p = -qa\mathcal{E}_a$, or

$$E_p = -p\mathcal{E}\cos\theta = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}. \tag{14.49}$$

L'energia potenziale è minima quando $\theta = 0$, il che indica che *il dipolo è in equilibrio quando è orientato parallelamente al campo*. Se trascuriamo la piccola differenza tra $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ ed $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$, le forze $q\boldsymbol{\mathcal{E}}$ e $-q\boldsymbol{\mathcal{E}}'$, agenti sulle cariche del dipolo, costituiscono essenzialmente una coppia la cui intensità, secondo l'Eq. (4.13), è

The potential energy is a minimum when $\theta = 0$, indicating that *the dipole is in equilibrium when it is oriented parallel to the field*. If we neglect the slight difference between $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ and $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$, the forces $q\boldsymbol{\mathcal{E}}$ and $-q\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ on the charges comprising the dipole form essentially a couple whose torque, according to Eq. (4.13), is

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{a} \times (q\boldsymbol{\mathcal{E}}) = (q\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}. \tag{14.50}$$

Dall'espressione sopra riportata, così come dalla Fig. 14–37, vediamo che *la coppia esercitata dal campo elettrico tende ad orientare il dipolo parallelamente al campo*. Il modulo della coppia è $\tau = p\mathcal{E}\sin\theta$, la direzione ed il verso sono indicati in Fig. 14–37. Se usiamo l'Eq. (8.26), $\tau_z = -\partial E_p/\partial\theta$, possiamo sfruttare l'Eq. (14.49) per dedurre $\tau_z = -p\mathcal{E}\sin\theta$. La differenza nel segno di τ è dovuta al fatto che τ rappresenta il modulo della

From the above expression, as well as from Fig. 14–37, we see that *the torque of the electric field tends to align the dipole parallel to the field*. The magnitude of the torque is $\tau = p\mathcal{E}\sin\theta$, and its direction is as indicated in Fig. 14–37. If we use Eq. (8.26), $\tau_z = -\partial E_p/\partial\theta$, we can use Eq. (14.49) to derive $\tau_z = -p\mathcal{E}\sin\theta$. The difference in sign for τ is due to the fact that τ gives the magnitude of the

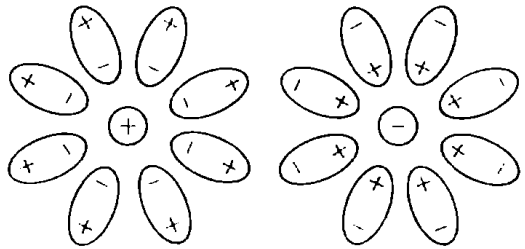


Fig. 14–38. Effetti di polarizzazione prodotti da uno ione posto in soluzione.

coppia, mentre τ_z è la componente della coppia nella direzione dell'asse Z, perpendicolare al piano in cui si misura l'angolo θ, ed orientato nel verso di avanzamento di una vite destra che ruoti nel senso in cui θ aumenta. Il segno negativo di τ_z conferma che la coppia agisce nel senso di far diminuire l'angolo θ.

Queste proprietà dei dipoli posti in campi elettrici hanno applicazioni molto importanti. Per esempio, come abbiamo accennato nel corso del commento della Fig. 14—19, quando si è parlato dell'elettrolisi, gli ioni che si trovano nella soluzione generano un campo elettrico che polarizza le molecole del solvente che li circondano ed esse si orientano nel modo indicato in Fig. 14—38. Queste molecole orientate divengono più o meno vincolate allo ione, aumentandone la massa effettiva e, parzialmente schermandolo, ne diminuiscono la carica effettiva. L'effetto risultante è che la mobilità dello ione in un campo esterno risulta diminuita. Anche quando un gas o un liquido le cui molecole siano dipoli permanenti è posto in una regione in cui agisce un campo elettrico, in conseguenza delle coppie provocate dal campo elettrico, le molecole tendono ad allinearsi disponendo i dipoli parallelamente al campo. Si dice allora che la sostanza è stata *polarizzata* (vedi Paragrafo 16.5).

ESEMPIO 14.11. Esprimere in forma vettoriale il campo elettrico prodotto da un dipolo elettrico.

Soluzione: Dalla Fig. 14—31, abbiamo

Ma dalla medesima figura vediamo che

Usiamo questa relazione per eliminare il termine $p \sin \theta$ in $\mathcal{E}$, ed otteniamo

Inoltre $p \cos \theta = u_r \cdot p$. Pertanto,

relazione che esprime in forma vettoriale il campo elettrico generato dal dipolo.

Fig. 14–38. Polarization effects of an ion in solution.

torque while τ_z gives the component of the torque along a direction Z, perpendicular to the plane in which the angle θ is measured, and oriented in the sense of advance of a right-handed screw rotated in the sense in which θ increases. The negative sign in τ_z confirms that the torque tends to decrease the angle θ.

These properties of a dipole placed in an electric field have very important applications. For example, as we mentioned during the discussion of Fig. 14–19 when we were talking about electrolysis, the electric field of an ion in solution polarizes the molecules of the solvent which surrounds the ions and they become oriented in the form indicated in Fig. 14–38. These oriented molecules become more or less attached to the ion, increasing its effective mass and decreasing its effective charge, which is partially screened by the molecules. The net effect is that the mobility of the ion in an external field is decreased. Also when a gas or a liquid whose molecules are permanent dipoles is placed where an electric field exists, the molecules, as a result of the torques due to the electric field, tend to align with their dipoles parallel. We say then that the substance has been *polarized* (see Section 16.5).

EXAMPLE 14.11. Express the electric field of an electric dipole in vector form.

Solution: From Fig. 14–31 we have

$$\mathcal{E} = u_r \mathcal{E}_r + u_\theta \mathcal{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(u_r 2p \cos\theta + u_\theta p \sin\theta).$$

But from the same figure we see that

$$p = p(u_r \cos\theta - u_\theta \sin\theta).$$

We use this to eliminate the term $p \sin \theta$ in $\mathcal{E}$, and obtain

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}(3u_r p \cos\theta - p).$$

Also $p \cos \theta = u_r \cdot p$. Therefore

$$\mathcal{E} = \frac{3u_r(u_r \cdot p) - p}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

which gives the electric dipole field in vector form.

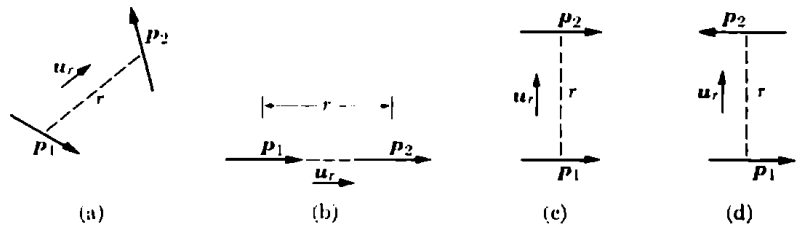


Fig. 14–39. Interazione tra due dipoli elettrici.

Fig. 14–39. Interaction between two electric dipoles.

ESEMPIO 14.12. Calcolare l'energia d'interazione tra due dipoli elettrici. Utilizzare il risultato per stimare l'energia di interazione tra due molecole d'acqua. Discutere, inoltre, gli effetti dovuti al mutuo orientamento delle molecole.

Soluzione: Nell'Esempio 14.11, abbiamo determinato il campo elettrico generato da un dipolo alla distanza r. Chiamando $\boldsymbol{p}_1$ il momento del dipolo, possiamo scrivere

Indicando con $\boldsymbol{p}_2$ il momento del secondo dipolo, ed utilizzando l'Eq. (14.49), troviamo che l'energia d'interazione tra i due dipoli è

Da questo risultato, si possono trarre parecchie conclusioni importanti. Una conclusione è che l'energia d'interazione $E_{p,12}$ dipende in modo *simmetrico* dai due dipoli, poichè, scambiando $\boldsymbol{p}_1$ con $\boldsymbol{p}_2$, tutto rimane inalterato. Questo è un risultato prevedibile. Una seconda conclusione è che l'interazione tra due dipoli è di tipo *non-centrale*: infatti, essa dipende dagli angoli che il vettore posizione $\boldsymbol{r}$, o il versore $\boldsymbol{u}_r$, formano con $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_2$ e inoltre, la forza tra i dipoli non è orientata lungo la linea congiungente i medesimi (ad eccezione di talune posizioni particolari). Di conseguenza, nel moto causato da forze tra dipoli non è conservato il momento della quantità di moto orbitale dei dipoli. Ancora un'altra conclusione è che, poichè l'energia potenziale mutua dei dipoli varia con la distanza come r^{-3} la forza, che è il gradiente dell'energia potenziale, diminuisce come r^{-4}, e pertanto l'interazione tra due dipoli elettrici diminuisce con la distanza molto più rapidamente che l'interazione fra due cariche.

La configurazione geometrica corrispondente all'Eq. (14.51) è illustrata in Fig. 14–39, dove (a) corrisponde al caso generico. I due dipoli rappresentati in (b) sono allineati lungo la congiungente. Pertanto $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = p_1 p_2$, $\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_1 = p_1$, ed $\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_2 = p_2$, per cui

il segno negativo indica che i dipoli si attraggono. In (c), si ha ancora $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = p_1 p_2$ ma $\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_1 = 0$ ed $\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_2 = 0$, per cui

EXAMPLE 14.12. Obtain the interaction energy between two electric dipoles. Use the result to estimate the interaction energy between two water molecules. Also discuss relative orientation effects.

Solution: In Example 14.11 we obtained the electric field produced by one dipole at distance r. Calling $\boldsymbol{p}_1$ its electric dipole moment, we may write

$$\mathcal{E}_1 = \frac{3\boldsymbol{u}_r(\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_1) - \boldsymbol{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Designating by $\boldsymbol{p}_2$ the moment of the second dipole, and using Eq. (14.49), we find that the interaction energy between the two dipoles is

$$E_{p,12} = -\boldsymbol{p}_2 \cdot \mathcal{E}_1 = -\frac{3(\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_1)(\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_2) - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{14.51}$$

Several important conclusions can be derived from this result. One is that the interaction energy $E_{p,12}$ is *symmetric* in the two dipoles because if we interchange $\boldsymbol{p}_1$ and $\boldsymbol{p}_2$ everything remains the same. This is a result to be expected. Second, the interaction between two dipoles is *noncentral* because it depends on the angles that the position vector $\boldsymbol{r}$ or the unit vector $\boldsymbol{u}_r$ make with $\boldsymbol{p}_1$ and $\boldsymbol{p}_2$. As a consequence, in a motion under a dipole–dipole interaction, the orbital angular momentum of the dipoles is not conserved. Another consequence is that the force between two dipoles is not along the line joining them (except in certain specific positions). Yet another conclusion is that, since the potential energy between electric dipoles varies as r^{-3} with the distance, then the force, which is the gradient of the potential energy, decreases as r^{-4}, and therefore the interaction between two electric dipoles diminishes with the distance much faster than the interaction between two charges.

The geometry corresponding to Eq. (14.51) is illustrated in Fig. 14–39, where (a) corresponds to the general case. In (b) the two dipoles are aligned along the line joining them. Thus $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = p_1 p_2$, $\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_1 = p_1$, and $\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_2 = p_2$, so that

$$E_{p,12} = -\frac{2p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

resulting in attraction between the dipoles because of the negative sign. In (c) we have again $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = p_1 p_2$, but $\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_1 = 0$ and $\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{p}_2 = 0$, so that

$$E_{p,12} = +\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Questo valore, essendo positivo, indica che l'interazione tra i dipoli è repulsiva. Infine, nel caso raffigura in (d), abbiamo $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = -p_1 p_2$, ed otteniamo

il che significa che i dipoli si attraggono. Questi risultati sono ovviamente in accordo con la descrizione fisica del problema.

L'interazione tra due dipoli elettrici è di grande importanza poichè le forze molecolari sono in larga parte dovute a questo tipo di interazioni. Consideriamo due molecole d'acqua, la cui posizione relativa sia del tipo indicato in Fig. 14—39(b), separate dalla distanza, normale nelle fase liquida, di circa 3.1×10^{-10} m. Il loro momento elettrico di dipolo è 6.1×10^{-30} m C. Pertanto, la loro energia potenziale di interazione può essere calcolata in

Questo risultato supera di un fattore dieci il valore stimato nel Paragrafo 13.9, in base a considerazioni sul calore di vaporizzazione. Lo studente, comunque, comprenderà che l'attuale risultato corrisponde all'energia d'interazione *relativa all'istante* in cui si ha la configurazione di Fig. 14—39(b). Ma poichè le molecole sono continuamente in moto, l'orientazione relativa cambia continuamente. Perciò, per ottenere $E_{p,12}$, dobbiamo mediare l'Eq. (14.51) su tutte le possibili orientazioni. Facendo questo, otteniamo un accordo migliore.

Suggeriamo che lo studente confronti i risultati sopra riportati relativi all'interazione di tipo elettrico, $E_{p,12}$, tra due molecole d'acqua con l'interazione gravitazionale corrispondente alla medesima posizione relativa.

14.12 Multipoli elettrici

É possibile definire momenti elettrici di ordine superiore o multipolari. Per esempio, una distribuzione di cariche come quella di Fig. 14—40 costituisce un *quadruplo elettrico*. Si noti che la carica totale è nulla e che, in base all'Eq. (14.48), anche il momento di dipolo elettrico è nullo. Non è facile dare una definizione generale del

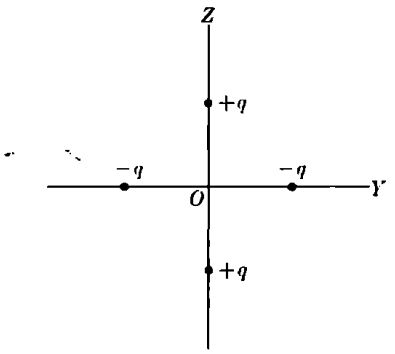


Fig. 14—40. Quadrupolo elettrico.

This value, since it is positive, indicates a repulsion between the dipoles. Finally, in (d), we have $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = -p_1 p_2$, and we get

$$E_{p,12} = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

which means that there will be attraction between the dipoles. These results are obviously in agreement with the physical picture of the problem.

The interaction between two electric dipoles is of great importance because molecular forces are due in large part to this type of interaction. Let us consider two water molecules in the relative position of Fig. 14–39(b) at their normal separation in the liquid phase, about 3.1×10^{-10} m. Their electric dipole moment is 6.1×10^{-30} m C. Therefore their interaction potential energy is calculated as

$$E_{p,12} = \frac{9 \times 10^9 \times 2 \times (6.1 \times 10^{-30})^2}{(3.1 \times 10^{-10})^3} = 2.22 \times 10^{-20} \text{ J}.$$

This result is larger by a factor of ten than the interaction energy mentioned in Section 13.9, which we estimated using the value of the heat of vaporization. The student, however, must realize that the present result corresponds to the *instantaneous* interaction energy between two water molecules in the relative position of Fig. 14–39(b). But since water molecules are in continuous motion, their relative orientation is continuously changing. Thus to obtain $E_{p,12}$, we must average Eq. (14.51) over all possible relative orientations. When we do this, we obtain better agreement.

We suggest that the student compare the above result for the electric interaction $E_{p,12}$ between two water molecules with the corresponding gravitational interaction for the same relative position.

14.12 Higher Electric Multipoles

It is possible to define higher-order or multipole electric moments. For example, a charge distribution such as that in Fig. 14–40 constitutes an *electric quadrupole*. Note that its total charge is zero and that its electric dipole moment is also zero, by virtue of Eq. (14.48). It is not easy to give here a general definition of the

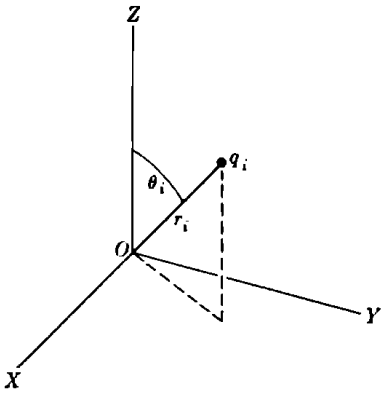


Fig. 14–40. Electric quadrupole.

Figura 14—41

Figure 14–41

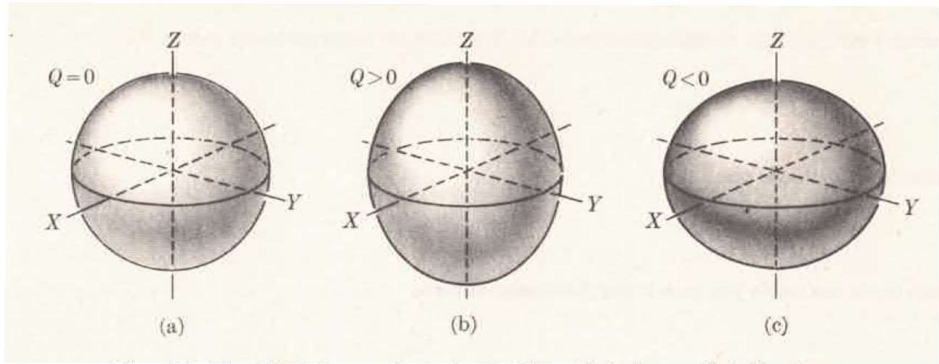


Fig. 14–42. Momenti elettrici di quadrupolo di distribuzioni ellissoidali di carica.

Fig. 14–42. Electric quadrupole of ellipsoidal charge distributions.

momento di quadrupolo elettrico in modo elementare. Comunque, possiamo dire che il momento di quadrupolo elettrico di una distribuzione di cariche, relativamente ai punti di un asse di simmetria, come l'asse Z, è definito dalla relazione

electric quadrupole moment in an elementary way. However, we may say that the electric quadrupole moment of a charge distribution relative to a symmetry axis, such as the Z-axis, is defined by

$$Q = \tfrac{1}{2}\sum_i q_i r_i^2(3\cos^2\theta_i - 1), \tag{14.52}$$

dove r_i è la distanza dal centro della carica i e θ_i è l'angolo formato da r_i con l'asse (Fig. 14–41). Notiamo che $z_i = r_i \cos\theta_i$. Perciò, possiamo scrivere l'Eq. (14.52) nella forma

where r_i is the distance of charge i from the center and θ_i is the angle that r_i makes with the axis (Fig. 14–41). We note that $z_i = r_i \cos\theta_i$. Then we may also write Eq. (14.52) as

$$Q = \tfrac{1}{2}\sum_i q_i(3z_i^2 - r_i^2). \tag{14.53}$$

Il momento di quadripolo elettrico è nullo per una distribuzione sferica di carica, positivo per una distribuzione di carica allungata, o prolata, negativo per una distribuzione appiattita, od oblata (Fig. 14–42). Pertanto il momento di quadrupolo dà una indicazione dello scostamento dalla forma sferica di una distribuzione di carica. Per esempio, nel Paragrafo 14.7, abbiamo ipotizzato che i nuclei atomici siano sferici. Comunque, misure accurate indicano che certi nuclei atomici hanno momenti di quadrupolo relativamente grandi. Ciò è stato interpretato come indicativo del fatto che tali nuclei sono assai deformati, e pertanto il campo elettrico da essi prodotto è assai discosto da quello di una carica puntiforme. A sua volta, l'energia associata al moto elettronico ne risulta influenzata.

Osserviamo che il potenziale di una carica puntiforme diminuisce come r^{-1} ed il campo come r^{-2}. Abbiamo pure visto (Paragrafo 14.11) che, per un dipolo elettrico, il potenziale diminuisce come r^{-2} ed il campo come r^{-3}. Analogamente, si può dimostrare che, per un quadrupolo elettrico, il potenziale varia come r^{-3} ed il campo come r^{-4}. Risultati analoghi possono essere ottenuti per multipoli di ordine superiore. In conclusione, perciò, quanto più alto è l'ordine di multipolo, tanto più piccolo è il raggio d'azione del campo elettrico.

The electric quadrupole moment is zero for a spherical distribution of charge, positive for an elongated or prolate charge distribution, and negative for an oblate or flattened charge distribution (Fig. 14–42). Therefore the electric quadrupole moment gives an indication of the degree of departure from the spherical form of a charge distribution. For example, in Section 14.7 we suggested that atomic nuclei are spherical. However, careful measurements indicate that certain nuclei have relatively large electric quadrupole moments. This has been interpreted as indicating that such nuclei are greatly deformed, and thus the electric field they produce departs from that of a point charge. This in turn affects the energy of the electronic motion.

We may note that the potential of a point charge decreases as r^{-1} and the field as r^{-2}. Similarly we have seen (Section 14.11) that for an electric dipole the potential decreases as r^{-2} and the field as r^{-3}. In an analogous way it can be proved that for an electric quadrupole the potential varies as r^{-3} and the field as r^{-4}. Similar results are obtained for higher-order multipoles. We conclude then that the higher the multipole order, the smaller the range within which its electric field has any noticeable effect.

ESEMPIO 14.13. Calcolare il potenziale elettrico della disposizione di cariche indicata in Fig. 14–43, detta quadrupolo elettrico lineare.

Soluzione: La carica totale del sistema è nulla. Pure il momento di dipolo elettrico è nullo perchè, usando l'Eq. (14.48), si ha $p = +q(+a) - 2q(0) + q(-a) = 0$. Comunque,

EXAMPLE 14.13. Compute the electric potential for the charge arrangement of Fig. 14–43, called a linear electric quadrupole.

Solution: The total charge of the system is zero. Also the electric dipole moment is zero since, using Eq. (14.48), we have $p = +q(+a) - 2q(0) + q(-a) = 0$. However,

il campo elettrico non è identicamente nullo. Il potenziale elettrico in un punto P è

the electric field is not identically zero. The electric potential at point P is

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{2q}{r} + \frac{q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r_2}\right). \tag{14.54}$$

Dalla figura, si vede che

From the figure we see that

$$r_1 = (r^2 - 2ar\cos\theta + a^2)^{1/2}.$$

Posto che a sia molto più piccolo di r, possiamo scrivere

Assuming that a is very small compared with r, we may write

$$r_1 = r\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/2}$$

and

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-1/2} \tag{14.55}$$

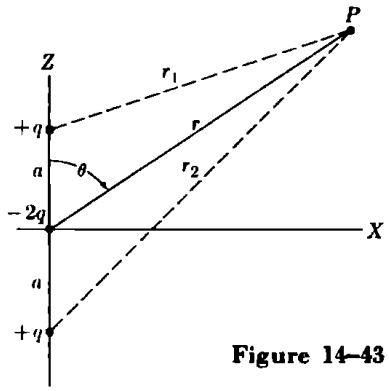


Figura 14–43 **Figure 14–43**

Ora, utilizzando fino al terzo termine lo sviluppo binomiale dato dall'Eq. (M.22) con $n = -\frac{1}{2}$, abbiamo $(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$. Nel caso attuale, $x = -2a\cos\theta/r + a^2/r^2$. Perciò

Now, using the binomial expansion given by Eq. (M.22) up to the third term with $n = -\frac{1}{2}$, we obtain $(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$. In the present case, we have $x = -2a\cos\theta/r + a^2/r^2$. Then

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^2 + \cdots\right].$$

Sviluppando le parentesi e conservando solo i termini nel cui denominatore r appare elevato alla terza potenza o a potenze inferiori, otteniamo

Expanding the bracket and keeping only terms having r^3 or less in the denominator, we obtain

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{a\cos\theta}{r^2} + \frac{a^2}{2r^3}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots \tag{14.56}$$

Parimenti, $r_2 = (r^2 + 2ar\cos\theta + a^2)^{1/2}$, e perciò

Similarly, $r_2 = (r^2 + 2ar\cos\theta + a^2)^{1/2}$, and therefore

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} - \frac{a\cos\theta}{r^2} + \frac{a^2}{2r^3}(3\cos^2\theta - 1) + \cdots \tag{14.57}$$

Sostituendo ambedue i risultati (14.56) e (14.57) in Eq. (14.54) e semplificando, otteniamo per il potenziale

Substituting both results (14.56) and (14.57) in Eq. (14.54) and simplifying, we get for the potential

$$V = \frac{qa^2(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Applicando l'Eq. (14.52), troviamo che il momento di quadrupolo elettrico della distribuzione di carica è

Applying Eq. (14.52), we find that the electric quadrupole moment of the charge distribution is

$$Q = \tfrac{1}{2}\{q(3a^2 - a^2) - 2q(0) + q[3(-a)^2 - a^2]\} = 2qa^2.$$

Pertanto la relazione

Therefore

$$V = \frac{Q(3\cos^2\theta - 1)}{2(4\pi\epsilon_0)r^3}, \tag{14.58}$$

fornisce il potenziale elettrico del quadrupolo lineare. Possiamo determinare il campo elettrico applicando, come facemmo per il dipolo elettrico, l'Eq. (14.28).

which gives the electric potential of a linear electric quadrupole. We can obtain the electric field by applying Eq. (14.28), as we did for the electric dipole.

Bibliografia

References

1. "Resource Letter *ECAN*-1 on the Electronic Charge and Avogadro's Number," D. L. Anderson, *Am. J. Phys.* **34**, 2 (1966)
2. "Nonuniform Electric Fields," H. Pohl; *Sci. Am.*, December 1960, page 106
3. "Robert Andrews Millikan," E. Watson; *The Physics Teacher* **2**, 7 (1964)
4. "Rutherford and His α-Particles," T. Osgood and H. Hirst; *Am. J. Phys.* **32**, 681 (1964)
5. "The Birth of the Nuclear Atom," E. Da C. Andrade; *Sci. Am.*, November 1965, page 93
6. "Discovery of the Electron," G. Thomson; *Physics Today*, August 1956, page 19
7. "Electron Theory: Description and Analogy," J. Oppenheimer; *Physics Today*, July 1957, page 12
8. "Classical Description of Charged Particles," F. Rohrlich; *Physics Today*, March 1962, page 19
9. "The Linear Accelerator," W. Panofsky; *Sci. Am.*, October 1954, page 40
10. "The Two-Mile Electron Accelerator," E. Ginxton and W. Kirk; *Sci. Am.*, November 1961, page 49
11. *The Development of the Concept of Electric Charge*, D. Roller and D. H. D. Roller. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1954
12. *The Discovery of the Electron*, D. Anderson. Princeton, N.J.: Momentum Books, D. Van Nostrand, 1964
13. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz and F. J. Milford. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960, Sections 2.1 through 2.5, 2.8, 2.9, and 7.1
14. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1959; Chapter 5, C. Coulomb; Chapter 10, M. Faraday; Chapter 14, J. J. Thomson; Chapter 18, R. A. Millikan
15. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume II, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 4, 6, 7, and 8
16. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963; page 97, Coulomb; page 387, Gilbert; page 408, Coulomb; page 420, Galvani; page 465, Ohm; page 583, Thomson
17. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapters 26, 27, 28, and 34

Problemi

14.1 Trovare la forza elettrica repulsiva agente tra i due protoni di una molecola d'idrogeno, sapendo che la distanza che li separa è 0.74×10^{-10} m. Fare il confronto con l'attrazione gravitazionale.

14.2 Calcolare la forza elettrica attrattiva tra il protone e l'elettrone di un atomo d'idrogeno, nell'ipotesi che l'elettrone descriva orbite circolari con raggio 0.53×10^{-10} m. Fare il confronto con l'attrazione gravitazionale.

14.3 Confrontare, a parità di distanza, la repulsione di natura elettrostatica tra due elettroni con l'attrazione gravitazionale. Ripetere il confronto nel caso di due protoni.

14.4 Due identiche palline di sughero di massa m hanno ugual carica q (Fig. 14–44). Esse sono appese a due fili, di lunghezza l, a loro volta vincolati in un medesimo punto. Determinare l'angolo θ che in condizioni di equilibrio i due fili fanno con la verticale.

Figura 14–44

14.5 Riprendere il Problema 14.4, nell'ipotesi che i due fili abbiano punti di sospensione differenti, distanti d l'uno dall'altro (Fig. 14–45). Come si potrebbe usare questa disposizione per verificare sperimentalmente la legge $1/r^2$ variando la distanza d e misurando l'angolo θ?

Figura 14–45

14.6 Quale carica deve possede una particella di massa 2 g per poter restare in equilibrio nel laboratorio sotto l'azione di un campo elettrico di intensità 500 N C^{-1} diretto verso il basso?

Problems

14.1 Find the electric force of repulsion between two protons in a hydrogen molecule, their separation being 0.74×10^{-10} m. Compare with their gravitational attraction.

14.2 Find the electric force of attraction between the proton and the electron in a hydrogen atom, assuming that the electron describes a circular orbit of 0.53×10^{-10} m radius. Compare with their gravitational attraction.

14.3 Compare the electrostatic repulsion between two electrons with their gravitational attraction at the same distance. Repeat for two protons.

14.4 Two identical cork balls of mass m have equal charges q (Fig. 14–44). They are attached to two strings of length l hanging from the same point. Find the angle θ which the strings will make with the vertical when equilibrium is reached.

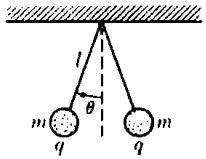


Figure 14–44

14.5 Repeat Problem 14.4, assuming that the two strings hang from points separated a distance d (Fig. 14–45). How could this arrangement be used to verify experimentally the inverse-square law by varying the distance d and observing the angle θ?

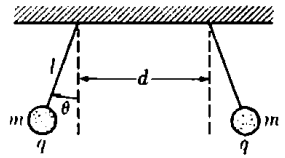


Figure 14–45

14.6 What must be the charge on a particle of mass 2 g for it to remain stationary in the laboratory when placed in a downward-directed electric field of intensity 500 N C^{-1}?

14.7 Il campo elettrico nella regione compresa tra le placche deflettrici di un certo oscilloscopio a raggi catodici è 30,000 NC^{-1}. (a) Quale forza agisce in quella regione su un elettrone? (b) Quale è l'accelerazione di un elettrone su cui agisce tale forza? Confrontare questa accelerazione con quella di gravità.

14.8 Una carica di 2.5×10^{-8} C è posta in un campo elettrico uniforme diretto verso l'alto di intensità 5×10^4 N C^{-1}. Qual'è il lavoro fatto dal campo sulla carica quando questa si sposta (a) di 45 cm verso destra? (b) di 80 cm verso il basso? (c) di 260 cm in una direzione inclinata di 45° verso l'alto rispetto all'orizzontale?

14.9 Tra due lastre piane parallele caricate in modo opposto, esiste un campo elettrico uniforme. Un elettrone lascia, con velocità nulla, la piastra carica negativamente e colpisce la superficie dell'altra piastra, distante 2 cm, dopo un intervallo di tempo di 1.5×10^{-8} sec. (a) Calcolare il campo elettrico. (b) Calcolare la velocità dell'elettrone quando urta la seconda piastra.

Figura 14–46

14.10 In Fig. 14–46 è rappresentato un elettrone lanciato lungo l'asse mediano compreso tra le placche di un tubo a raggi castodici con velocità iniziale di 2×10^7 m s^{-1}. Il campo elettrico tra le placche, diretto verso l'alto, ha un'intensità di 20,000 NC^{-1}. (a) Di quanto si è spostato al di sotto dell'asse l'elettrone quando esce dalle placche? (b) Quale angolo forma con l'asse all'uscita delle placche? (c) A quale distanza sotto l'asse urterà lo schermo fluorescente S?

14.7 The electric field in the region between the deflecting plates of a certain cathode-ray oscilloscope is 30,000 N C^{-1}. (a) What is the force on an electron in this region? (b) What is the acceleration of an electron when it is acted on by this force? Compare with the acceleration of gravity.

14.8 A charge of 2.5×10^{-8} C is placed in an upward-directed uniform electric field whose intensity is 5×10^4 N C^{-1}. What is the work of the electrical force on the charge when the charge moves (a) 45 cm to the right? (b) 80 cm downward? (c) 260 cm at an angle of 45° upward from the horizontal?

14.9 A uniform electric field exists in the region between two oppositely charged plane parallel plates. An electron is released from rest at the surface of the negatively charged plate and strikes the surface of the opposite plate, 2 cm distant from the first, in a time interval of 1.5×10^{-8} sec. (a) Calculate the electric field. (b) Calculate the velocity of the electron when it strikes the second plate.

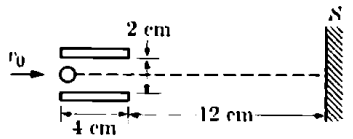


Figure 14–46

14.10 In Fig. 14–46, an electron is projected along the axis midway between the plates of a cathode-ray tube with an initial velocity of 2×10^7 m s^{-1}. The uniform electric field between the plates has an intensity of 20,000 N C^{-1} and is upward. (a) How far below the axis has the electron moved when it reaches the end of the plates? (b) At what angle with the axis is it moving as it leaves the plates? (c) How far below the axis will it strike the fluorescent screen S?

14.11 Un elettrone è iniettato in un campo elettrico uniforme di intensità 5000 N C^{-1}. Il campo è diretto verticalmente, verso il basso. La velocità iniziale dell'elettrone è di 10^7 m s^{-1}, ed è inclinata di 30° verso l'alto rispetto all'orizzontale. (a) Calcolare il tempo richiesto perchè l'elettrone raggiunga la quota massima. (b) Calcolare il massimo dislivello di cui l'elettrone si innalza rispetto alla quota iniziale. (c) A quale distanza, misurata in senso orizzontale, l'elettrone torna alla quota iniziale? (d) Disegnare la traiettoria dell'elettrone.

14.12 Una goccia d'olio di massa 3×10^{-14} kg e raggio 2×10^{-6} m possiede 10 elettroni in eccesso. Qual'è la sua velocità finale (a) quando cade in una regione priva di campo elettrico? (b) quando cade in presenza di un campo elettrico di intensità 3×10^5 N C^{-1} diretto verso il basso? La viscosità dell'aria è 1.80×10^{-5} N s m^{-2}. Trascurare la spinta di Archimede dovuta all'aria.

14.13 Una goccia d'olio carica, in un'apparecchiatura per l'esperimento di Millikan, cade di 1 mm in 27.4 sec, in assenza di campo esterno. La medesima goccia può essere mantenuta in equilibrio in un campo di 2.37×10^4 NC^{-1}. Quanti elettroni ha in eccesso la goccia? La viscosità dell'aria è 1.80×10^{-5} N s m^{-2}. La densità dell'olio è 800 kg m^{-3}, e quella dell'aria 1.30 kg m^{-3}.

14.14 Una goccia d'olio carica cade di 4.0 mm in 16.0 sec, in aria, a velocità costante, in assenza di campo elettrico. La densità dell'olio è 800 kg m^{-3}, quella dell'aria 1.30 kg m^{-3}, ed il coefficiente di viscosità dell'aria è 1.80×10^{-5} N s m^{-2}. (a) Calcolare il raggio e la massa della goccia. (b) Se la goccia porta una unità di carica elettronica ed è situata in un campo elettrico di 2×10^5 N C^{-1}, qual'è il rapporto tra la forza esercitata sulla goccia dal campo elettrico e la forza peso?

14.15 Quando la goccia d'olio del Problema 14.14 era situata in un campo elettrico di 2×10^5 N C^{-1}, furono osservati parecchi differenti tempi di salita sulla distanza di 4.0 mm.

14.11 An electron is projected into a uniform electric field of intensity 5000 N C^{-1}. The direction of the field is vertically downward. The initial velocity of the electron is 10^7 m s^{-1}, at an angle of 30° above the horizontal. (a) Calculate the time required for the electron to reach its maximum height. (b) Calculate the maximum distance the electron rises vertically above its initial elevation. (c) After what horizontal distance does the electron return to its original elevation? (d) Sketch the trajectory of the electron.

14.12 An oil droplet of mass 3×10^{-14} kg and of radius 2×10^{-6} m carries 10 excess electrons. What is its terminal velocity (a) when it falls in a region in which there is no electric field? (b) when it falls in an electric field whose intensity is 3×10^5 N C^{-1} directed downward? The viscosity of air is 1.80×10^{-5} N s m^{-2}. Neglect the buoyant force of the air.

14.13 A charged oil drop, in a Millikan oil-drop apparatus, is observed to fall through a distance of 1 mm in 27.4 sec, in the absence of any external field. The same drop can be held stationary in a field of 2.37×10^4 N C^{-1}. How many excess electrons has the drop acquired? The viscosity of air is 1.80×10^{-5} N s m^{-2}. The density of the oil is 800 kg m^{-3}, and the density of air is 1.30 kg m^{-3}.

14.14 A charged oil drop falls 4.0 mm in 16.0 sec at constant speed in air in the absence of an electric field. The density of the oil is 800 kg m^{-3}, that of the air is 1.30 kg m^{-3}, and the coefficient of viscosity of the air is 1.80×10^{-5} N s m^{-2}. (a) Calculate the radius and the mass of the drop. (b) If the drop carries one electronic unit of charge and is in an electric field of 2×10^5 N C^{-1}, what is the ratio of the force of the electric field on the drop to its weight?

14.15 When the oil drop in Problem 14.14 was in a constant electric field of 2×10^5 N C^{-1}, several different times of rise over the distance of 4.0 mm were observed. I tempi misurati erano 40.65, 25.46, 18.53, 12.00, e 7.85 sec. Calcolare (a) la velocità di caduta in presenza della sola forza peso, (b) la velocità di salita in ciascun caso, e (c) le somme della velocità del caso (a) e di ciascuna velocità del caso (b). (d) Mostrare che le somme del punto (c) sono multipli interi di un certo numero e interpretare tale risultato. (e) In base a questi dati calcolare il valore della carica elettronica.

14.16 Due cariche puntiformi, aventi carica 5μC e -10μC, distano 1 m l'una dall'altra. (a) Trovare l'intensità la direzione ed il verso del campo elettrico in un punto distante 0.6 m dalla prima carica e 0.8 dalla seconda. (b) In quale punto è nullo il campo elettrico prodotto dalle due cariche?

14.17 In una apparecchiatura per la misura della carica elettronica e col metodo di Millikan, è richiesta un'intensità del campo di 6.34×10^3 V m^{-1} per mantenere ferma una goccia d'olio. Se la distanza tra i piatti è 1.5 cm, quale differenza di potenziale bisogna mantenere tra essi?

14.18 Tre cariche positive di 2×10^{-7} C, 1×10^{-7} C, e 3×10^{-7} C sono disposte in linea retta, con la seconda carica al centro, in modo che la distanza tra due cariche adiacenti è 0.10 m. Calcolare (a) la forza risultante esercitata su ciascuna carica dalle altre due, (b) l'energia potenziale di ciascuna carica, (c) l'energia potenziale interna del sistema. Confrontare il risultato di (c) con la somma dei risultati ottenuti in (b), e spiegare la differenza.

14.19 Risolvere il problema precedente nell'ipotesi che la seconda carica sia negativa.

14.20 In un processo di fissione di un nucleo di uranio, i frammenti prodotti siano ^{95}Y e ^{141}I, aventi masse praticamente uguali, rispettivamente, a 95 amu e 141 amu. I loro raggi possono essere calcolati mediante l'espressione $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3}$ m, dove A è il numero di massa. Assumendo che inizialmente i due frammenti siano fermi e tangenti l'uno all'altro, trovare (a) la forza agente tra essi e l'energia potenziale nelle condizioni iniziali (b) la velocità finale di ciascun frammento rispetto al loro centro di massa.

The measured times were 40.65, 25.46, 18.53, 12.00, and 7.85 sec. Calculate (a) the velocity of fall under gravity, (b) the velocity of rise in each case, and (c) the sums of the velocity in part (a) and of each velocity in part (b). (d) Show that the sums in part (c) are integral multiples of some number, and interpret this result. (e) Calculate the value of the electronic charge from these data.

14.16 Two point charges, 5μC and -10μC, are spaced 1 m apart. (a) Find the magnitude and direction of the electric field at a point 0.6 m from the first charge and 0.8 from the second charge. (b) Where is the electric field zero due to these two charges?

14.17 In an apparatus for measuring the electronic charge e by Millikan's method, an electric intensity of 6.34×10^4 V m^{-1} is required to maintain a charged oil drop at rest. If the plates are 1.5 cm apart, what potential difference between them is required?

14.18 Three positive charges of 2×10^{-7} C, 1×10^{-7} C, and 3×10^{-7} C are in a straight line, with the second charge in the center, so that the separation between two adjacent charges is 0.10 m. Calculate (a) the resultant force on each charge due to the others, (b) the potential energy of each charge due to the others, (c) the internal potential energy of the system. Compare (c) with the sum of the results obtained in (b), and explain.

14.19 Solve the preceding problem for a case in which the second charge is negative.

14.20 In a particular fission of a uranium nucleus, the two fragments are ^{95}Y and ^{141}I, having masses practically equal to 95 amu and 141 amu, respectively. Their radii can be computed using the expression $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3}$ m, where A is the mass number. Assuming that they are initially at rest and tangent to each other, find (a) the initial force and potential energy, (b) their final relative velocity, (c) the final velocity of each fragment relative to their center of mass.

14.21 Quando un nucleo d'uranio si disintegra, emettendo una particella alpha (ossia un nucleo di elio, $Z = 2$), ciò che rimane è un nucleo di torio ($Z = 90$). Assumendo che inizialmente la particella alpha sia ferma ad una distanza dal centro del nucleo di uranio di 8.5×10^{-15} m, calcolare (a) l'accelerazione iniziale e l'energia della particella, (b) l'energia e la velocità della particella quando si trova a grande distanza dal nucleo.

14.21 When a uranium nucleus disintegrates, emitting an alpha particle (or helium nucleus, $Z = 2$), the resulting nucleus is thorium ($Z = 90$). Assuming that initially the alpha particle is at rest and at a distance from the center of the uranium nucleus equal to 8.5×10^{-15} m, calculate (a) the initial acceleration and energy of the particle, (b) the energy and velocity of the particle when it is at a large distance from the nucleus.

14.22 Quattro protoni sono disposti ai vertici di un quadrato di lato 2×10^{-9} m. Un altro protone si trova inizialmente sulla perpendicolare al quadrato passante per il centro, ad una distanza di 2×10^{-9} m dal centro stesso. Calcolare (a) la minima velocità iniziale che il quinto protone deve avere per raggiungere il centro del quadrato, (b) la sua accelerazione iniziale e finale. (c) Rappresentare graficamente l'energia potenziale del protone in funzione della distanza dal centro del quadrato. Descrivere il moto nei casi in cui l'energia sia maggiore o minore di quella calcolata in (a).

14.22 Four protons are placed at the vertices of a square of side 2×10^{-9} m. Another proton is initially on the perpendicular to the square through its center a distance 2×10^{-9} m from the center. Calculate (a) the minimum initial velocity it needs to reach the center of the square, (b) its initial and final acceleration. (c) Plot the potential energy of the proton as a function of its distance from the center of the square. Describe its motion if the initial energy is either smaller or larger than that found in (a).

14.23 Il potenziale ad una certa distanza da una carica elettrica puntiforme è 600 V ed il campo elettrico 200 N C^{-1}. (a) Qual'è la distanza dalla carica? (b) Qual'è il valore della carica?

14.23 The potential at a certain distance from a point charge is 600 V and the electric field is 200 N C^{-1}. (a) What is the distance to the point charge? (b) What is the magnitude of the charge?

14.24 La massima carica che può essere trattenuta da uno dei terminali sferici di un grosso generatore Van de Graaff è circa 10^{-3} C. Si assuma che una carica positiva di questo valore sia distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera posta nello spazio vuoto. (a) Calcolare l'intensità del campo elettrico in un punto esterno alla sfera, distante 5 m dal centro. (b) Se un elettrone fosse lasciato libero in questo punto, quale sarebbe il valore della sua accelerazione e quale la direzione? (c) Quale valore avrebbe la sua velocità quando giunge sulla sfera?

14.24 The maximum charge that can be retained by one of the spherical terminals of a large Van de Graaff generator is about 10^{-3} C. Assume a positive charge of this magnitude, distributed uniformly over the surface of a sphere in otherwise empty space. (a) Compute the magnitude of the electric intensity at a point outside the sphere, 5 m from its center. (b) If an electron were released at this point, what would the magnitude and direction of its initial acceleration be? (c) What would its velocity be when it reached the sphere?

14.25 Una piccola sfera di massa 0.2 g è appesa ad un filo tra due piatti verticali distanti 5 cm. La carica della sfera è 6×10^{-9} C. Qual'è la differenza di potenziale tra i due piatti se il filo si dispone in modo da formare un angolo di 10° con la verticale?

14.25 A small sphere of mass 0.2 g hangs by a thread between two parallel vertical plates 5 cm apart. The charge on the sphere is 6×10^{-9} C. What is the potential difference between the plates if the thread assumes an angle of 10° with the vertical?

14.26 Due cariche puntiformi di 2×10^{-7} C e 3×10^{-7} C distano 0.10 m l'una dall'altra. Calcolare il campo elettrico risultante ed il potenziale, (a) in un punto a mezza strada tra i due, (b) in un punto posto sulla congiungente e distante 0.04 m dalla prima carica, (c) in un punto sulla congiungente e posto ancora a 0.04 m dalla prima, ma esternamente, (d) in un punto distante 0.10 m da ciascuna carica. (e) Dove è nullo il campo elettrico?

14.26 Two point charges of 2×10^{-7} C and 3×10^{-7} C are separated by a distance of 0.10 m. Compute the resultant electric field and potential at (a) the midpoint between them, (b) at a point 0.04 m from the first and on the line between them, (c) at a point 0.04 m from the first, on the line joining the charges but outside them, (d) at a point 0.10 m from each charge. (e) Where is the electric field zero?

14.27 Risolvere il problema precedente nell'ipotesi che la seconda carica sia negativa.

14.27 Solve the preceding problem for a case in which the second charge is negative.

14.28 Facendo ancora riferimento al Problema 14.26, calcolare il lavoro richiesto per spostare una carica di 4×10^{-7} C dal punto indicato in (c) a quello indicato in (d). È necessario specificare il cammino percorso?

14.28 Referring again to Problem 14.26, calculate the work required to move a charge of 4×10^{-7} C from the point in (c) to the point in (d). Is it necessary to specify the path?

14.29 Due cariche positive puntiformi, ciascuna di valore q, sono fissate sull'asse Y nei punti di coordinate $y = +a$ ed $y = -a$. (a) Tracciare un diagramma indicante la posizione delle cariche. (b) Qual'è il valore del potenziale nell'origine? (c) Mostrare che il valore del potenziale in ogni punto dell'asse X è

14.29 Two positive point charges, each of magnitude q, are fixed on the Y-axis at the points $y = +a$ and $y = -a$. (a) Draw a diagram showing the positions of the charges. (b) What is the potential at the origin? (c) Show that the potential at any point on the X-axis is

$$V = 2q/4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2 + x^2}.$$

(d) Tracciare un grafico del potenziale sull'asse X in funzione di x nell'intervallo da $x = +5a$ a $x = -5a$. (e) Per quale valore di x il potenziale ha valore metà che nell'origine? (f) Utilizzando l'espressione riportata al punto (c) determinare il campo elettrico nei punti dell'asse X.

(d) Sketch a graph of the potential on the X-axis as a function of x over the range from $x = +5a$ to $x = -5a$. (e) At what value of x is the potential one-half that at the origin? (f) From (c), obtain the electric field on the X-axis.

14.30 Mantenendo la configurazione di cariche del Problema 14.29, si immagini di spostare leggermente rispetto alla origine nella direzione dell'asse X una particella carica di massa m e carica q' e poi lasciarla libera. (a) Qual'è la velocità all'infinito? (b) Tracciare un grafico della velocità della particella in funzione di x. (c) Se la particella è lanciata verso sinistra nella direzione dell'asse X partendo da un punto posto a grande distanza, sulla destra, rispetto all'origine, con velocità pari alla metà di quella calcolata in (a), a quale distanza dall'origine si fermerà la particella? (d) Se una particella carica negativamente fosse lasciata libera, ferma, in un punto dell'asse X, a grande distanza e a sinistra della

14.30 For the charges in Problem 14.29, suppose that a positively charged particle of charge q' and mass m is displaced slightly from the origin in the direction of the X-axis, and then released. (a) What is its velocity at infinity? (b) Sketch a graph of the velocity of the particle as a function of x. (c) If the particle is projected toward the left along the X-axis from a point at a large distance to the right of the origin, with a velocity half that acquired in part (a), at what distance from the origin will it come to rest? (d) If a negatively charged particle were released from rest on the X-axis, at a very large distance to the left of

origine, quale sarebbe la sua velocità quando passa per l'origine?

14.31 Considerando la distribuzione di cariche descritta nel Problema 14.29, tracciare il grafico rappresentante il potenziale nei punti dell'asse Y. Confrontare col grafico del Problema 14.29 (d). Il potenziale ha un minimo nell'origine?

14.32 Si consideri ancora una volta la distribuzione di cariche del Problema 14.29. (a) Si immagini che una particella portante una carica positiva q' sia lasciata libera, ferma, esattamente nell'origine? Cosa succede? (b) Cosa accadrà se la particella di cui al punto (a) viene spostata leggermente nella direzione dell'asse Y? (c) Cosa accadrà se viene spostata leggermente nella direzione dell'asse X?

14.33 Una particella di carica 25×10^{-9} C è posta nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale ed una di carica -25×10^{-9} C viene posta nel punto di coordinate $x = 6$ m, $y = 0$. Qual'è il campo elettrico (a) nel punto $x = 3$ m, $y = 0$? (b) nel punto $x = 3$ m, $y = 4$ m?

14.34 Tre cariche elettriche di egual valore, 1 C, sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di 10 cm di lato. Calcolare (a) la forza agente su ciascuna carica e la relativa energia potenziale dovute alle altre due cariche, (b) il potenziale ed il campo elettrico risultante nel centro del triangolo, (c) l'energia potenziale interna del sistema.

14.35 Facendo riferimento al problema precedente, tracciare il grafico rappresentante le linee di forza prodotte dalle tre cariche. Rappresentare anche le superfici equipotenziali.

14.36 Dimostrare che le componenti ortogonali del campo elettrico generato da una carica q alla distanza r sono

ecc.

14.37 In un atomo di idrogeno un elettrone, nello stato ad energia minima (detto anche stato fondamentale), si muove su un'orbita, che potremmo dire circolare, con raggio 0.53×10^{-10} m. Calcolare (a) l'energia potenziale, (b) l'energia cincentica,

the origin, what would be its velocity as it passed the origin?

14.31 Referring again to the charges described in Problem 14.29, make a plot of the potential along the Y-axis. Compare with the plot in Problem 14.29(d). Is the potential a minimum at the origin?

14.32 Once again consider the charges in Problem 14.29. (a) Suppose that a positively charged particle of charge q' is placed precisely at the origin and released from rest. What happens? (b) What will happen if the charge in part (a) is displaced slightly in the direction of the Y-axis? (c) What will happen if it is displaced slightly in the direction of the X-axis?

14.33 In a rectangular coordinate system a charge of 25×10^{-9} C is placed at the origin of coordinates and a charge of -25×10^{-9} C is placed at the point $x = 6$ m, $y = 0$. What is the electric field at (a) $x = 3$ m, $y = 0$? (b) $x = 3$ m, $y = 4$ m?

14.34 Equal electric charges, of 1 C each, are placed at the vertices of an equilateral triangle whose sides are 10 cm in length. Calculate (a) the force and the potential energy of each charge as a result of the interactions with the others, (b) the resultant electric field and potential at the center of the triangle, (c) the internal potential energy of the system.

14.35 Referring to the previous problem, make a plot of the lines of force of the electric field produced by the three charges. Also plot the equipotential surfaces.

14.36 Show that the rectangular components of the electric field produced by a charge q at the distance r are

$$E_x = qx/4\pi\epsilon_0 r^3,$$

etc.

14.37 In a hydrogen atom in its state of lowest energy (also called the ground state) the electron moves around the proton in what can be described as a circular orbit of radius 0.53×10^{-10} m. Compute (a) the potential energy, (b) the kinetic energy,

(c) l'energia totale, (d) la frequenza del moto (Per confronto, la frequenza della radiazione emessa dall'atomo di idrogeno è dell'ordine di 10^{15} Hz.)

14.38 Usando il teorema del viriale per una particella, determinare l'energia di un elettrone (carica $-e$) che ruota intorno ad un nucleo di carica $+Ze$ alla distanza r. Applicare il risultato al caso dell'idrogeno ($r \sim 0.53 \times 10^{-10}$ m) e confrontare il risultato con quello ottenuto in (c) del Problema 14.37.

14.39 Scrivere un'espressione che determini l'energia potenziale interna totale di natura elettrica di (a) un atomo di elio, (b) una molecola d'idrogeno.

14.40 Qual'è l'energia cinetica, in joule, e la velocità, in m s^{-1}, di un nucleo di carbonio (carica $+6e$) accelerato da una differenza di potenziale di 10^7 V?

14.41 Determinare una relazione numerica che esprima la velocità (in m s^{-1}) di un elettrone e di un protone in funzione della differenza di potenziale con cui sono stati accelerati, nell'ipotesi che inizialmente fossero in condizioni di riposo.

14.42 (a) Qual'è la massima differenza di potenziale con cui è possibile accelerare un elettrone senza che la sua massa superi la massa di riposo di più dell'1%? (b) Qual'è il rapporto tra la velocità di tale elettrone e la velocità della luce c? (c) Eseguire il medesimo calcolo per un protone.

14.43 Calcolare l'espressione relativistica della differenza di potenziale richiesta (a) per portare un elettrone da fermo alla velocità $0.4c$, e (b) per aumentare la sua velocità da $0.4c$ a $0.8c$, (c) per aumentarla da $0.8c$ a $0.95c$. Ripetere il calcolo per un protone.

14.44 Una certa macchina per alte energie accelera elettroni con una differenza di potenziale di 6.5×10^9V. (a) Qual'è il rapporto tra la massa m di un elettrone uscente dall'acceleratore e la sua massa di riposo m_0? (b) Qual'è il rapporto della sua velocità a quella della luce? Quale sarebbe la velocità calcolata in base ai principi della meccanica classica?

(c) the total energy, (d) the frequency of the motion. (For comparison, the frequency of the radiation emitted by the hydrogen atom is of the order of 10^{15} Hz.)

14.38 Using the virial theorem for one particle, determine the energy of an electron (charge $-e$) revolving around a nucleus of charge $+Ze$ at a distance r. Apply it to a hydrogen atom ($r \sim 0.53 \times 10^{-10}$ m) and compare with the result obtained in (c) of Problem 14.37.

14.39 Write an expression giving the total internal electric potential energy of (a) a helium atom, (b) a hydrogen molecule.

14.40 How much kinetic energy, in joules, and what velocity, in m s^{-1}, does a carbon nucleus (charge $+6e$) have after being accelerated by a potential difference of 10^7 V?

14.41 Establish a numerical relation giving the velocity (in m s^{-1}) of an electron and a proton in terms of the potential difference (in volts) through which they have moved, assuming that initially they were at rest.

14.42 (a) What is the maximum potential difference through which an electron can be accelerated if its mass is not to exceed its rest mass by more than 1% of the rest mass? (b) What is the velocity of such an electron, expressed as a fraction of the speed of light c? (c) Make the same calculations for a proton.

14.43 Calculate, relativistically, the potential difference required (a) to bring an electron from rest to a velocity of $0.4c$, and (b) to increase its velocity from $0.4c$ to $0.8c$, (c) to increase its velocity from $0.8c$ to $0.95c$. Repeat for a proton.

14.44 A certain high-energy machine accelerates electrons through a potential difference of 6.5×10^9 V. (a) What is the ratio of the mass m of an electron to its rest mass m_0 when it emerges from the accelerator? (b) What is the ratio of its velocity to that of light? (c) What would the velocity be if computed from the principles of classical mechanics?

RF oscillator = Oscillatore a RF
Ion source = Sorgente di ioni
Electrical . . . = Collegamenti elettrici
Vacuum tank = Contenitore sotto vuoto
Target = Bersaglio
Drift tubes = Elettrodi acceleratori a forma di cilindro cavo

Figura 14–47

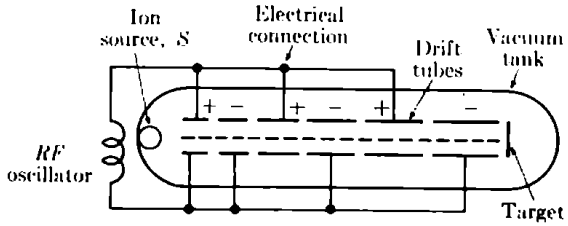


Figure 14–47

14.45 Qual'è la velocità finale di un elettrone accelerato con una differenza di potenziale di 12.000 CV, se la sua velocità iniziale è di 10^7 m s^{-1}?

14.46 Un elettrone nel suo moto dal catodo all'anodo in un certo tubo a raggi x è accelerato da fermo con una differenza di potenziale di 180.000 V. Quando arriva all'anodo qual'è (a) la sua energia cinetica in eV, (b) la sua massa m, (c) la sua velocità?

14.47 In un acceleratore lineare, come illustrato in Fig. 14–47, le differenti sezioni in cui è suddiviso il tubo sono elettricamente collegate in modo alterno e tra i due gruppi è applicata una differenza di potenziale oscillante. (a) Mostrare che, affinchè gli ioni nel loro moto lungo il tubo si mantengano, nel passaggio da una sezione di tubo all'altra, in fase col campo oscillante (posto l'energia non sia relativistica), è necessario che le lunghezze dei successivi pezzi di tubo siano pari a $L_1\sqrt{n}$, dove L è la lunghezza del primo tubo. (b) Determinare L_1 posto che la differenza di potenziale acceleratrice sia V_0 e la frequenza υ. (c) Calcolare l'energia dello ione uscente dall'n-esima sezione. (d) Quale sarebbe la relazione esprimente il rapporto tra le lunghezze di sezioni di tubo successive, qualora lo ione avesse raggiunto velocità relativistiche?

14.48 Si immagini che la differenza di potenziale esistente tra il terminale sferico di un generatore di Van de Graaff ed il punto in cui le cariche sono iniettate sulla cinghia che si muove verso l'alto sia 2×10^6 V. Se la cinghia fornisce cariche negative alla sfera ad un ritmo di 2×10^{-3} C s^{-1} e sottrae col medesimo ritmo cariche positive, quale potenza (espressa in cavalli vapore) deve essere fornita per far muovere la cinghia sottoposta alle forze di natura elettrica?

14.49 La distanza media che separa i protoni in un nucleo atomico è dell'ordine di 10^{-15} m. Stimare, in J ed in MeV, l'ordine di grandezza dell'energia potenziale elettrica di due protoni in un nucleo.

14.45 What is the final velocity of an electron accelerated through a potential difference of 12,000 V if it has an initial velocity of 10^7 m s^{-1}?

14.46 An electron in a certain x-ray tube is accelerated from rest through a potential difference of 180,000 V in going from the cathode to the anode. When it arrives at the anode, what is (a) its kinetic energy in eV, (b) its mass m, (c) its velocity?

14.47 In a linear accelerator, as illustrated in Fig. 14–47, alternating sections of the tube are connected and an oscillating potential difference is applied between the two sets. (a) Show that, in order for the ion to be in phase with the oscillating potential when it crosses from one tube to the other (the energies being nonrelativistic), the lengths of successive tubes must be $L_1\sqrt{n}$, where L_1 is the length of the first tube. (b) Find L_1 if the accelerating voltage is V_0 and its frequency is ν. (c) Compute the energy of the ion emerging from the nth tube. (d) What should the successive lengths of the tubes be after the ion reaches relativistic energies?

14.48 Suppose that the potential difference between the spherical terminal of a Van de Graaff generator and the point at which charges are sprayed onto the upward-moving belt is 2×10^6 V. If the belt delivers negative charge to the sphere at the rate of 2×10^{-3} C s^{-1} and removes positive charge at the same rate, what horsepower must be expended to drive the belt against electrical forces?

14.49 The average separation of protons within an atomic nucleus is of the order of 10^{-15} m. Estimate in J and in MeV the order of magnitude of the electric potential energy of two protons in a nucleus.

14.50 Nell'ipotesi che tutti i protoni in un nucleo atomico di raggio R siano distribuiti uniformemente, si può calcolare che l'energia potenziale di origine elettrica sia $\frac{3}{5}Z(Z-1)e^2/4\pi\epsilon_0 R$ (vedi Problema 14.80 ed Esempio 16.13). Il raggio nucleare può a sua volta essere valutato come $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3}$ m. Scrivere le espressioni che dànno l'energia potenziale elettrica del nucleo in J ed in MeV in funzione di Z e A.

14.51 Usando i risultati del Problema 14.50, calcolare l'energia potenziale elettrica totale e l'energia per protone per i seguenti nuclei: ^{16}O ($Z = 8$), ^{40}Ca($Z = 20$), ^{91}Zr ($Z = 40$), ^{144}Nd($Z = 60$), ^{200}Hg ($Z = 80$), e ^{238}U ($Z = 92$). Cosa vi dicono i risultati ottenuti circa l'effetto dell'interazione elettrica tra protoni sulla stabilità dei nuclei? Utilizzando i risultati ottenuti, rappresentare graficamente l'energia potenziale in funzione del numero di massa.

14.52 Un protone accelerato in una macchina Van de Graaff da 1 MeV è lanciato su un foglietto d'oro. Calcolare la distanza di massimo avvicinamento ai nuclei d'oro (a) per collisioni frontali, (b) per collisioni con parametro d'impatto di 10^{-15} m e 10^{-14} m. Qual'è la deflessione subita dal protone in ciascun caso?

14.53 Una particella α avente energia cinetica di 4 MeV è lanciata esattamente contro un nucleo di mercurio. Il numero atomico del mercurio è 80, e pertanto il nucleo di mercurio ha una carica positiva pari a 80 cariche elettroniche. (a) Determinare la distanza di massimo avvicinamento della particella α al nucleo. (b) Confrontare il risultato col valore del raggio nucleare $\sim 10^{-14}$ m.

14.50 Assuming that all protons in an atomic nucleus of radius R are uniformly distributed, the internal electric potential energy can be computed by $\frac{3}{5}Z(Z-1)e^2/4\pi\epsilon_0 R$ (see Problem 14.80 and Example 16.13). The nuclear radius can in turn be computed by $R = 1.2 \times 10^{-15} A^{1/3}$ m. Write expressions giving the nuclear electric potential energy in J and in MeV as a function of Z and A.

14.51 Using the results of Problem 14.50, compute the total electric potential energy and the energy per proton for the following nucleus: ^{16}O ($Z = 8$), ^{40}Ca ($Z = 20$), ^{91}Zr ($Z = 40$), ^{144}Nd ($Z = 60$), ^{200}Hg ($Z = 80$), and ^{238}U ($Z = 92$). What do your results tell you about the effect of the electric interaction between protons on the stability of the nucleus? Using your data, plot the potential energy against the mass number.

14.52 A proton produced in a 1-MeV Van de Graaff accelerator is sent against a gold foil. Calculate the distance of closest approach (a) for a head-on collision, (b) for collisions with impact parameters of 10^{-15} m and 10^{-14} m. What is the deflection of the proton in each case?

14.53 An alpha particle with a kinetic energy of 4 MeV is directed straight toward the nucleus of a mercury atom. The atomic number of mercury is 80, and therefore the mercury nucleus has a positive charge equal to 80 electronic charges. (a) Find the distance of closest approach of the alpha particle to the nucleus. (b) Compare the result with the nuclear radius, $\sim 10^{-14}$ m.

14.54 Una differenza di potenziale di 8×10^5 V accelera un fascio di protoni che cadono su un foglietto d'oro ($Z = 79$). Calcolare la sezione d'urto differenziale per la diffusione coulombiana per valori dell'angolo ϕ intervallati di 20° da 20° a 180°. Tracciare un diagramma polare di $\sigma(\phi)$. [*Nota:* L'Equazione (14.25) dà un valore infinito per $\phi = 0$. Ciò accade perchè si è assunto che il nucleo diffondente sia puntiforme. Tale valore infinito scompare se si tien conto delle dimensioni finite del nucleo.]

14.55 La differenza di potenziale tra i due piatti paralleli di Fig. 14–48 è 100 V; essi distano di 1 cm, e sono lunghi 2 cm. Un elettrone viene lanciato con velocità iniziale 10^7 m s^{-1} in direzione perpendicolare al campo. (a) Trovare la deviazione trasversale subita dall'elettrone e la componente trasversale della sua velocità all'uscita dai piatti. (b) Se viene posto uno schermo alla distanza di 0.50 m, sulla destra, dal termine dei piatti, in quale posizione di tale schermo cadrà l'elettrone?

14.54 Protons accelerated by a voltage of 8×10^5 V fall on a gold foil ($Z = 79$). Compute the differential cross section for coulomb scattering, in intervals of 20°, for ϕ between 20° and 180°. Make a polar graph of $\sigma(\phi)$. [*Note:* Equation (14.25) becomes infinite for $\phi = 0$. This is because we have assumed that the scattering nucleus is a point charge. When the finite size of the nucleus is taken into account, this infinity disappears.]

14.55 The potential difference between the two parallel plates in Fig. 14–48 is 100 V, their separation is 1 cm, and their length is 2 cm. An electron is projected with an initial velocity of 10^7 m s^{-1} in a direction perpendicular to the field. (a) Find its transverse deviation and its transverse velocity when it emerges from the plate. (b) If a screen is placed at 0.50 m to the right of the end of the plates, at what position on the screen will the electron fall?

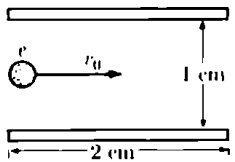


Figura 14–48

Figure 14–48

14.56 Tra due piatti paralleli distanti 4 cm è applicata una differenza di potenziale di 1600 V. Un elettrone si stacca dal piatto carico negativamente nel medesimo istante in cui un protone si stacca da quello carico positivamente. (a) A quale distanza dal piatto positivo essi s'incrociano? (b) In che rapporto stanno le rispettive velocità quando essi urtano i piatti opposti? (c) In che rapporto stanno le rispettive energie quando urtano i piatti opposti?

14.56 A potential difference of 1600 V is established between two parallel plates 4 cm apart. An electron is released from the negative plate at the same instant that a proton is released from the positive plate. (a) How far will they be from the positive plate when they pass each other? (b) How do their velocities compare when they strike the opposite plates? (c) How do their energies compare when they strike the opposite plates?

14.57 Un certo triodo a vuoto consiste, essenzialmente, dei seguenti elementi. Una superficie piana (il catodo) emette elettroni aventi velocità iniziale trascurabile. Ad una distanza di 3 mm dal catodo si trova, disposta parallelamente ad esso, una griglia forata, fatta con filo sottile, posta ad un potenziale di 18 V superiore a quello del catodo. La struttura della griglia è sufficientemente aperta perchè gli elettroni possano attraversarla liberamente. Una seconda superficie (l'anodo) si trova a 12 mm al di là della griglia ad un potenziale 15 V superiore a quello del catodo. Possiamo assumere che il campo elettrico nelle regioni tra catodo e griglia e tra griglia e anodo sia uniforme. (a) Tracciare un diagramma del potenziale in funzione della distanza relativamente ai punti di una retta congiungente il catodo all'anodo. (b) Con quale velocità gli elettroni attraversano la griglia? (c) Con quale velocità gli elettroni colpiscono l'anodo? (d) Determinare l'intensità e la direzione del campo elettrico nelle regioni comprese tra catodo e griglia e tra griglia e anodo. (e) Calcolare l'accelerazione dell'elettrone, in modulo, direzione e verso, in ciascuna regione.

14.57 A certain vacuum triode consists, basically, of the following elements. A plane surface (the cathode) emits electrons with negligible initial velocities. Parallel to the cathode and 3 mm away from it is an open grid of fine wire at a potential of 18 V above the cathode. The structure of the grid is sufficiently open for electrons to pass through it freely. A second plane surface (the anode) is 12 mm beyond the grid and is at a potential of 15 V above the cathode. We may assume that the electric fields between cathode and grid, and between grid and anode, are uniform. (a) Draw a diagram of potential versus distance, along a line from cathode to anode. (b) With what velocity do the electrons cross the grid? (c) With what velocity do electrons strike the anode? (d) Determine the magnitude and direction of the electric field between the cathode and the grid and between the grid and the anode. (e) Calculate the magnitude and the direction of the acceleration of the electron in each region.

14.58 Un acceleratore lineare caratterizzato da una differenza di potenziale di 800 kV genera un fascio di protoni che porta una corrente di 1 mA. Calcolare (a) il numero di protoni al secondo che colpiscono il bersaglio, (b) la potenza richiesta per accelerare i protoni, (c) la velocità dei protoni quando colpiscono il bersaglio. (d) Dato che i protoni perdono nel bersaglio l'80% della loro energia, calcolare quale potenza termica, espressa in cal s^{-1}, debba essere sottratta dal bersaglio.

14.58 A linear accelerator having a voltage difference of 800 kV produces a proton beam having a current of 1 mA. Calculate (a) the number of protons that strike the target per second, (b) the power required to accelerate the protons, (c) the velocity of the protons when they hit the target. (d) Given that the protons lose 80% of their energy in the target, calculate the rate, expressed in cal s^{-1}, at which energy in the form of heat must be removed from the target.

14.59 Un elettrone, dopo essere stato accelerato con una differenza di potenziale di 565 V, entra in un campo elettrico uniforme di 3500 V m^{-1} secondo una traiettoria formante un angolo di 60° con la direzione del campo. Dopo 5×10^{-8} s, quali sono (a) le componenti della velocità dell'elettrone parallela e perpendicolare al campo, (b) la sua velocità, in modulo direzione e verso, (c) le sue coordinate (scegliendo il punto d'ingresso come origine)? Qual'è la sua energia totale?

14.59 An electron, after being accelerated by a potential difference of 565 V, enters a uniform electric field of 3500 V m^{-1} at an angle of 60° with the direction of the field. After 5×10^{-8} s, what are (a) the components of its velocity parallel and perpendicular to the field, (b) the magnitude and direction of its velocity, (c) its coordinates relative to the point of entry? (d) What is its total energy?

14.60 Due larghi piatti metallici sono disposti verticalmente, distanti 4 cm l'uno dall'altro e caricati con una differenza di potenziale di 200 V. (a) con quale velocità un elettrone deve essere lanciato orizzontalmente dal piatto positivo per giungere al piatto negativo con una velocità di 10^7 m s^{-1}? (b) Con quale velocità deve essere lanciato dal piatto positivo in una direzione formante un angolo

14.60 Two large plane metal plates are mounted vertically 4 cm apart and charged to a potential difference of 200 V. (a) With what velocity must an electron be projected horizontally from the positive plate so that it will arrive at the negative plate with a velocity of 10^7 m s^{-1}? (b) With what velocity must it be projected from the positive plate in a direction at an angle

di 37° sopra l'orizzontale affinchè la componente orizzontale della sua velocità quando giunge al piatto negativo sia 10^7 m s^{-1}? Qual'è il valore della componente verticale della velocità dell'elettrone quando giunge sul piatto negativo? (d) Qual'è il tempo di transito dell'elettrone da un piatto all'altro in ciascun caso? (e) Con quale velocità l'elettrone arriverà al piatto negativo se è lanciato orizzontalmente dal piatto positivo con velocità 10^6 m s^{-1}?

14.61 Un elettrone è situato in mezzo a due piatti orizzontali separati di 2 cm e caricati con una differenza di potenziale di 2000 V. Confrontare la forza di natura elettrica agente sull'elettrone con quella gravitazionale. Ripetere l'esercizio per il caso di un protone. I risultati giustificano il fatto di aver trascurato gli effetti gravitazionali in questo capitolo?

14.62 Adattare i risultati dell'Esempio 13.8 al caso di una distribuzione di cariche piana, con densità di carica σ, per dimostrare che il campo elettrico ed il potenziale sono $\mathcal{E} = \sigma/2\epsilon_0$ e $V = -\sigma z/2\epsilon_0$.

14.63 Una particella di massa m e carica $-q$ è situata ad una distanza z da un piano di cariche positive di densità σ. La carica è lasciata libera in condizione di riposo. Calcolare la sua accelerazione, la velocità con cui urterà il piano, ed il tempo impiegato per raggiungerlo.

14.64 Si supponga che la particella del Problema 14.63 abbia una velocità iniziale v_0, parallela al piano. Determinare (a) la traiettoria percorsa, (b) il tempo trascorso prima di urtare il piano, (c) il tragitto effettuato dalla particella in senso parallelo al piano.

14.65 Facendo ancora riferimento al Problema 14.63, si supponga che la particella carica si trovi inizialmente sul piano, $z = 0$, e sia sparata con velocità v_0 in una direzione formante un angolo α col piano. Determinare (a) la traiettoria seguita, (b) la massima distanza dal piano, (c) la distanza percorsa in senso parallelo al piano prima di riincontrarlo.

14.66 Un numero infinito di cariche positive e negative $\pm q$ sono disposte alternativamente lungo una retta, distanti r l'una dall'altra (Fig.

of 37° above the horizontal so that the horizontal component of its velocity when it arrives at the negative plate is 10^7 m s^{-1}? (c) What is the magnitude of the y-component of the velocity when the electron arrives at the negative plate? (d) What is the electron's time of transit from one plate to the other in each case? (e) With what velocity will the electron arrive at the negative plate if it is projected horizontally from the positive plate with a speed of 10^6 m s^{-1}?

14.61 An electron is between two horizontal plates separated 2 cm and charged with a potential difference of 2000 V. Compare the electric force on the electron with the force due to gravity. Repeat for a proton. Does this justify having ignored gravitational effects in this chapter?

14.62 Adapt the result of Example 13.8 to the case of a plane carrying a charge of density σ to show that the electric field and potential are $\mathcal{E} = \sigma/2\epsilon_0$ and $V = -\sigma z/2\epsilon_0$.

14.63 A charge $-q$ of mass m is placed at a distance z from a plane charged with a uniform positive charge of density σ. The charge is released from rest. Calculate its acceleration, the velocity with which it will fall on the plane, and the time it requires to reach the plane.

14.64 Suppose that the charge in Problem 14.63 has an initial velocity v_0 parallel to the plane. Determine (a) the path followed, (b) the time which elapses before it falls on the plane, (c) the distance parallel to the plane covered by the charge.

14.65 Referring again to Problem 14.63, suppose that the charge is initially at $z = 0$ and is shot with a velocity v_0 at angle α with the plane. Determine (a) the path followed, (b) its maximum separation from the plane, (c) the distance it covers parallel to the plane before it falls back on the plane.

14.66 Along a straight line there is an infinite number of alternating positive and negative charges $\pm q$, all adjacent charges being separated the same distance r (Fig.

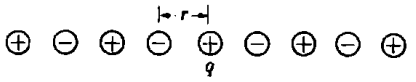


Figura 14–49

14–49). Dimostrare che l'energia potenziale di ciascuna carica è $(-q^2/2\pi\epsilon_0 r)$ ln 2. [*Suggerimento:* Confrontare con l'Eq. (M.24).]

14.67 Ponendo le cariche al centro di quadrati di lato a (Fig. 14–50), si ottiene una distribuzione piana regolare di cariche alternativamente positive e negative. Trovare l'energia potenziale di una carica situata come A. [*Suggerimento:* Considerare uno per volta i gruppi ottenuti riunendo tutte le cariche che si trovano alla medesima distanza da A.]

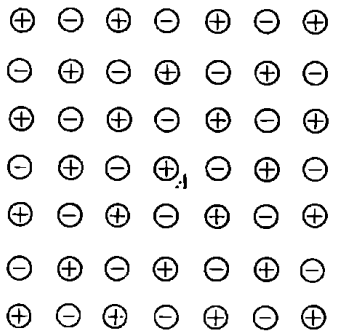


Figura 14–50

14.68 Un anello di raggio a porta una carica q. Calcolare il campo elettrico ed il potenziale nei punti dell'asse perpendicolare all'anello.

14.69 Trovare il campo elettrico ed il potenziale nei punti dell'asse di un disco di raggio R avente densità di carica σ. [*Suggerimento:* Suddividere il disco in anelli e sommare i contributi dei singoli anelli.]

14.70 Facendo ancora riferimento al Problema 14.69, calcolare il campo elettrico ed il potenziale dovuto ad una distribuzione piana di cariche di densità pari a quella portata dal disco. [*Suggerimento:* Prendere R molto grande e considerare solo il termine dominante.]

14.71 Un filo di lunghezza L porta una carica λ per unità di lunghezza (Fig. 14–51). (a) Dimostrare

Figure 14–49

14–49). Show that the potential energy of one charge is $(-q^2/2\pi\epsilon_0 r)$ ln 2. [*Hint:* Check with Eq. (M.24).]

14.67 A regular plane arrangement of alternate positive and negative charges of the same magnitude is obtained by placing the charges at the center of squares of side a (Fig. 14–50). Find the potential energy of a charge such as A. [*Hint:* Group the charges surrounding A, considering at one time all charges at the same distance from A.]

Figure 14–50

14.68 A ring of radius a carries a charge q. Calculate the electric potential and field on points along its perpendicular axis.

14.69 Find the electric potential and field along the points on the axis of a disk of radius R carrying a charge σ per unit area. [*Hint:* Divide the disk into rings and add the contributions of all rings.]

14.70 Referring again to Problem 14.69, obtain the electric field and potential of a plane distribution of charge having the same charge density as the disk. [*Hint:* Make R very large and keep only the dominant term.]

14.71 A wire of length L carries a charge of λ per unit length (Fig. 14–51). (a) Show

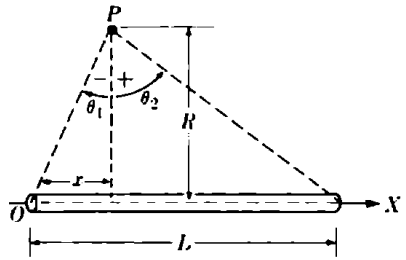


Figura 14–51

che il campo elettrico in un punto alla distanza R dal filo è dato dalle

e

dove $\mathcal{E}_\perp$ ed $\mathcal{E}_\parallel$ sono le componenti di $\mathcal{E}$ perpendicolare e parallela al filo, e θ_1 e θ_2 sono gli angoli formati dalle rette congiungenti il punto cogli estremi del filo con la perpendicolare al filo. (b) Determinare il campo elettrico nel punto equidistante dagli estremi. (c) Il segno positivo o negativo degli angoli θ_1 e θ_2 è come indicato in figura.

14.72 Un filo che porta una densità di carica λ è piegato in modo da formare un quadrato di lato L. Determinare il campo elettrico ed il potenziale nei punti della retta perpendicolare al quadrato passante per il centro.

14.73 Ricavare un'espressione per il campo elettrico ed il potenziale generati da una distribuzione piana uniforme di cariche di densità σ, nell'ipotesi che essa sia costituita di filamenti di lunghezza infinita e larghezza dx.

14.74 Quale massa di Cu (bivalente) è depositata su un elettrodo nel corso di un'ora da una corrente di 2A? Quanti atomi sono stati depositati?

14.75 Stimare la forza elettrica media di attrazione tra due molecole d'acqua in fase gassosa, nelle condizioni standard, dovuta ai momenti di dipolo elettrico. Si considerino parecchi orientamenti relativi possibili dei dipoli

Figure 14–51

that the electric field at a point a distance R from the wire is given by

$$\mathcal{E}_\perp = (\lambda/4\pi\epsilon_0 R)(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

and

$$\mathcal{E}_\parallel = -(\lambda/4\pi\epsilon_0 R)(\cos\theta_2 - \cos\theta_1),$$

where $\mathcal{E}_\perp$ and $\mathcal{E}_\parallel$ are the components of $\mathcal{E}$ perpendicular and parallel to the wire and θ_1 and θ_2 are the angles that the lines from the point to the ends of the wire make with the perpendicular to the wire. (b) Find the field when the point is equidistant from both ends. (c) The signs of angles θ_1 and θ_2 are as indicated in the figure.

14.72 A wire carrying a charge of λ per unit length is bent in the form of a square of side L. Find the electric field and potential at the points on the line perpendicular to the square and passing through its center.

14.73 Obtain an expression for the electric field and potential of a plane carrying a uniform charge per unit area equal to σ, assuming that the plane is composed of a series of filaments of infinite length and width dx.

14.74 What mass of Cu (bivalent) is deposited on an electrode by a current of 2 A during one hour? How many atoms have been deposited?

14.75 Estimate the average electric force of attraction between two water molecules in the gaseous phase at STP due to their electric dipole moments. Consider several possible relative orientations of their elec-

elettrici. Confrontare con l'attrazione gravitazionale.

14.76 Adattare i risultati del Problema 13.81 al caso di una distribuzione di cariche elettriche descritta mediante i momenti di dipolo e quadrupolo elettrico relativi alle direzioni considerate.

14.77 Trovare i momenti di dipolo e quadrupolo elettrico relativi all'asse Z della distribuzione di cariche di Fig. 14–52. Determinare il campo elettrico ed il potenziale nei punti dell'asse Z, nell'ipotesi che z sia molto più grande di a. Ripetere il calcolo per l'asse Y.

Figura 14–52

14.78 Ripetere il Problema 14.77, nell'ipotesi che tutte le cariche siano positive.

14.79 Un protone molto veloce di velocità v_0, passa alla distanza a da un elettrone inizialmente fermo (Fig. 14–53). Si supponga che il moto del protone, essendo la sua massa maggiore, non sia disturbato. (a) Rappresentare graficamente la componente perpendicolare a v_0 della forza che il protone esercita sull'elettrone in funzione di x. (b) Dimostrare che la variazione della quantità di moto

Figura 14–53

tric dipoles. Compare with their gravitational attraction.

14.76 Adapt the results of Problem 13.81 to the case of a distribution of electric charges defining the electric dipole and quadrupole moments for the directions considered.

14.77 Find the electric dipole and quadrupole moments of the charge distribution shown in Fig. 14–52 relative to the Z-axis. Find the potential and field at points along the Z-axis, assuming that z is very large compared with a. Repeat the calculation for the Y-axis.

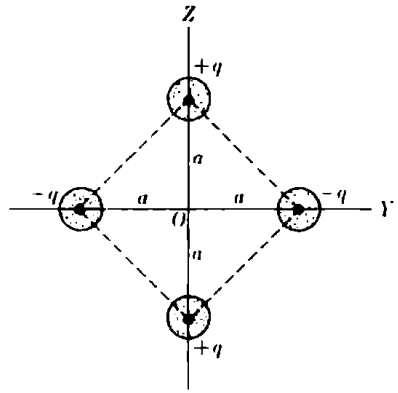


Figure 14–52

14.78 Repeat Problem 14.77, assuming that all charges are positive.

14.79 A very fast proton with velocity v_0 passes at a distance a from an electron initially at rest (Fig. 14–53). Assume that the motion of the proton is undisturbed because of its larger mass. (a) Plot the component of the force perpendicular to v_0 that the proton exerts on the electron as a function of x. (b) Show that the momen-

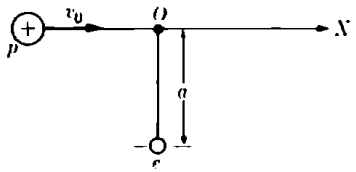


Figure 14–53

dell'elettrone è

ed è diretta perpendicolarmente a v_0. (c) Valutare la deflessione subita dal protone in funzione della sua velocità. Questo esempio fornisce una rozza base per l'analisi del moto delle particelle cariche attraverso i corpi materiali. [*Suggerimento:* Nell'ipotesi che l'elettrone praticamente non si sposti durante il passaggio del protone, la variazione di quantità di moto dell'elettrone è data da $\Delta \boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{F}\, dt$, e si deve valutare solo la componente perpendicolare a v_0. Invece di integrare da $-\infty$ a $+\infty$, a causa della simmetria del problema, si può integrare da 0 a ∞ e moltiplicare per 2.]

14.80 Dimostrare che l'energia potenziale interna di natura elettrica di un sistema di cariche può essere scritta in ognuna delle forme alternative:

All pairs = Tutte le coppie

All changes = Tutte le cariche

dove V_i è il potenziale generato, nella posizione occupata da q_i, da *tutte le altre* cariche. (c) Utilizzando l'espressione (b), si dimostri che l'energia elettrostatica di una distribuzione continua di cariche di densità ρ è $E_p = \frac{1}{2}\int \rho V\, dt$. (d) Utilizzare questa espressione per dimostrare che l'energia di un conduttore sferico nel cui volume sia uniformemente distribuita la carica Q è $\frac{3}{5}Q^2/4\pi\epsilon_0 R$. (e) Estendere l'ultimo risultato al caso di un nucleo di numero atomico Z.

14.81 Dimostrare che le equazioni differenziali che rappresentano le linee di forza sono $dx/\mathcal{E}_x = dy/\mathcal{E}_y = dz/\mathcal{E}_z$, dove dx, dy, e dz sono le componenti dello spostamento infinitesimo in direzione tangenziale alla linea di forza. Si applichino queste equazioni per ottenere le equazioni delle linee di forza di un dipolo elettrico. [*Suggerimento:* Si noti che in questo caso, trattandosi di linee piane, la componente $\mathcal{E}_z$ non è necessaria. Esprimere $\mathcal{E}_x$ ed $\mathcal{E}_y$ per un dipolo elettrico in coordinate cartesiane ortogonali.]

14.82 Dimostrare che, in coordinate polari, l'equazione differenziale delle linee di forza è $dr/\mathcal{E}_r = r\, d\theta/\mathcal{E}_\theta$. Applicare questo risultato per ottenere l'equazione delle linee di forza in coordinate polari per un dipolo elettrico. Confrontare con il risultato del Problema 14.81.

14.83 Lo statcoulomb (stC) è un'unità di carica elettrica definita come una quantità di carica tale che, posta alla distanza di 1 cm da una carica uguale (nel vuoto), la forza tra le due è 1 dina. (a) Dimostrare che 1 stC è pari ad $\frac{1}{10}c$ C (dove c è la velocità della luce), o approssimativamente $\frac{1}{3} \times 10^{-9}$ C. (b) Esprimere la carica elementare e in statcoulomb. (c) Calcolare il valore delle costanti K_e ed ϵ_0 quando la carica è espressa in statcoulomb, la forza in dine e le lunghezze in centimetri. (d) Trovare la relazione tra dina/statcoulomb e $\mathrm{N\,C^{-1}}$ come unità di misura dei campi elettrici.

14.84 A quanti elettroni equivale uno stC?

14.85 Lo abcoulomb è un'unità di carica pari per definizione a 10 C. Trovare il valore delle costanti K_e ed ϵ_0 quando la carica è espressa in abcoulomb, la forza in dine e le lunghezze in centimetri. Qual'è la relazione fra lo abcoulomb e lo stC?

14.86 Lo statvolt (stV) è definito come la differenza di potenziale esistente tra due punti quando è necessario svolgere il lavoro di un erg per spostare da un punto all'altro la carica di uno statcoulomb. (a) Dimostrare che uno statvolt è pari a $c/10^6$ o approssimativamente 300 V. (b) Trovare la relazione esistente tra $\mathrm{stV\ cm^{-1}}$ e $\mathrm{V\ m^{-1}}$ come unità di misura dei campi elettrici. Confrontare col risultato del quesito (d) del Problema 14.83.

14.87 Scrivere l'espressione per il potenziale generato da una carica q alla distanza r, quando il potenziale sia misurato in stV, la carica in stC, e la distanza in cm. Ripetere il problema per il caso del campo elettrico misurato in $\mathrm{stV\ cm^{-1}}$.

tum transferred to the electron is

$$(e^2/4\pi\epsilon_0)(2/v_0 a)$$

in a direction perpendicular to v_0. (c) Estimate the deflection of the proton as a function of its velocity. This example provides a crude basis for analyzing the motion of charged particles passing through matter. [*Hint:* Assuming that the electron practically remains at its initial position during the passage of the proton, the momentum transferred to the electron is given by $\Delta \boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{F}\, dt$, and only the component perpendicular to v_0 has to be computed. Instead of integrating from $-\infty$ to $+\infty$, in view of the symmetry of the force, integrate from 0 to ∞ and multiply by 2.]

14.80 Prove that the internal electric potential energy of a system of charges can be written in either of the alternative forms:

$$\text{(a)}\quad E_p = \sum_{\substack{\text{All}\\ \text{pairs}}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}},$$

$$\text{(b)}\quad E_p = \tfrac{1}{2} \sum_{\substack{\text{All}\\ \text{charges}}} q_i V_i,$$

where V_i is the potential produced at q_i by *all other* charges. (c) Using the result of (b), show that the electrical energy of a continuous charge distribution of density ρ is $E_p = \frac{1}{2}\int \rho V\, d\tau$. (d) Use this expression to show that the energy of a spherical conductor having a charge Q uniformly distributed over its volume is $\frac{3}{5}Q^2/4\pi\epsilon_0 R$. (e) Extend the last result to the case of a nucleus of atomic number Z.

14.81 Prove that the differential equations of the lines of force are $dx/\mathcal{E}_x = dy/\mathcal{E}_y = dz/\mathcal{E}_z$, where dx, dy, and dz correspond to two very close points on the line of force. Apply these equations to obtain the equation of the lines of force of an electric dipole. [*Hint:* Note that, since in this case the lines of force are plane curves, the component $\mathcal{E}_z$ is not required. Express $\mathcal{E}_x$ and $\mathcal{E}_y$ for an electric dipole in rectangular coordinates.]

14.82 Prove that in polar coordinates the differential equation of the lines of force is $dr/\mathcal{E}_r = r\, d\theta/\mathcal{E}_\theta$. Apply this result to obtain the equation of the lines of force of an electric dipole in polar coordinates. Check with the result of Problem 14.81.

14.83 The statcoulomb (stC) is a unit of charge defined as an amount of charge such that, when it is placed at a distance of 1 cm from an equal charge (in a vacuum), the force between them is 1 dyne. (a) Prove that one statcoulomb is $\frac{1}{10}c$ C (where c is the velocity of light), or approximately $\frac{1}{3} \times 10^{-9}$ C. (b) Express the elementary charge e in statcoulombs. (c) Calculate the value of the constants K_e and ϵ_0 when the charge is expressed in statcoulombs, the force in dynes, and the distance in centimeters. (d) Find the relation between dyne/statcoulomb and $\mathrm{N\ C^{-1}}$ for measuring the electric field.

14.84 How many electrons equal one stC?

14.85 The abcoulomb is a unit of charge defined as 10 C. Find the value of the constants K_e and ϵ_0 when the charge is expressed in abcoulombs, the force in dynes, and the distance in centimeters. What is the relation of the abcoulomb to the stC?

14.86 The statvolt (stV) is defined as the potential difference between two points when a work of one erg is done to move a charge of one statcoulomb from one point to the other. (a) Prove that one statvolt is equal to $c/10^6$ or approximately 300 V. (b) Find the relation between the $\mathrm{stV\ cm^{-1}}$ and the $\mathrm{V\ m^{-1}}$ as units for measuring the electric field. Compare with result (d) of Problem 14.83.

14.87 Write the expression for the potential created by a charge q at a distance r when the potential is measured in stV, the charge in stC, and the distance in cm. Repeat for an electric field which is measured in $\mathrm{stV\ cm^{-1}}$.

14.88 Consuetudinariamente, l'energia degli stati stazionari degli atomi o ioni con un solo elettrone è scritta nella forma $E_n = -RZh^2c/n^2$, dove R è la *costante di Rydberg*. Utilizzando per E_n l'espressione ricavata nell'Esempio 14.8, mostrare che il valore di R è $1{,}0974 \times 10^7$ m^{-1}.

14.89 Calcolare i valori dell'energia per i primi quattro stati stazionari dell'atomo di He dello ione He^+. In ciascun caso, determinare l'energia necessaria per far passare il sistema dallo stato fondamentale al primo stato eccitato. Si rappresenti una scala delle energie mediante linee orizzontali opportunamente spaziate. Si osservi che alcuni livelli energetici coincidono. Si può dedurre una regola generale?

14.90 Utilizzando i risultati del Problema 14.37, stimare la velocità di un elettrone in un atomo d'idrogeno nello stato fondamentale e controllare i calcoli svolti al termine dell'Esempio 14.10.

14.88 It is customary to write the energy of the stationary state of atoms with one electron in the form $E_n = -RZh^2c/n^2$, where R is called the *Rydberg constant*. Using the expression given in Example 14.8 for E_n, show that R is equal to 1.0974×10^7 m^{-1}.

14.89 Compute the energies of the first four stationary states of H and He^+. In each case find the energy required to raise the system from the ground state to the first excited state. Represent the energies on a scale by properly spaced horizontal lines. Note that some energies coincide. Can you derive a general rule?

14.90 Using the result of Problem 14.37, estimate the velocity of an electron in a hydrogen atom in its ground state and check the calculations made at the end of Example 14.10.

15
INTERAZIONI MAGNETICHE

15.1 *Introduzione*
15.2 *Forza magnetica su una carica in moto*
15.3 *Moto di una carica in un campo magnetico*
15.4 *Esempi di moto di particelle cariche in un campo magnetico*
15.5 *Forza magnetica su una corrente elettrica*
15.6 *Coppia magnetica su una corrente elettrica*
15.7 *Campo magnetico prodotto da una corrente chiusa*
15.8 *Campo magnetico di una corrente rettilinea*
15.9 *Forze tra correnti*
15.10 *Campo magnetico di una corrente circolare*
15.11 *Campo magnetico di una carica in moto (non relativistico)*
15.12 *Elettromagnetismo e principio di relatività*
15.13 *Il campo elettromagnetico di una carica in moto*
15.14 *Interazione elettromagnetica tra due cariche in moto*

15
MAGNETIC INTERACTION

15.1 *Introduction*
15.2 *Magnetic Force on a Moving Charge*
15.3 *Motion of a Charge in a Magnetic Field*
15.4 *Examples of Motion of Charged Particles in a Magnetic Field*
15.5 *Magnetic Force on an Electric Current*
15.6 *Magnetic Torque on an Electric Current*
15.7 *Magnetic Field Produced by a Closed Current*
15.8 *Magnetic Field of a Rectilinear Current*
15.9 *Forces Between Currents*
15.10 *Magnetic Field of a Circular Current*
15.11 *Magnetic Field of a Moving Charge (Nonrelativistic)*
15.12 *Electromagnetism and the Principle of Relativity*
15.13 *The Electromagnetic Field of a Moving Charge*
15.14 *Electromagnetic Interaction Between Two Moving Charges*

15.1 Introduzione

Un altro tipo di interazione osservata in natura è quella chiamata *magnetica*. Secoli prima di Cristo, gli uomini osservarono che certi minerali di ferro, come la magnetite, avevano la proprietà di attrarre piccoli pezzi di ferro. Questa proprietà è mostrata allo stato naturale da ferro, cobalto e manganese e da molti composti di questi metalli. Questa proprietà apparentemente peculiare non è in relazione con la gravitazione, in quanto non solo è mostrata naturalmente da *tutti* i corpi, ma appare essere concentrata in certi punti nel minerale di ferro. Inoltre essa apparentemente non è in relazione con l'interazione elettrica, perchè nè palline di sughero, nè pezzi di carta sono attratti affatto da questi minerali. Pertanto un nuovo nome, *magnetismo*,* fu dato a questa proprietà fisica. Le regioni di un corpo dove il magnetismo appare esser concentrato sono chiamate *poli magnetici*. Un corpo magnetizzato è chiamato un *magnete*.

15.1 Introduction

Another type of interaction observed in nature is one called *magnetic*. Centuries before Christ, men observed that certain iron ores, such as the lodestone, have the property of attracting small pieces of iron. The property is exhibited in the natural state by iron, cobalt, and manganese, and by many compounds of these metals. This apparently specific property is unrelated to gravitation, since not only does it fail to be exhibited naturally by *all* bodies, but it appears to be concentrated at certain spots in the mineral ore. It is also apparently unrelated to the electrical interaction, because neither cork balls nor pieces of paper are attracted at all by these minerals. Therefore a new name, *magnetism*,* was given to this physical property. The regions of a body where the magnetism appears to be concentrated are called *magnetic poles*. A magnetized body is called a *magnet*.

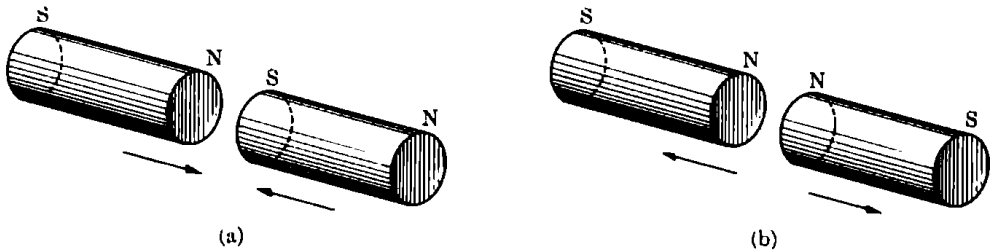


Fig. 15–1. Interazione tra due sbarre magnetizzate. (a) Poli disuguali si attraggono l'un l'altro. (b) Poli uguali si respingono l'un l'altro.

Fig. 15–1. Interaction between two magnetized bars. (a) Unlike poles attract each other. (b) Like poles repel each other.

La terra stessa è un enorme magnete. Ad esempio, se appendiamo una sbarra magnetizzata in un punto qualsiasi sulla superficie della terra e la lasciamo ruotare liberamente attorno alla verticale, la sbarra si orienta in modo che la stessa estremità è sempre puntata verso il polo nord geografico. Questo risultato mostra che la terra esercita una forza addizionale sulla sbarra magnetizzata che invece non esercita su sbarre non magnetizzate.

Questo esperimento inoltre dimostra che ci sono due tipi di poli magnetici, che possiamo designare con i segni + e −, o mediante le lettere N ed S, corrispondenti ai poli che puntano verso il nord ed ai poli che puntano verso il sud rispettivamente. Se prendiamo due sbarre magnetizzate e le disponiamo come mostrato in Fig. 15–1, le sbarre o si respingeranno o si attrarranno l'un l'altra, a seconda che noi disponiamo poli eguali o diversi l'uno di fronte all'altro. Così, noi concludiamo dal nostro esperimento, che

> *l'interazione tra poli magnetici eguali è repulsiva e l'interazione tra poli magnetici diversi è attrattiva.*

Potremmo quindi tentare di misurare l'intensità di un polo magnetico definendo una *massa magnetica* o carica magnetica, e studiare la dipendenza della interazione magnetica

*Il nome magnetismo è derivato dall'antica città dell'Asia Minore chiamata Magnesia, dove, secondo la tradizione, il fenomeno fu per la prima volta notato.

The earth itself is a huge magnet. For example, if we suspend a magnetized rod at any point on the earth's surface and allow it to rotate freely about the vertical, the rod orients itself so that the same end always points toward the north geographic pole. This result shows that the earth is exerting an additional force on the magnetized rod which it does not exert on unmagnetized rods.

This experiment also suggests that there are two kinds of magnetic poles, which we may designate by the signs + and −, or by the letters N and S, corresponding to the north-seeking and south-seeking poles, respectively. If we take two magnetized bars and place them as shown in Fig. 15–1, the bars will either repel or attract each other, depending on whether we place like or unlike poles facing each other. Thus we conclude from our experiment that

> *the interaction between like magnetic poles is repulsive and the interaction between unlike magnetic poles is attractive.*

We could next attempt to measure the strength of a magnetic pole by defining a *magnetic mass* or charge, and investigate the dependence of the magnetic interac-

* The name magnetism is derived from the ancient city in Asia Minor called Magnesia, where, according to tradition, the phenomenon was first recognized.

dalla distanza tra i poli. Questo è perfettamente possibile e difatti, prima che i fisici capissero chiaramente la natura del magnetismo, questa fu l'impostazione che adottarono. Tuttavia quando queste misure furono tentate, si presentò una difficolta fondamentale. Sebbene noi siamo stati capaci di isolare cariche elettriche positive e negative, e di associare una ben definita quantità di carica alle particelle elementari costituenti tutti gli atomi, non siamo stati capaci di isolare un polo magnetico o identificare una particella elementare avente un solo tipo di magnetismo, o N oppure S. I corpi magnetizzati mostrano sempre i poli a coppie, eguali ed opposte. D'altra parte le nozioni di polo magnetico e massa magnetica sono state trovate non necessarie per la descrizione del magnetismo. Le interazioni elettriche e magnetiche sono connesse molto strettamente, e di fatto sono solo due differenti aspetti di una proprietà della materia, la sua carica elettrica; *il magnetismo è una manifestazione di cariche elettriche in moto.* Le interazioni elettriche e magnetiche devono essere considerate insieme sotto il nome più generale di *interazione elettromagnetica.*

15.2 Forza magnetica su una carica in moto

Dato che osserviamo interazioni tra corpi magnetizzati, possiamo dire, in analogia con i casi gravitazionale ed elettrico, che un corpo magnetizzato produce un *campo magnetico* nello spazio attorno ad esso. Quando noi disponiamo una carica elettrica *in quiete* in un campo magnetico, non si osserva nessuna forza o interazione speciale sulla carica. Ma quando una carica elettrica *si muove* in una regione ove c'è un campo magnetico, si osserva una nuova forza sulla carica oltre a quelle dovute alle interazioni gravitazionale ed elettrica.

Misurando, nello stesso punto in un campo magnetico, la forza subita da cariche differenti in moto in modi differenti, possiamo ottenere una relazione tra la forza, la carica e la sua velocità. In questo modo concludiamo che

> *la forza esercitata da un campo magnetico su una carica in moto è proporzionale alla carica elettrica ed alla sua velocità e la direzione della forza è* perpendicolare alla velocità della carica.

Possiamo fare un passo oltre e, ricordando le proprietà del prodotto vettore, fare il tentativo di scrivere la forza $\boldsymbol{F}$ su una carica q in moto con velocità $\boldsymbol{v}$ in un campo magnetico come

che soddisfa i requisiti sperimentali sopra menzionati. Qui $\mathfrak{B}$ è un vettore che si determina in ogni punto confrontando il valore osservato di $\boldsymbol{F}$ nel punto con quelli di q e di $\boldsymbol{v}$. Il tentativo si è rivelato un successo. Il vettore $\mathfrak{B}$ può variare da punto a punto in un campo magnetico, ma in ogni punto risulta sperimentalmente essere lo stesso per ogni carica e velocità. Pertanto, $\mathfrak{B}$ descrive una proprietà che è caratteristica del campo magnetico e che noi possiamo chiamare *intensità di campo magnetico.* Un altro nome, imposto dall'uso, è *induzione magnetica.* In questo testo noi useremo solo la prima denominazione.

tion on the distance between the poles. This is perfectly possible, and in fact, before physicists clearly understood the nature of magnetism, this was the approach they adopted. However, a fundamental difficulty appeared when these measurements were attempted. Although we have been able to isolate positive and negative electric charges and associate a definite amount of electric charge with the fundamental particles constituting all atoms, we have not been able to isolate a magnetic pole or identify a fundamental particle having only one kind of magnetism, either N or S. Magnetized bodies always exhibit poles in pairs, equal and opposite. On the other hand, the notions of magnetic pole and magnetic mass have been found unnecessary for the description of magnetism. Electric and magnetic interactions are very closely related, and in fact are only two different aspects of one property of matter, its electric charge; *magnetism is a manifestation of electric charges in motion.* Electric and magnetic interactions must be considered together under the more general name of *electromagnetic interaction.*

15.2 Magnetic Force on a Moving Charge

Since we observe interactions between magnetized bodies, we may say, in analogy with the gravitational and electrical cases, that a magnetized body produces a *magnetic field* in the space around it. When we place an electric charge *at rest* in a magnetic field, no special force or interaction is observed on the charge. But when an electric charge *moves* in a region where there is a magnetic field, a new force is observed on the charge in addition to those due to its gravitational and electric interactions.

By measuring, at the same point in a magnetic field, the force experienced by different charges moving in different ways, we may obtain a relation between the force, the charge, and its velocity. In this way we conclude that

> *the force exerted by a magnetic field on a moving charge is proportional to the electric charge and to its velocity, and the direction of the force is perpendicular to the velocity of the charge.*

We may go one step further and, remembering the properties of the vector product, attempt to write the force $\boldsymbol{F}$ on a charge q moving with velocity $\boldsymbol{v}$ in a magnetic field as

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}, \tag{15.1}$$

which satisfies the experimental requirements mentioned above. Here $\mathfrak{B}$ is a vector found at each point by comparing the observed value of $\boldsymbol{F}$ at the point with those of q and $\boldsymbol{v}$. The attempt has proved to be successful. The vector $\mathfrak{B}$ may vary from point to point in a magnetic field, but at each point it is found experimentally to be the same for all charges and velocities. Therefore $\mathfrak{B}$ describes a property that is characteristic of the magnetic field, and we may call it the *magnetic field strength.* Another name, imposed by usage, is *magnetic induction.* In this text we shall use only the former term.

Quando la particella è in moto in una regione in cui vi sono un campo elettrico e un campo magnetico, la forza totale è la somma della forza elettrica $q\mathfrak{E}$ e della forza magnetica $q\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$, cioè

Questa espressione è chiamata *forza di Lorentz*.

Date le proprietà del prodotto vettore, l'Eq. (15.1) dà una forza perpendicolare alla velocità $\boldsymbol{v}$, come indicato prima, ma anche perpendicolare al campo magnetico $\mathfrak{B}$. L'Equazione (15.1) implica inoltre che quando $\boldsymbol{v}$ è parallella a $\mathfrak{B}$, la forza $\boldsymbol{F}$ è nulla. Infatti, si osserva che in ogni punto di qualsiasi campo magnetico, c'è una certa direzione di moto nella quale non viene esercitata alcuna forza sulla carica in moto. Questa direzione è definita come la direzione del campo magnetico nel punto. Nella Fig. 15–2, la relazione tra i tre vettori $\boldsymbol{v}$, $\mathfrak{B}$, ed $\boldsymbol{F}$ è illustrata sia per una carica positiva, sia per una carica negativa. La figura mostra la regola per determinare la direzione della forza. La regola fa uso della mano destra.

(positive q) = (q positiva)
(negative q) = (q negativa)

Se α è l'angolo tra $\boldsymbol{v}$ e $\mathfrak{B}$, il modulo di $\boldsymbol{F}$ è

La massima forza si ha quando $\alpha = \pi/2$ ovvero $\boldsymbol{v}$ è perpendicolare a $\mathfrak{B}$, e risulta

La minima forza, zero, si ha quando $\alpha = 0$, ovvero quando $\boldsymbol{v}$ è parallelo a $\mathfrak{B}$, come precedentemente indicato.

Fig. 15–2. Relazione vettoriale tra forza magnetica, campo magnetico, e velocità della carica. La forza è perpendicolare al piano che contiene $\mathfrak{B}$ e $\boldsymbol{v}$.

Dall'Eq. (15.1), noi possiamo definire l'unità di campo magnetico come N/C m s^{-1} ovvero kg s^{-1} C^{-1}. Questa unità è chiamata *tesla*, abbreviazione T, in onore dell'ingegnere americano, nato in Yugoslavia, Nicholas Tesla (1856–1943). Quindi, T = kg s^{-1} C^{-1}. Un tesla corrisponde al campo magnetico che produce una forza di un newton su una carica di un coulomb in moto perpendicolarmente al campo ad un metro al secondo.

Poichè la forza magnetica $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ è perpendicolare alla velocità, il suo lavoro è zero e pertanto essa non produce alcun cambiamento nella energia cinetica della particella, come definito dall'Eq. (8.11). Sebbene la forza magnetica non sia conservativa nel senso definito al Capitolo 8, quando una particella si muove in campi elettrici e magnetici combinati, la sua energia totale rimane costante. (Per energia totale, intendiamo la sua energia cinetica più l'energia potenziale dovuta alle sue differenti interazioni.)

ESEMPIO 15.1. Un protone di un raggio cosmico con una velocità eguale a 10^7 m s^{-1} entra nel campo magnetico della terra in direzione perpendicolare ad esso. Valutare la forza esercitata sul protone.

When the particle moves in a region where there are an electric and a magnetic field, the total force is the sum of the electric force $q\mathfrak{E}$ and the magnetic force $q\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$. That is,

$$\boldsymbol{F} = q(\mathfrak{E} + \boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}). \tag{15.2}$$

This expression is called the *Lorentz force.*

Because of the property of the vector product, Eq. (15.1) gives a force perpendicular to the velocity $\boldsymbol{v}$, as indicated before, but also perpendicular to the magnetic field $\mathfrak{B}$. Equation (15.1) also implies that when $\boldsymbol{v}$ is parallel to $\mathfrak{B}$, the force $\boldsymbol{F}$ is zero. In fact it is observed that at each point in every magnetic field there is a certain direction of motion in which no force is exerted on the moving charge. This direction is defined as the direction of the magnetic field at the point. In Fig. 15–2 the relation between the three vectors $\boldsymbol{v}$, $\mathfrak{B}$, and $\boldsymbol{F}$ is illustrated for both a positive and a negative charge. The figure shows the rule for determining the direction of the force. The rule uses the right hand.

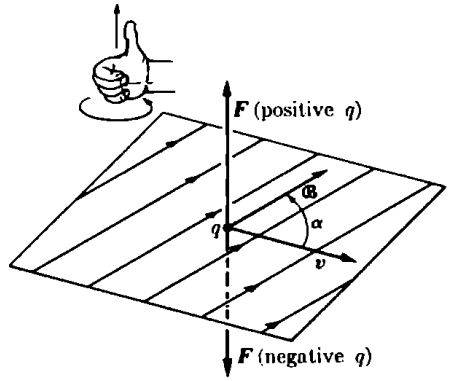


Fig. 15–2. Vector relation between magnetic force, magnetic field, and charge velocity. The force is perpendicular to the plane containing $\mathfrak{B}$ and $\boldsymbol{v}$.

If α is the angle between $\boldsymbol{v}$ and $\mathfrak{B}$, the magnitude of $\boldsymbol{F}$ is

$$F = qv\mathfrak{B} \sin \alpha. \tag{15.3}$$

The maximum force occurs when $\alpha = \pi/2$ or $\boldsymbol{v}$ is perpendicular to $\mathfrak{B}$, resulting in

$$F = qv\mathfrak{B}. \tag{15.4}$$

The minimum force, zero, occurs when $\alpha = 0$ or when $\boldsymbol{v}$ is parallel to $\mathfrak{B}$, as indicated previously.

From Eq. (15.1), we may define the unit of magnetic field as N/C m s^{-1} or kg s^{-1} C^{-1}. This unit is called a *tesla*, abbreviated T, in honor of the Yugoslavian-born American engineer Nicholas Tesla (1856–1943). That is, T = kg s^{-1} C^{-1}. One tesla corresponds to the magnetic field that produces a force of one newton on a charge of one coulomb moving perpendicular to the field at one meter per second.

Because the magnetic force $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ is perpendicular to the velocity, its work is zero, and therefore it does not produce any change in the kinetic energy of the particle, as defined by Eq. (8.11). Although the magnetic force is not conservative in the sense defined in Chapter 8, when a particle moves in combined electric and magnetic fields, its total energy remains constant. (By total energy we mean its kinetic energy plus the potential energy due to its different interactions.)

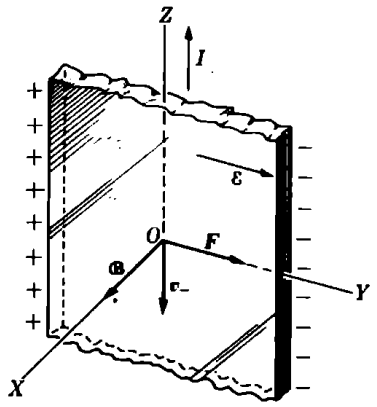
EXAMPLE 15.1. A cosmic-ray proton with a velocity equal to 10^7 m s^{-1} enters the magnetic field of the earth in a direction perpendicular to it. Estimate the force exerted on the proton.

Soluzione: L'intensità del campo magnetico vicino alla superficie terrestre all'equatore è circa $\mathfrak{B} = 1.3 \times 10^{-7}$ T. La carica elettrica del protone è $q = +e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Pertanto, la forza sul protone è, impiegando l'Eq. (15.4),

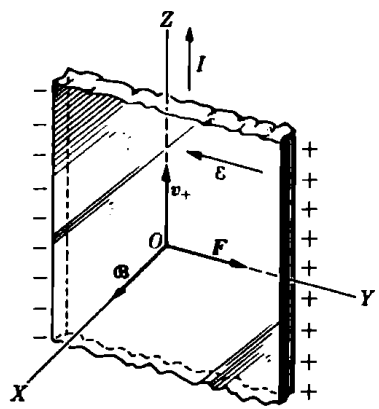
che è circa dieci milioni di volte più grande della forza dovuta alla gravità, $m_p g \approx 1.6 \times 10^{-26}$ N. L'accelerazione dovuta a questa forza, poichè $m = m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, è $a = F/m_p = 1.24 \times 10^{8}$ m s^{-2}. Pertanto, l'accelerazione del protone è piuttosto grande in confronto all'accelerazione di gravità.

ESEMPIO 15.2. Discussione dell'*effetto Hall*. Nel 1879 il fisico americano E.C. Hall (1855–1929) scoprì che quando una lastra metallica, lungo la quale passa una corrente I, è posta in un campo magnetico perpendicolare alla lastra, appare una differenza di potenziale tra punti opposti sui bordi della lastra. Questo fenomeno si chiama effetto Hall.

Soluzione: Questa è una tipica applicazione dell'Eq. (15.1). Supponiamo dapprima che i portatori della corrente elettrica nella lastra metallica siano elettroni, aventi una carica negativa $q = -e$. Considerando la Fig. 15–3(a), in cui l'asse Z è stato disegnato parallelo ed equiverso alla corrente I, vediamo che il moto effettivo è nella direzione $-Z$ con velocità v_-. Quando il campo magnetico $\mathfrak{B}$ è applicato perpendicolarmente alla lastra, ossia lungo l'asse X, gli elettroni sono soggetti alla forza $F = (-e)v_- \times \mathfrak{B}$. Il prodotto vettore $v_- \times \mathfrak{B}$ è diretto secondo l'asse $-Y$, ma quando viene moltiplicato per $-e$, il risultato è un vettore lungo l'asse $+Y$. Pertanto, gli elettroni vengono trasportati verso il lato destro della lastra, che diviene così carico negativamente. Il lato sinistro, mancando del numero usuale di elettroni, diviene carico positivamente. Come conseguenza, si produce un campo elettrico $\mathfrak{E}$ parallelo all'asse $+Y$. Quando la forza $(-e)\,\mathfrak{E}$ sugli elettroni, dovuta a questo campo elettrico e diretta verso sinistra, bilancia la forza verso destra dovuta al campo magnetico $\mathfrak{B}$, ne risulta l'equilibrio. Questo stato di cose produce una differenza di potenziale trasversale tra bordi opposti del conduttore, con il lato sinistro al potenziale più alto; il valore della differenza di potenziale è proporzionale al campo magnetico. Questo è l'effetto Hall normale o "negativo," mostrato dalla maggior parte dei metalli, come oro, argento, platino, rame, ecc. Ma con alcuni metalli



(a) Portatori negativi ($q = -e$)



(b) Portatori positivi ($q = +e$)

Fig. 15–3. L'effetto Hall.

Solution: The intensity of the magnetic field near the earth's surface at the equator is about $\mathfrak{B} = 1.3 \times 10^{-7}$ T. The electric charge on the proton is $q = +e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Therefore the force on the proton is, using Eq. (15.4),

$$F = qv\mathfrak{B} = 2.08 \times 10^{-19}\ \text{N},$$

which is about ten million times larger than the force due to gravity, $m_p g \approx 1.6 \times 10^{-26}$ N. The acceleration due to this force, since $m = m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, is $a = F/m_p = 1.24 \times 10^{8}$ m s^{-2}. Thus the acceleration of the proton is fairly large compared with the acceleration of gravity.

EXAMPLE 15.2. Discussion of the *Hall effect*. In 1879 the American physicist E. C. Hall (1855–1929) discovered that when a metal plate, along which a current I is passing, is placed in a magnetic field perpendicular to the plate, a potential difference appears between opposite points on the edges of the plate. This is called the Hall effect.

Solution: This is a typical application of Eq. (15.1). Suppose first that the carriers of the electric current in the metal plate are electrons, having a negative charge $q = -e$. Considering Fig. 15–3(a), where the Z-axis has been drawn parallel to the current I, we see that the actual motion is in the $-Z$-direction with the velocity v_-. When the magnetic field $\mathfrak{B}$ is applied perpendicular to the plate, or along the X-axis, the electrons are subject to the force $F = (-e)v_- \times \mathfrak{B}$. The vector product $v_- \times \mathfrak{B}$ is along the $-Y$-axis, but when it is multiplied by $-e$ the result is a vector F along the $+Y$-axis. Therefore the electrons drift to the right-hand side of the plate, which thus becomes negatively charged. The left-hand side, being deficient in the usual number of electrons, becomes positively charged. As a consequence an electric field $\mathfrak{E}$ parallel to the $+Y$-axis is produced. When the force $(-e)\,\mathfrak{E}$ on the electrons, due to this electric field and directed to the left, balances the force to the right due to the magnetic field $\mathfrak{B}$, equilibrium results. This in turn leads to a transverse potential difference between opposite sides of the conductor, the left-hand side being at the higher potential; the value of the potential difference is proportional to the magnetic field. This is the normal, or "negative," Hall effect, exhibited by most metals, such as gold, silver, platinum, copper, etc. But with some metals

(a) Negative carriers ($q = -e$)

(b) Positive carriers ($q = +e$)

Fig. 15–3. The Hall effect.

—come cobalto, zinco, ferro, ed altri materiali, come i semiconduttori—si produce un effetto Hall opposto, o "positivo."

Per spiegare l'effetto Hall positivo, supponiamo che i portatori della corrente, invece di esser elettroni carichi negativamente, siano particelle cariche con $q = +e$. Quindi essi devono essere in moto nello stesso senso della corrente, così che la loro velocità v_+ è lungo l'asse $+Z$, come in Fig. 15–3(b). La forza magnetica sulle cariche in moto è $F = (+e)\, v_+ \times \mathcal{B}$ ed è diretta verso l'asse $+Y$. Ma poichè le cariche sono positive, il lato destro della lastra diviene carico positivamente ed il lato sinistro carico negativamente, producendo un campo elettrico trasversale nella direzione $-Y$. Pertanto la differenza di potenziale è di segno opposto rispetto a quella nel caso di portatori negativi, risultandone così un effetto Hall positivo.

Quando i due tipi di effetto Hall furono scoperti, i fisici furono molto sconcertati, perchè a quel tempo era convinzione generale che i soli portatori della corrente elettrica in un conduttore solido fossero gli elettroni, carichi negativamente. Tuttavia, si è trovato che in certe circostanze si può dire che i portatori della corrente elettrica in un solido sono particelle cariche positivamente. In questi materiali vi sono posti in cui normalmente dovrebbe esser presente un elettrone, ma a causa di qualche difetto della struttura solida, l'elettrone manca; in altre parole, noi diciamo che vi è un *buco* (*vacanza* o *lacuna*) *elettronico*. Quando un elettrone nelle vicinanze per qualche motivo si muove e riempie un buco esistente, ovviamente l'elettrone produce un buco nella sua posizione originaria. Così i buchi elettronici si muovono esattamente nella direzione opposta a quella in cui si muovono gli elettroni carichi negativamente sotto l'azione di un campo elettrico applicato. Possiamo dire che i buchi elettronici si comportano in maniera del tutto simile a particelle positive. Così l'effetto Hall fornisce un metodo assai utile per determinare il segno dei portatori della corrente elettrica in un conduttore.

15.3 *Moto di una carica in un campo magnetico*

Consideriamo dapprima il moto di una particella carica in un campo magnetico uniforme, cioè un campo magnetico avente la stessa intensità, direzione e verso in tutti i punti. Per semplicità, consideriamo prima il caso di una particella in moto in direzione perpendicolare al campo magnetico (Fig. 15–4). La forza è data allora dall'Eq. (15.4). Poichè la forza è perpendicolare alla velocità, il suo effetto è di cambiare la direzione della velocità senza cambiarne il modulo, risultandone così un moto circolare uniforme. L'accelerazione è allora centripeta ed usando l'equazione di moto (7.28), abbiamo $F = mu^2/r$, con F data dall'Eq. (15.4). Perciò scriviamo

ossia

Fig. 15–4. Una carica in moto perpendicolarmente ad un campo magnetico uniforme segue una traiettoria circolare.

—such as cobalt, zinc, iron, and other materials, such as the semiconductors—an opposite, or "positive," Hall effect is produced.

To explain the positive Hall effect, suppose that, instead of being negatively charged electrons, the carriers of the current are positively charged particles with $q = +e$. Then they must move in the same sense as the current, so that their velocity v_+ is along the $+Z$-axis, as in Fig. 15–3(b). The magnetic force on the moving charges is $F = (+e)v_+ \times \mathcal{B}$ and it is directed toward the $+Y$-axis. But since the charges are positive, the right-hand side of the plate becomes positively charged and the left-hand side negatively charged, producing a transverse electric field in the $-Y$-direction. Therefore the potential difference is the reverse of that in the case of negative carriers, resulting in a positive Hall effect.

When the two types of Hall effect were discovered, physicists were very puzzled, because at that time it was the general belief that the only carriers of electric current in a solid conductor were the negatively charged electrons. However, it has been found that under certain circumstances we may say that the carriers of electric current in a solid are positively charged particles. In these materials there are places where normally an electron should be present but, due to some defect in the solid structure, the electron is missing; in other words, we say that there is an *electron hole*. When a nearby electron for some reason moves to fill an existing hole, the electron obviously produces a hole at its original position. Thus electron holes move in exactly the opposite direction to that in which the negatively charged electrons move under an applied electrical field. We may say that electron holes behave entirely similarly to positive particles. Thus the Hall effect provides a very useful method of determining the sign of the carriers of electric current in a conductor.

15.3 *Motion of a Charge in a Magnetic Field*

Let us consider first the motion of a charged particle in a uniform magnetic field; i.e., a magnetic field having the same intensity and direction at all its points. For simplicity we consider first the case of a particle moving in a direction perpendicular to the magnetic field (Fig. 15–4). The force is then given by Eq. (15.4). Since the force is perpendicular to the velocity, its effect is to change the direction of the velocity without changing its magnitude, resulting in a uniform circular motion. The acceleration is then centripetal, and using the equation of motion (7.28), we have $F = mv^2/r$, with F given by Eq. (15.4). Hence we write

$$\frac{mv^2}{r} = qv\mathcal{B}$$

or

$$r = \frac{mv}{q\mathcal{B}}, \qquad (15.5)$$

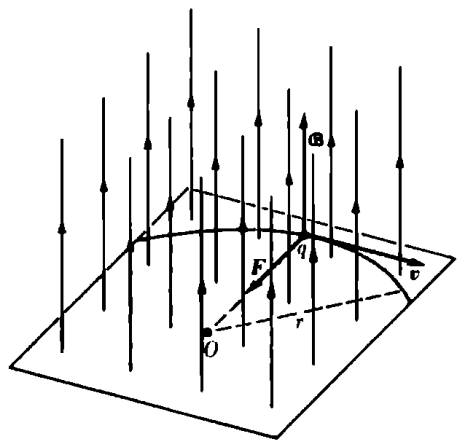


Fig. 15–4. A charge moving perpendicular to a uniform magnetic field follows a circular path.

che dà il raggio della circonferenza descritta dalla particella. Per esempio, usando i dati dell'Esempio 15.1, vediamo che il protone descriverebbe una circonferenza il cui raggio sarebbe 8×10^5 m se il campo fosse uniforme. Scrivendo $v = \omega r$, dove ω è la velocità angolare, abbiamo allora

Pertanto, la velocità angolare è indipendente dalla velocità lineare v e dipende solo dal rapporto q/m e dal campo $\mathfrak{B}$. L'espressione (15.6) dà il modulo di ω, ma non la sua direzione. Nell'Eq. (5.58), abbiamo indicato che l'accelerazione in un moto circolare uniforme può essere scritta in forma vettoriale come $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$. Pertanto, l'equazione di moto $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ diventa

ovvero, invertendo l'ordine nel prodotto vettore a secondo membro e dividendo per m, otteniamo

indicante che

la quale dà ω sia in modulo che in direzione.* Il segno meno indica che ω ha direzione opposta a $\mathfrak{B}$ per una carica positiva ed ha la stessa direzione per una carica negativa. Chiameremo ω la *pulsazione ciclotronica* per ragioni che saranno spiegate nel Paragrafo 15.4(c) quando discuteremo il ciclotrone.

È usuale rappresentare un campo perpendicolare al foglio mediante un punto (·) se esso è diretto verso il lettore e mediante una croce (×) se esso è diretto verso la pagina. La Figura 15–5 rappresenta la traiettoria di una carica positiva (a) e di una negativa (b) in moto perpendicolarmente ad un campo magnetico unifrome perpendicolare alla pagina. In (a), ω è diretta verso la pagina ed in (b) verso il lettore.

L'incurvarsi della traiettoria di uno ione in un campo magnetico fornisce pertanto un mezzo per determinare se la sua carica è positiva o negativa, se sappiamo il senso del suo moto. La Figura 15–6 mostra la traiettoria di parecchie particelle cariche rese visibili in una camera a nebbia† posta in un campo magnetico. Il campo magnetico applicato è molte più intenso del campo magnetico terrestre, così che il raggio della traiettoria è dell'ordine delle dimensioni della camera a nebbia. Notare che le traiettorie sono incurvate nell'uno o nell'altro di due sensi opposti, indicando che alcune particelle sono positive

*A rigore, avremmo dovuto scrivere $\omega = -(q/m)\mathfrak{B} + \lambda v$, dove λ è una costante arbitraria, ma la Eq. (15.6) mostra che dobbiamo porre $\lambda = 0$.

†Una camera a nebbia è un dispositivo contenente una miscela di gas e vapore in cui la traiettoria di una particella carica è resa visibile condensando il vapore sugli ioni del gas. Gli ioni sono prodotti dall'interazione della particella carica con le molecole del gas. La condizione per la condensazione è ottenuta raffreddando la miscela mediante una espansione rapida (adiabatica). La miscela può essere aria e vapore acqueo.

which gives the radius of the circle described by the particle. For example, using the data of Example 15.1, we see that the protons would describe a circle whose radius would be 8×10^5 m if the field were uniform. By writing $v = \omega r$, where ω is the angular velocity, we have then

$$\omega = \frac{q}{m}\mathfrak{B}. \tag{15.6}$$

Therefore the angular velocity is independent of the linear velocity v and depends only on the ratio q/m and the field $\mathfrak{B}$. The expression (15.6) gives the magnitude of ω but not its direction. In Eq. (5.58) we indicated that the acceleration in a uniform circular motion may be written in vector form as $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$. Therefore the equation of motion $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ becomes

$$m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = q\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$$

or, reversing the vector product on the right-hand side and dividing by m, we get

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = -(q/m)\mathfrak{B} \times \boldsymbol{v},$$

indicating that

$$\boldsymbol{\omega} = -(q/m)\mathfrak{B}, \tag{15.7}$$

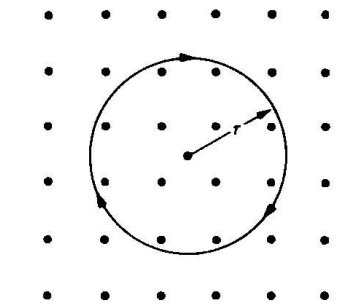
which gives ω both in magnitude and direction.* The minus sign indicates that ω has the opposite direction to $\mathfrak{B}$ for a positive charge and the same direction for a negative charge. We shall call ω the *cyclotron frequency* for reasons to be explained in Section 15.4(c) when we discuss the cyclotron.

It is customary to represent a field perpendicular to the paper by a dot (·) if it is directed toward the reader and by a cross (×) if it is directed into the page. Figure 15–5 represents the path of a positive (a) and a negative (b) charge moving perpendicularly to a uniform magnetic field perpendicular to the page. In (a), ω is directed into the page and in (b) toward the reader.

The bending of the path of an ion in a magnetic field therefore provides a means for determining whether its charge is positive or negative, if we know the direction of its motion. Figure 15–6 shows the paths of several charged particles made visible in a cloud chamber† placed in a magnetic field. The applied magnetic field is several times stronger than the earth's magnetic field, so that the radius of the path is of the order of the dimensions of the cloud chamber. Note that the paths are bent in either of two opposite senses, indicating that some particles are positive

* Strictly speaking, we should have written $\omega = -(q/m)\mathfrak{B} + \lambda v$, where λ is an arbitrary constant; but Eq. (15.6) shows that we must make $\lambda = 0$.

† A cloud chamber is a device containing a gas-and-vapor mixture in which the path of a charged particle is made visible by condensing the vapor on ions of the gas. The ions are produced by the interaction of the charged particle and the gas molecules. The condition for condensation is obtained by cooling the mixture by a rapid (adiabatic) expansion. The mixture may be air and water vapor.



q positiva; $\mathfrak{B}$ verso l'alto, ω verso il basso
(a)

q negativa; $\mathfrak{B}$ e ω verso l'alto
(b)

Fig. 15–5. Traiettoria circolare di cariche positive e negative in un campo magnetico uniforme.

q positive; $\mathfrak{B}$ upward, ω downward
(a)

q negative; $\mathfrak{B}$ and ω upward
(b)

Fig. 15–5. Circular path of positive and negative charges in a uniform magnetic field.

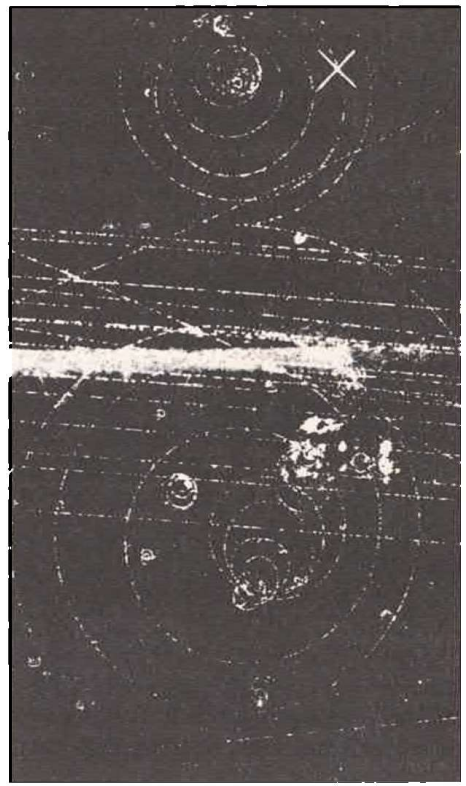


Fig. 15–6. Fotografia di traiettorie in camera a nebbia di particelle cariche in un campo magnetico uniforme di verso entrante nella pagina. Può lo studente identificare quali sono le cariche positive e quali le negative?

Fig. 15–6. Cloud-chamber photograph of paths of charged particles in a uniform magnetic field directed into the page. Can the student identify which are the positive and which are the negative charges?

ed altre sono negative. Si può osservare che alcune delle particelle descrivono una spirale di raggio decrescente. Questo indica che la particella viene rallentata per collisione con le molecole del gas. Da questa diminuzione in velocità risulta, secondo l'Eq. (15.5), una diminuzione nel raggio dell'orbita.

L'Equazione (15.5) ci dice inoltre che la curvatura della traiettorie di una particella carica in un campo magnetico dipende dall'energia della particella. Più grande è l'energia (o la quantità di moto $p = mv$), più grande è il raggio della traiettoria e più piccola la curvatura. L'applicazione della legge sopra detta condusse nel 1932 alla scoperta del *positrone* nei raggi cosmici. Il positrone è una particella elementare avente la stessa massa m_e dell'elettrone, ma una carica *positiva* $+e$. La sua scoperta fu opera del fisico americano Carl D. Anderson (1905–).* Fu Anderson che

*L'esistenza di questa particella però era stata prevista pochi anni prima della sua scoperta dal fisico inglese Paul A. M. Dirac (1902–).

and others are negative. It may be observed that some of the particles describe a spiral of decreasing radius. This indicates that the particle is being slowed down by collision with the gas molecules. This decrease in velocity results, according to Eq. (15.5), in a decrease in the radius of the orbit.

Equation (15.5) also tells us that the curvature of the path of a charged particle in a magnetic field depends on the energy of the particle. The larger the energy (or the momentum $p = mv$), the larger the radius of the path and the smaller the curvature. Application of the above principle led in 1932 to the discovery of the *positron* in cosmic rays. The positron is a fundamental particle having the same mass m_e as the electron but a *positive* charge $+e$. Its discovery was the work of the American physicist Carl D. Anderson, (1905–).* It was Anderson who ob-

* The existence of this particle, however, had been predicted a few years previous to its discovery by the British physicist Paul A. M. Dirac (1902–).

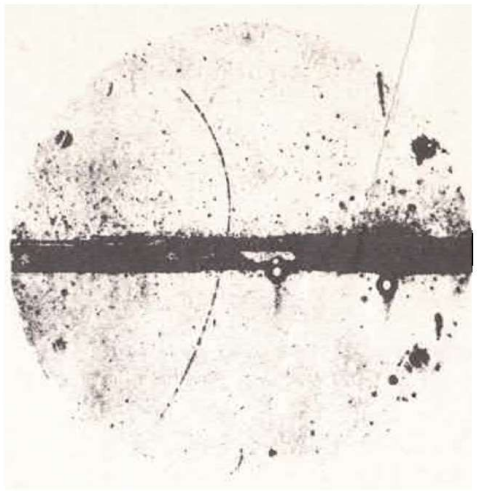


Fig. 15–7. Fotografia di Anderson della traiettoria in camera a nebbia di un positrone (elettrone positivo) in un campo magnetico diretto in senso entrante nella pagina. Questa fotografia ha fornito la prima (1932) prova sperimentale dell'esistenza dei positroni, precedentemente previsti teoricamente da Dirac.

Fig. 15–7. Anderson's cloud-chamber photograph of the path of a positron (positive electron) in a magnetic field directed into the page. This photograph presented the first (1932) experimental evidence of the existence of positrons, previously predicted theoretically by Dirac.

ottenne la fotografia di camera a nebbia in Fig. 15–7. La striscia orizzontale visibile nella figura è una lastra di piombo spessa 0.6 cm che è stata inserita entro la camera a nebbia e attraverso la quale è passata la particella. La parte inferiore della traiettoria della particella è meno curva che la parte superiore e ciò indica che la particella ha meno velocità ed energia sopra la lastra che non sotto. Pertanto la particella si muove all'insù, dato che essa deve perdere energia passando attraverso la lastra. La curvatura della traccia della particella ed il senso del moto rispetto al campo magnetico indicano che la particella è positiva. La traiettoria somiglia molto a quella di un elettrone — ma un elettrone positivo. Dall'Eq. (15.5), possiamo scrivere che $p = mv = q\mathscr{B}r$. Pertanto, se misuriamo r dalla foto e supponiamo che $q = e$, possiamo calcolare p. Mediante tale calcolo, troviamo che p ha un ordine di grandezza corrispondente ad una particella che ha la stessa massa di un elettrone. Una analisi più dettagliata ci permette di trovare la velocità della particella, e pertanto valutare la sua massa m, ottenendo così pieno accordo con la massa dell'elettrone.

Se una particella carica si muove inizialmente in una direzione che non è perpendicolare al campo magnetico, possiamo decomporre la velocità nelle sue componenti parallela e perpendicolare relativamente al campo magnetico. Il moto è quindi il risultante di un moto uniforme parallelo al campo e di un moto circolare attorno al campo, con velocità angolare data dall'Eq. (15.6). La traiettoria è un'elica, come mostrato in Fig. 15–8 per uno ione positivo.

Un altro fatto ancora che apprendiamo dall'Eq. (15.5) è che quanto più grande è il campo magnetico, tanto più piccolo è il raggio della traiettoria della particella carica. Pertanto, se il campo magnetico non è uniforme, la traiettoria non è circolare. La Figura 15–9 mostra un campo magnetico diretto da sinistra a destra con intensità crescente in quella direzione e verso. Pertanto, una particella carica iniettata al lato sinistro del campo descrive un'elica il cui raggio decresce continuamente. Una analisi più dettagliata, che qui dobbiamo omettere, mostrerebbe che la componente della velocità parallela al campo non rimane costante, ma decresce (e, pertanto, anche il passo dell'elica decresce) via via che la particella si muove nella direzione e nel senso secondo cui l'intensità del campo cresce.

tained the cloud-chamber photograph in Fig. 15–7. The horizontal band seen in the figure is a lead slab 0.6 cm thick which has been inserted inside the cloud chamber, and through which the particle has passed. The lower part of the path of the particle is less curved than the upper part, indicating that the particle has less velocity and energy above the slab than below it. Therefore the particle is moving upward, since it must lose energy in passing through the slab. The curvature of the track of the particle and the sense of the motion relative to the magnetic field indicate that the particle is a positive one. The path looks very much like that of an electron—but a positive electron. From Eq. (15.5) we may write that $p = mv = q\mathscr{B}r$. Therefore, if we measure r from the photograph and assume that $q = e$, we may compute p. By such a calculation, we find that p has an order of magnitude corresponding to a particle which has the same mass as an electron. A more detailed analysis enables us to find the particle's velocity and therefore compute its mass m, thus obtaining full agreement with the electron mass.

If a charged particle moves initially in a direction that is not perpendicular to the magnetic field, we may separate the velocity into its parallel and perpendicular components relative to the magnetic field. The parallel component remains unaffected and the perpendicular component changes continuously in direction but not in magnitude. The motion is then the resultant of a uniform motion parallel to the field and a circular motion around the field, with angular velocity given by Eq. (15.6). The path is a helix, as shown in Fig. 15–8 for a positive ion.

Yet another fact which we learn from Eq. (15.5) is that the larger the magnetic field, the smaller the radius of the path of the charged particle. Therefore, if the magnetic field is not uniform, the path is not circular. Figure 15–9 shows a magnetic field directed from left to right with its strength increasing in that direction. Thus a charged particle injected at the left-hand side of the field describes a helix whose radius decreases continuously. A more detailed analysis, which we must omit here, would show that the component of the velocity parallel to the field does not remain constant but decreases (and therefore the pitch of the helix also decreases) as the particle moves in the direction of increasing field strength.

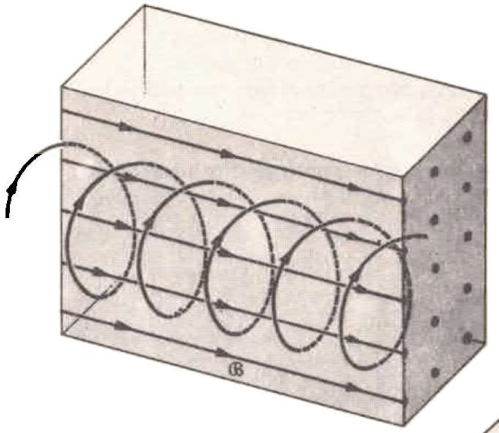


Fig. 15–8. Traiettoria elicoidale di uno ione positivo in moto obliquamente rispetto ad un campo magnetico uniforme.

Fig. 15–8. Helical path of a positive ion moving obliquely to a uniform magnetic field.

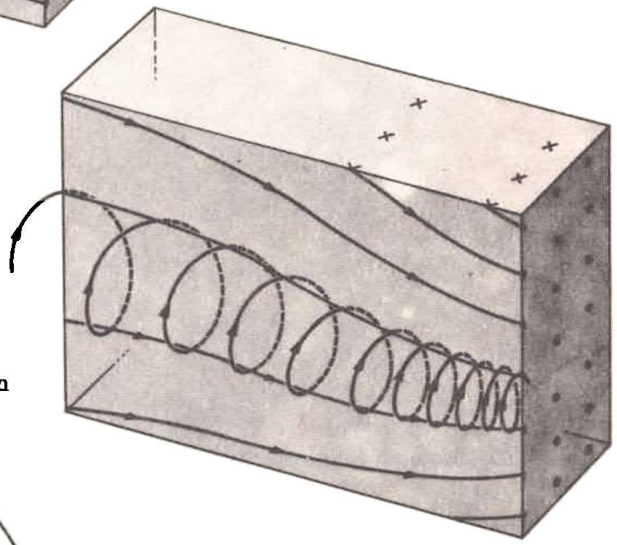
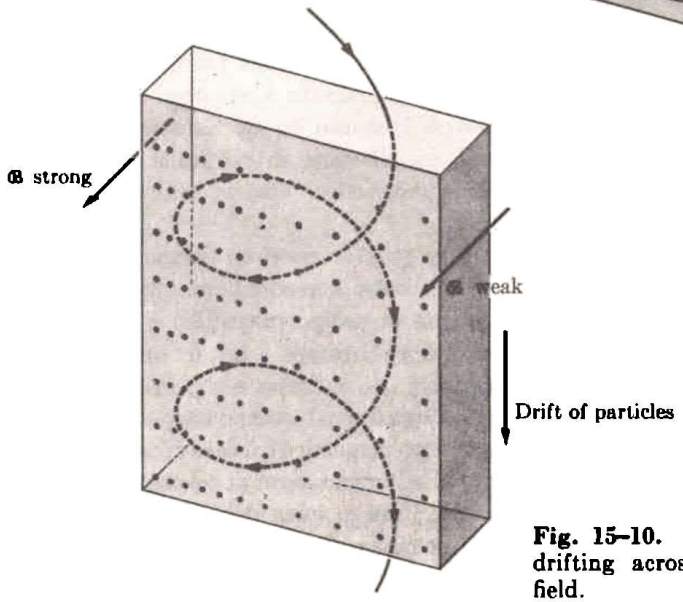


Fig. 15–9. Traiettoria di uno ione positivo in un campo magnetico non uniforme.

Fig. 15–9. Path of a positive ion in a nonuniform magnetic field.



B strong = B forte
B weak = B debole
Drift of particles = Deriva dalle particelle

Fig. 15–10. Moto piano di uno ione, che deriva attraverso un campo non uniforme.

Fig. 15–10. Plane motion of an ion drifting across a nonuniform magnetic field.

High energy, approximately polar = Alta energia, approssimativamente polare
Low energy, approximately polar = Bassa energia, approssimativamente polare
Low energy, approximately equatorial = Bassa energia, approssimativamente equatoriale
Axis of rotation = Asse di rotazione
Trapped electron = Elettrone intrappolato
High energy, approximately equatorial = Alta energia, approssimativamente equatoriale
Magnetic equator = Equatore magnetico
Magnetic axis = Asse magnetico
Outgoing = Uscente
Incoming = Entrante

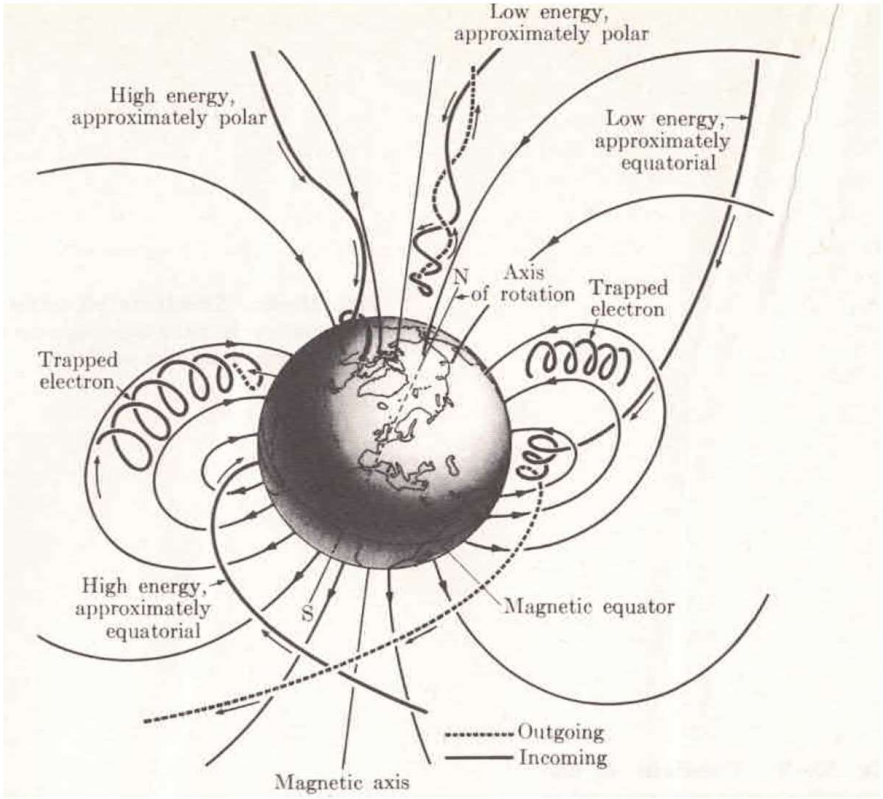


Fig. 15–11. Moto di particelle cariche della radiazione cosmica nel campo magnetico terrestre.

Dato un campo magnetico sufficientemente esteso nello spazio, alla fine la componente parallela di velocità si riduce a zero, e la particella è costretta a muoversi all'indietro, ovvero antiparallelamente al campo magnetico. Pertanto se un campo magnetico cresce di intensità, esso tende ad agire come un riflettore di particelle cariche, o, come è comunemente chiamato, uno *specchio magnetico*. Questo effetto è largamente usato per contenere gas ionizzati o plasmi.

Un'altra situazione è rappresentata nella Fig. 15–10, dove un campo magnetico perpendicolare alla pagina cresce di intensità da destra verso sinistra. La traiettoria di uno ione positivo iniettato perpendicolarmente al campo magnetico è stata pure indicata ed è più incurvata nella zona a sinistra dove il campo è più intenso, che non in quella a destra, dove è più debole. La traiettoria non è chiusa e la particella deriva attraverso il campo perpendicolarmente alla direzione in cui il campo magnetico cresce.

Un interessante esempio di moto di ioni in un campo magnetico è il caso di particelle cariche che cadono sulla terra dallo spazio esterno, costituendo parte di ciò che è chiamata *radiazione cosmica*. La Figura 15–11 mostra le linee di forza del campo magnetico della terra.* Le particelle che arrivano lungo l'asse magnetico della terra non subiscono

*In realtà, il campo magnetico attorno alla terra mostra parecchie anomalie locali e una distorsione generale nella direzione opposta al sole, che non sono visibili nella rappresentazione schematica della Fig. 15–11.

Fig. 15–11. Motion of charged cosmic-ray particles in the earth's magnetic field.

Eventually the parallel velocity reduces to zero, given a long enough magnetic field, and the particle is forced to move back or antiparallel to the magnetic field. Thus as a magnetic field increases in strength it begins to act as a reflector of charged particles, or, as it is popularly called, a *magnetic mirror*. This effect is widely used for containing ionized gases or plasmas.

Another situation is depicted in Fig. 15–10, where a magnetic field perpendicular to the page increases in intensity from right to left. The path of a positive ion injected perpendicular to the magnetic field has also been indicated, being more curved at the left, where the field is stronger, than at the right, where it is weaker. The path is not closed, and the particle drifts across the field perpendicular to the direction in which the magnetic field increases.

An interesting example of the motion of ions in a magnetic field is the case of charged particles falling on the earth from outer space, constituting part of what are called *cosmic rays*. Figure 15–11 shows the lines of force of the magnetic field of the earth.* Particles falling along the magnetic axis of the earth do not suffer

* Actually, the magnetic field around the earth shows several local anomalies, and an overall distortion in the direction away from the sun, that are not apparent in the schematic representation of Fig. 15–11.

alcuna deviazione e raggiungono la terra anche se hanno energia molto piccola. Le particelle che arrivano formando un angolo con l'asse magnetico della terra descrivono una traiettoria elicoidale e quelle che si muovono molto lentamente possono essere talmente deviate da non raggiungere la superficie della terra. Quelle che arrivano sull'equatore magnetico subiscono la più forte deflessione perchè sono in moto in un piano perpendicolare al campo magnetico. Pertanto all'equatore magnetico solo le particelle con energia più alta possono raggiungere la superficie della terra. In altre parole, l'energia minima che una particella cosmica carica deve avere per raggiungere la superficie della terra cresce via via che si va dall'asse magnetico all'equatore magnetico della terra.

Un altro effetto dovuto al campo magnetico terrestre è l'*asimmetria est-ovest* della radiazione cosmica. Non sappiamo ancora in via definitiva se le particelle cosmiche cariche sono in prevalenza positive o negative. Tuttavia, sappiamo che particelle di segni opposti sono deviate in direzioni opposte dal campo magnetico della terra. Se il numero di particelle positive nei raggi cosmici che raggiungono la terra è differente dal numero di particelle negative, dovremmo osservare che i raggi cosmici che arrivano in un dato posto sulla superficie della terra secondo una direzione a est dello zenith hanno una intensità diversa da quelli che arrivano secondo una direzione a ovest dello zenith. I risultati sperimentali sono molto a favore di una maggioranza di particelle cariche positivamente.

Le *fasce di radiazione di Van Allen* sono un altro esempio di particelle cosmiche cariche interagenti con il campo magnetico della terra. Queste fasce sono composte di particelle cariche in rapido moto, principalmente elettroni e protoni, intrappolati nel campo magnetico terrestre. La fascia interna si estende da circa 800 km (600 mi) fino a circa 4000 km (2500 mi) al disopra della superficie terrestre, mentre la cintura esterna si estende sino a circa 60,000 km dalla terra.* Esse furono scoperte nel 1958 mediante apparecchiature portate da un satellite americano Explorer e studiate mediante la sonda lunare Pioneer III. Per comprendere meglio l'intrappolamento di particelle cariche nelle fasce di Van Allen, consideriamo, per esempio, un elettrone libero prodotto da una collisione tra un atomo ed un raggio cosmico molte miglia al disopra della superficie terrestre. La componente di velocità perpendicolare al campo magnetico terrestre fa sì che l'elettrone si muova su una traiettoria curva. Il risultato è un moto simile a quello mostrato in Fig. 15–10, con l'elettrone che deriva verso est a causa della sua carica negativa (per cariche positive, la deriva è verso ovest). Un ulteriore effetto deriva dalla componente della velocità dell'elettrone parallela al campo magnetico terrestre, che produce uno spiralare verso uno dei poli lungo le linee di forza magnetiche, simile a quello mostrato in Fig. 15–8. A causa del crescere dell'intensità del campo magnetico verso nord o sud, la spirale diviene sempre più stretta, mentre nello stesso tempo la componente parallela della velocità diminuisce come spiegato in relazione all'effetto di specchio magnetico della Fig. 15–9. Ogni elettrone raggiunge una determinata latitudine nord o sud alla quale la componente parallela di velocità diventa zero; quale sia questa latitudine dipende dalla

*Ci sono buone prove per mostrare che la fascia interna è composta di protoni ed elettroni originanti dal decadimento di neutroni che sono stati prodotti nella atmosfera terrestre da interazioni di raggi cosmici. La fascia esterna consiste principalmente in particelle cariche che sono state emesse dal sole. Un aumento nel numero di queste particelle è associato con l'attività solare, e il loro allontanamento dalla fascia di radiazioni è causa di attività di aurora boreale e di interruzione delle trasmissioni radio.

any deviation and reach the earth even if they have very small energy. Particles falling at an angle with the magnetic axis of the earth describe a helical path, and those moving very slowly may be bent so much that they do not reach the earth's surface. Those arriving on the magnetic equator suffer the largest deflection because they are moving in a plane perpendicular to the magnetic field. Therefore only the most energetic particles at the magnetic equator can reach the earth's surface. In other words, the minimum energy that a charged cosmic particle must have to reach the earth's surface increases as one goes from the earth's magnetic axis to the earth's magnetic equator.

Another effect due to the earth's magnetic field is the *east-west asymmetry* of cosmic radiation. It is not definitely known whether the charged cosmic particles are preponderantly positive or negative. However, we do know that particles of opposite signs are bent in opposite directions by the earth's magnetic field. If the number of positive particles in the cosmic rays reaching the earth is different from the number of negative particles, we should observe that the cosmic rays arriving at a given place on the earth's surface in a direction east from the zenith have a different intensity from those arriving in a direction west from the zenith. The experimental results are highly in favor of a majority of positively charged particles.

The *Van Allen radiation belts* are another example of cosmic charged particles interacting with the earth's magnetic field. These belts are composed of rapidly moving charged particles, mainly electrons and protons, trapped in the earth's magnetic field. The inner belt extends from about 800 km (600 mi) to about 4000 km (2500 mi) above the earth's surface, while the outer belt extends up to about 60,000 km from the earth.* They were discovered in 1958 by apparatus carried in an American Explorer satellite and investigated by the lunar probe Pioneer III. To better understand the trapping of charged particles in the Van Allen belts, consider, for example, a free electron produced by a collision between an atom and a cosmic ray many miles above the earth's surface. The velocity component perpendicular to the earth's magnetic field causes the electron to travel in a curved path. However, the strength of the field is greater nearer the surface of the earth. The result is a motion similar to that shown in Fig. 15–10, with the electron drifting eastward because of its negative charge (for positive charges, the drift is westward). A further effect arises from the component of the electron's velocity parallel to the earth's magnetic field, which produces a spiraling toward one of the poles along the magnetic lines of force, similar to that shown in Fig. 15–8. Because of the increase in the magnetic field strength toward the north or south, the gyration becomes tighter and tighter, while at the same time the parallel component of the velocity decreases, as explained in connection with the magnetic mirror effect of Fig. 15–9. Each electron reaches a specific north or south latitude at which the parallel velocity becomes zero; which latitude it is depends on the

* There is good evidence to show that the inner belt is composed of protons and electrons arising from the decay of neutrons which have been produced in the earth's atmosphere by cosmic-ray interactions. The outer belt consists primarily of charged particles that have been ejected by the sun. An increase in the number of these particles is associated with solar activity, and their removal from the radiation belt is the cause for auroral activity and radio-transmission blackouts.

velocità iniziale di iniezione. Quindi l'elettrone si ritira verso il polo opposto. Il moto risultante è perciò un cambiamento in longitudine verso est e una oscillazione nord-sud in latitudine. Il moto si ripete continuamente, magari per parecchie settimane, finchè l'elettrone è espulso dalla fascia di Van Allen da una collisione che pone fine alla sua condizione di intrappolamento. Una situazione simile si ha con i protoni intrappolati.

Photographic plate = Lastra fotografica
Ion source = Sorgente di ioni

Fig. 15–12. Spettrometro di massa di Dempster. I è una sorgente di ioni. Le fenditure S_1 e S_2 servono da collimatori del fascio di ioni. V è la differenza di potenziale accelerante applicata tra S_1 e S_2. P è una lastra fotografica che registra l'arrivo degli ioni.

initial velocity of injection. The electron then retreats toward the opposite pole. The resultant motion is thus an eastward change in longitude and a north-south oscillation in latitude. The motion is repeated continuously, perhaps for several weeks, until the electron is ejected from the Van Allen belt by a collision which ends its trapped condition. A similar situation occurs with the trapped protons.

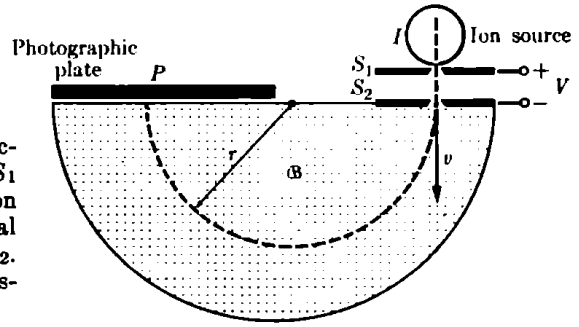


Fig. 15–12. Dempster's mass spectrometer. I is an ion source. Slits S_1 and S_2 serve as collimators of the ion beam. V is the accelerating potential difference applied between S_1 and S_2. P is a photographic plate which registers the arrival of the ions.

15.4 Esempi di moto di particelle cariche in un campo magnetico

In questo paragrafo, illustreremo parecchie situazioni pratiche in cui uno ione si muove in un campo magnetico.

(a) ***Spettrometro di massa.*** Consideriamo il dispositivo illustrato in Fig. 15–12. Qui I è una sorgente di ioni (nel caso di elettroni può essere semplicemente un filamento riscaldato) ed S_1 ed S_2 sono due strette fenditure attraverso cui gli ioni passano, venendo accelerati dalla differenza di potenziale V applicata tra di esse. La velocità di uscita degli ioni si calcola dall'Eq. (14.38), che dà

Nella regione al disotto delle fenditure vi è un campo magnetico diretto all'insù dalla pagina. Lo ione quindi descriverà un'orbita circolare, in una direzione o nell'altra a seconda del segno del segno della sua carica q. Dopo aver descritto un semicerchio, lo ione arriva su una lastra fotografica P, lasciandovi un segno. Il raggio r dell'orbita è dato dalla Eq. (15.5), da cui, ricavando la velocità v, otteniamo

Combinando le Eq. (15.8) e (15.9) per eliminare v, otteniamo

che dà il rapporto q/m in termini di tre quantità (V, $\mathfrak{B}$, ed r) che possono essere facilmente misurate. Possiamo applicare questa tecnica ad elettroni, protoni, e qualunque

15.4 Examples of Motion of Charged Particles in a Magnetic Field

In this section we shall illustrate several concrete situations in which an ion moves in a magnetic field.

(a) ***Mass spectrometer.*** Let us consider the arrangement illustrated in Fig. 15–12. Here I is an ion source (for electrons it may be just a heated filament) and S_1 and S_2 are two narrow slits through which the ions pass, being accelerated by the potential difference V applied between them. The exit velocity of the ions is calculated from Eq. (14.38), which gives

$$v^2 = 2\left(\frac{q}{m}\right)V. \tag{15.8}$$

In the region below the slits there is a uniform magnetic field directed upward from the page. The ion will then describe a circular orbit, bent in one direction or the other depending on the sign of its charge q. After describing a semicircle the ions fall on a photographic plate P, leaving a mark. The radius r of the orbit is given by Eq. (15.5), from which, solving for the velocity v, we obtain

$$v = \frac{q}{m}\mathfrak{B}r. \tag{15.9}$$

Combining Eqs. (15.8) and (15.9) to eliminate v, we obtain

$$\frac{q}{m} = \frac{2V}{\mathfrak{B}^2r^2}, \tag{15.10}$$

which gives the ratio q/m in terms of three quantities (V, $\mathfrak{B}$, and r) which can easily be measured. We may apply this technique to electrons, protons, and any

altra particella carica, atomo o molecola. Misurando indipendentemente la carica q, possiamo ottenere la massa della particella. Questi sono i metodi che erano stati indicati in precedenza nel Paragrafo 14.5.

Il dispositivo della Fig. 15–12 costituisce uno *spettrometro di massa*, perchè separa ioni aventi la stessa carica q, ma differente massa m poichè, secondo la Eq. (15.10), il raggio della traiettoria di ogni ione sarà differente, dipendendo la differenza dal valore di q/m dello ione. Questo particolare spettrometro è chiamato spettrometro di massa di *Dempster*. Parecchi altri tipi di spettrometri di massa, tutti basati sullo stesso principio, sono stati sviluppati. Scienziati che impiegavano questa tecnica scoprirono, negli anni successivi al 1920, che gli atomi dello stesso elemento chimico non hanno necessariamente la stessa massa. Come indicato nel Paragrafo 14.7, i differenti tipi di atomi di un elemento chimico, tipi che differiscono in massa, sono detti *isotopi*.

Il dispositivo sperimentale della Fig. 15–12 può anche essere usato per ottenere il rapporto q/m per una particella in moto con diverse velocità. Si è trovato che q/m dipende da v come se q rimanesse costante ed m variasse con la velocità nel modo indicato dalla Eq. (11.7); cioè, $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Pertanto, concludiamo che

> *la carica elettrica è un invariante, essendo la stessa per tutti gli osservatori in moto relativo uniforme.*

(b) ***Esperimenti di Thompson.*** Durante l'ultima parte del diciannovesimo secolo, vi fu una grande mole di lavoro sperimentale sulle scariche elettriche. Questi esperimenti consistevano nel produrre una scarica elettrica attraverso un gas a bassa pressione introducendo nel gas due elettrodi ed applicando una grande differenza di potenziale tra di essi. A seconda della pressione del gas nel tubo, vari effetti luminosi venivano osservati. Quando il gas era mantenuto ad una pressione inferiore ad un millesimo di atmosfera, non venivano osservati più effetti visibili nel tubo, ma veniva osservata una macchia luminosa sulla parete del tubo in O, direttamente all'opposto del catodo C (Fig. 15–13). Pertanto fu fatta l'ipotesi che una qualche radiazione fosse emessa dal catodo e si muovesse in linea retta verso O. Di conseguenza queste radiazioni furono chiamate *raggi catodici*.

other charged particle, atom or molecule. By measuring the charge q independently, we may obtain the mass of the particle. These are the methods that were indicated previously in Section 14.5.

The arrangement of Fig. 15–12 constitutes a *mass spectrometer*, because it separates ions having the same charge q but different mass m since, according to Eq. (15.10), the radius of the path of each ion will be different, the difference depending on the ion's q/m value. This particular spectrometer is called *Dempster's* mass spectrometer. Several other types of mass spectrometers, all based on the same principle, have been developed. Scientists using this technique discovered, in the 1920's, that atoms of the same chemical element do not necessarily have the same mass. As indicated in Section 14.7, the different varieties of atoms of one chemical element, varieties which differ in mass, are called *isotopes*.

The experimental arrangement of Fig. 15–12 may also be used to obtain the ratio q/m for a particle moving with different velocities. It has been found that q/m depends on v as if q remains constant and m varies with the velocity as indicated by Eq. (11.7); that is, $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Therefore we conclude that

> *the electric charge is an invariant, being the same for all observers in uniform relative motion.*

(b) ***Thomson's experiments.*** During the latter part of the nineteenth century there was a great amount of experimental work on electrical discharges. These experiments consisted of producing an electrical discharge through a gas at low pressure by placing two electrodes within the gas and applying a large potential difference to them. Depending on the pressure of the gas in the tube, several luminous effects were observed. When the gas in the tube was kept at a pressure less than a thousandth of an atmosphere, no more visible effects were observed within the tube, but a luminous spot was observed on the tube wall at O directly opposite the cathode C (Fig. 15–13). Therefore the hypothesis was made that some radiation was emitted from the cathode that moved in a straight line toward O. Accordingly this radiation was called *cathode rays*.

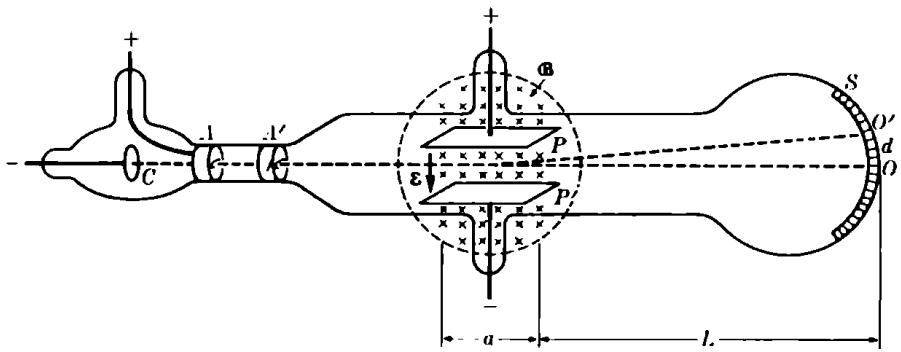


Fig. 15–13. Esperimento di Thomson per misurare q/m. Raggi catodici (elettroni) emessi da C e collimati da A ed A' arrivano allo schermo S dopo essere passati attraverso una regione dove sono applicati campi elettrici e magnetici.

Fig. 15–13. Thomson's experiment for measuring q/m. Cathode rays (electrons) emitted by C and collimated by A and A' arrive at the screen S after passing through a region where electric and magnetic fields are applied.

Quando gli sperimentatori aggiunsero due piatti paralleli P e P' entro il tubo e applicarono una differenza di potenziale, venne prodotto un campo elettrico diretto da P verso P'. Il risultato dell'applicazione di questo campo elettrico era che la macchia luminosa si spostava da O ad O', cioè nella direzione corrispondente a una carica elettrica negativa. Questo suggerì che i raggi catodici erano semplicemente un flusso di particelle cariche negativamente. Se q è la carica di ogni particella e V la sua velocità, la deviazione $d = OO'$ può essere calcolata applicando l'Eq. (14.9), $q\mathcal{E}a/mv^2 = d/L$.

La forza elettrica sulle particelle è $q\mathcal{E}$, ed è diretta all'insù. Come passo successivo supponiamo di applicare, nella stessa regione in cui vi è $\mathcal{E}$, un campo magnetico diretto in senso entrante nel foglio. La forza magnetica, secondo l'Eq. (15.4), è $qv\mathcal{B}$, ed è diretta verso il basso perchè q è una carica negativa. Regolando apportunamente $\mathcal{B}$, possiamo rendere la forza magnetica eguale alla forza elettrica. Questo ha come risultato una forza netta zero, e la macchia luminosa ritorna da O' ad O, cioè non vi è deflessione dei raggi catodici. Allora $q\mathcal{E} = qv\mathcal{B}$ ossia $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$. Questo fornisce una misura della velocità della particella. Sostituendo questo valore di v nell'Eq. (14.9), otteniamo il rapporto q/m della particella costituente i raggi catodici,

$$q/m = \mathcal{E}d/\mathcal{B}^2La.$$

Questo fornì uno dei primi esperimenti attendibili per misurare q/m, ed indirettamente diede una prova che i raggi catodici consistono in particelle cariche negativamente, da allora chiamate *elettroni*.

Questi e altri esperimenti di questo tipo furono pubblicati nel 1897 dal fisico inglese Sir J. J. Thomson (1856–1940), che dedicò molti sforzi e molto tempo alla scoperta della natura dei raggi catodici. Oggi noi sappiamo che elettroni liberi presenti nel metallo costituente il catodo C sono estratti o evaporano dal catodo come risultato dell'intenso campo elettrico applicato tra C ed A, e sono accelerati lungo il tubo dallo stesso campo.

(c) ***Il ciclotrone.*** Il fatto che la traiettoria di una particella carica in un campo magnetico è circolare, ha permesso il progetto di acceleratori di particelle che operano ciclicamente. Una difficoltà con gli acceleratori elettrostatici (descritti nel Paragrafo 14.9) è che l'accelerazione dipende dalla differenza di potenziale totale V. Poichè il campo elettrico nell'acceleratore è $\mathcal{E} = V/d$, se V è molto grande, la lunghezza d del tubo acceleratore deve essere pure molto grande, per impedire lo svilupparsi di intensi campi elettrici che produrrebbero scariche elettriche nei materiali del tubo acceleratore. Inoltre, un tubo acceleratore molto lungo pone parecchie difficoltà tecniche. Invece, in un acceleratore ciclico una carica elettrica può ricevere una serie di accelerazioni passando molte volte attraverso una differenza di potenziale relativamente piccola. Il primo strumento operante su questo principio fu il *ciclotrone*, progettato dal fisico americano E. O. Lawrence. Il primo ciclotrone praticamente impiegabile cominciò a funzionare nel 1932. Da allora, molti ciclotroni sono stati costruiti in tutto il mondo, ciascuno via via di energia crescente e di progetto più progredito.

Essenzialmente, un ciclotrone (Fig. 15–14) consiste in una cavità cilindrica divisa in due metà D_1 e D_2 (ciascuna chiamata una "di" a causa della sua forma a lettera D maiuscola), e

When experimenters added two parallel plates P and P' inside the tube and applied a potential difference, an electric field $\mathcal{E}$ directed from P to P' was produced. The result of applying this electric field was that the luminous spot moved from O to O'; that is, in the direction corresponding to a negative electric charge. This suggested that cathode rays are simply a stream of negatively charged particles. If q is the charge of each particle and v its velocity, the deviation $d = OO'$ can be computed by applying Eq. (14.9), $q\mathcal{E}a/mv^2 = d/L$.

The electric force on the particle is $q\mathcal{E}$, and is directed upward. Next, suppose we apply, in the same region where $\mathcal{E}$ is, a magnetic field directed into the paper. The magnetic force, according to Eq. (15.4), is $qv\mathcal{B}$, and is directed downward because q is a negative charge. By properly adjusting $\mathcal{B}$, we can make the magnetic force equal to the electric force. This results in a zero net force, and the luminous spot returns from O' to O; that is, there is no deflection of the cathode rays. Then $q\mathcal{E} = qv\mathcal{B}$ or $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$. This provides a measurement of the velocity of the charged particle. Substituting this value of v in Eq. (14.9), we obtain the ratio q/m of the particle constituting the cathode rays,

This provided one of the first reliable experiments for measuring q/m, and indirectly gave a proof that cathode rays consist of negatively charged particles, since then called *electrons*.

These and similar experiments were published in 1897 by the British physicist Sir J. J. Thomson (1856–1940), who expended great effort and time trying to discover the nature of cathode rays. Today we know that free electrons present in the metal constituting the cathode C are pulled out or evaporated from the cathode as a result of the strong electric field applied between C and A, and are accelerated along the tube by the same field.

(c) ***The cyclotron.*** The fact that the path of a charged particle in a magnetic field is circular has permitted the design of particle accelerators that operate cyclically. One difficulty with electrostatic accelerators (described in Section 14.9) is that the acceleration depends on the total potential difference V. Since the electric field within the accelerator is $\mathcal{E} = V/d$, if V is very large, the length d of the accelerator tube must also be very great, to prevent the development of strong electric fields that would produce electric breakdown in the materials of the accelerating tube. Also, a very long accelerating tube poses several engineering difficulties. However, in a cyclic accelerator an electric charge may receive a series of accelerations by passing many times through a relatively small potential difference. The first instrument working on this principle was the *cyclotron*, designed by the American physicist E. O. Lawrence. The first practical cyclotron started operating in 1932. Since then many cyclotrons have been built all over the world, each one being of successively increasing energy and improved design.

Essentially, a cyclotron (Fig. 15–14) consists of a cylindrical cavity which is divided into two halves D_1 and D_2 (each called a "dee" because of its shape), and

posta in un campo magnetico uniforme parallelo al suo asse. Le due cavità sono elettricamente isolate l'una dall'altra. Una sorgente di ioni S è posta al centro dello spazio tra le di. Una differenza di potenziale alternata dell'ordine di 10^4 V è applicata tra le di. Quando gli ioni sono positivi, essi vengono accelerati verso la di negativa. Quando uno ione è entrato in una di, esso non subisce forza elettrica, dato che il campo elettrico è zero all'interno di un conduttore. Il campo magnetico però costringe gli ioni a descrivere un'orbita circolare, con un raggio dato dalla Eq. (15.5), $r = mv/q\mathfrak{B}$, ed una velocità angolare eguale alla pulsazione ciclotronica delle particelle, data dall'Eq. (15.6), $\omega = q\mathfrak{B}/m$. La differenza di potenziale tra le di oscilla con una pulsazione eguale ad ω. In questo modo, la differenza di potenziale tra le di è in risonanza con il moto circolare degli ioni.

Dee = Di

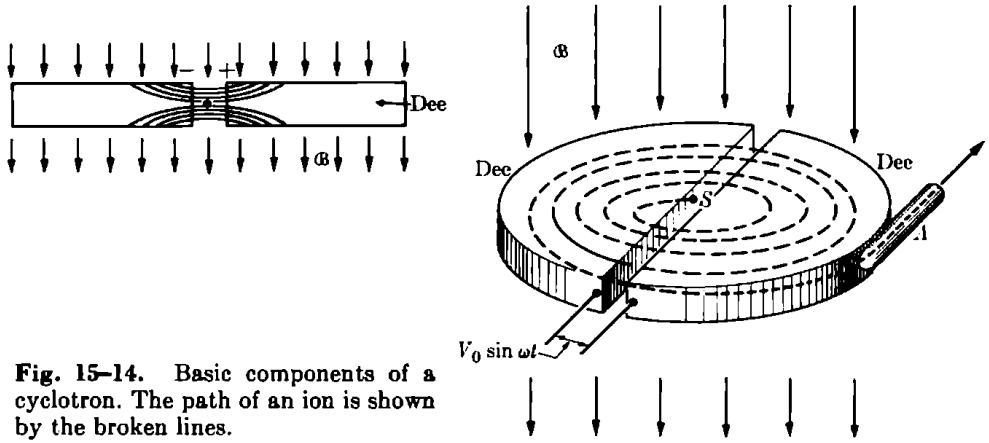


Fig. 15–14. Componenti base di un ciclotrone. La traiettoria di uno ione è illustrata dalle linee tratteggiate.

Dopo che la particella ha descritto metà di una rivoluzione, la polarità delle di è invertita, e lo ione quando attraversa lo spazio tra di esse riceve un'altra piccola accelerazione. Il successivo semicerchio descritto ha quindi un raggio più grande, ma la stessa velocità angolare. Il processo si ripete parecchie volte, finchè il raggio raggiunge un valore massimo R che è praticamente eguale al raggio delle di. Il campo magnetico al bordo delle di diminuisce bruscamente e la particella si muove in direzione tangenziale, sfuggendo attraverso una opportuna apertura. La velocità massima v_{max} è legata al raggio R tramite l'Eq. (15.5), e precisamente,

oppure

L'energia cinetica delle particelle emergenti da A è quindi

which is placed in a uniform magnetic field parallel to its axis. The two cavities are electrically insulated from each other. An ion source S is placed in the center of the space between the dees. An alternating potential difference of the order of 10^4 V is applied between the dees. When the ions are positive, they will be accelerated toward the negative dee. Once the ion gets inside a dee, it experiences no electrical force, since the electric field is zero in the interior of a conductor. However, the magnetic field forces ions to describe a circular orbit, with a radius given by Eq. (15.5), $r = mv/q\mathfrak{B}$, and an angular velocity, equal to the cyclotron frequency of the particles, given by Eq. (15.6), $\omega = q\mathfrak{B}/m$. The potential difference between the dees oscillates with a frequency equal to ω. In this way the potential difference between the dees is in resonance with the circular motion of the ions.

Fig. 15–14. Basic components of a cyclotron. The path of an ion is shown by the broken lines.

After the particle has described half a revolution, the polarity of the dees is reversed, and when the ion crosses the gap between them, it receives another small acceleration. The next half-circle described has then a larger radius, but the same angular velocity. The process repeats itself several times, until the radius attains a maximum value R which is practically equal to the radius of the dees. The magnetic field at the edge of the dees is decreased sharply and the particle moves tangentially, escaping through a convenient opening. The maximum velocity v_{max} is related to the radius R by Eq. (15.5), namely,

$$R = \frac{mv_{max}}{q\mathfrak{B}}$$

or

$$v_{max} = \left(\frac{q}{m}\right)\mathfrak{B}R.$$

The kinetic energy of the particles emerging from A is then

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv_{max}^2 = \tfrac{1}{2}q\left(\frac{q}{m}\right)\mathfrak{B}^2R^2, \tag{15.11}$$

ed è determinata dalle caratteristiche della particella, dall'intensità del campo magnetico, dal raggio del ciclotrone, ma è indipendente dal potenziale accelerante. Quando la differenza di potenziale è piccola, la particella deve compiere molti giri prima di arrivare all'energia finale. Ma quando essa è grande, occorrono solo pochi giri.

L'intensità del campo magnetico è limitata da fattori tecnologici, come la disponibilità di materiali aventi le proprietà necessarie. Tuttavia, facendo magneti di raggio sufficientemente grande, possiamo, in linea di principio, accelerare la particella a qualunque energia vogliamo. Ma quanto più grande è il magnete, tanto più grandi sono il peso ed il costo. Vi è inoltre un fattore fisico limitante l'energia in un ciclotrone. Via via che l'energia aumenta, la velocità dello ione aumenta anch'essa e ne risulta un cambiamento di massa secondo l'Eq. (11.7), $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Quando l'energia è molto grande, il cambiamento di massa è apprezzabile abbastanza da far cambiare notevolmente la frequenza ciclotronica dello ione. Pertanto, a meno che la frequenza del potenziale elettrico venga cambiata, l'orbita della particella non è più in fase con il potenziale oscillante e non si produce ulteriore accelerazione. Così, in un ciclotrone, l'energia è limitata dall'effetto relativistico di massa.

ESEMPIO 15.3. Il ciclotrone dell'Università del Michigan ha le faccie dei poli con un diametro di 83 in. ed un raggio di estrazione di 36 in. ossia 0.92 m. Il massimo campo magnetico è $\mathfrak{B} = 1.50$ T e la massima frequenza di oscillazione raggiungibile per il campo accelerante è 15×10^6 Hz. Calcolare l'energia dei protoni e delle particelle alfa prodotti, e la loro frequenza ciclotronica. Tenendo conto della variazione relativistica di massa, qual'è la differenza percentuale tra la frequenza ciclotronica al centro e al bordo?

Soluzione: Usando l'Eq. (15.11) con i corrispondenti valori per la carica e la massa dei protoni e delle particelle alfa, troviamo che l'energia cinetica di entrambi può essere espressa come

La pulsazione ciclotronica per le particelle alfa è $\omega_\alpha = 7.2 \times 10^7$ s^{-1}, cioè una frequenza $\nu_\alpha = \omega_\alpha/2\pi = 11.5 \times 10^6$ Hz, che è entro il campo limitato dalla massima frequenza di progetto. Per i protoni, troviamo una frequenza doppia, ovvero 23×10^6 Hz. Questa è la frequenza con cui il potenziale applicato tra le di deve cambiare. Ma la massima frequenza di progetto del ciclotrone è 15×10^6 Hz, e, pertanto, questa macchina non può accelerare protoni al limite teorico di 91 MeV. Assumendo la massima frequenza di oscillazione, abbiamo che $\omega_p = 9.42 \times 10^7$ s^{-1}. Il campo magnetico corrispondente per la risonanza ciclotronica è 0.984 T, e troviamo che la energia cinetica dei protoni limitata dalla frequenza è

Ad una energia $E = m_0c^2 + E_k$, la massa della particella è

e così E_k/c^2 dà il cambiamento di massa. Dall'Eq. (15.6), vediamo che la pulsazione ciclotronica è inversamente proporzionale alla massa. Pertanto, se ω ed ω_0 sono le pulsazioni

and is determined by the characteristics of the particle, the strength of the magnetic field and the radius of the cyclotron, but is independent of the accelerating potential. When the potential difference is small, the particle has to make many turns before it picks up the final energy. But when it is large, only a few turns are required.

The strength of the magnetic field is limited by technological factors, such as availability of materials with the required properties. But, by making magnets of a radius sufficiently large, we can in principle accelerate the particle to any desired energy. However, the larger the magnet, the greater the weight and cost. There is also a physical limiting factor to the energy in a cyclotron. As the energy increases, the velocity of the ion also increases, resulting in a change of mass according to Eq. (11.7), $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. When the energy is very large, the change in mass is appreciable enough to make the cyclotron frequency of the ion change noticeably. Therefore, unless the frequency of the electric potential is changed, the orbit of the particle will no longer be in phase with the oscillating potential, and no further acceleration is produced. Thus, in a cyclotron, the energy is limited by the relativistic mass effect.

EXAMPLE 15.3. The University of Michigan cyclotron has pole faces with a diameter of 83 in. and an extraction radius of 36 in. or 0.92 m. The maximum magnetic field is $\mathfrak{B} = 1.50$ T and the maximum attainable oscillating frequency of the accelerating field is 15×10^6 Hz. Calculate the energy of the protons and alpha particles produced, and their cyclotron frequency. Taking into account the relativistic mass variation, what is the percentage difference between the cyclotron frequency at the center and at the edge?

Solution: Using Eq. (15.11) with the corresponding values for the charge and mass of the protons and alpha particles, we find that the kinetic energies of both may be expressed as

$$E_k = 1.46 \times 10^{-11} \text{ J} = 91 \text{ MeV}.$$

The cyclotron frequency for the alpha particle is $\omega_\alpha = 7.2 \times 10^7$ s^{-1}, or a frequency $\nu_\alpha = \omega_\alpha/2\pi = 11.5 \times 10^6$ Hz, which is within the range of the maximum design frequency. For the protons we find twice the frequency, or 23×10^6 Hz. This is the frequency with which the potential applied to the dees must change. But the maximum design frequency of the cyclotron is 15×10^6 Hz, and therefore this machine cannot accelerate protons to the theoretical value of 91 MeV. Assuming the maximum oscillatory frequency, we have that $\omega_p = 9.42 \times 10^7$ s^{-1}. The corresponding magnetic field for cyclotron resonance is 0.984 T, and we find the frequency-limited kinetic energy of protons to be

$$E_k = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2R^2 = 0.63 \times 10^{-11} \text{ J} = 39 \text{ MeV}.$$

At an energy $E = m_0c^2 + E_k$, the mass of the particle is

$$m = E/c^2 = m_0 + E_k/c^2,$$

and so E_k/c^2 gives the change in mass. From Eq. (15.6) we see that the cyclotron frequency is inversely proportional to the mass. Therefore, if ω and ω_0 are the frequencies

corrispondenti alle masse m ed m_0 della stessa particella, possiamo scrivere $\omega/\omega_0 = m_0/m$, ovvero

corresponding to the masses m and m_0 of the same particle, we may write $\omega/\omega_0 = m_0/m$ or

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{m - m_0}{m} = -\frac{E_k/c^2}{m_0 + E_k/c^2} = -\frac{E_k}{m_0c^2 + E_k}.$$

Il primo membro dà la percentuale di cambiamento nella pulsazione ciclotronica ed il secondo il cambiamento percentuale in massa. Per energie relativamente basse, possiamo trascurare nel denominatore il termine di energia cinetica E_k in confronto a m_0c^2, e ponendo $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, otteniamo

The left-hand side gives the percentage change in the cyclotron frequency and the right-hand side the percentage change in mass. For relatively low energies we can neglect the kinetic energy term E_k in the denominator in comparison with m_0c^2, and making $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, we obtain

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{E_k}{m_0c^2}.$$

Così, fino a che l'energia cinetica è piccola in confronto alla energia di riposo delle particelle, il cambiamento in pulsazione è molto piccolo. Nel nostro caso, abbiamo, per particelle alfa, $\Delta\omega/\omega = -0.024 = 2.4\%$, e per protoni, $\Delta\omega/\omega = -0.042 = 4.2\%$.

I risultati ottenuti in questo esempio inoltre indicano che, poichè gli elettroni hanno una massa di riposo circa 1/1840 quella del protone (Paragrafo 14.5), l'energia cinetica a cui gli elettroni possono essere accelerati (senza deviare apprezzabilmente dalla loro frequenza ciclotronica) è quindi anche circa 1/1840 quella per protoni. Per questo motivo, i ciclotroni non vengono impiegati per accelerare elettroni.

L'effetto relativistico di massa può essere corretto, o distribuendo nello spazio il campo magnetico in modo che ad ogni raggio il valore di ω rimanga costante, nonostante il cambiamento in massa, oppure cambiando la frequenza applicata alle di e mantenendo il campo magnetico costante mentre la particella sta spiralando, in modo che ad ogni istante vi sia risonanza tra il moto della particella ed il potenziale applicato. Il primo tipo di progetto si chiama un *ciclotrone relativistico* ed il secondo si chiama un *sincrociclotrone*. Un ciclotrone relativistico può funzionare continuamente, ma un siscrociclotrone funziona a fiotti a causa della necessità di regolare la frequenza. Qualche volta, come nei *protosincrotroni*, sia la frequenza che il campo vengono variati in modo da mantenere costante il raggio dell'orbita.

Thus, so long as the kinetic energy is small compared with the rest energy of the particles, the change in frequency is very small. In our case we have, for alpha particles, $\Delta\omega/\omega = -0.024 = 2.4\%$, and for protons, $\Delta\omega/\omega = -0.042 = 4.2\%$.

The results obtained in this example also indicate that, since electrons have a rest mass about 1/1840 that of the proton (Section 14.5), the kinetic energy to which electrons can be accelerated (without appreciably deviating from their cyclotron frequency) is thus also about 1/1840 that for protons. For this reason, cyclotrons are not used for accelerating electrons.

The relativistic mass effect can be corrected, either by shaping the magnetic field so that at each radius the value of ω remains constant in spite of the change in mass, or by changing the frequency applied to the dees and keeping the magnetic field constant while the particle is spiraling, so that at each instant there is resonance between the particle motion and the applied potential. The first design is called a *synchrotron* and the second is called a *synchrocyclotron*. A synchrotron may operate continuously, but a synchrocyclotron operates in bursts because of the need for adjusting the frequency. Sometimes, as in a *proton-synchrotron*, both the frequency and the magnetic field are varied in order to keep the radius of the orbit constant.

ESEMPIO 15.4. Discutere il moto di una particella carica in campi elettrici e magnetici incrociati.

EXAMPLE 15.4. Discuss the motion of a charged particle in crossed electric and magnetic fields.

Soluzione: Negli esempi precedenti in questo capitolo abbiamo considerato solo il moto di una particella carica in un campo magnetico. Esamineremo ora il caso in cui è presente anche un campo elettrico, così che deve essere usata l'Eq. (15.2). Considereremo però solo una situazione particolare, cioè quando i campi elettrico e magnetico sono perpendicolari, come mostrato in Fig. 15–15. L'equazione del moto della particella è

Solution: In the previous examples in this chapter we have considered only the motion of a charged particle in a magnetic field. We shall now examine the case when an electric field is also present, so that Eq. (15.2) must be used. However, we shall consider only a special situation: that is, when the electric and magnetic fields are perpendicular, as shown in Fig. 15–15. The equation of motion of the particle is

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}).$$

Facciamo ora una trasformazione galileiana dal riferimento XYZ ad un altro riferimento $X'Y'Z'$ in moto rispetto agli assi XYZ con velocità relativa

Let us now make a Galilean transformation from frame XYZ to another frame $X'Y'Z'$ moving relative to the XYZ-axes with the relative velocity

$$\boldsymbol{v}_0 = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\mathcal{B}^2} = u_x\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{B}}.$$

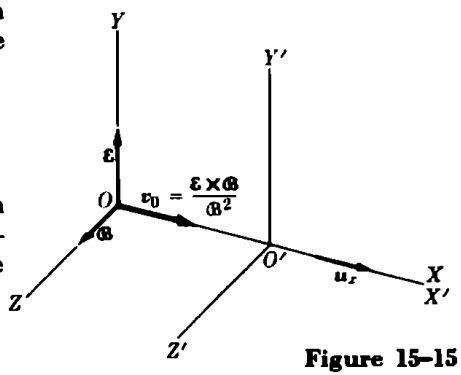


Figura 15–15

Figure 15–15

Allora, dato che v' è la velocità della particella relativa a $X'Y'Z'$, possiamo scrivere $v = v' + v_0$ e $dv/dt = dv'/dt$. Così, l'equazione precedente può scriversi come

Ma $v_0 \times \mathfrak{B} = (u_x\mathfrak{E}/\mathfrak{B}) \times u_z\mathfrak{B} = -u_y\mathfrak{E} = -\mathfrak{E}$. Pertanto, il primo e l'ultimo termine nella equazione precedente si elidono. Così, relativamente a $X'Y'Z'$, l'equazione del moto è

Notiamo allora che, relativamente a $X'Y'Z'$, il moto è come sarebbe se *nessun* campo elettrico fosse presente. Se la particella si muove inizialmente nel piano XY, il suo moto nel riferimento $X'Y'Z'$ sarà una circonferenza di raggio $r = mv'/q\mathfrak{B}$, descritta con velocità angolare $\omega = -q\mathfrak{B}/m$. Rispetto a XYZ, questo cerchio avanza lungo l'asse X con velocità v_0, risultandone una delle traiettorie mostrate in Fig. 15–16. Il tracciato si ripete su una distanza $v_0P = 2\pi v_0/\omega$. Se $2\pi v_0/\omega = 2\pi r$ ossia se $r = v_0/\omega$, la traiettoria è la cicloide normale, indicata con (1). Ma se $2\pi v_0/\omega \lesssim 2\pi r$ ossia se $r \lesssim v_0/\omega$, risultano le traiettorie (2) e (3), corrispondenti a cicloidi accorciate o allungate. Se la particella carica ha una componente di velocità iniziale parallela all'asse Z, le traiettorie illustrate in Fig. 15–16 si allontaneranno dal piano XY a velocità costante.

Fig. 15–16. Traiettorie cicloidali di una particella relativamente all'osservatore O. (1) $r = v_0/\omega$, (2) $r > v_0/\omega$, (3) $r < v_0/\omega$.

Un aspetto interessante rivelato da questo esempio è che mentre l'osservatore che usa il riferimento XYZ osserva sia un campo elettrico che un campo magnetico, l'osservatore che usa il riferimento $X'Y'Z'$, in moto rispetto a XYZ, osserva un moto della particella carica corrispondente solo ad un campo magnetico. Ciò suggerisce che i campi elettrico e magnetico dipendono dal moto relativo dell'osservatore. Questo è un argomento molto importante, che sarà esaminato più in dettaglio nel Paragrafo 15.12.

15.5 *Forza magnetica su una corrente elettrica*

Come spiegato nel Paragrafo 14.10, una corrente elettrica è un flusso di cariche elettriche in moto nel vuoto o attraverso un mezzo conduttore. L'intensità della corrente elettrica è stata definita come la carica passante nella unità di tempo attraverso una sezione del conduttore. Consideriamo una sezione di un conduttore attraverso la quale sono in moto con velocità v particelle con carica q. Se ci sono n particelle per unità di volume, il numero totale di particelle passanti attraverso l'unità di area per unità di tempo è nv, e

Then, given that v' is the velocity of the particle relative to $X'Y'Z'$, we may write $v = v' + v_0$ and $dv/dt = dv'/dt$. Thus the above equation may be written as

$$m\frac{dv'}{dt} = q(\mathfrak{E} + v' \times \mathfrak{B} + v_0 \times \mathfrak{B}).$$

But $v_0 \times \mathfrak{B} = (u_x\mathfrak{E}/\mathfrak{B}) \times u_z\mathfrak{B} = -u_y\mathfrak{E} = -\mathfrak{E}$. Therefore the first and last terms in the preceding equation cancel. Thus, relative to $X'Y'Z'$, the equation of motion is

$$m\frac{dv'}{dt} = qv' \times \mathfrak{B}.$$

We note then that, relative to $X'Y'Z'$, the motion is as it would be if *no* electric field were present. If the particle moves initially in the XY-plane, its motion in the $X'Y'Z'$-frame will be a circle of radius $r = mv'/q\mathfrak{B}$, described with angular velocity $\omega = -q\mathfrak{B}/m$. Relative to XYZ, this circle advances along the X-axis with the velocity v_0, resulting in one of the paths shown in Fig. 15–16. The pattern repeats itself in a distance $v_0P = 2\pi v_0/\omega$. If $2\pi v_0/\omega = 2\pi r$ or if $r = v_0/\omega$, the path is the normal cycloid, marked (1). But if $2\pi v_0/\omega \lesssim 2\pi r$ or if $r \lesssim v_0/\omega$, the paths (2) and (3) result, corresponding to curtate and prolate cycloids. If the charged particle has an initial velocity component parallel to the Z-axis, the paths illustrated in Fig. 15–16 will move away from the XY-plane at a constant rate.

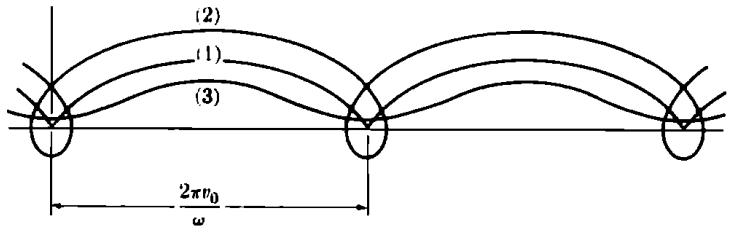


Fig. 15–16. Cycloidal paths of a particle relative to observer O. (1) $r = v_0/\omega$, (2) $r > v_0/\omega$, (3) $r < v_0/\omega$.

An interesting aspect revealed by this example is that while the observer who uses frame XYZ observes both an electric and a magnetic field, the observer who uses frame $X'Y'Z'$, in motion relative to XYZ, observes a motion of the charged particle corresponding only to a magnetic field. This suggests that electric and magnetic fields depend on the relative motion of the observer. This is a very important matter, which will be considered in greater detail in Section 15.12.

15.5 *Magnetic Force on an Electric Current*

As explained in Section 14.10, an electric current is a stream of electric charges moving in a vacuum or through a conducting medium. The intensity of the electric current has been defined as the charge passing per unit time through a section of the conductor. Consider a cross section of a conductor through which particles with charge q are moving with velocity v. If there are n particles per unit volume, the total number of particles passing through the unit area per unit time is nv, and

la *densità di corrente*, definita come la carica passante per l'unità di area per unità di tempo, è il vettore

Se S è l'area in sezione del conduttore, orientata perpendicolarmente a $\boldsymbol{j}$, la corrente è lo scalare

Supponiamo ora che il conduttore sia in un campo magnetico. La forza su ogni carica è data dalla Eq. (15.1) e, poichè vi sono n particelle per unità di volume, la *forza f per unità di volume* è

La forza totale su un piccolo volume dV del mezzo sarà $d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}\,dV = \boldsymbol{j} \times \mathfrak{B}\,dV$, e la forza totale su un volume finito si ottiene integrando questa espressione a tutto il volume. Cioè,

Consideriamo ora il caso in cui la corrente fluisce lungo un filo o un filamento. Un elemento di volume dV è dato da $S\,dl$ (Fig. 15–17), e pertanto, la Eq. (15.15) dà

filament = filamento

Figura 15–17

Ora $\boldsymbol{j} = j\boldsymbol{u}_T$, dove $\boldsymbol{u}_T$ è il vettore unitario tangente all'asse del filamento. Allora

Ma $jS = I$, e l'intensità I della corrente lungo il filo è la stessa in tutti i punti di un conduttore, come conseguenza della legge di conservazione della carica. Pertanto l'Eq. (15.16) per la forza su un conduttore percorso da una corrente elettrica diviene

Consideriamo, come esempio, il caso di un conduttore rettilineo posto in un campo magnetico uniforme $\mathfrak{B}$ (Fig. 15–18). Allora, sia $\boldsymbol{u}_T$ che $\mathfrak{B}$ sono costanti, e possiamo scrivere

the *current density*, defined as the charge passing through the unit area per unit time, is the vector

$$\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}. \tag{15.12}$$

If S is the cross-sectional area of the conductor, oriented perpendicular to $\boldsymbol{j}$, the current is the scalar

$$I = jS = nqvS. \tag{15.13}$$

Suppose now that the conductor is in a magnetic field. The force on each charge is given by Eq. (15.1) and, since there are n particles per unit volume, the *force per unit volume f* is

$$\boldsymbol{f} = nq\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B} = \boldsymbol{j} \times \mathfrak{B}. \tag{15.14}$$

The total force on a small volume dV of the medium will be $d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}\,dV = \boldsymbol{j} \times \mathfrak{B}\,dV$, and the total force on a finite volume is obtained by integrating this expression over all the volume. That is,

$$\boldsymbol{F} = \int_{\text{Vol}} \boldsymbol{j} \times \mathfrak{B}\,dV. \tag{15.15}$$

Let us now consider the case in which the current is flowing along a wire or filament. A volume element dV is given by $S\,dl$ (Fig. 15–17), and therefore Eq. (15.15) gives

$$\boldsymbol{F} = \int_{\text{Filament}} \boldsymbol{j} \times \mathfrak{B} S\,dl.$$

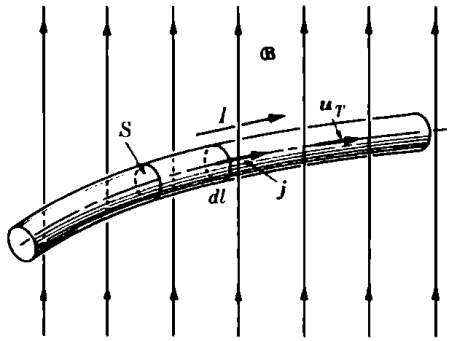


Figure 15–17

Now $\boldsymbol{j} = j\boldsymbol{u}_T$, where $\boldsymbol{u}_T$ is the unit vector tangent to the axis of the filament. Then

$$\boldsymbol{F} = \int (j\boldsymbol{u}_T) \times \mathfrak{B} S\,dl = \int (jS)\boldsymbol{u}_T \times \mathfrak{B}\,dl. \tag{15.16}$$

But $jS = I$, and the intensity I of the current along the wire is the same at all points of a conductor, because of the law of conservation of electric charge. Therefore Eq. (15.16) for the force on a conductor carrying an electric current becomes

$$\boldsymbol{F} = I \int \boldsymbol{u}_T \times \mathfrak{B}\,dl. \tag{15.17}$$

Let us consider, as an example, the case of a rectilinear conductor placed in a uniform magnetic field $\mathfrak{B}$ (Fig. 15–18). Then both $\boldsymbol{u}_T$ and $\mathfrak{B}$ are constant, and we may write

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{u}_T \times \mathfrak{B} \int dl,$$

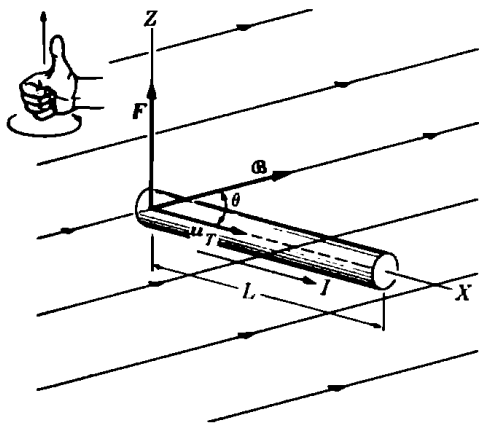


Fig. 15–18. Relazione vettoriale tra la forza magnetica su un conduttore percorso da corrente, il campo magnetico e la corrente. La forza è perpendicolare al piano che contiene $\mathbf{u}_T$ e $\mathfrak{B}$.

Fig. 15–19. Coppia magnetica su di un circuito elettrico rettangolare posto in un campo magnetico. La coppia è zero quando il piano del circuito è perpendicolare al campo magnetico.

Fig. 15–18. Vector relation between the magnetic force on a current-carrying conductor, the magnetic field, and the current. The force is perpendicular to the plane containing u_T and $\mathfrak{B}$.

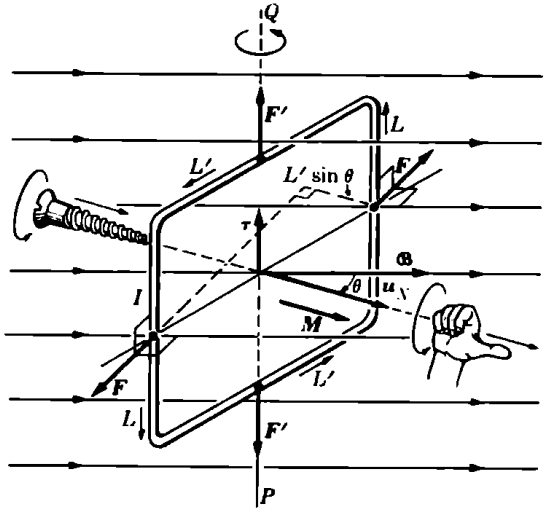


Fig. 15–19. Magnetic torque on a rectangular electric circuit placed in a magnetic field. The torque is zero when the plane of the circuit is perpendicular to the magnetic field.

ossia, se $L = \int dl$ è la lunghezza del conduttore rettilineo,

$$\boldsymbol{F} = IL\boldsymbol{u}_T \times \mathfrak{B}.$$

Il conduttore è perciò soggetto ad una forza perpendicolare al suo asse e al campo magnetico. Questo è il principio sul quale funzionano i motori elettrici. Se θ è l'angolo tra il conduttore e il campo magnetico, possiamo scrivere per il modulo della forza $\boldsymbol{F}$,

$$F = IL\mathfrak{B} \sin \theta. \tag{15.18}$$

La forza è zero se il conduttore è parallelo al campo ($\theta = 0$) e massima se è perpendicolare ad esso ($\theta = \pi/2$). La direzione della forza si trova applicando la regola della mano destra, come illustrato nella Fig. 15–18.

15.6 *Coppia magnetica su una corrente elettrica*

Possiamo applicare l'Eq. (15.18) per calcolare la coppia dovuta alla forza che un campo magnetico produce su un circuito elettrico. Per semplicità, consideriamo per primo un circuito rettangolare percorso da una corrente I e situato in modo che la normale $\boldsymbol{u}_N$ al suo piano (orientata nel senso di avanzamento di una vite destra fatta ruotare nella stessa direzione della corrente) faccia un angolo θ col campo $\mathfrak{B}$, e due lati del circuito siano perpendicolari al campo (Fig. 15–19). Le forze $\boldsymbol{F}'$ agenti sui lati L' hanno

or, if $L = \int dl$ is the length of the rectilinear conductor,

The conductor is therefore subject to a force perpendicular to itself and to the magnetic field. This is the principle on which electric motors operate. If θ is the angle between the conductor and the magnetic field, we may write for the magnitude of the force $\boldsymbol{F}$,

The force is zero if the conductor is parallel to the field ($\theta = 0$) and maximum if it is perpendicular to it ($\theta = \pi/2$). The direction of the force is found by applying the right-hand rule, as shown in Fig. 15–18.

15.6 *Magnetic Torque on an Electric Current*

We may apply Eq. (15.18) to compute the torque due to the force a magnetic field produces on an electric circuit. For simplicity we consider first a rectangular circuit carrying a current I and placed so that the normal $\boldsymbol{u}_N$ to its plane (oriented in the sense of advance of a right-handed screw rotated in the same direction as the current), makes an angle θ with the field $\mathfrak{B}$, and two sides of the circuit are perpendicular to the field (Fig. 15–19). The forces $\boldsymbol{F}'$ acting on the sides L' have

lo stesso modulo e verso opposto. Esse tendono a deformare il circuito, ma non producono nessun momento. Le forze F sui lati L sono di modulo $F = I\mathfrak{B}L$, e costituiscono una coppia il cui braccio di leva è $L' \sin\theta$. Perciò, esse producono un momento sul circuito il cui modulo è

Ma $LL' = S$, dove S è l'area del circuito. Quindi $\tau = (IS)\,\mathfrak{B} \sin\theta$. La direzione del momento, essendo perpendicolare al piano delle forze, è lungo la linea PQ. Se noi definiamo un vettore

normale al piano del circuito, possiamo scrivere il momento τ come

o, in forma vettoriale,

Fig. 15–20. Relazione tra il momento di dipolo magnetico di una corrente elettrica e la direzione della corrente.

Il risultato (15.21) è matematicamente simile all'Eq. (14.50), che dà il momento su di un dipolo elettrico dovuto ad un campo elettrico esterno. Perciò, la quantità $\boldsymbol{M}$ definita nell'Eq. (15.19), che è l'equivalente a $\boldsymbol{p}$ nell'Eq. (14.49), è chiamata il *momento di dipolo magnetico* della corrente. Notate dall'Eq. (15.19) che la direzione di $\boldsymbol{M}$ è quella di avanzamento di una vite destra fatta ruotare nella stessa direzione della corrente, ossia la direzione data dalla regola della mano destra mostrata nella Fig. 15–19.

Per ottenere l'energia di una corrente in un campo magnetico, noi applichiamo all'inverso il procedimento logico che abbiamo usato nel Paragrafo 14.11 per mettere in relazione le Eq. (14.49) e (14.50) e perciò concludiamo che l'energia potenziale della corrente posta nel campo magnetico $\mathfrak{B}$ è

Sebbene le Eq. (15.21) e (15.22) siano state derivate per una corrente rettangolare con una orientazione particolare in un campo magnetico uniforme, una discussione matematica più laboriosa indica che esse sono di validità generale. Per esempio, supponiamo di avere un *piccolo* circuito di *qualsiasi* forma la cui area sia S (Fig. 15–20). Il momento magnetico di dipolo $\boldsymbol{M}$ del circuito è dato ancora dall'Eq. (15.19), e il momento meccanico e l'energia potenziale quando il circuito è posto in un campo magnetico sono date dalle Equazioni (15.21) e (15.22).

L'unità di momento magnetico, dall'Eq. (15.22), è usualmente espressa come joule/tesla, ossia J T^{-1}. In termini delle unità fondamentali, è $m^2 s^{-1}$ C, in accordo con la definizione nell'Eq. (15.19).

the same magnitude and opposite direction. They tend to deform the circuit, but produce no torque. The forces F on the sides L are of magnitude $F = I\mathfrak{B}L$, and constitute a couple whose lever arm is $L' \sin\theta$. Therefore they produce a torque on the circuit whose magnitude is

$$\tau = (I\mathfrak{B}L)(L' \sin\theta).$$

But $LL' = S$, where S is the area of the circuit. Then $\tau = (IS)\mathfrak{B} \sin\theta$. The direction of the torque, being perpendicular to the plane of the couple, is along the line PQ. If we define a vector

$$\boldsymbol{M} = IS\boldsymbol{u}_N \qquad (15.19)$$

normal to the plane of the circuit, we may write the torque τ as

$$\tau = M\mathfrak{B} \sin\theta, \qquad (15.20)$$

or, in vector form,

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{\mathfrak{B}}. \qquad (15.21)$$

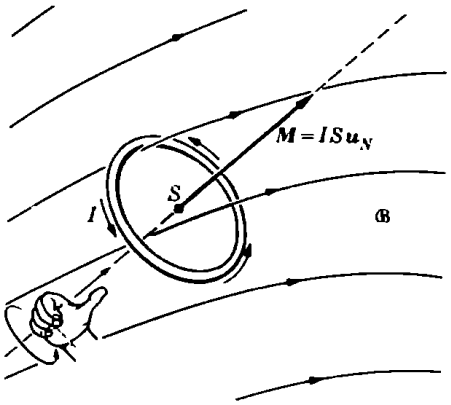


Fig. 15–20. Relation between the magnetic dipole moment of an electric current and the direction of the current.

Result (15.21) is mathematically similar to Eq. (14.50), which gives the torque on an electric dipole due to an external electric field. Therefore the quantity $\boldsymbol{M}$ defined in Eq. (15.19), which is the equivalent to $\boldsymbol{p}$ in Eq. (14.49), is called the *magnetic dipole moment* of the current. Note from Eq. (15.19) that the direction of $\boldsymbol{M}$ is that of the advance of a right-handed screw rotated in the same direction as the current, or the direction given by the right-hand rule shown in Fig. 15–19.

To obtain the energy of a current in a magnetic field, we apply the logic we used in Section 14.11 to relate Eqs. (14.49) and (14.50) in reverse, and therefore conclude that the potential energy of the current placed in the magnetic field $\mathfrak{B}$ is

$$E_p = -M\mathfrak{B} \cos\theta = -\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}}. \qquad (15.22)$$

Although Eqs. (15.21) and (15.22) have been derived for a rectangular current with a special orientation in a uniform magnetic field, a more laborious mathematical discussion indicates that they are of general validity. For example, suppose that we have a *small* circuit of *any* shape whose area is S (Fig. 15–20). The magnetic dipole moment $\boldsymbol{M}$ of the circuit is still given by Eq. (15.19), and the torque and potential energy when the circuit is placed in a magnetic field are given by Eqs. (15.21) and (15.22).

The unit of magnetic moment, from Eq. (15.22), is usually expressed as joules/tesla or J T^{-1}. In terms of the fundamental units, it is $m^2 s^{-1}$ C, in agreement with the definition in Eq. (15.19).

Scale = Scala
Coil = Avvolgimento
Spring = Molla

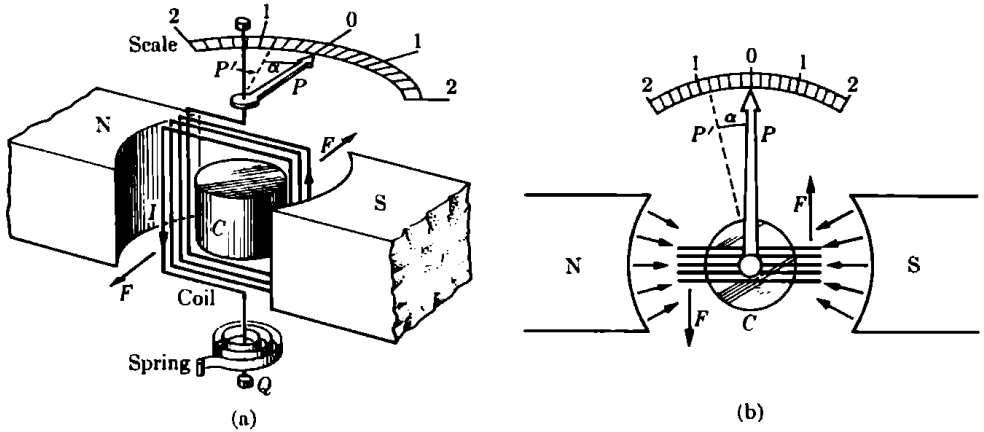


Fig. 15–21. (a) Componenti base di un galvanometro ad avvolgimento mobile. (b) Vista dall'alto del galvanometro illustrato in (a).

Fig. 15–21. (a) Basic components of a moving coil galvanometer. (b) Top view of galvanometer shown in (a).

ESEMPIO 15.5. Discutere strumenti per misurare la corrente quali i *galvanometri*. Uno schema semplice è illustrato nella Fig. 15–21. La corrente da misurarsi passa attraverso un avvolgimento sospeso tra i poli di una calamita. In alcuni casi, l'avvolgimento è avvolto attorno ad un cilindo di ferro C. Il campo magnetico esercita una coppia sull'avvolgimento, ruotandolo di un certo angolo. Determinare una relazione tra questo angolo e la corrente attraverso l'avvolgimento.

Soluzione: Poniamo che S sia l'area dell'avvolgimento. La coppia prodotta dal campo magnetico e data dall'Eq. (15.21) tende a disporre l'avvolgimento perpendicolare al campo, torcendo la molla Q. L'avvolgimento assume una posizione di equilibrio ruotata di un angolo α quando la coppia magnetica è bilanciata dalla coppia elastica $k\alpha$ prodotta dalla molla, dove k è la costante elastica della molla. L'angolo α è indicato da una lancetta fissata all'avvolgimento. Le facce dei poli sono foggiate come indicato nella figura, così che il campo magnetico tra le facce dei poli e il cilindro di ferro C è radiale, come è mostrato nella vista dall'alto nella Fig. 15–21. In questo caso, $\mathfrak{B}$ è sempre nel piano del circuito e θ nell'Eq. (15.20) vale $\pi/2$, così che $\sin\theta = 1$. Allora, la coppia è data da $\tau = IS\mathfrak{B}$, poichè $M = IS$. In equilibrio, quando la coppia dovuta al campo magnetico è bilanciata dalla coppia dovuta alla torsione della molla, $IS\mathfrak{B} = k\alpha$, e perciò $I = k\alpha/S\mathfrak{B}$. Se k, S, e $\mathfrak{B}$ sono note, questa equazione dà il valore della corrente I in funzione dell'angolo α. Di solito, la scala è tarata in modo che il valore di I si possa leggere direttamente in una opportuna unità di misura.

EXAMPLE 15.5. Discuss current measuring devices such as *galvanometers*. A simple design is illustrated in Fig. 15–21. The current to be measured passes through a coil suspended between the poles of a magnet. In some cases, the coil is wrapped around an iron cylinder C. The magnetic field exerts a torque on the coil, rotating it by a certain angle. Establish a relation between this angle and the current through the coil.

Solution: Let S be the area of the coil. The torque produced by the magnetic field and given by Eq. (15.21) tends to place the coil perpendicular to the field, twisting the spring Q. The coil adopts an equilibrium position rotated an angle α when the magnetic torque is balanced by the elastic torque $k\alpha$ produced by the spring, where k is the spring's elastic constant. The angle α is indicated by a pointer attached to the coil. The pole faces are shaped as indicated in the figure, so that the magnetic field between the pole faces and the iron cylinder C is radial, as shown in the top view in Fig. 15–21. In this case $\mathfrak{B}$ is always in the plane of the circuit and θ in Eq. (15.20) is $\pi/2$, so that $\sin\theta = 1$. Then the torque is given by $\tau = IS\mathfrak{B}$, since $M = IS$. At equilibrium, when the torque due to the magnetic field is balanced by the torque due to the twisting of the spring, $IS\mathfrak{B} = k\alpha$, and therefore $I = k\alpha/S\mathfrak{B}$. If k, S, and $\mathfrak{B}$ are known, this equation gives the value of the current I in terms of the angle α. Usually the scale is calibrated so that the value of I can be read directly in some convenient units.

ESEMPIO 15.6. Discutere il momento magnetico corrispondente al moto orbitale di una particella carica, quale un elettrone in orbita intorno a un nucleo atomico.

Soluzione: Consideriamo una carica q descrivente una orbita chiusa. Per semplicità, possiamo considerare che l'orbita sia circolare. Se $\nu = \omega/2\pi$ è la frequenza del suo moto, allora la corrente in ogni punto del suo percorso è $I = q\nu$, poichè ν dà il numero delle volte per secondo in cui la carica q passa nello stesso punto dell'orbita, e perciò $q\nu$ dà la carica totale che passa per quel punto per unità di tempo. La corrente è o nella stessa direzione della velocità o nella direzione opposta, a seconda che q sia positiva o nega-

EXAMPLE 15.6. Discuss the magnetic moment corresponding to the orbital motion of a charged particle, such as an electron orbiting an atomic nucleus.

Solution: Let us consider a charge q describing a closed orbit. For simplicity we may consider that the orbit is circular. If $\nu = \omega/2\pi$ is the frequency of its motion, then the current at any point of its path is $I = q\nu$, since ν gives the number of times per second that the charge q passes the same point of the orbit, and therefore $q\nu$ gives the total charge that passes through the point per unit time. The current is either in the same direction as the velocity or in the opposite direction, depending on whether q is positive or nega-

tiva. Quindi, applicando l'Eq. (15.19), noi troviamo che il momento magnetico della carica in orbita è

$$M = (qv)(\pi r^2) = \left(\frac{q\omega}{2\pi}\right)(\pi r^2) = \tfrac{1}{2}q\omega r^2. \tag{15.23}$$

La sua direzione, secondo la regola precedentemente data, è come indicato nella Fig. 15—22, e il verso dipende dal segno di q. D'altra parte, se m è la massa della particella, il suo momento della quantità di moto orbitale L, secondo l'Eq. (7.33), è

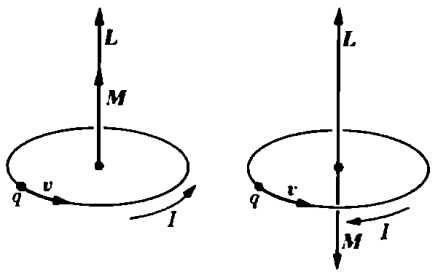
$$L = mvr = m\omega r^2. \tag{15.24}$$

Confrontando le Equazioni (15.23) e (15.24) troviamo che

$$M = \frac{q}{2m}L. \tag{15.25}$$

Ovvero, in forma vettoriale,

$$\boldsymbol{M} = \frac{q}{2m}\boldsymbol{L}. \tag{15.26}$$



q positiva q negativa

Fig. 15—22. Relazione vettoriale tra il momento di dipolo magnetico ed il momento della quantità di moto di una carica in orbita.

q positive q negative

Fig. 15–22. Vector relation between the magnetic dipole moment and the angular momentum of an orbiting charge.

Per cui, $\boldsymbol{M}$ e $\boldsymbol{L}$ sono diretti o nello stesso senso o in sensi opposti, a seconda che la carica q sia positiva o negativa. Per un elettrone, $q = -e$ e $m = m_e$, col risultato di

$$\boldsymbol{M}_e = -\frac{e}{2m_e}\boldsymbol{L}. \tag{15.27}$$

Per un protone, $q = +e$ e $m = m_p$, e così otteniamo

$$\boldsymbol{M}_p = \frac{e}{2m_p}\boldsymbol{L}. \tag{15.28}$$

Se noi supponiamo che la carica elettrica sia in rotazione attorno ad un suo diametro nello stesso modo in cui la terra gira attorno al suo asse NS, essa ha in aggiunta al suo momento della quantità di moto orbitale $\boldsymbol{L}$ un certo momento della quantità di moto interno $\boldsymbol{S}$, chiamato *spin*. Associato con lo spin $\boldsymbol{S}$, ci deve essere un momento magnetico, poichè ogni elemento di volume della carica ruotante si comporta nello stesso modo della carica q nella Fig. 15—22. Tuttavia, la relazione tra il momento magnetico e lo spin non è identica alla relazione dell'Eq. (15.26), perchè il coefficiente per il quale si deve moltiplicare il momento angolare di spin $\boldsymbol{S}$ per ottenere il corrispondente momento magnetico dipende dalla struttura interna della particella. È utile scrivere il momento magnetico dovuto allo spin nella forma

$$\boldsymbol{M}_S = \gamma\frac{e}{2m}\boldsymbol{S}, \tag{15.29}$$

dove il coefficiente γ, chiamato *rapporto giromagnetico*, dipende dalla struttura della particella e dal segno della sua carica. Combinando le Equazioni (15.26) e (15.29), otteniamo il momento magnetico totale di una particella avente carica $\pm e$, in moto orbitale e dotata di spin, come

$$\boldsymbol{M} = \frac{e}{2m}(\pm\boldsymbol{L} + \gamma\boldsymbol{S}). \tag{15.30}$$

tive. Then, applying Eq. (15.19), we find that the magnetic moment of the orbiting charge is

Its direction, according to the rule previously given, is as indicated in Fig. 15–22, depending on the sign of q. On the other hand, if m is the mass of the particle, its orbital angular momentum L, according to Eq. (7.33), is

Comparing Eqs. (15.23) and (15.24), we find that

Or, in vector form,

Hence $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{L}$ are either in the same or in opposite directions, depending on whether the charge q is positive or negative. For an electron $q = -e$ and $m = m_e$, resulting in

For a proton $q = +e$ and $m = m_p$, and thus we obtain

If we assume that the electric charge is rotating about a diameter in the same way that the earth spins around its NS axis, it has in addition to its orbital angular momentum $\boldsymbol{L}$ some internal angular momentum $\boldsymbol{S}$, called *spin*. Associated with the spin $\boldsymbol{S}$ there must be a magnetic moment, since each volume element of the rotating charge behaves in the same way as the charge q in Fig. 15–22. However, the relation between the magnetic moment and the spin is not identical to the relation of Eq. (15.26), because the coefficient by which one has to multiply the spin angular momentum $\boldsymbol{S}$ to obtain the corresponding magnetic moment depends on the internal structure of the particle. It is useful to write the magnetic moment due to the spin in the form

where the coefficient γ, called the *gyromagnetic ratio*, depends on the structure of the particle and the sign of its charge. Combining Eqs. (15.26) and (15.29), we obtain the total magnetic moment of an orbiting and spinning particle carrying a charge $\pm e$ as

Il segno più (meno) prima di L corrisponde ad una particella caricata positivamente (negativamente). Sebbene il neutrone non abbia nessuna carica elettrica netta e perciò nessun momento magnetico *orbitale*, come dato dalla (15.26), esso ha un momento magnetico di *spin*, che è opposto allo spin S. Nella tabella seguente, è data la quantità γ per l'elettrone, il protone ed il neutrone

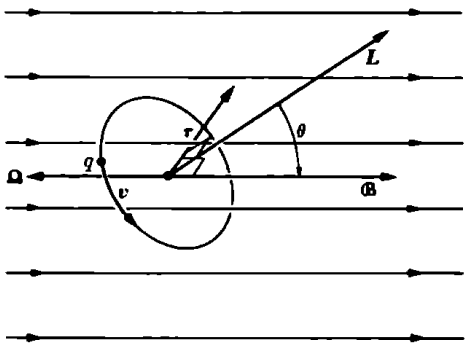
Particella	γ
Elettrone	−2.0024
Protone	5.5851
Neutrone	−3.8256

Il momento magnetico totale del neutrone non è dato dall'Eq. (15.30), ma dall'Eq. (15.29). Il valore non nullo di M_S fa pensare a qualche struttura interna complessa del neutrone. Similmente, il fatto che γ per il protone è differente da γ per l'elettrone indica che la struttura interna del protone è differente da quella dell'elettrone.

The plus (minus) sign before L corresponds to a positively (negatively) charged particle. Although the neutron has no net electric charge and therefore no *orbital* magnetic moment, as given by (15.26), it has a *spin* magnetic moment, which is opposite to the spin S. The quantity γ for the electron, the proton and the neutron is given in the following table.

Particle	γ
Electron	−2.0024
Proton	5.5851
Neutron	−3.8256

The total magnetic moment of the neutron is not given by Eq. (15.30), but by Eq. (15.29). The nonvanishing value of M_S is suggestive of some complex internal structure of the neutron. Similarly, the fact that γ for the proton is different from γ for the electron indicates that the internal structure of the proton is different from that of the electron.



(a) q positiva

(b) q negativa

Fig. 15–23. La coppia magnetica τ su di una particella carica in moto è perpendicolare al momento della quantità di moto L della particella ed al campo magnetico $\mathcal{B}$.

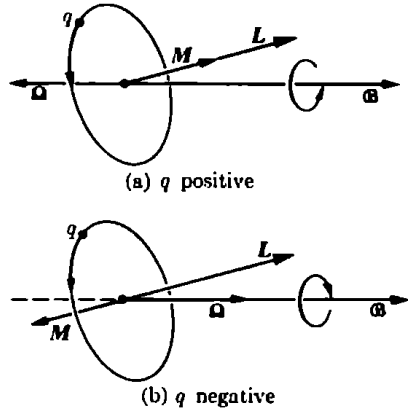


Fig. 15–24. Moto di precessione del momento della quantità di moto di una particella carica attorno al campo magnetico.

Fig. 15–23. The magnetic torque τ on a moving charged particle is perpendicular to the angular momentum L of the particle and the magnetic field $\mathcal{B}$.

Fig. 15–24. Precessional motion of the angular momentum of a charged particle around the magnetic field.

ESEMPIO 15.7. Discutere la coppia e l'energia per una particella carica che si muove in una regione dove c'è un campo magnetico.

Soluzione: Supponiamo che la particella in orbita del precedente esempio sia posta in un campo magnetico uniforme (Fig. 15–23). Usando le Equazioni (15.21) e (15.26), troviamo che la coppia esercitata sulla particella è

in una direzione perpendicolare a L e $\mathcal{B}$. Questa coppia tende a cambiare il momento angolare orbitale L della particella secondo l'Eq. (7.38), $dL/dt = \tau$. Definendo $\Omega = -(q/2m)\mathcal{B}$, che è metà della pulsazione ciclotronica data nell'Eq. (15.7), noi abbiamo, per

EXAMPLE 15.7. Discuss the torque and the energy of a charged particle moving in a region where there is a magnetic field.

Solution: Suppose that the orbiting particle of the previous example is placed in a uniform magnetic field (Fig. 15–23). Using Eqs. (15.21) and (15.26), we find that the torque exerted on the particle is

$$\tau = \frac{q}{2m} L \times \mathcal{B} = -\frac{q}{2m} \mathcal{B} \times L \tag{15.31}$$

in a direction perpendicular to L and $\mathcal{B}$. This torque tends to change the orbital angular momentum L of the particle according to Eq. (7.38), $dL/dt = \tau$. Defining $\Omega = -(q/2m)\mathcal{B}$, which is one-half the cyclotron frequency given in Eq. (15.7), we have, for

la coppia data nell'Eq. (15.31),

Questa equazione è simile all'Eq (10.29) per il moto giroscopico. Perciò, la stessa specie di precessione discussa allora è presente in questo caso. Nel Capitolo 10, la precessione era dovuta alla coppia prodotta dalla interazione gravitazionale. La precessione di $\boldsymbol{L}$ attorno a $\boldsymbol{\mathfrak{G}}$ produce una rotazione dell'orbita della particella. Nella Fig. 15–24, sono state indicate la direzione di Ω e il senso di precessione per una carica positiva ed una negativa.

L'espressione (15.32) è valida solo per una particella senza spin. Se la particella ha spin, l'analisi è leggermente più complicata. Perciò qui la ometteremo.

Possiamo ottenere l'energia di una particella carica in orbita in un campo magnetico combinando le equazioni (15.22) e (15.26), risultanti in

Se la particella ha spin, usiamo l'Eq. (15.30) per il momento magnetico e l'espressione diventa

Questi risultati sono molto importanti come aiuto per comprendere il comportamento di un atomo od una molecola in un campo magnetico esterno, un soggetto interessante sia dal punto di vista teorico che da quello pratico. Per esempio, quando un atomo è posto in un campo magnetico esterno, il moto degli elettroni viene disturbato e l'energia viene cambiata come indicato dall'Eq. (15.34). Quando questo valore teorico di E_p è confrontato con i risultati sperimentali, si trova che le componenti secondo Z dei momenti della quantità di moto orbitale e di spin sono quantizzati. Cioè, L_z e S_z possono assumere solo certi valori, che sono espressi nella forma

dove la costante $\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34}$ J s. Questa costante è stata introdotta nel Paragrafo 14.9, quando stavamo discutendo il moto orbitale dell'elettrone, e h e la costante di Planck. I valori possibili di m_l sono 0, ±1, ±2, ±3, . . ., mentre m_s può assumere solo due valori, $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$. Il numero m_l è chiamato *numero quantico magnetico* dell'elettrone, mentre m_s è il *numero quantico di spin*. Un risultato simile si ottiene per protoni e neutroni. Per questa ragione si dice che *l'elettrone, il protone, e il neutrone hanno spin* $\frac{1}{2}$.

D'altra parte, *il momento della quantità di moto orbitale L è pure quantizzato*, e può assumere solo i valori dati da

dove $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ è un numero intero positivo ed è chiamato *numero quantico azimutale o angolare*. Poichè L_z non può essere più grande di L, concludiamo che i valori di m_l non possono superare l; cioè,

Quindi, per $l = 0$, è possibile solo $m_l = 0$. Per $l = 1$, possiamo avere $m_l = 0, \pm1$, e così via. D'altra parte, poichè il numero quantico di spin ha solo un valore, vi è un solo valore per il momento della quantità di moto di spin $S = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)} = (\sqrt{3}/2)\hbar$.

the torque given in Eq. (15.31),

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}. \tag{15.32}$$

This equation is similar to Eq. (10.29) for gyroscopic motion. Therefore the same kind of precession discussed there is present in this case. In Chapter 10 the precession was due to the torque produced by the gravitational interaction. Here it is due to the torque produced by the magnetic interaction. The precession of $\boldsymbol{L}$ around $\boldsymbol{\mathfrak{G}}$ produces a rotation of the orbit of the particle. In Fig. 15–24 the direction of $\boldsymbol{\Omega}$ and the sense of precession for a positive and a negative charge have been indicated.

Expression (15.32) is valid only for a particle without spin. If the particle has spin, the analysis is slightly more complicated. Therefore we shall omit it here.

We can obtain the energy of an orbiting charged particle in a magnetic field by combining Eqs. (15.22) and (15.26), resulting in

$$E_p = -\frac{q}{2m}\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{G}} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{L}. \tag{15.33}$$

If the particle has spin, we use Eq. (15.30) for the magnetic moment, and the expression becomes

$$E_p = -\frac{e}{2m}(\pm\boldsymbol{L} + \gamma\boldsymbol{S}) \cdot \boldsymbol{\mathfrak{G}}. \tag{15.34}$$

These results are very important as aids to understanding the behavior of an atom or a molecule in an external magnetic field, a subject of interest from both the theoretical and practical points of view. For example, when an atom is placed in an external magnetic field, the motion of the electrons is disturbed and the energy is changed according to Eq. (15.34). When this theoretical value of E_p is compared with the experimental results, it is found that the Z-components of the orbital and spin angular momenta are quantized. That is, L_z and S_z can attain only certain values, which are expressed in the form

$$L_z = m_l\hbar, \qquad S_z = m_s\hbar,$$

where the constant $\hbar = h/2\pi = 1.05 \times 10^{-34}$ J s. This constant was introduced in Section 14.9, when we were discussing the orbital motion of the electron, and h is Planck's constant. The possible values of m_l are 0, ±1, ±2, ±3, . . . , while m_s can attain only two values, $+\frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2}$. The number m_l is called the *magnetic quantum number* of the electron, while m_s is the *spin quantum number*. A similar result is obtained for protons and neutrons. For that reason it is said that *the electron, the proton, and the neutron have spin* $\frac{1}{2}$.

On the other hand, *the orbital angular momentum L is also quantized*, and can attain only the values given by

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar,$$

where $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ is a positive integer and is called the *angular momentum quantum number*. Since L_z cannot be larger than L, we conclude that the values of m_l cannot exceed l; that is,

$$m_l = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm(l-1), \pm l.$$

Therefore, for $l = 0$, only $m_l = 0$ is possible. For $l = 1$, we may have $m_l = 0, \pm1$, and so on. On the other hand, since the spin quantum number has only one value, there is only one value for the spin angular momentum $S = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)}\,\hbar = (\sqrt{3}/2)\hbar$.

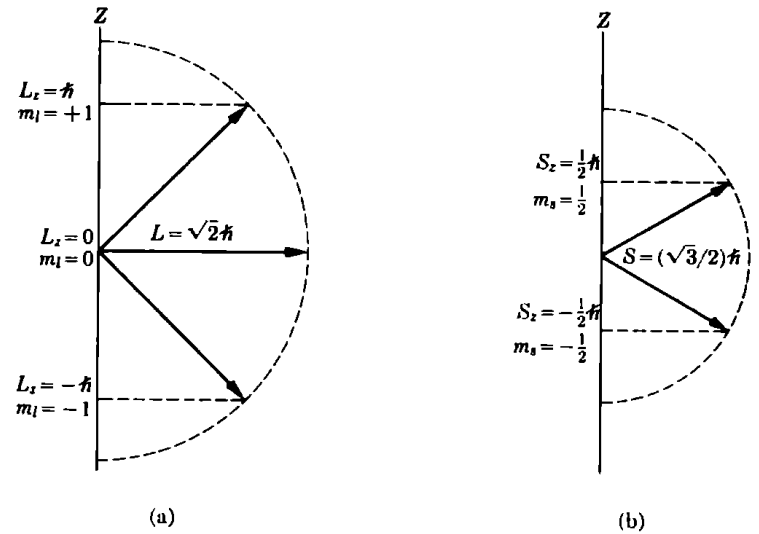


Fig. 15–25. Possibili orientazioni di (a) il momento della quantità di moto corrispondente a $l = 1$, $L = \sqrt{2}\,\hbar$, e (b) lo spin $s = \frac{1}{2}$, $S = (\sqrt{3}/2)\hbar$.

Fig. 15–25. Possible orientations of (a) the angular momentum corresponding to $l = 1$, $L = \sqrt{2}\,\hbar$, and (b) the spin $s = \frac{1}{2}$, $S = (\sqrt{3}/2)\hbar$.

Il fatto che per un dato valore di L solo certi valori di L_z sono possibili implica che L può assumere solo certe direzioni nello spazio (Fig. 15–25a). Questo fatto è stato denominato quantizzazione spaziale nel Paragrafo 14.7. Nel caso dello spin, poichè m_s ha solo due valori possibili ($\pm\frac{1}{2}$), noi concludiamo che S può assumere nello spazio solo due direzioni relative all'asse Z, solitamente chiamate su (↑) e giù (↓). L'orientazione permessa dello spin è mostrata nella Fig. 15–25b.

The fact that for a given value of L only certain values of L_z are possible implies that L can attain only certain directions in space (Fig. 15–25a). This was designated as space quantization in Section 14.7. In the case of the spin, since m_s has only two possible values ($\pm\frac{1}{2}$) we conclude that S can attain only two directions in space relative to the Z-axis, usually called up (↑) and down (↓). The allowed orientation of the spin is shown in Fig. 15–25b.

15.7 *Campo magnetico prodotto da una corrente chiusa*

Sino ad ora abbiamo mostrato che riconosciamo la presenza di un campo magnetico dalla forza che esso produce su una carica in moto. Ed abbiamo identificato alcune sostanze che, nel loro stato naturale, producono un campo magnetico. Esaminiamo ora più in particolare il modo in cui un campo magnetico viene prodotto. Nel 1820, il fisico danese Hans C. Oersted (1777–1851), notando la deviazione dell'ago di una bussola posta vicino ad un conduttore attraverso cui passava corrente, fu il primo a osservare che *una corrente elettrica produce un campo magnetico* nello spazio che la circonda.

Dopo molti esperimenti fatti durante un periodo di anni da parecchi fisici usando circuiti di diverse forme, è stata ottenuta una espressione generale per calcolare il campo magnetico prodotto da una corrente *chiusa* di forma qualsiasi. Questa espressione, chiamata *legge di Ampère-Laplace*, è

dove il significato di tutti i simboli è indicato nella Fig. 15–26, e l'integrale è

15.7 *Magnetic Field Produced by a Closed Current*

So far we have indicated that we recognize the presence of a magnetic field by the force it produces on a moving charge. And we have identified some substances that, in their natural state, produce a magnetic field. Let us now examine in greater detail the way in which a magnetic field is produced. In 1820 the Danish physicist Hans C. Oersted (1777–1851), by noting the deflection of a compass needle placed near a conductor through which a current passed, was the first to observe that *an electric current produces a magnetic field* in the space that surrounds it.

After many experiments made over a period of years by several physicists using circuits of different shapes, a general expression has been obtained for calculating the magnetic field produced by a *closed* current of any shape. This expression, called the *Ampère-Laplace law*, is

$$\mathfrak{B} = K_m I \oint \frac{\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r}{r^2}\, dl, \tag{15.35}$$

where the meaning of all symbols is indicated in Fig. 15–26, and the integral is

esteso all'intero circuito chiuso (ecco perchè si usa il simbolo $\oint$). Qui K_m è una costante che dipende dalle unità scelte. Nel sistema MKSC, è stato stabilito (vedi la nota dopo il Paragrafo 15.9) che $K_m = 10^{-7}$ Tm/A o m kg C^{-2}. [Dobbiamo notare che l'integrale nell'Eq. (15.35) è espresso in m^{-1} quando r e l sono dati in metri.] Perciò

È consuetudine scrivere $K_m = \mu_0/4\pi$, dove μ_0 è una nuova costante chiamata la *permeabilità magnetica del vuoto*. Così l'Eq. (15.35) per la legge di Ampère-Laplace diventa

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r}{r^2} dl, \tag{15.37}$$

e nel sistema di unità MKSC

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ m kg C}^{-2} \\ &= 1.3566 \times 10^{-6} \text{ m kg C}^{-2}.\end{aligned} \tag{15.38}$$

Fig. 15–26. Campo magnetico prodotto da una corrente elettrica in un punto P.

Dato che una corrente elettrica è semplicemente un flusso di cariche elettriche in moto nella stessa direzione, giungiamo all'importante conclusione che

> *il campo magnetico, e pertanto l'interazione magnetica, è prodotto da cariche elettriche in moto.*

Come illustrazione dell'uso dell'Eq. (15.37), noi la applicheremo al calcolo del campo magnetico prodotto da correnti di geometrie semplici.

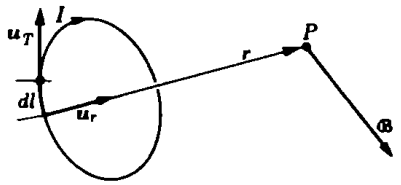
15.8 *Campo magnetico di una corrente rettilinea*

Consideriamo una corrente rettilinea molto lunga e sottile, come nella Fig. 15–27. Per ogni punto P ed ogni elemento dl della corrente, il vettore $\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r$ è perpendicolare al piano determinato da P e dalla corrente, e perciò la sua direzione è quella del versore $\boldsymbol{u}_\theta$. Il campo magnetico in P, prodotto da dl, è quindi tangente al cerchio di raggio R che passa attraverso P, ha il centro sulla corrente ed è in un piano perpendicolare alla corrente. Perciò, quando facciamo l'integrazione nell'Eq. (15.37), i contributi di tutti i termini nell'integrale hanno la stessa direzione $\boldsymbol{u}_\theta$ e il campo magnetico risultante $\mathfrak{B}$ è pure tangente al cerchio. Così è necessario soltanto trovare il modulo di $\mathfrak{B}$. Il modulo di $\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r$ è sin θ, poichè $\boldsymbol{u}_T$ e $\boldsymbol{u}_r$ sono vettori unitari. Quindi, per una corrente rettilinea, noi possiamo scrivere l'Eq. (15.37) in modulo come

extended along the entire closed circuit (this is why the symbol $\oint$ is used). Here K_m is a constant depending on the units chosen. In the MKSC system it has been determined (see the Note after Section 15.9) that $K_m = 10^{-7}$ T m/A or m kg C^{-2}. [We must note that the integral in Eq. (15.35) is expressed in m^{-1} when r and l are given in meters.] Therefore

$$\mathfrak{B} = 10^{-7} I \oint \frac{\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r}{r^2} dl. \tag{15.36}$$

It is customary to write $K_m = \mu_0/4\pi$, where μ_0 is a new constant called the *magnetic permeability of vacuum*. Thus Eq. (15.35) for the Ampère-Laplace law becomes



and in the MKSC system of units

Fig. 15–26. Magnetic field produced by an electric current at a point P.

Since an electric current is simply a stream of electric charges moving in the same direction, we come to the important conclusion that

> *the magnetic field, and accordingly the magnetic interaction, is produced by moving electric charges.*

As an illustration of the use of Eq. (15.37), we shall apply it to the computation of the magnetic field produced by currents of simple geometries.

15.8 *Magnetic Field of a Rectilinear Current*

Let us consider a very long and thin rectilinear current, as in Fig. 15–27. For any point P and any element dl of the current, the vector $\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r$ is perpendicular to the plane determined by P and the current, and therefore its direction is that of the unit vector $\boldsymbol{u}_\theta$. The magnetic field at P, produced by dl, is then tangent to the circle of radius R that passes through P, is centered on the current, and is in a plane perpendicular to the current. Therefore, when we perform the integration in Eq. (15.37), the contributions from all terms in the integral have the same direction $\boldsymbol{u}_\theta$, and the resultant magnetic field $\mathfrak{B}$ is also tangent to the circle. Thus it is only necessary to find the magnitude of $\mathfrak{B}$. The magnitude of $\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r$ is sin θ, since $\boldsymbol{u}_T$ and $\boldsymbol{u}_r$ are unit vectors. Therefore, for a rectilinear current, we may write Eq. (15.37) in magnitude as

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\theta}{r^2} dl. \tag{15.39}$$

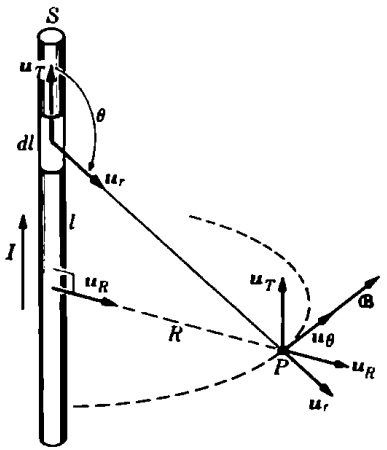


Fig. 15–27. Campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea nel punto P.

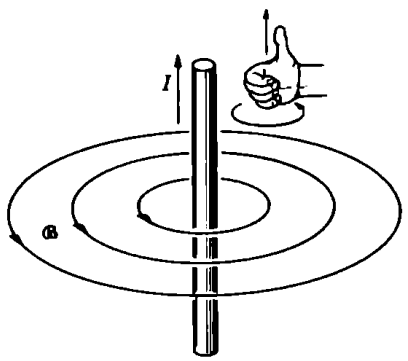


Fig. 15–28. Linee di forza magnetiche attorno ad una corrente rettilinea.

Dalla figura possiamo vedere che $r = R \csc \theta$ e $l = -R \cot \theta$, così che $dl = R \csc^2 \theta \, d\theta$. Sostituendo nell'Eq. (15.39), si ottiene

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta}{R^2 \csc^2 \theta} (R \csc^2 \theta \, d\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta,$$

dove $l = -\infty$ corrisponde a $\theta = 0$ e $l = +\infty$ a $\theta = \pi$. Quindi

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \tag{15.40}$$

Ossia, in forma vettoriale,

$$\boldsymbol{\mathfrak{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{u}_\theta. \tag{15.41}$$

Il campo magnetico è inversamente proporzionale alla distanza R, e le linee di forza sono cerchi concentrici con la corrente e perpendicolari ad esso, come illustrato nella Fig. 15–28. La regola della mano destra per determinare la direzione del campo magnetico relativa alla direzione della corrente è pure indicata nella figura. Il risultato (15.41) è chiamato *formula di Biot-Savart*.

Nel caso di una corrente rettilinea che fluisce lungo un cavo, osserviamo un campo magnetico $\mathfrak{B}$, ma nessun campo elettrico $\mathcal{E}$. Questo avviene perchè, oltre agli elettroni in moto che producono il campo magnetico, vi sono gli ioni positivi fissi del metallo, che non contribuiscono al campo magnetico perchè sono a riposo relativamente all'osservatore, ma producono un campo elettrico eguale ed opposto a quello degli elettroni. Pertanto il campo elettrico netto è zero. Nel caso però di ioni in moto lungo, l'asse di un acceleratore lineare, abbiamo un campo magnetico ed un campo elettrico. Il campo

Fig. 15–27. Magnetic field produced by a rectilinear current at point P.

Fig. 15–28. Magnetic lines of force about a rectilinear current.

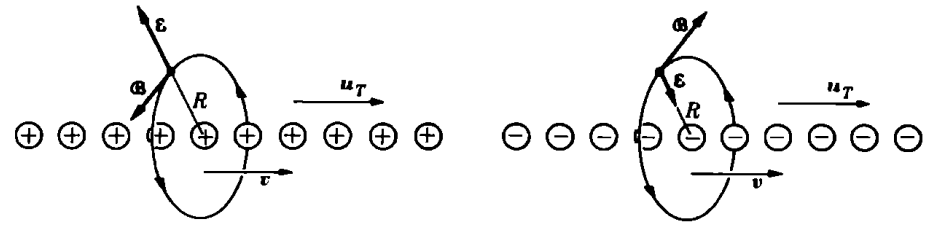
From the figure we can see that $r = R \csc \theta$ and $l = -R \cot \theta$, so that $dl = R \csc^2 \theta \, d\theta$. Substitution in Eq. (15.39) yields

where $l = -\infty$ corresponds to $\theta = 0$ and $l = +\infty$ to $\theta = \pi$. Then

Or, in vector form,

The magnetic field is inversely proportional to the distance R, and the lines of force are circles concentric with the current and perpendicular to it, as shown in Fig. 15–28. The right-hand rule for determining the direction of the magnetic field relative to the direction of the current is also indicated in the figure. Result (15.41) is called the *Biot-Savart formula*.

In the case of a rectilinear current flowing along a wire, we observe the magnetic field $\mathfrak{B}$ but no electric field $\mathcal{E}$. This is because, in addition to the moving electrons which produce the magnetic field, there are the fixed positive ions of the metal, which do not contribute to the magnetic field because they are at rest relative to the observer but produce an electric field equal and opposite to that of the electrons. Therefore the net electric field is zero. However, for ions moving along the axis of a linear accelerator, we have a magnetic field and an electric field. The electric



(a) q positiva (b) q negativa

Fig. 15–29. Relazione tra i campi elettrico e magnetico prodotti da una corrente di ioni positivi (negativi) in moto in fila rettilinea.

elettrico corrisponde al valore dato nell'Esempio 14.7 per il campo elettrico di un filamento carico, $\mathcal{E} = \lambda \boldsymbol{u}_r/2\pi\epsilon_0 R$ (Fig. 15–29). Quindi, confrontando questo valore con l'Eq. (15.41), vediamo che i due campi sono legati dalla relazione

15.9 Forze tra correnti

Applichiamo ora l'Eq. (15.41) combinata con l'Eq. (15.16) per ottenere l'interazione tra due correnti elettriche. Per semplicità, consideriamo prima due correnti parallele I e I' (Fig. 15–30), nello stesso verso e separate dalla distanza R. Il campo magnetico $\mathcal{B}$ dovuto ad I in ogni punto di I' è dato dall'Eq. (15.41), ed ha la direzione indicata. La forza $\boldsymbol{F}'$ su I', usando l'Eq. (15.17), sarà

Ora $\boldsymbol{u}'_T \times \mathcal{B} = -\boldsymbol{u}_R \mathcal{B}$, dove $\boldsymbol{u}_R$ è definito come il versore da I ad I'.

Fig. 15–30. Interazione magnetica tra due correnti rettilinee.

(a) q positive (b) q negative

Fig. 15–29. Relation between the electric and magnetic fields produced by a stream of positive (negative) ions moving in a straight line.

field corresponds to the value given in Example 14.7 for the electric field of a charged filament, $\mathcal{E} = \lambda \boldsymbol{u}_r/2\pi\epsilon_0 R$ (Fig. 15–29). Therefore, comparing this value with Eq. (15.41), we see that the two fields are related by

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 I}{\lambda} \boldsymbol{u}_T \times \mathcal{E}. \tag{15.42}$$

15.9 Forces Between Currents

Let us now apply Eq. (15.41) combined with Eq. (15.16) to obtain the interaction between two electric currents. For simplicity, we first consider two parallel currents I and I' (Fig. 15–30), in the same direction and separated by the distance R. The magnetic field $\mathcal{B}$ due to I at any point of I' is given by Eq. (15.41), and has the direction indicated. The force $\boldsymbol{F}'$ on I', using Eq. (15.17), will be

$$\boldsymbol{F}' = I' \int \boldsymbol{u}'_T \times \mathcal{B}\, dl'.$$

Now $\boldsymbol{u}'_T \times \mathcal{B} = -\boldsymbol{u}_R \mathcal{B}$, where $\boldsymbol{u}_R$ is defined as the unit vector from I to I'.

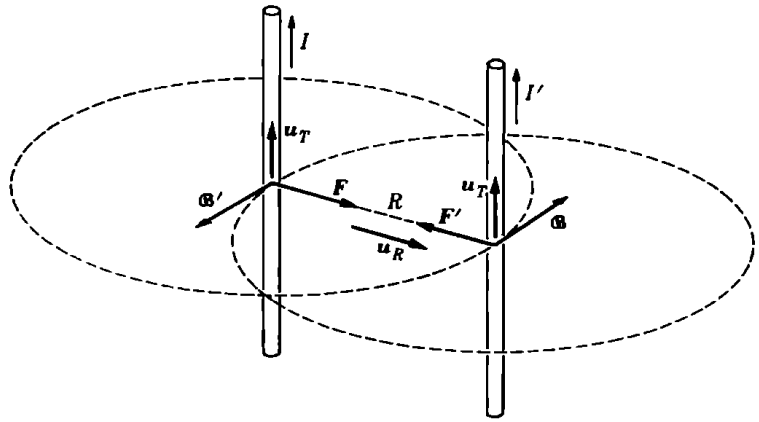


Fig. 15–30. Magnetic interaction between two rectilinear currents.

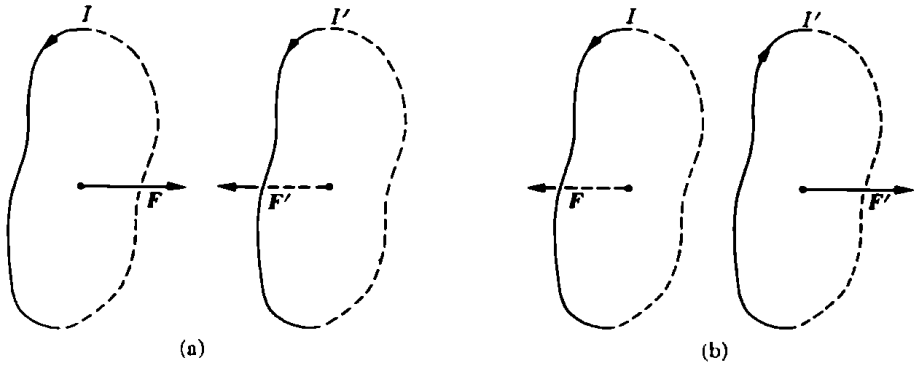


Fig. 15–31. Attrazione e repulsione tra due correnti.

Fig. 15–31. Attraction and repulsion between two currents.

Quindi, usando l'Eq. (15.41) per ℬ, abbiamo

Therefore, using Eq. (15.41) for ℬ, we have

$$\boldsymbol{F}' = I' \int \left(-\boldsymbol{u}_R \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\right) dl' = -\boldsymbol{u}_R \left(\frac{\mu_0 I I'}{2\pi R}\right) \int dl'$$

$$= -\boldsymbol{u}_R \frac{\mu_0 I I'}{2\pi R} L'. \tag{15.43}$$

Questo risultato indica che la corrente I *attira* la corrente I'. Un analogo calcolo della forza su I prodotta da I' dà lo stesso risultato, ma con un segno più, così che essa ha la stessa direzione di $\boldsymbol{u}_R$, e di nuovo rappresenta una attrazione. Quindi, *due correnti parallele nello stesso verso si attraggono l'una l'altra con eguale forza* come risultato della loro interazione magnetica. Lasciamo allo studente il verificare che *se le correnti parallele sono in versi opposti, esse si respingono l'una l'altra.*

This result indicates that current I *attracts* current I'. A similar calculation of the force on I produced by I' gives the same result, but with a plus sign, so that it has the same direction as $\boldsymbol{u}_R$, and again represents an attraction. Therefore *two parallel currents in the same direction attract each other with equal force* as a result of their magnetic interaction. We leave it to the student to verify that *if parallel currents are in opposite directions, they repel each other.*

Questo risultato può essere esteso a correnti di qualsiasi configurazione. Lo studente può verificare che le correnti nella Fig. 15–31(a) si attraggono l'una l'altra, ma quelle nella Fig. 15–31(b) si respingono l'una l'altra. Queste interazioni tra correnti sono di grande importanza pratica per i motori elettrici ed altre applicazioni di ingegneria.

This result can be extended to currents of any configuration. The student may verify that the currents in Fig. 15–31(a) attract each other, but those in Fig. 15–31(b) repel each other. These interactions among currents are of great practical importance for electric motors and other engineering applications.

Nota sulle unità. Nel Paragrafo 2.3, quando abbiamo discusso le unità fondamentali, abbiamo indicato come sistema di unità approvato internazionalmente il sistema MKSA e non il sistema MKSC, sebbene in pratica non vi sia differenza tra i due. Abbiamo due leggi dalle quali scegliere come associare la quarta unità fondamentale a quelle di lunghezza, massa, e tempo. Esse sono: la legge di Coulomb per l'interazione elettrostatica tra due cariche, data dall'Eq. (14.2),

Note on Units. In Section 2.3 when we discussed the fundamental units, we indicated that the system of units approved internationally is the MKSA system and not the MKSC system, although in practice there is no difference between the two. We have two laws from which to choose the incorporation of the fourth basic unit to those of length, mass, and time. They are: Coulomb's law for the electrostatic interaction between two charges, given by Eq. (14.2),

$$F = K_e \frac{qq'}{r^2},$$

e la legge di interazione tra due correnti rettilinee, data dall'Eq. (15.43) con $\mu_0/4\pi$ sostituita dalla costante magnetica K_m,

and the law of interaction between two rectilinear currents, given by Eq. (15.43) with $\mu_0/4\pi$ replaced by the magnetic constant K_m,

$$F' = K_m \frac{2II'}{R} L'.$$

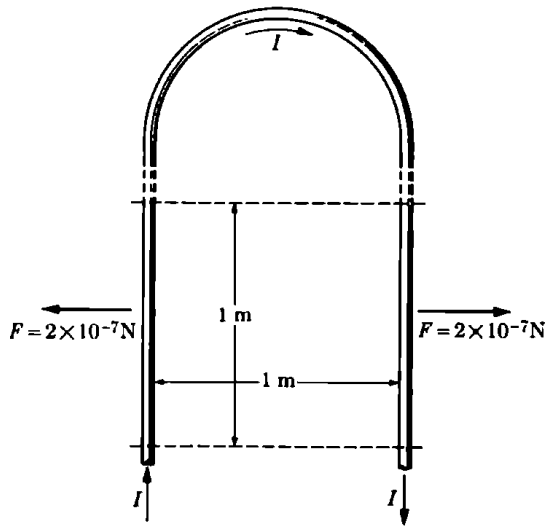


Fig. 15–32. Dispositivo per definire sperimentalmente l'ampère.

Fig. 15–33. Una bilancia di corrente per misurare una corrente in termini della forza magnetica tra due conduttori paralleli.

Fig. 15–32. Apparatus for defining the ampere experimentally.

Fig. 15–33. A current balance for measuring a current in terms of the magnetic force between two parallel conductors.

Sebbene noi abbiamo due costanti, K_e e K_m, corrispondenti alle forze elettrica e magnetica, vi è solo un grado di libertà perchè vi è solo una nuova quantità fisica, la carica elettrica, essendo la corrente legata ad essa dall'equazione *corrente = carica/tempo*. Quindi noi possiamo assegnare un valore arbitrario soltanto ad una delle costanti. L'Undicesima Conferenza Generale sui Pesi e Misure, tenuta nel 1960, decise di adottare $K_m = 10^{-7}$, e scelse l'ampère come quarta unità fondamentale. Così l'ampère è definito come quella corrente che, circolando in due conduttori paralleli separati da una distanza di un metro risulta in una forza su ciascun conduttore di 2×10^{-7} N per metro di lunghezza di ciascun conduttore (Fig. 15–32). Una volta che l'ampère è così definito, il coulomb è quella quantità di carica che fluisce attraverso una qualsiasi sezione trasversale di un conduttore in un secondo quando la corrente è un ampère.

Un dispositivo sperimentale per misurare la forza tra due conduttori paralleli è illustrato nella Fig. 15–33. Esso costituisce una *bilancia di corrente*. Attraverso i due conduttori, passa la stessa corrente così che $F = 2 \times 10^{-7} I^2 L'/R$. La bilancia è prima messa in equilibrio con corrente nulla nel circuito. Quando viene fatta circolare la corrente nel circuito, per riportare la bilancia in equilibrio sono necessari dei pesi addizionali sul piatto sinistro. Dai valori noti di F, L' ed R, possiamo trovare il valore di I. In pratica, vengono usati due avvolgimenti circolari paralleli. L'espressione per la forza tra gli avvolgimenti è allora differente.

Dato che, in termine delle costanti ausiliari ϵ_0 e μ_0, noi abbiamo $K_e = 1/4\pi\epsilon_0$ e $K_m = \mu_0/4\pi$, ne segue che il rapporto di queste due costanti dà

dove $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Questa costante è eguale alla velocità della luce (o di qualsiasi segnale elettromagnetico) nel vuoto, come sarà dimostrato nel Capitolo 19. La costante c è stata misurata sperimentalmente con grandissima accuratezza. In termini di essa, abbiamo che $K_e =$

Although we have two constants, K_e and K_m, corresponding to the electric and magnetic forces, there is only one degree of freedom because there is only one new physical quantity, the electric charge, with the current related to it by the equation *current = charge/time*. Therefore we can assign an arbitrary value to one of the constants only. The Eleventh General Conference on Weights and Measures, held in 1960, decided to adopt $K_m = 10^{-7}$, and chose the ampere as the fourth fundamental unit. Then the ampere is defined as that current that, circulating in two parallel conductors separated a distance of one meter, results in a force on each conductor of 2×10^{-7} N per meter of length of each conductor (Fig. 15–32). Once the ampere is so defined, the coulomb is that quantity of charge that flows across any cross section of a conductor in one second when the current is one ampere.

An experimental arrangement for measuring the force between two parallel conductors is shown in Fig. 15–33. It constitutes a *current balance*. The same current passes through the two conductors so that $F = 2 \times 10^{-7} I^2 L'/R$. The balance is first set in equilibrium with no currents in the circuit. When the current is sent through the circuits, additional weights are required on the left pan to bring the balance back to equilibrium. From the known values of F, L' and R, we can find the value of I. In practice two parallel circular coils are used. The expression for the force between the coils is then different.

Since, in terms of the auxiliary constants ϵ_0 and μ_0, we have $K_e = 1/4\pi\epsilon_0$ and $K_m = \mu_0/4\pi$, it follows that the ratio of these two constants yields

$$\frac{K_e}{K_m} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c^2,$$

where $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. This constant is equal to the velocity of light (or of any electromagnetic signal) in vacuum, as will be proved in Chapter 19. The constant c has been measured experimentally with very great accuracy. In terms of it, we have that $K_e =$

$K_m c^2 = 10^{-7} c^2$, che è il valore dato per K_e nel Paragrafo 14.3. Questo spiega la nostra precedente scelta per K_e, una scelta che in quel momento può essere apparsa alquanto arbitraria.

Una ragione per cui la Undicesima Conferenza ha raccomandato l'uso dell'ampère come quarta unità fondamentale è che è più facile preparare uno standard di corrente e misurare la forza tra due correnti, che preparare uno standard di carica e misurare la forza tra due cariche. Tuttavia, dal punto di vista fisico, il concetto di carica è più fondamentale di quello di corrente. Inoltre, sia dal punto di vista pratico che da quello teorico, i sistemi MKSC e MKSA sono equivalenti.

15.10 *Campo magnetico di una corrente circolare*

Consideriamo ora una corrente circolare di raggio a (Fig. 15—34). Il calcolo del campo magnetico in un punto arbitrario è un problema matematico alquanto complicato. Ma nei punti lungo l'asse della corrente, il suo calcolo è un compito piuttosto semplice. In primo luogo, notiamo che l'Eq. (15.37) può essere interpretata matematicamente come affermazione che in P il campo magnetico risultante $\mathscr{B}$ prodotto dalla corrente è la somma di un grande numero di piccolissimi contributi elementari $d\mathscr{B}$ da ognuno dei segmenti o elementi di lunghezza dl componenti il circuito. Ogni contributo elementare è

Tuttavia, questa equazione deve essere considerata solo in relazione all'Eq. (15.37) e non come una assunzione indipendente.

Fig. 15—34. Calcolo del campo magnetico lungo l'asse di una corrente circolare.

Nel caso di una corrente circolare, il prodotto vettore $\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r$ della Fig. 15—34 è perpendicolare al piano PAA' ed ha modulo uno perchè questi due versori sono perpendicolari. Perciò, il campo $d\mathscr{B}$, prodotto in P dall'elemento di lunghezza dl, ha modulo

ed è perpendicolare al piano PAA', essendo quindi obliquo rispetto all'asse Z. Decomponendo $d\mathscr{B}$ in un componente $d\mathscr{B}_\parallel$ parallelo all'asse ed un componente $d\mathscr{B}_\perp$ perpendicolare ad esso, noi vediamo che, quando integriamo lungo la circonferenza, per ogni $d\mathscr{B}_\perp$, ve ne è un altro in verso opposto da parte dell'elemento di lunghezza direttamente opposto a dl, e perciò tutti i vettori $d\mathscr{B}_\perp$ sommati dànno zero. Il risultante $\mathscr{B}$ sarà la somma

$K_m c^2 = 10^{-7} c^2$, which is the value given for K_e in Section 14.3. This explains our previous choice for K_e, a choice which at the time may have appeared somewhat arbitrary.

One reason why the Eleventh Conference recommended the use of the ampere as the fourth fundamental unit is that it is easier to prepare a standard of current and to measure the force between two currents than it is to set up a standard of charge and measure the force between two charges. However, from the physical point of view, the concept of charge is more fundamental than that of current. Also, from the practical as well as the theoretical point of view, the MKSC and MKSA systems are equivalent.

15.10 *Magnetic Field of a Circular Current*

Let us consider next a circular current of radius a (Fig. 15–34). The calculation of the magnetic field at an arbitrary point is a somewhat complicated mathematical problem. But at the points along the axis of the current, its computation is a fairly easy task. First we recognize that Eq. (15.37) can be interpreted mathematically as saying that the resultant magnetic field $\mathscr{B}$ at P produced by the current is the sum of a large number of very small or elementary contributions $d\mathscr{B}$ by each of the segments or length elements dl composing the circuit. Each elementary contribution is

$$d\mathscr{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r}{r^2} dl.$$

However, this equation must be considered only in relation to Eq. (15.37) and not as an independent statement.

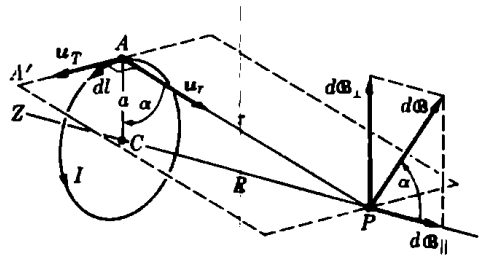


Fig. 15–34. Computation of the magnetic field along the axis of a circular current.

In the case of a circular current, the vector product $\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r$ of Fig. 15–34 is perpendicular to the plane PAA' and has a magnitude of one because these two unit vectors are perpendicular. Therefore, the field $d\mathscr{B}$, produced by the length element dl at P, has the magnitude

$$d\mathscr{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2},$$

and is perpendicular to the plane PAA', being thus oblique to the Z-axis. Decomposing $d\mathscr{B}$ into a component $d\mathscr{B}_\parallel$ parallel to the axis and a component $d\mathscr{B}_\perp$ perpendicular to it, we see that, when we integrate along the circle, for each $d\mathscr{B}_\perp$, there is another in the opposite direction from the length element directly opposed to dl, and therefore all vectors $d\mathscr{B}_\perp$ add to zero. The resultant $\mathscr{B}$ will be the sum

di tutti i $d\mathcal{B}_{\parallel}$, ed è quindi parallelo all'asse. Ora poichè $\cos\alpha = a/r$,

La distanza r rimane costante quando noi integriamo lungo la circonferenza. Allora, dato che $\oint dl = 2\pi a$, possiamo scrivere per il modulo del campo magnetico risultante

Notando che $r = (a^2 + R^2)^{1/2}$, possiamo scrivere il campo magnetico per i punti sull'asse di una corrente circolare come

Il momento di dipolo magnetico del circuito, usando la definizione (15.19), è $M = I(\pi a^2)$. Quindi

Il campo magnetico di una corrente circolare è rappresentato nella Fig. 15–35.

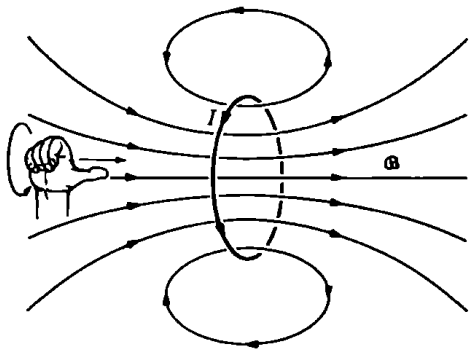


Fig. 15–35. Linee di forza magnetiche dovute ad una corrente circolare.

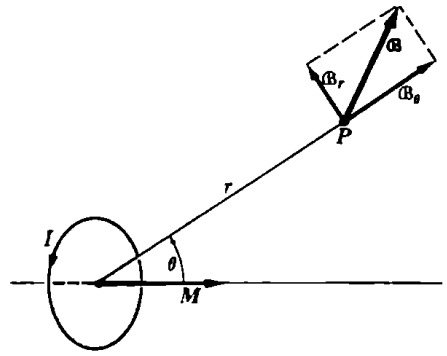


Fig. 15–36. Campo magnetico nel punto P dovuto ad una corrente di dipolo magnetico.

Un caso interessante si presenta quando il circuito è molto piccolo, così che il raggio a può essere trascurato in confronto con la distanza R. Allora l'Eq. (15.45) si riduce a

Quando confrontiamo l'Eq. (15.46) con l'Eq. (14.46), con $\theta = 0$, cioè, $\mathcal{E}_r = (1/4\pi\epsilon_0)(2p/r^3)$, vediamo che il campo magnetico lungo l'asse della piccola corrente

of all the $d\mathcal{B}_{\parallel}$, and therefore is parallel to the axis. Now, since $\cos\alpha = a/r$,

$$d\mathcal{B}_{\parallel} = (d\mathcal{B})\cos\alpha = \frac{a}{r}d\mathcal{B} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi r^3}dl.$$

The distance r remains constant when we integrate around the circle. Then, since $\oint dl = 2\pi a$, we may write for the magnitude of the resultant magnetic field

$$\mathcal{B} = \oint d\mathcal{B}_{\parallel} = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi r^3}\oint dl = \frac{\mu_0 Ia^2}{2r^3}.$$

Noting that $r = (a^2 + R^2)^{1/2}$, we can write the magnetic field for points on the axis of a circular current as

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 Ia^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}}. \tag{15.44}$$

The magnetic dipole moment of the circuit, using the definition (15.19), is $M = I(\pi a^2)$. Then

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi(a^2 + R^2)^{3/2}}. \tag{15.45}$$

The magnetic field of a circular current has been represented in Fig. 15–35.

Fig. 15–35. Magnetic lines of force due to a circular current.

Fig. 15–36. Magnetic field at the point P due to a magnetic dipole current.

An interesting case occurs when the circuit is very small, so that the radius a can be neglected in comparison with the distance R. Then Eq. (15.45) reduces to

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi R^3} = \frac{\mu_0(2M)}{4\pi R^3}. \tag{15.46}$$

When we compare Eq. (15.46) with Eq. (14.46), with $\theta = 0$, that is, $\mathcal{E}_r = (1/4\pi\epsilon_0)(2p/r^3)$, we see that the magnetic field along the axis of the small cur-

è identico al campo elettrico di un dipolo elettrico lungo il suo asse se facciamo corrispondere $(\mu_0/4\pi)M$ a $p/4\pi\epsilon_0$. Per questa ragione il circuito è chiamato un *dipolo magnetico*. Quindi noi possiamo applicare le Equazioni (14.46) e (14.47) per un dipolo elettrico a un dipolo magnetico così che il campo magnetico fuori dall'asse può essere calcolato (Fig. 15—36). Questo dà

rent is identical to the electric field of an electric dipole along its axis if we make $(\mu_0/4\pi)M$ correspond to $p/4\pi\epsilon_0$. For that reason the circuit is called a *magnetic dipole*. Therefore we can apply Eqs. (14.46) and (14.47) for an electric dipole to a magnetic dipole so that the magnetic field off-axis may be computed (Fig. 15–36). This gives

$$\mathfrak{B}_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2M\cos\theta}{r^3}, \qquad \mathfrak{B}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{M\sin\theta}{r^3}. \tag{15.47}$$

Nel Capitolo 14, abbiamo visto che le linee di forza di un campo elettrico vanno dalle cariche negative alle positive o magari, in alcuni casi, da o all'infinito. Comunque, dalle Fig. 15—28 e 15—35, possiamo vedere che le linee di forza di un campo magnetico sono linee *chiuse* concatenate con la corrente. La ragione di ciò è che il campo magnetico non è originato da poli magnetici. Un campo di questo tipo, che non ha sorgenti puntiformi, si dice *solenoidale*.

In Chapter 14 we saw that the lines of force of an electric field go from the negative to the positive charges or perhaps, in some cases, from or to infinity. However, from Figs. 15–28 and 15–35, we may see that the lines of force of a magnetic field are *closed* lines, linked with the current. The reason for this is that the magnetic field is not originated by magnetic poles. A field of this kind, which does not have point sources, is called *solenoidal*.

ESEMPIO 15.8. Discutere il *galvanometro della tangente*.

Soluzione: Un galvanometro della tangente consiste in un avvolgimento circolare (Fig. 15—37) avente N spire e percorso da una corrente I. Esso è posto in una regione dove vi è un campo magnetico $\mathfrak{B}$ in modo che un diametro dell'avvolgimento è parallelo a $\mathfrak{B}$. La corrente I produce, nel centro dell'avvolgimento, un campo magnetico dato dall'Eq. (15.44), con $R = 0$; cioè $\mu_0 I/2a$. E poichè vi sono N giri, il campo magnetico totale prodotto al centro è $\mathfrak{B}_c = \mu_0 IN/2a$. Quindi, il campo magnetico risultante $\mathfrak{B}'$ nel centro dell'avvolgimento fa con l'asse dell'avvolgimento un angolo θ dato da

$$\tan\theta = \mathfrak{B}/\mathfrak{B}_c = 2a\mathfrak{B}/\mu_0 IN.$$

Pertanto, se un piccolo ago magnetico viene posto al centro dell'avvolgimento, esso girerà e si arresterà in equilibrio ad un angolo θ con l'asse. Questo ci permette di misurare il campo esterno $\mathfrak{B}$ se conosciamo la corrente I, o inversamente, di misurare la corrente I se conosciamo il campo $\mathfrak{B}$. Di solito, $\mathfrak{B}$ è il campo magnetico terrestre. Per misurazioni precise, la formula deve essere corretta per tener conto della lunghezza finita dell'ago, dato che il campo che agisce su di esso non è esattamente il campo nel centro. Il nome "galvanometro della tangente" è derivato dalla funzione trigonometrica che appare qui sopra.

Thus if a small magnetic needle is placed at the center of the coil, it will turn and rest in equilibrium at an angle θ with the axis. This allows us to measure the external field $\mathfrak{B}$ if we know the current I, or conversely to measure the current I if we know the field $\mathfrak{B}$. Usually $\mathfrak{B}$ is the earth's magnetic field. For precise measurements, the formula has to be corrected to take into account the finite length of the needle, since the field acting on it is not exactly the field at the center. The name "tangent galvanometer" is derived from the trigonometric function appearing above.

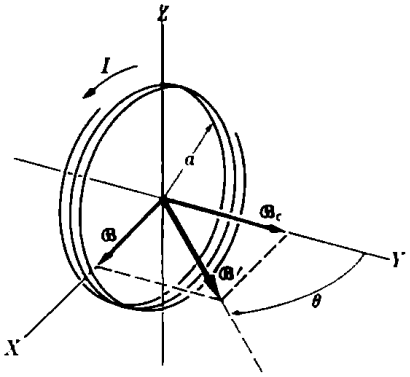


Fig. 15—37. Galvanometro della tangente.

Fig. 15–37. Tangent galvanometer.

ESEMPIO 15.9. Discutere il campo magnetico di una corrente solenoidale.

Soluzione: Una corrente solenoidale, o semplicemente un solenoide, è una corrente composta da molte spire circolari coassiali dello stesso raggio, tutte percorse dalla stessa corrente (Fig. 15—38). Otteniamo il suo campo magnetico sommando i campi magnetici di ciascuna delle correnti circolari componenti. Il campo è indicato dalle linee di forza magnetiche nella figura, dove alcune ondulazioni nello spazio tra le spire sono state spianate. Noi calcoleremo il campo del solenoide solo per punti sull'asse.

EXAMPLE 15.9. Discuss the magnetic field of a solenoidal current.

Solution: A solenoidal current, or simply a solenoid, is a current composed of several coaxial circular loops of the same radius, all carrying the same current (Fig. 15–38). We obtain its magnetic field by adding the magnetic fields of each of the component circular currents. The field is indicated by lines of magnetic force in the figure, where some fluctuations in the space between loops have been smoothed out. We shall compute the field of the solenoid only at points on the axis.

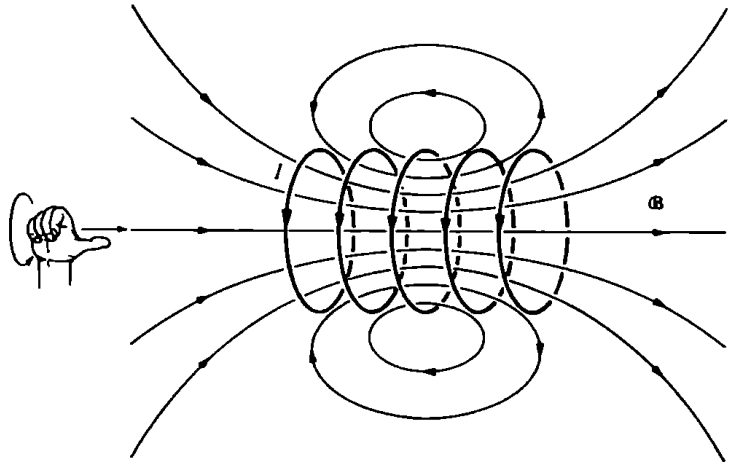


Fig. 15–38. Linee di forza magnetiche dovute ad una corrente solenoidale.

Fig. 15–38. Magnetic lines of force due to a solenoidal current.

Nella Fig. 15–39, abbiamo una sezione longitudinale del solenoide. Se L è la lunghezza e N il numero delle spire, il numero delle spire per unità di lunghezza è N/L, ed il numero delle spire in un tratto di lunghezza dR è $(N/L)\,dR$. Possiamo calcolare il campo prodotto da ogni spira nel punto P sull'asse usando l'Eq. (15.44), ed il campo dovuto alle spire nel tratto dR può essere calcolato nel modo seguente:

In Fig. 15–39 we have a longitudinal cross section of the solenoid. If L is the length and N the number of loops, the number of loops per unit length is N/L, and the number of loops in a section of length dR is $(N/L)\,dR$. We can compute the field produced by each loop at a point P on the axis by using Eq. (15.44), and the field due to the loops in the section dR can be computed in the following way:

$$d\mathcal{B} = \left[\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}}\right]\frac{N}{L}\,dR = \frac{\mu_0 IN}{2L}\,\frac{a^2\,dR}{(a^2 + R^2)^{3/2}}. \tag{15.48}$$

Dalla figura vediamo che $R = a\cot\beta$, $dR = -a\csc^2\beta\,d\beta$, ed $a^2 + R^2 = a^2\csc^2\beta$. Sostituendo nell'Eq. (15.48), abbiamo

From the figure we see that $R = a\cot\beta$, $dR = -a\csc^2\beta\,d\beta$, and $a^2 + R^2 = a^2\csc^2\beta$. Substituting in Eq. (15.48), we have

$$d\mathcal{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}(-\sin\beta\,d\beta).$$

Per ottenere il campo risultante, dobbiamo integrare da un estremo del solenoide all'altro.

To obtain the resultant field, we must integrate from one end of the solenoid to the other.

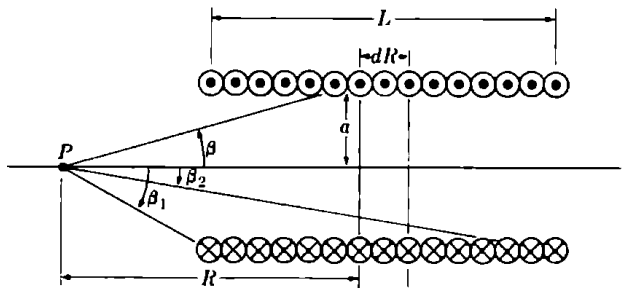


Fig. 15–39. Calcolo del campo magnetico in un punto P situato lungo l'asse di una corrente solenoidale.

Fig. 15–39. Computation of the magnetic field at a point P located along the axis of a solenoidal current.

Cioè, noi calcoliamo il campo risultante come segue:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}\int_{\beta_1}^{\beta_2} -\sin\beta\, d\beta = \frac{\mu_0 IN}{2L}(\cos\beta_2 - \cos\beta_1). \tag{15.49}$$

Se il solenoide è molto lungo, noi abbiamo per un punto nel centro che $\beta_1 \approx \pi$ e $\beta_2 \approx 0$, col risultato che

$$\mathfrak{B}_c = \frac{\mu_0 IN}{L}. \tag{15.50}$$

Per un punto ad una estremità, $\beta_1 = \pi/2$ e $\beta_2 \approx 0$, oppure $\beta_1 \approx \pi$, $\beta_2 = \pi/2$. In entrambi i casi,

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0 IN}{2L}, \tag{15.51}$$

ossia metà del valore nel centro. Un solenoide lungo è usato per produrre dei campi magnetici abbastanza uniformi in regioni limitate attorno al suo centro.

ESEMPIO 15.10. Discutere il campo magnetico del sistema di correnti a quadrupolo magnetico illustrato nella Fig. 15–40.

Soluzione: Il sistema di correnti della Fig. 15–40 è composto da due piccoli circuiti eguali, portanti correnti eguali I, ma circolanti in sensi opposti e separati dalla distanza $2a$. Ogni circuito è pertanto un dipolo magnetico. Ma, poichè le correnti circolano in sensi opposti, i momenti di dipolo sono opposti, dando un momento di dipolo magnetico totale zero. Tuttavia, il campo magnetico risultante non è zero, data la separazione tra i circuiti, e così il sistema costituisce un quadrupolo magnetico. Si deve notare che, matematicamente, la situazione è molto simile a quella dell'Esempio 14.13.

In conseguenza dell'analogia tra l'Eq. (15.47) per un dipolo magnetico e le Equazioni (14.46) e (14.47) per un dipolo elettrico, possiamo definire un potenziale "magnetico" V_m associato al campo magnetico di un dipolo magnetico dato dall'Eq. (14.45), con $p/4\pi\epsilon_0$ sostituito da $\mu_0 M/4\pi$. Quindi,

$$V_m = \frac{\mu_0 M\cos\theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r}}{4\pi r^3}.$$

In tal modo, il potenziale "magnetico" risultante in P, considerando che $\boldsymbol{M}_1 = -\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}$, è

$$V_m = \frac{\mu_0 \boldsymbol{M}_1\cdot\boldsymbol{r}_1}{4\pi r_1^3} + \frac{\mu_0 \boldsymbol{M}_2\cdot\boldsymbol{r}_2}{4\pi r_2^3} = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}_1}{r_1^3} - \frac{\boldsymbol{r}_2}{r_2^3}\right).$$

Dalla Fig. 15–40, chiamando $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}_z a$, dove $\boldsymbol{u}_z$ è il versore lungo l'asse Z, abbiamo $\boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}$, ed anche

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta,$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta.$$

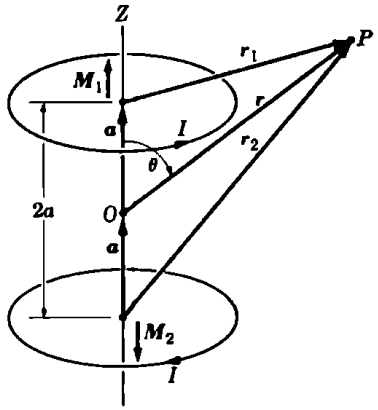


Fig. 15–40. Quadrupolo magnetico.

That is, we compute the resultant field as follows:

If the solenoid is very long, we have for a point at the center that $\beta_1 \approx \pi$ and $\beta_2 \approx 0$, resulting in

For a point at one end, $\beta_1 = \pi/2$ and $\beta_2 \approx 0$, or $\beta_1 \approx \pi$, $\beta_2 = \pi/2$. In either case,

or one-half the value at the center. A long solenoid is used to produce fairly uniform magnetic fields in limited regions around its center.

EXAMPLE 15.10. Discuss the magnetic field of the magnetic quadrupole current system illustrated in Fig. 15–40.

Solution: The current system of Fig. 15–40 is composed of two small equal circuits, carrying equal currents I, but circulating in opposite senses and separated by the distance $2a$. Each circuit is thus a magnetic dipole. But because the currents circulate in opposite senses, the dipole moments are opposed, giving a total magnetic dipole moment of zero. However, the resultant magnetic field is not zero, due to the separation of the circuits, and thus the system constitutes a magnetic quadrupole. It must be noted that mathematically the situation is very similar to that of Example 14.13.

Because of the analogy between Eq. (15.47) for a magnetic dipole and Eqs. (14.46) and (14.47) for an electric dipole, we may define a "magnetic" potential V_m associated with the magnetic field of a magnetic dipole given by Eq. (14.45), with $p/4\pi\epsilon_0$ replaced by $\mu_0 M/4\pi$. Therefore

Thus the resultant "magnetic" potential at P, considering that $\boldsymbol{M}_1 = -\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}$, is

From Fig. 15–40, calling $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}_z a$, where $\boldsymbol{u}_z$ is the unit vector along the Z-axis, we have $\boldsymbol{r}_1 = -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}$, and also

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta,$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta.$$

Fig. 15–40. Magnetic quadrupole.

Pertanto, usando lo sviluppo binomiale sino al primo ordine in a/r, abbiamo

Therefore, using the binomial expansion up to the first order in a/r, we have

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)^{-3/2} = \frac{1}{r^3}\left(1 + \frac{3a\cos\theta}{r} + \cdots\right),$$

e similmente,

and similarly,

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3a\cos\theta}{r} + \cdots\right).$$

Quindi,

Therefore

$$\frac{r_1}{r_1^3} - \frac{r_2}{r_2^3} = \frac{-a + r}{r^3}\left(1 + \frac{3a\cos\theta}{r} + \cdots\right) - \frac{a + r}{r^3}\left(1 - \frac{3a\cos\theta}{r} + \cdots\right)$$
$$= \frac{-2a}{r^3} + \frac{6ra\cos\theta}{r^4} + \cdots$$

Sostituendo questo valore nell'espressione per V_m, otteniamo

Substituting this value in the expression for V_m, we obtain

$$V_m = \frac{2\mu_0}{4\pi r^3}\left(-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{a} + \frac{3\boldsymbol{M}\cdot r\boldsymbol{a}\cos\theta}{r}\right).$$

Ma $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{a} = Ma$ e $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r} = Mr\cos\theta$. Così,

But $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{a} = Ma$ and $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r} = Mr\cos\theta$. Thus

$$V_m = \frac{\mu_0 M(2a)(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi r^3},$$

che è simile all'Eq. (14.58) nella dipendenza dall'angolo e dal raggio, confermando il fatto che abbiamo a che fare con un quadrupolo magnetico. Il momento del quadrupolo magnetico è $M(2a)$. Il campo magnetico del quadrupolo magnetico ha le seguenti componenti radiale e trasversale:

which is similar to Eq. (14.58) in angular and radial dependence, confirming the fact that we are dealing with a magnetic quadrupole. The moment of the magnetic quadrupole is $M(2a)$. The magnetic field of the magnetic quadrupole has the following radial and transverse components:

$$\mathcal{B}_r = -\frac{\partial V_m}{\partial r} = \frac{3\mu_0 M(2a)(3\cos^2\theta - 1)}{4\pi r^4},$$

$$\mathcal{B}_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V_m}{\partial\theta} = \frac{6\mu_0 M(2a)\sin\theta\cos\theta}{4\pi r^4}.$$

Lo studente è avvertito che il potenziale "magnetico" che noi abbiamo introdotto è soltanto una comodità matematica per calcolare il campo magnetico e non è legato ad una energia potenziale come lo è il potenziale elettrico.

The student is warned that the "magnetic" potential we have introduced is just a mathematical convenience for computing the magnetic field, and is not related to a potential energy in the same way as the electric potential is.

15.11 *Campo magnetico di una carica in moto (nonrelativistico)*

15.11 *Magnetic Field of a Moving Charge (Nonrelativistic)*

Il fatto che una corrente elettrica (cioè, un flusso di cariche in moto) produce un campo magnetico suggerisce che anche una singola carica in moto produce un campo magnetico. Vogliamo ora cercare di determinare questo campo magnetico, partendo dal risultato noto per il campo magnetico di una corrente elettrica. Il campo magnetico prodotto da una corrente, come dato nell'Eq. (15.37), è

The fact that an electric current (i.e., a stream of moving charges) produces a magnetic field suggests that a single moving charge must also produce a magnetic field. We shall now try to determine this magnetic field, starting from the known result for the magnetic field of an electric current. The magnetic field produced by a current, as given in Eq. (15.37), is

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\boldsymbol{u}_T \times \boldsymbol{u}_r}{r^2} dl = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{(I\,dl\,\boldsymbol{u}_T)\times\boldsymbol{u}_r}{r^2}.$$

Ma richiamandoci alle Equazioni (15.12) e (15.13), ed al fatto che $dV = S\,dl$, abbiamo $\boldsymbol{j} = j\boldsymbol{u}_T$ e $\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}$, il che dà

Perciò

Dato che $n\,dV$ è il numero di particelle nel volume dV, *potremmo interpretare* il risultato sopracitato dicendo che ogni particella carica produce un campo magnetico nel punto A (Fig. 15—41) dato da

Il modulo di $\mathfrak{B}$ è

e la sua direzione è perpendicolare a $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{v}$. Le linee di forza magnetiche sono quindi cerchi, come illustrato nella figura. Notare che il modulo del campo magnetico è zero lungo la linea di moto, ed ha il suo massimo valore sul piano perpendicolare alla linea di moto e che passa attraverso la carica.

Il campo elettrico $\mathcal{E}$ prodotto dalla carica q in A, presumendo che esso non sia influenzato dal moto della carica, è

Perciò, possiamo scrivere l'Eq. (15.53) nella forma

Fig. 15—41. Campi elettrico e magnetico prodotti da una carica in moto.

che stabilisce una stretta relazione tra i campi elettrico e magnetico prodotti da una carica in moto. Nella espressione qui sopra abbiamo posto

che, come abbiamo precedentemente indicato e come proveremo più tardi, è la velocità della luce o di ogni segnale elettromagnetico nel vuoto. In cifra tonda, $c = 3.0 \times 10^8 \mathrm{m\ s^{-1}}$.

Quindi, sebbene una carica a riposo produca solo un campo elettrico, una carica in moto produce sia un campo elettrico che un campo magnetico, legati dall'Eq. (15.54). Così, i campi elettrico e magnetico sono semplicemente due aspetti di una proprietà fondamentale della materia, ed è più appropriato usare il termine *campo elettromagnetico* per descrivere la situazione fisica che include cariche in moto.

But recalling Eqs. (15.12) and (15.13), and the fact that $dV = S\,dl$, we have $\boldsymbol{j} = j\boldsymbol{u}_T$ and $\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}$, which gives

$$I\,dl\,\boldsymbol{u}_T = (jS)\,dl\,\boldsymbol{u}_T = \boldsymbol{j}\,dV = nq\boldsymbol{v}\,dV.$$

Therefore

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}_r}{r^2}\,n\,dV. \tag{15.52}$$

Since $n\,dV$ is the number of particles in the volume dV, we *may interpret* the above result by saying that each charged particle produces a magnetic field at point A (Fig. 15–41) given by

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}_r}{r^2}. \tag{15.53}$$

The magnitude of $\mathfrak{B}$ is

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{qv\sin\theta}{r^2},$$

and its direction is perpendicular to $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{v}$. The magnetic lines of force are then circles, as shown in the figure. Note that the magnitude of the magnetic field is zero along the line of motion, and has its maximum value on the plane perpendicular to the line of motion and passing through the charge.

The electric field $\mathcal{E}$ produced by charge q at A, assuming that it is not affected by the motion of the charge, is

$$\mathcal{E} = \frac{qu_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

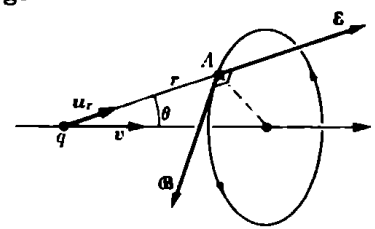


Fig. 15–41. Electric and magnetic fields produced by a moving charge.

Therefore we may write Eq. (15.53) in the form

$$\mathfrak{B} = \mu_0\epsilon_0\boldsymbol{v} \times \mathcal{E} = \frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{v} \times \mathcal{E}, \tag{15.54}$$

which establishes a close relationship between the electric and the magnetic fields produced by a moving charge. In the above expression we have set

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 2.9979 \times 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}, \tag{15.55}$$

which, as we indicated previously and shall prove later, is the velocity of light or of any electromagnetic signal in vacuum. In round figures, $c = 3.0 \times 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}}$.

Therefore, although a charge at rest produces only an electric field, a charge in motion produces both an electric and a magnetic field, related by Eq. (15.54). Thus electric and magnetic fields are simply two aspects of one fundamental property of matter, and it is more appropriate to use the term *electromagnetic field* to describe the physical situation involving moving charges.

Dobbiamo qui notare che per passare dall'Eq. (15.52) all'Eq. (15.53), il procedimento matematico non è unico e se, per esempio, aggiungessimo all'Eq. (15.53) un termine il cui integrale lungo un percorso chiuso è zero, il valore dell'Eq. (15.52) rimarrebbe immutato. Di fatto, l'Eq. (15.53) non è completamente corretta. È stato trovato sperimentalmente che essa dà risultati accettabili solo quando la velocità della particella è piccola in confronto a c. Nel Paragrafo 15.13, deriveremo una espressione corretta per $\mathfrak{B}$ che sarà valida a tutte le velocità. D'altra parte, l'Eq. (15.52) rimane senz'altro valida a tutte le velocità.

ESEMPIO 15.11. Verificare che il risultato (15.42) per il campo magnetico di una corrente rettilinea è compatibile con l'Eq. (15.54).

Soluzione: Il campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea è il risultato dei campi individuali prodotti da tutte le cariche in moto lungo il conduttore. Secondo l'Eq. (15.13), se S è la sezione trasversale del conduttore, $I = nqSv$, dove v è la velocità delle cariche. Ma nq è la carica per unità di volume e quindi la carica di un conduttore avente lunghezza unitaria e sezione trasversale S è $nqS = \lambda$. Quindi $I = \lambda v$. Facendo le sostituzioni nell'Eq. (15.42) e notando che $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{u}_T$, abbiamo

che è proprio l'Eq. (15.54).

15.12 *Elettromagnetismo e principio di relatività*

Nel Capitolo 11 abbiamo stabilito come principio generale la regola che tutte le leggi della natura devono essere identiche per tutti gli osservatori inerziali. Dobbiamo perciò ora procedere per ottenere la relazione tra i campi elettrico e magnetico misurati da due osservatori in moto relativo uniforme, così che il principio di relatività resti valido.

Supponiamo di avere due osservatori O ed O′ (Fig. 15–42) in moto relativo uniforme con velocità v, e che a riposo relativamente ad O′ vi siano due cariche q e Q. Le due cariche sono quindi in moto relativamente ad O. I valori delle due cariche sono gli stessi per entrambi gli osservatori O e O′, come è stato precedentemente indicato nel Paragrafo 15.4.

Fig. 15–42. Confronto tra misure elettromagnetiche eseguite da due osservatori in moto relativo.

We must note here that going from Eq. (15.52) to Eq. (15.53) is not a unique mathematical procedure, and if, for example, we add a term to Eq. (15.53) whose integral along a closed path is zero, the value of Eq. (15.52) would remain unchanged. In fact, Eq. (15.53) is not completely correct. It has been found experimentally that it gives acceptable results only when the velocity of the particle is small compared with c. In Section 15.13 we shall derive a correct expression for $\mathfrak{B}$ which will be valid at all speeds. On the other hand, Eq. (15.52) does remain valid at all speeds.

EXAMPLE 15.11. Verify that the result (15.42) for the magnetic field of a rectilinear current is compatible with Eq. (15.54).

Solution: The magnetic field produced by a rectilinear current is the result of the individual fields produced by all the charges moving along the conductor. According to Eq. (15.13), if S is the cross section of the conductor, $I = nqSv$, where v is the velocity of the charges. But nq is the charge per unit volume, and therefore the charge of a conductor having unit length and cross section S is $nqS = \lambda$. Therefore $I = \lambda v$. Making the substitutions in Eq. (15.42) and noting that $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{u}_T$, we have

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0\epsilon_0(\lambda v)}{\lambda}\,\boldsymbol{u}_T \times \mathfrak{E} = \mu_0\epsilon_0 \boldsymbol{v} \times \mathfrak{E},$$

which is just Eq. (15.54).

15.12 *Electromagnetism and the Principle of Relativity*

In Chapter 11 we established as a general principle the rule that all laws of nature must be identical to all inertial observers. We must therefore proceed now to obtain the relation between the electric and magnetic fields as measured by two observers in uniform relative motion, so that the principle of relativity remains valid.

Suppose that we have two observers O and O' (Fig. 15–42) in uniform relative motion with velocity v, and that at rest relative to O' there are two charges q and Q. The two charges are then in motion relative to O. The values of the two charges are the same for both observers O and O', as indicated previously in Section 15.4.

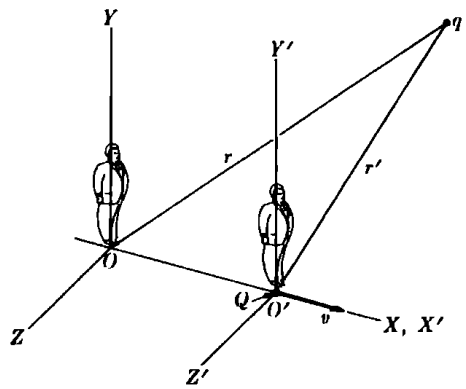


Fig. 15–42. Comparison of electromagnetic measurements by two observers in relative motion.

Per l'osservatore O' vi è solo una interazione elettrica tra Q e q, e la forza misurata su q è $\boldsymbol{F}' = q\boldsymbol{\mathcal{E}}'$, dove $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ è il campo elettrico prodotto da Q in q, misurato da O'.

D'altra parte, poichè O vede la carica Q in moto, egli osserva che Q produce un campo elettrico $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ ed un campo magnetico $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, e poichè si osserva che anche q è in movimento con velocità $\boldsymbol{v}$, la forza esercitata da Q su q che O misura è $\boldsymbol{F} = q\,(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{B}})$.

Scegliendo l'asse comune X e X' parallelo alla velocità relativa degli osservatori, noi abbiamo che $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_x v$ e $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = -\boldsymbol{u}_y v\mathcal{B}_z + \boldsymbol{u}_z v\mathcal{B}_y$, e perciò le componenti di $\boldsymbol{F}$ relative al riferimento XYZ sono

Le componenti di $\boldsymbol{F}'$ relative al riferimento $X'Y'Z'$ sono

Poichè q è a riposo relativamente ad O', la relazione tra le componenti di $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{F}'$ è data dalle Equazioni (11.32), (11.33), e (11.34). Vale a dire,

Sostituendo i valori delle componenti dati dalle Equazioni (15.56) e (15.57), e cancellando il fattore comune q, otteniamo

Queste espressioni mettono in relazione il campo elettrico misurato dall'osservatore O' con i campi elettrico e magnetico misurati dall'osservatore O, in accordo con la teoria della relatività speciale. Le trasformazioni inverse delle Equazioni (15.58) si ottengono scambiando i campi e invertendo il segno di v, poichè il riferimento XYZ si muove con velocità $-v$ relativamente a $X'Y'Z'$. Quindi, se l'osservatore O' misura un campo elettrico $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ ed un campo magnetico $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$, il campo elettrico misurato da O è dato da

Se la carica Q, invece di essere a riposo in O', si muove anch'essa relativamente ad O', allora O' nota un campo magnetico $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ in aggiunta al campo elettrico $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$. Un calcolo* simile ma più laborioso dà allora

*Per esempio, se lo studente desidera ottenere la seconda e la terza Equazione delle (15.60), gli suggeriamo di usare le Equazioni (15.58) per eliminare $\mathcal{E}'_y$ e $\mathcal{E}'_z$ dalla trasformazione inversa data dalle Equazioni (15.59), e quindi risolvere rispetto a $\mathcal{B}'_y$ e $\mathcal{B}'_z$.

To observer O' there is only an electric interaction between Q and q, and the force measured on q is $\boldsymbol{F}' = q\boldsymbol{\mathcal{E}}'$, where $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ is the electric field produced by Q at q, as measured by O'.

On the other hand, since O sees charge Q in motion, he observes that Q produces an electric field $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ and a magnetic field $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, and since q is also observed to be in motion with the velocity $\boldsymbol{v}$, the force exerted by Q on q that O measures is $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{B}})$.

Choosing the common axis X and X' parallel to the relative velocity of the observers, we have that $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_x v$ and $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = -\boldsymbol{u}_y v\mathcal{B}_z + \boldsymbol{u}_z v\mathcal{B}_y$, and therefore the components of $\boldsymbol{F}$ relative to frame XYZ are

$$F_x = q\mathcal{E}_x, \qquad F_y = q(\mathcal{E}_y - v\mathcal{B}_z), \qquad F_z = q(\mathcal{E}_z + v\mathcal{B}_y). \tag{15.56}$$

The components of $\boldsymbol{F}'$ relative to frame $X'Y'Z'$ are

$$F'_x = q\mathcal{E}'_x, \qquad F'_y = q\mathcal{E}'_y, \qquad F'_z = q\mathcal{E}'_z. \tag{15.57}$$

Since q is at rest relative to O', the relation between the components of $\boldsymbol{F}$ and $\boldsymbol{F}'$ is given by Eqs. (11.32), (11.33), and (11.34). That is,

$$F'_x = F_x, \qquad F'_y = \frac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad F'_z = \frac{F_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Substituting the values of the components as given by Eqs. (15.56) and (15.57), and canceling the common factor q, we obtain

$$\mathcal{E}'_x = \mathcal{E}_x, \qquad \mathcal{E}'_y = \frac{\mathcal{E}_y - v\mathcal{B}_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \mathcal{E}'_z = \frac{\mathcal{E}_z + v\mathcal{B}_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{15.58}$$

These expressions relate the electric field measured by observer O' to the electric and magnetic fields measured by observer O, in accordance with the special theory of relativity. The inverse transformations of Eq. (15.58) are obtained by exchanging the fields and reversing the sign of v, since frame XYZ moves with the velocity $-v$ relative to $X'Y'Z'$. Thus, if observer O' measures an electric field $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ and a magnetic field $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$, the electric field measured by O is given by

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}'_x, \qquad \mathcal{E}_y = \frac{\mathcal{E}'_y + v\mathcal{B}'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \mathcal{E}_z = \frac{\mathcal{E}'_z - v\mathcal{B}'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{15.59}$$

If the charge Q, instead of being at rest in O', is also moving relative to O', then O' notes a magnetic field $\boldsymbol{\mathcal{B}}'$ in addition to the electric field $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$. A similar but more laborious calculation* then gives

$$\mathcal{B}'_x = \mathcal{B}_x, \qquad \mathcal{B}'_y = \frac{\mathcal{B}_y + v\mathcal{E}_z/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \mathcal{B}'_z = \frac{\mathcal{B}_z - v\mathcal{E}_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{15.60}$$

* For example, if the student wishes to obtain the second and third equations in Eq. (15.60), we suggest that he use Eq. (15.58) to eliminate $\mathcal{E}'_y$ and $\mathcal{E}'_z$ from the inverse transformation of Eq. (15.59), and then solve for $\mathcal{B}'_y$ and $\mathcal{B}'_z$.

Di nuovo, come abbiamo fatto per le Equazioni (15.58), possiamo ottenere la trasformazione inversa delle Equazioni (15.60) scambiando i campi e sostituendo v con $-v$, col risultato

Le Equazioni (15.58) e (15.60), o le loro inverse Equazioni (15.59) e (15.61), costituiscono la trasformazione di Lorentz per il campo elettromagnetico. Queste equazioni provano una volta di più che i campi elettrico e magnetico non sono entità separate, ma formano una singola entità fisica chiamata *campo elettromagnetico*. La separazione di un campo elettromagnetico nelle sue componenti elettrica e magnetica non è una procedura assoluta, ma dipende piuttosto dal moto delle cariche relativamente all'osservatore. Pertanto diciamo una volta ancora che non dobbiamo parlare di interazioni elettriche e magnetiche come di processi separati, ma soltanto come due aspetti della *interazione elettromagnetica*.

ESEMPIO 15.12. Riprendere in considerazione la situazione discussa nell'Esempio 15.4, usando la trasformazione di Lorentz per il campo elettromagnetico allo scopo di mettere in relazione i campi misurati da entrambi gli osservatori.

Soluzione: Bisogna ricordare che nell'Esempio 15.4 vi era un campo elettrico lungo l'asse Y ed un campo magnetico lungo l'asse Z. Facendo una trasformazione cinematica ad un sistema di assi $X'Y'Z'$ in moto nella direzione X con velocità $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$, avevamo ridotto il moto a quello di una particella sottoposta ad un campo magnetico. Ora andiamo un passo più avanti in questa analisi e vediamo le implicazioni di questo esempio nel quadro della teoria della relatività. Nel riferimento XYZ, abbiamo $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}$, ed $\mathcal{E}_z = 0$ per il campo elettrico $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y = 0$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{B}$ per il campo magnetico. Così, usando le Equazioni (15.58) e (15.60), noi troviamo che i campi osservati nel riferimento $X'Y'Z'$ sono

Ponendo $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$, concludiamo che $\mathcal{E}'_y = 0$ e così $\mathcal{E}' = 0$, mentre

Pertanto la teoria della relatività predice che l'osservatore O', in moto relativamente ad O con velocità $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$ non misurerà nessun campo elettrico, e misurerà un campo magnetico più piccolo del campo magnetico misurato da O, ma avente la stessa direzione.

ESEMPIO 15.13. Derivare il campo magnetico di una corrente rettilinea usando la trasformazione relativistica per il campo elettromagnetico.

Soluzione: Consideriamo una fila infinita di cariche egualmente spaziate che si muovono lungo l'asse X con velocità v relativa all'osservatore O (Fig. 15–43) e che costituiscono così una corrente elettrica rettilinea. Se λ è la carica elettrica per unità di lunghezza, la corrente elettrica misurata da O è $I = \lambda v$. Ora consideriamo un osservatore O' in moto nella direzione X con velocità v. Relativamente ad O', le cariche appaiono a riposo ed O' misura soltanto un campo elettrico. Tuttavia, O rileva un campo elettrico *ed* un campo magnetico.

Again, as we did in Eq. (15.58), we may obtain the inverse transformation of Eq. (15.60) by exchanging the fields and replacing v by $-v$, resulting in

$$\mathcal{B}_x = \mathcal{B}'_x, \qquad \mathcal{B}_y = \frac{\mathcal{B}'_y - v\mathcal{E}'_z/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \mathcal{B}_z = \frac{\mathcal{B}'_z + v\mathcal{E}'_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{15.61}$$

Equations (15.58) and (15.60), or their inverse Eqs. (15.59) and (15.61), constitute the Lorentz transformation for the electromagnetic field. These equations prove once more that the electric and magnetic fields are not separate entities, but that they form a single physical entity called the *electromagnetic field*. The separation of an electromagnetic field into its electric and magnetic components is not an absolute procedure, but rather it depends on the motion of the charges relative to the observer. Therefore once more we say that we must not speak of electric and magnetic interactions as separate processes, but only as two aspects of *electromagnetic interaction*.

EXAMPLE 15.12. Reconsider the situation discussed in Example 15.4, using the Lorentz transformation for the electromagnetic field to relate the fields measured by both observers.

Solution: Recall that in Example 15.4 there was an electric field along the Y-axis and a magnetic field along the Z-axis. By making a kinematical transformation to a set of axes $X'Y'Z'$ moving in the X-direction with velocity $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$, we reduced the motion to that of a particle under a magnetic field alone. Now we go one step further in this analysis, and see the implications of this example within the framework of the theory of relativity. In the frame XYZ, we have $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}$, and $\mathcal{E}_z = 0$ for the electric field and $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y = 0$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{B}$ for the magnetic field. Thus, using Eqs. (15.58) and (15.60), we find that the fields observed in the $X'Y'Z'$ frame are

$$\mathcal{E}'_x = 0, \qquad \mathcal{E}'_y = \frac{\mathcal{E} - v\mathcal{B}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \mathcal{E}'_z = 0,$$

$$\mathcal{B}'_x = 0, \qquad \mathcal{B}'_y = 0, \qquad \mathcal{B}'_z = \frac{\mathcal{B} - v\mathcal{E}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Setting $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$, we conclude that $\mathcal{E}'_y = 0$ and thus $\mathcal{E}' = 0$, while

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_z = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\mathcal{B}.$$

Therefore the theory of relativity predicts that observer O' moving relative to O with velocity $v = \mathcal{E}/\mathcal{B}$ will measure no electric field, and will measure a magnetic field smaller than the magnetic field measured by O, but in the same direction.

EXAMPLE 15.13. Derive the magnetic field of a rectilinear current by using the relativistic transformation for the electromagnetic field.

Solution: Let us consider an infinite row of equally spaced charges which are moving along the X-axis with velocity v relative to observer O (Fig. 15–43) and which thus constitute a rectilinear electric current. If λ is the electric charge per unit length, the electric current measured by O is $I = \lambda v$. Now let us consider an observer O' moving in the X-direction with velocity v. Relative to O', the charges appear at rest and O' measures only an electric field. However, O records an electric *and* a magnetic field.

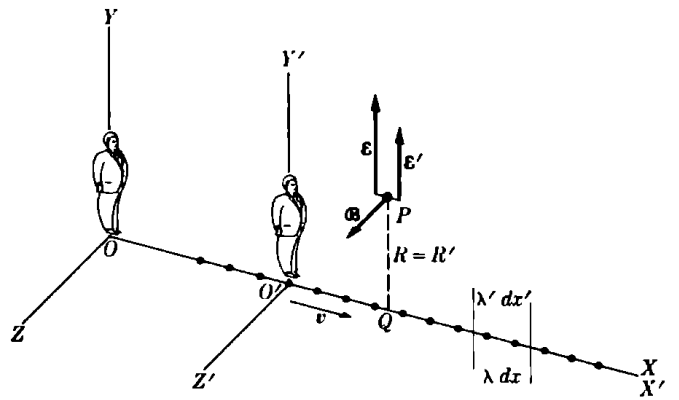


Fig. 15–43. Campo elettromagnetico prodotto da un flusso di cariche in moto lungo l'asse X come osservato da due osservatori in moto relativo.

Fig. 15–43. Electromagnetic field produced by a stream of charges moving along the X-axis as observed by two observers in relative motion.

La carica in un segmento dx (come misurato da O) è $dq = \lambda\, dx$. L'osservatore O' misura la stessa carica, ma, a causa della contrazione di Lorentz, il segmento appare avere una lunghezza dx' tale che $dx = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,dx'$. Quindi O' misura una differente carica per unità lunghezza λ', data da

The charge in a segment dx (as measured by O) is $dq = \lambda\, dx$. Observer O' measures the same charge, but, because of the Lorentz contraction, the segment appears to have a length dx' such that $dx = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,dx'$. Therefore O' measures a different charge per unit length λ', given by

$$\lambda' = \frac{dq}{dx'} = \lambda \frac{dx}{dx'} = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\lambda.$$

Il campo elettrico come misurato da O' è trasversale. In un punto P, è dato dal risultato dell'Esempio 14.7: cioè, $\mathcal{E}' = \lambda'/2\pi\epsilon_0 R'$. Disponendo gli assi Y paralleli alla linea PQ e notando che $R = R'$ perchè è una lunghezza trasversale, possiamo scrivere

The electric field as measured by O' is transverse. At a point P it is given by the result of Example 14.7; that is, $\mathcal{E}' = \lambda'/2\pi\epsilon_0 R'$. By placing the Y-axes parallel to the line PQ and noting that $R = R'$ because it is a transverse length, we may write

$$\mathcal{E}'_x = 0, \qquad \mathcal{E}'_y = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 R}, \qquad \mathcal{E}'_z = 0.$$

Quindi, usando le Equazioni (15.59) con $\mathcal{B}' = 0$, possiamo scrivere le componenti del campo elettrico relativo ad O come

Then, using Eqs. (15.59) with $\mathcal{B}' = 0$, we may write the components of the electric field relative to O as

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_z = 0, \qquad \mathcal{E}_y = \frac{\mathcal{E}'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 R\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Similmente, le Equazioni (15.61) dànno le componenti del campo magnetico relativo ad O come

Similarly, Eqs. (15.61) give the components of the magnetic field relative to O as

$$\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y = 0, \qquad \mathcal{B}_z = \frac{v\mathcal{E}'_y/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\lambda' v/c^2}{2\pi\epsilon_0 R\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

dove abbiamo usato la relazione $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. Così non solo otteniamo la giusta espressione del campo elettrico nel riferimento XYZ per una distribuzione di carica rettilinea, ma usando l'Eq. (15.37) come nostro punto di partenza, abbiamo trovato anche la corretta espressione per il campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea, che era stata precedentemente ottenuta (Eq. 15.41). Possiamo così sentirci fiduciosi che la legge di Ampère-Laplace (15.37) sia compatibile con i requisiti del principio di relatività e che quindi essa dia il corretto campo magnetico associato ad una corrente *chiusa*.

where we have used the relation $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$. Thus not only do we obtain the correct electric field in frame XYZ for a rectilinear charge distribution, but, using Eq. (15.37) as our starting point, we have also found the correct expression for the magnetic field produced by a rectilinear current, which had previously been obtained (Eq. 15.41). We may thus feel confident that the Ampère-Laplace law (15.37) is compatible with the requirements of the principle of relativity, and that therefore it gives the correct magnetic field associated with a *closed* electric current.

15.13 Il campo elettromagnetico di una carica in moto

Nel Capitolo 14 abbiamo visto che una carica a riposo produce un campo elettrico $\mathcal{E} = (q/4\pi\epsilon_0 r^2)\boldsymbol{u}_r$, e nel Paragrafo 15.11 abbiamo indicato che quando una carica è in moto produce, in aggiunta, un campo magnetico la cui espressione abbiamo suggerito essere $\mathcal{B} = (\mu_0/4\pi)q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}_r/r^2$. Tuttavia, secondo il paragrafo precedente, i campi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ devono essere legati dalle Equazioni (15.58) e (15.60). Perciò dobbiamo partire, sin dal principio, con un calcolo relativistico per ottenere le corrette espressioni di $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ per una carica in moto.

Consideriamo una carica q a riposo relativamente al riferimento $X'Y'Z'$, che è in moto relativamente a XYZ, con velocità v parallela all'asse comune X. L'osservatore O' non misura nessun campo magnetico, ma solo un campo elettrico, come abbiamo indicato prima; quindi $\mathcal{B}'_x = \mathcal{B}'_y = \mathcal{B}'_z = 0$, ovvero $\mathcal{B}' = 0$. Allora le trasformazioni del campo elettrico dell'Eq. (15.59) dànno

Le Equazioni (15.62) indicano che quando l'osservatore O, che vede la carica in moto, ed O', che vede la carica a riposo, confrontano le loro misure del campo elettrico della carica, ottengono la stessa componente del campo parallela alla direzione del moto, ma O ottiene una componente perpendicolare alla direzione del moto più grande. Similmente, la trasformazione del campo magnetico delle Equazioni (15.61), se noi usiamo le Equazioni (15.62) per scrivere le componenti del campo elettrico rispetto ad O, dànno

che sono equivalenti a $\mathcal{B} = \boldsymbol{v} \times \mathcal{E}/c^2$. Questa è identica all'Eq. (15.54) che, come abbiamo indicato prima, è la relazione tra i campi elettrico e magnetico di una carica in moto con velocità costante $\boldsymbol{v}$, una relazione che è valida a tutte le velocità.

15.13 The Electromagnetic Field of a Moving Charge

In Chapter 14 we saw that a charge at rest produces an electric field $\mathcal{E} = (q/4\pi\epsilon_0 r^2)\boldsymbol{u}_r$, and in Section 15.11 we indicated that when a charge is in motion it produces, in addition, a magnetic field whose expression we suggested would be $\mathcal{B} = (\mu_0/4\pi)q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}_r/r^2$. However, according to the preceding section, the fields $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ must be related by Eqs. (15.58) and (15.60). Therefore we must start, from the very beginning, with a relativistic calculation to obtain the correct expressions for $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ for a moving charge.

Let us consider a charge q at rest relative to the frame $X'Y'Z'$, which is moving, relative to XYZ, with velocity v parallel to the common X-axis. Observer O' does not measure any magnetic field, but only an electric field, as indicated before; therefore $\mathcal{B}'_x = \mathcal{B}'_y = \mathcal{B}'_z = 0$, or $\mathcal{B}' = 0$. Then the electric field transformations of Eq. (15.59) yield

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}'_x, \qquad \mathcal{E}_y = \frac{\mathcal{E}'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \mathcal{E}_z = \frac{\mathcal{E}'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{15.62}$$

Equations (15.62) indicate than when observer O, who sees the charge moving, and O', who sees the charge at rest, compare their measurements of the electric field of the charge, they obtain the same field component parallel to the direction of motion, but O obtains a larger component perpendicular to the direction of motion. Similarly, the magnetic field transformation of Eqs. (15.61), if we use Eqs. (15.62) in order to write the components of the electric field with respect to O, yield

$$\mathcal{B}_x = 0, \qquad \mathcal{B}_y = -\frac{v\mathcal{E}_z}{c^2}, \qquad \mathcal{B}_z = \frac{v\mathcal{E}_y}{c^2}, \tag{15.63}$$

which are equivalent to $\mathcal{B} = \boldsymbol{v} \times \mathcal{E}/c^2$. This is identical to Eq. (15.54) which, as indicated before, is the relation between the electric and magnetic fields of a charge moving with a constant velocity $\boldsymbol{v}$, a relation which is valid at all speeds.

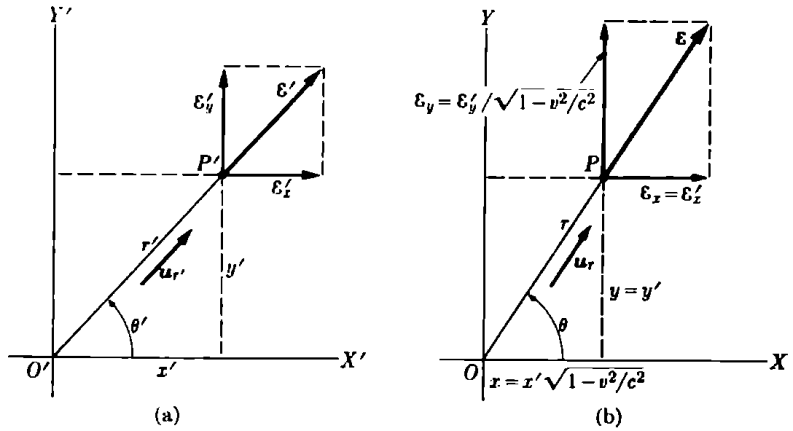


Fig. 15–44. Trasformazione relativistica delle componenti del campo elettrico prodotto da una carica q a riposo relativamente ad O' e posta in O'.

Fig. 15–44. Relativistic transformation of the components of the electric field produced by a charge q at rest relative to O' and located at O'.

Nella Fig. 15—44 sono confrontate le osservazioni di O ed O'. Se la carica è in O', l'osservatore O' misura un campo elettrico in P' (nel piano $X'Y'$) dato da

L'osservatore O vede lo stesso punto nel piano XY, ma a causa della contrazione di Lorentz, le coordinata X del punto appare accorciata dal fattore $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, mentre la coordinata Y rimane la stessa. Vale a dire, $x = x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $y = y'$. Così l'angolo θ che OP fa con OX è diverso dall'angolo θ' che $O'P'$ fa con $O'X'$ (fig. 15—44). Applicando le Equazioni (15.62), vediamo che il campo $\mathcal{E}$, che O misura in P, ha una componente secondo x che è eguale a quella misurata da O', ma la componente secondo y appare più grande del fattore $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Il risultato è che $\mathcal{E}$ fa, rispetto all'asse X, lo stesso angolo che fa $\boldsymbol{r}$. Così, relativamente all'osservatore O, il campo elettrico è ancora lungo la direzione radiale. Tuttavia, il campo non è più a simmetria sferica relativamente ad O. Un calcolo semplice e diretto (vedi l'Esempio 15.14) mostra che

Il fattore contenente sin θ fa dipendere il campo elettrico dalla direzione del vettore posizione $\boldsymbol{r}$. Pertanto a distanze eguali dalla carica, il campo elettrico è più forte nel piano equatoriale ($\theta = \pi/2$), perpendicolare alla direzione del moto, che non lungo la direzione del moto ($\theta = 0$). Questo è nettamente diverso rispetto al campo elettrico prodotto da una carica a riposo, che è a simmetria sferica. Questa situazione è stata illustrata nelle Fig. 15—45(a) e (b), dove la spaziatura delle linee è indicativa della intensità del campo.

Applicando la relazione $\mathcal{B} = \boldsymbol{v} \times \mathcal{E}/c^2$, che abbiamo provato essere di validità generale, ed usando l'Eq. (15.64) per $\mathcal{E}$, troviamo il campo magnetico di una carica in moto come

In Fig. 15-44 the observations of O and O' are compared. If the charge is at O', observer O' measures an electric field at P' (in the $X'Y'$-plane) given by

$$\mathcal{E}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2}\,\boldsymbol{u}_{r'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^3}\,\boldsymbol{r}'.$$

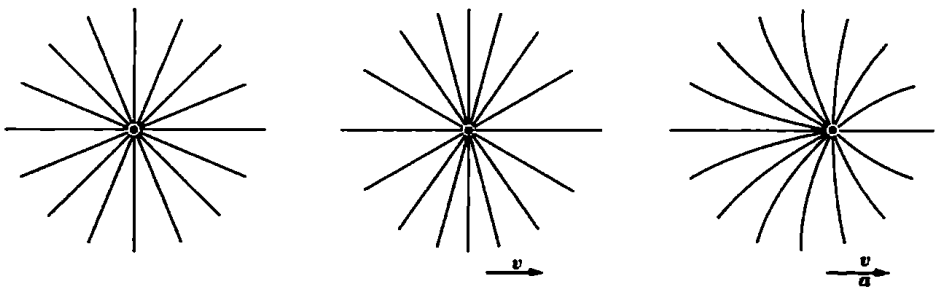
Observer O sees the same point in the XY plane, but due to the Lorentz contraction, the X-coordinate of the point appears shortened by the factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, while the Y-coordinate remains the same. That is, $x = x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $y = y'$. Thus the angle θ that OP makes with OX is different from the angle θ' that $O'P'$ makes with $O'X'$ (Fig. 15-44). Applying Eqs. (15.62), we see that the field $\mathcal{E}$ that O measures at P has an x-component which is the same as that measured by O', but the y-component appears larger by the factor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. The result is that $\mathcal{E}$ makes the same angle θ, with respect to the X-axis, that $\boldsymbol{r}$ does. Thus, relative to observer O, the electric field is also along the radial direction. However, the field is no longer spherically symmetric relative to O. A simple and direct calculation (see Example 15.14) shows that

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\frac{1 - v^2/c^2}{[(1 - v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\,\boldsymbol{u}_r. \tag{15.64}$$

The factor containing sin θ makes the electric field depend on the direction of the position vector $\boldsymbol{r}$. Thus, for equal distances from the charge, the electric field is stronger in the equatorial plane ($\theta = \pi/2$), perpendicular to the direction of motion, than along the direction of motion ($\theta = 0$). This is in contrast with the electric field produced by a charge at rest, which is spherically symmetric. This situation has been illustrated in Fig. 15-45(a) and (b), where the spacing of the lines is indicative of the strength of the field.

Applying the relation $\mathcal{B} = \boldsymbol{v} \times \mathcal{E}/c^2$, which we have proved is of general validity, and using Eq. (15.64) for $\mathcal{E}$, we find the magnetic field of a moving charge as

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2}\,\frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}_r. \tag{15.65}$$



(a) Carica a riposo, o a velocità molto bassa (b) Carica in moto ad alta velocità (c) Carica accelerata

Fig. 15—45. Linee di forza elettriche di una carica a riposo ed in moto.

(a) Charge at rest, or at very low velocity (b) Charge in motion at high velocity (c) Accelerated charge

Fig. 15-45. Electric lines of force of a charge at rest and in motion.

Questo si riduce alla Eq. (15.53) non relativistica quando v è molto piccola in confronto a c. Bisogna tenere presente che le Equazioni (15.64) e (15.65) sono valide soltanto per una carica in moto uniforme. Se la carica è accelerata, il campo elettrico assume una forma simile a quella della Fig. 15—45(c), e le espressioni matematiche diventano più complicate.

Il fatto che l'Eq. (15.65) sia differente dall'Eq. (15.53), che era stata derivata dalla legge (15.37) di Ampère-Laplace, può far pensare allo studente che l'Eq. (15.37), a sua volta, sia una approssimazione nonrelativistica di una legge più generale. Tuttavia, tale impressione è erronea e, come è stato indicato nel Paragrafo 15.11, l'Eq. (15.37) è di validità generale. L'apparente difficoltà sorge perchè il procedimento logico che usiamo per passare dall'Eq. (15.37) all'Eq. (15.55) usando l'Eq. (15.52) non è l'unico possibile. Questo è dovuto al fatto che una singola carica in moto non costituisce una corrente chiusa, mentre l'Eq. (15.37) è applicabile *soltanto* per correnti chiuse. Per esempio, se usiamo l'espressione (15.65) nell'Eq. (15.52) per un flusso di cariche in moto in linea retta, noi otteniamo l'espressione (15.41) per il campo di una corrente rettilinea. Questo calcolo, che omettiamo, mostra la coerenza della teoria.

ESEMPIO 15.14. Ricavare l'Eq. (15.64) per il campo elettrico di una carica in moto uniforme.

Soluzione: Notando dalla Fig. 15—44(a) che $\mathcal{E}'$ fa un angolo θ' con $O'X'$ e che $\cos\theta' = x'/r'$, $\sin\theta' = y'/r'$, noi abbiamo che le componenti di $\mathcal{E}'$ sono

Usando l'Eq. (15.62) ed il fatto che, secondo la trasformazione di Lorentz, $x = x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$ e $y = y'$, possiamo scrivere le componenti del campo $\mathcal{E}$ osservato da O come

Possiamo scrivere questo con notazione vettoriale come

mostrando che il campo $\mathcal{E}$ nel riferimento XYZ è lungo la direzione radiale. Ora

e $y^2 = r^2 \sin^2\theta$. Quindi

This reduces to the nonrelativistic Eq. (15.53) when v is very small compared with c. It must be kept in mind that Eqs. (15.64) and (15.65) are valid only for a charge with uniform motion. If the charge is accelerated, the electric field assumes a shape similar to that in Fig. 15–45(c), and the mathematical expressions become more complex.

The fact that Eq. (15.65) is different from Eq. (15.53), which was derived from the Ampère-Laplace law (15.37), may make the student feel that Eq. (15.37), in turn, is a nonrelativistic approximation of a more general law. However, such an impression is erroneous and, as indicated in Section 15.11, Eq. (15.37) is of general validity. The apparent trouble arises because the logic we use to go from Eq. (15.37) to Eq. (15.55) using Eq. (15.52) is not unique. This is due to the fact that a single moving charge does not constitute a closed current, while Eq. (15.37) is applicable *only* for closed currents. For example, if we use the expression (15.65) in Eq. (15.52) for a stream of charges moving in straight line, we obtain expression (15.41) for the field of a rectilinear current. This calculation, which we omit, shows the consistency of the theory.

EXAMPLE 15.14. Derive Eq. (15.64) for the electric field of a uniformly moving charge.

Solution: Noting from Fig. 15–44(a) that $\mathcal{E}'$ makes an angle θ' with $O'X'$ and that $\cos\theta' = x'/r'$, $\sin\theta' = y'/r'$, we have that the components of $\mathcal{E}'$ are

$$\mathcal{E}'_x = \mathcal{E}'\cos\theta' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x'}{r'^3}, \qquad \mathcal{E}'_y = \mathcal{E}'\sin\theta' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y'}{r'^3}. \tag{15.66}$$

Using Eq. (15.62) and the fact that, according to the Lorentz transformation, $x = x'\sqrt{1 - v^2/c^2}$ and $y = y'$, we may write the components of the field $\mathcal{E}$ observed by O as

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}\, r'^3},$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{\mathcal{E}'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}\, r'^3}.$$

We may write this in vector notation as

$$\mathcal{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\, r'^3}, \tag{15.67}$$

showing that the field $\mathcal{E}$ is along the radial direction in the XYZ frame. Now

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{x^2}{1 - v^2/c^2} + y^2 = \frac{r^2 - (v^2/c^2)y^2}{1 - v^2/c^2}$$

and $y^2 = r^2\sin^2\theta$. Therefore

$$r' = \frac{r[1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta]^{1/2}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Usando questa relazione per eliminare r' nell'Eq. (15.67), noi otteniamo infine

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}\frac{(1 - v^2/c^2)r}{[1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{1 - v^2/c^2}{[1 - (v^2/c^2)\sin^2\theta]^{3/2}}\,\boldsymbol{u}_r,$$

che è proprio il risultato precedentemente dato.

ESEMPIO 15.15. Discutere la possibile interazione magnetica tra un elettrone in orbita ed il nucleo in un atomo.

Soluzione: Consideriamo (Fig. 15–46) un elettrone la cui carica è $-e$ che gira con velocità $\boldsymbol{v}$ attorno ad un nucleo la cui carica è Ze. Il suo percorso relativamente al protone è la curva disegnata continua, che per semplicità supponiamo sia un cerichio. Ma se riferiamo i moti ad un sistema di riferimento fissato all'elettrone, l'elettrone sarà a riposo ed apparirà che il protone sta descrivendo il percorso tratteggiato, esso pure un cerchio, con velocità $-\boldsymbol{v}$. Trascurando l'accelerazione dell'elettrone (lo studente dovrebbe essere capace di calcolarla e di giudicare la ragionevolezza di questa ipotesi), possiamo considerare questo nuovo riferimento come inerziale. Così, relativamente all'elettrone, il nucleo produce un campo elettrico dato nonrelativisticamente da $\mathcal{E} = (Ze/4\pi\epsilon_0 r^2)\boldsymbol{u}_r$ ed un campo magnetico legato ad $\mathcal{E}$ dalla Eq. (15.54) in cui $\boldsymbol{v}$ è sostituita da $-\boldsymbol{v}$. Vale a dire,

$$\mathcal{B} = \frac{1}{c^2}(-\boldsymbol{v}) \times \mathcal{E} = \frac{1}{c^2}\mathcal{E} \times \boldsymbol{v}$$

$$= \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2}\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{v}.$$

Ma il momento della quantità di moto dell'elettrone relativamente al nucleo è $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = mr\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{v}$. Così, eliminando $\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{v}$, ed usando le espressioni per $\mathcal{B}$ ed $\boldsymbol{L}$, otteniamo

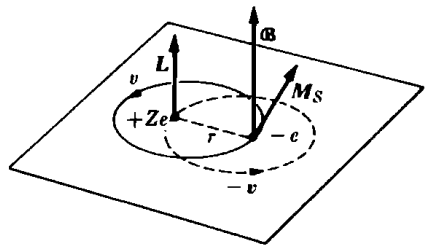


Fig. 15–46. Interazione spin-orbita di un elettrone in orbita attorno ad un nucleo positivo.

$$\mathcal{B} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 m r^3}\boldsymbol{L}.$$

Pertanto il campo magnetico prodotto dal moto relativo del nucleo è proporzionale e parallelo al momento della quantità di moto dell'elettrone, come è illustrato nella figura.

Poichè $\mathcal{B}$ è un campo magnetico riferito ad un riferimento in cui l'elettrone è a riposo, esso non produce alcuna interazione col moto orbitale dell'elettrone. Ma l'elettrone ha un momento magnetico $\boldsymbol{M}_S$ dovuto al suo spin. Così l'interazione magnetica dell'elettrone con il campo magnetico nucleare, usando le Equazioni (15.22) e (15.29) è

$$E_p = -\boldsymbol{M}_S \cdot \mathcal{B} = -\left(\gamma\frac{e}{2m}\boldsymbol{S}\right)\cdot\left(\frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c^2 m r^3}\boldsymbol{L}\right) = -\frac{\gamma Ze^2}{8\pi\epsilon_0 c^2 m^2 r^3}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}.$$

Il più importante aspetto di questo risultato è che la interazione magnetica dipende dall'orientazione relativa dello spin $\boldsymbol{S}$ e del momento angolare orbitale $\boldsymbol{L}$ dell'elettrone. Per questa ragione, essa è chiamata interazione *spin-orbita*, ed è spesso designata da $E_{p,SL}$. Un calcolo relativistico più particolareggiato indica che il valore di $E_{p,SL}$ è metà del valore sopra ottenuto.

Come passo successivo vogliamo valutare il suo ordine di grandezza. Ricordiamo dalla tavola nell'Esempio 15.6 che, per l'elettrone, γ è approssimativamente -2. Inoltre, dall'Eq. (14.40), l'energia

Using this relation to eliminate r' in Eq. (15.67), we finally obtain

which is just the result given previously.

EXAMPLE 15.15. Discuss the possible magnetic interaction between an orbiting electron and the nucleus in an atom.

Solution: Let us consider (Fig. 15–46) an electron whose charge is $-e$ revolving with velocity $\boldsymbol{v}$ around a nucleus whose charge is Ze. Its path relative to the proton is the solid curve, which for simplicity we assume is a circle. But if we refer the motions to a frame of reference attached to the electron, the electron will be at rest and the proton will appear to be describing the broken path, also a circle, with velocity $-\boldsymbol{v}$. Neglecting the acceleration of the electron (the student should be able to compute it and judge the reasonableness of this assumption), we may consider this new frame as inertial. Thus, relative to the electron, the nucleus produces an electric field given nonrelativistically by $\mathcal{E} = (Ze/4\pi\epsilon_0 r^2)\boldsymbol{u}_r$ and a magnetic field related to $\mathcal{E}$ by Eq. (15.54), with $\boldsymbol{v}$ replaced by $-\boldsymbol{v}$. That is,

But the angular momentum of the electron relative to the nucleus is $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = mr\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{v}$. Thus, eliminating $\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{v}$, and using the expressions for $\mathcal{B}$ and $\boldsymbol{L}$, we obtain

Fig. 15–46. Spin-orbit interaction of an electron orbiting about a positive nucleus.

Therefore the magnetic field produced by the relative motion of the nucleus is proportional and parallel to the angular momentum of the electron, as indicated in the figure.

Because $\mathcal{B}$ is a magnetic field referred to a frame in which the electron is at rest, it does not produce any interaction with the orbital motion of the electron. But the electron has a magnetic moment $\boldsymbol{M}_S$ due to its spin. So the magnetic interaction of the electron with the nuclear magnetic field, using Eqs. (15.22) and (15.29), is

The most important aspect of this result is that the magnetic interaction depends on the relative orientation of the spin $\boldsymbol{S}$ and the orbital angular momentum $\boldsymbol{L}$ of the electron. For that reason it is called *spin-orbit interaction*, and is often designated by $E_{p,SL}$. A more detailed relativistic calculation indicates that the value of $E_{p,SL}$ is one-half the value obtained above.

Next we shall estimate its order of magnitude. We recall from the table in Example 15.6 that, for the electron, γ is approximately -2. Also, from Eq. (14.40), the energy

dell'elettrone in una orbita circolare, nell'approssimazione di ordine zero, vale $E = -Ze^2/4\pi\epsilon_0(2r)$. Così, dopo aver corretto $E_{p,SL}$ dal fattore metà prima menzionato, possiamo scrivere

of the electron in a circular orbit, to the zeroth order of approximation, is $E = -Ze^2/4\pi\epsilon_0(2r)$. Thus, after correcting $E_{p,SL}$ by the factor of one-half mentioned before, we may write

$$E_{p,SL} \approx \frac{E}{c^2m^2r^2}\, \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}.$$

Ma $\boldsymbol{L}$ ha modulo mrv, e possiamo supporre che $\boldsymbol{S}$ sia dello stesso ordine di grandezza. Così $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$ vale approssimativamente $(mrv)^2$. Facendo la sostituzione, otteniamo

But $\boldsymbol{L}$ has a magnitude mrv, and we may expect that $\boldsymbol{S}$ is of the same order of magnitude. Thus $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$ is approximately $(mrv)^2$. Making the substitution, we obtain

$$E_{p,SL} \approx \frac{v^2}{c^2}|E|.$$

Confrontando questo valore col risultato dell'Esempio 14.10, concludiamo che l'interazione spin-orbita di un elettrone in orbita è dello stesso ordine di grandezza della correzione relativistica per l'energia. Tuttavia, la interazione spin-orbita ha la particolarità di mostrare un chiaro effetto direzionale a causa del fattore $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$, che dipende dalla orientazione relativa di $\boldsymbol{L}$ e di $\boldsymbol{S}$.

Una analisi accurata dei livelli di energia di un elettrone in un atomo mostra che $\boldsymbol{S}$ può avere solo due orientazioni relativamente ad $\boldsymbol{L}$, o parallela o antiparallela, in accordo con la nostra discussione alla fine dell'Esempio 15.7. Così, l'interazione spin-orbita divide ogni livello di energia in paia (o doppietti) di livelli di energia poco separati tra loro.

Comparing this value with the result of Example 14.10, we conclude that the spin-orbit interaction of an orbiting electron is of the same order of magnitude as the relativistic correction to the energy. However, the spin-orbit interaction has the peculiarity of showing a distinct directional effect because of the $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{L}$ factor, which depends on the relative orientation of $\boldsymbol{L}$ and $\boldsymbol{S}$.

A careful analysis of the energy levels of an electron in an atom shows that $\boldsymbol{S}$ can have only two orientations relative to $\boldsymbol{L}$, either parallel or antiparallel, in agreement with our discussion at the end of Example 15.7. Thus the spin-orbit interaction breaks each energy level into pairs (or doublets) of closely spaced energy levels.

15.14 *Interazione elettromagnetica tra due cariche in moto*

Possiamo notare a questo punto che nella nostra discussione sulle interazioni magnetiche ci siamo allontanati dalla procedura seguita nei Capitolo 13 e 14 per le interazioni gravitazionali ed elettriche. In quei capitoli abbiamo cominciato col discutere l'interazione tra due particelle, ed abbiamo introdotto in seguito il concetto di campo. Invece, in questo capitolo, abbiamo introdotto per primo il concetto di campo magnetico, in una forma operativa, parlando della forza (15.1) esercitata su di una carica in moto. Poi abbiamo calcolato i campi magnetici prodotti da *correnti chiuse*. Abbiamo potuto farlo per mezzo dell'Eq. (15.37), dalla quale (se usiamo anche l'Eq. (15.1)) possiamo ottenere la forza magnetica prodotta da una corrente elettrica su di un'altra corrente o su di una carica in moto. Ma sino ad ora, non abbiamo dato alcuna espressione per l'interazione elettromagnetica tra due cariche in moto. Una delle ragioni di questa differenza nella procedura è la seguente: le interazioni gravitazionale ed elettrica, discusse rispettivamente nei Capitoli 13 e 14, dipendono esclusivamente dalla distanza tra le due particelle interagenti: vale a dire, esse sono *forze statiche*. L'interazione può essere sentita da particelle a riposo e perciò la situazione fisica può essere discussa in condizioni stazionarie o *indipendenti dal tempo*. D'altra parte, l'interazione magnetica dipende dal moto delle particelle interangenti: vale a dire, essa è una *forza dipendente dalla velocità*. In un punto dato, il campo magnetico di una carica in moto relativamente all'osservatore dipende sia dalla velocità della carica che dalla distanza tra la carica e l'osservatore. Ma la distanza è variabile, dato che la carica è in moto, e perciò il campo magnetico (così come il campo elettrico) in un partcolare punto

15.14 *Electromagnetic Interaction Between Two Moving Charges*

We may note at this point that in our discussion of magnetic interactions we have departed from the procedure followed in Chapters 13 and 14 for gravitational and electric interactions. In those chapters we started by discussing the interaction between two particles, and afterward introduced the concept of field. However, in this chapter, we introduced the concept of magnetic field first, in an operational form, by talking about the force (15.1) exerted on a moving charge. Then we computed the magnetic fields produced by *closed currents*. We accomplished this by means of Eq. (15.37), from which (if we also use Eq. 15.1) we can obtain the magnetic force produced by an electric current on another current or on a moving charge. But so far we have not given any expression for the electromagnetic interaction between two moving charges. One of the reasons for this difference in procedure is the following: The gravitational and electric interactions discussed in Chapters 13 and 14, respectively, depend exclusively on the distance between the two interacting particles; that is, they are *static forces*. The interaction can be felt by particles at rest, and therefore the physical situation can be discussed under steady or *time-independent* conditions. On the other hand, the magnetic interaction depends on the motion of the interacting particles; that is, it is a *velocity-dependent force*. At a given point, the magnetic field of a charge moving relative to the observer depends on the velocity of the charge as well as on the distance between the charge and the observer. But the distance is changing, since the charge is moving, and therefore the magnetic field (as well as the electric field) at a particular point

varia col tempo: cioè, relativamente all'osservatore, il campo magnetico della carica in moto è *dipendente dal tempo*.

Un nuovo elemento entra quindi nella descrizione fisica: la *velocità di propagazione di una interazione*. Una impostazione possibile è suppore che le particelle *interagiscano a distanza*. Vale a dire, se la carica q (Fig. 15—47) è in moto con velocità v, il campo elettromagnetico dovuto a q in A ad un certo tempo t è il risultato della situazione fisica nello spazio circostante quando la carica è nella posizione P al tempo t, *simultaneamente* con l'osservazione in A. In altre parole, possiamo supporre che l'interazione elettromagnetica *si propaghi istantaneamente*, o con velocità infinita.

Ma un'altra ipotesi ragionevole è che l'interazione elettromagnetica sia il risultato di certi "segnali" scambiati tra le particelle interagenti, e che il "segnale" *si propaghi con una velocità finita* c che richiede un certo tempo per raggiungere un determinato punto nello spazio. Se la carica è a riposo, la velocità finita della propagazione del "segnale" è irrilevante perchè le circostanze fisiche non cambiano col tempo. Ma per una carica in moto la situazione è diversa, ed il campo osservato nel punto A al tempo t non corrisponde alla posizione simultanea della carica in P, ma ad una posizione anteriore o *ritardata* P' al tempo t', così che $t - t'$ è il tempo impiegato dal segnale per viaggiare da P' ad A con velocità c. Ovviamente $P'P = v(t - t')$.

Come discuteremo nel Capitolo 19, e come abbiamo precedentemente menzionato in parecchie occasioni, le interazioni elettromagnetiche si propagano effettivamente con velocità finita c, come data dall'Eq. (15.55). Questo esclude l'azione a distanza, e perciò l'analisi del campo elettromagnetico prodotto da una carica in moto richiede la seconda impostazione sopra esposta. Poichè c ha un valore così grande, l'effetto di ritardo è trascurabile a meno che le particelle si muovano molto velocemente. Per questa ragione, il ritardo non è stato considerato quando abbiamo discusso il moto di cariche nel Capitolo 14. È stato supposto che queste cariche si muovano molto lentamente, e così PP' è molto piccolo in confronto a PA. Analoghi effetti di ritardo dovrebbero esistere per l'interazione gravitazionale tra due masse in moto relativo. Tuttavia, la velocità di propagazione dei segnali gravitazionali non è stata ancora determinata.

is changing with time; i.e., relative to the observer, the magnetic field of the moving charge is *time dependent*.

A new element therefore enters into the physical picture: the *velocity of propagation of an interaction*. One possible approach is to assume that the particles *interact at a distance*. That is, if the charge q (Fig. 15–47) is moving with velocity v, the electromagnetic field due to q at A at some time t is the result of the physical situation in the surrounding space when the charge is at position P at time t, *simultaneously* with the observation at A. In other words, we may assume that the electromagnetic interaction *propagates instantaneously*, or with infinite velocity.

But another reasonable assumption is that the electromagnetic interaction is the result of certain "signals" exchanged between the interacting particles, and that the "signal" *propagates with a finite velocity* c which requires a certain time to reach a particular point in space. If the charge is at rest, the finite velocity of propagation of the "signal" is irrelevant because the physical circumstances are not changing with time. But for a moving charge the situation is different, and the field observed at point A at time t does not correspond to the simultaneous position of the charge at P, but to an earlier or *retarded* position P' at time t', such that $t - t'$ is the time required for the signal to travel from P' to A with velocity c. Obviously $P'P = v(t - t')$.

As we shall discuss in Chapter 19, and as we have mentioned previously on several occasions, electromagnetic interactions do propagate with the finite velocity c, as given by Eq. (15.55). This rules out action at a distance, and therefore the analysis of the electromagnetic field produced by a moving charge requires the second approach given above. Because c has such a large value, the retardation effect is negligible unless the particles move very fast. For that reason retardation was not considered when we discussed the motion of charges in Chapter 14. These charges were assumed to move very slowly, and thus PP' is very small compared with PA. Similar retardation effects should exist for the gravitational interaction between two masses in relative motion. However, the velocity of propagation of gravitational signals has not yet been determined.

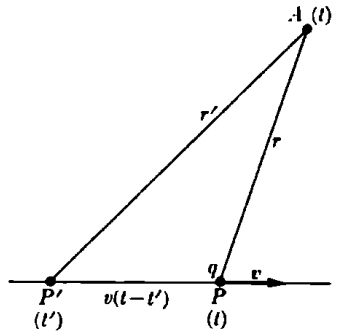


Fig. 15—47. Effetto di ritardo dovuto alla velocità di propagazione finita dei campi elettromagnetici.

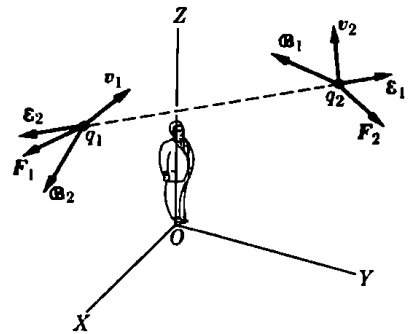


Fig. 15—48. Interazione elettromagnetica tra due cariche in moto.

Fig. 15–47. Retardation effect due to the finite velocity of propagation of electromagnetic fields.

Fig. 15–48. Electromagnetic interaction between two moving charges.

Non abbiamo tenuto conto degli effetti di ritardo quando stavamo scrivendo l'Eq. (15.35), perchè una corrente elettrica chiusa produce un campo magnetico costante o indipendente dal tempo. La ragione di questo è che una corrente costante chiusa è un flusso di particelle cariche e se esse sono egualmente spaziate e si muovono con la stessa velocità, la situazione fisica osservata è indipendente dal tempo. D'altra parte, si può verificare che le espressioni relativistiche (15.58) e (15.60) per i campi elettrico e magnetico di una carica in moto comprendono già gli effetti di ritardo.

Consideriamo ora due cariche q_1 e q_2 in moto con velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ relativamente ad un osservatore inerziale O (Fig. 15–48). La forza che la carica q_1 produce su q_2, come misurata da O, è $\boldsymbol{F}_2 = q_2(\mathcal{E}_1 + \boldsymbol{v}_2 \times \mathcal{B}_1)$, dove $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{B}_1$ sono i campi elettrico e magnetico dovuti a q_1 misurati da O, nella posizione occupata da q_2. D'altra parte, la forza che la carica q_2 produce su q_1, come misurata da O, è $\boldsymbol{F}_1 = q_1(\mathcal{E}_2 + \boldsymbol{v}_1 \times \mathcal{B}_2)$. Confrontiamo dapprima le parti magnetiche di $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$. Il termine $\boldsymbol{v}_2 \times \mathcal{B}_1$ è perpendicolare al piano di $\boldsymbol{v}_2$ e $\mathcal{B}_1$, mentre $\boldsymbol{v}_1 \times \mathcal{B}_2$ è perpendicolare al piano di $\boldsymbol{v}_1$ e $\mathcal{B}_2$. Così questi due termini hanno, in generale, direzioni e moduli diversi. In relazione all'Eq. (15.64), le parti elettriche di $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$ sono pure diverse in modulo e, se le cariche sono accelerate, esse hanno anche direzioni diverse. Quindi concludiamo che

le forze tra due cariche in moto non sono né eguali in modulo né opposte in direzione.

In altre parole, sembrerebbe che la legge di azione e reazione non sia valida in presenza di interazioni magnetiche. Questo a sua volta implica che i principi di conservazione della quantità di moto, del momento della quantità di moto e dell'energia non varrebbero per un sistema di due particelle cariche in moto. Questa *apparente* insufficienza di così importanti leggi è dovuta al seguente fatto. Nel Capitolo 7, quando abbiamo scritto la legge di conservazione della quantità di moto come $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \text{cost.}$, consideravamo che $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_2$ fossero misurate *simultaneamente* da O; cioè, nello stesso istante relativamente ad O. Tuttavia, in presenza di una interazione che si propaga con velocità finita, l'effetto di ritardo richiede che la velocità di variazione della quantità di moto di una particella ad un dato istante non sia in relazione col cambiamento di quantità di moto dell'altra particella allo stesso istante, ma piuttosto *ad un istante precedente*, e inversamente. Quindi non ci possiamo aspettare che $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ sia costante se esse sono valutate allo stesso istante.

Lo studente può ricordare, dal Paragrafo 7.4, che possiamo descrivere il risultato di una interazione come uno scambio di quantità di moto tra due particelle. Per ristabilire la legge di conservazione della quantità di moto, dobbiamo includere quella quantità di moto che viene scambiata tra due particelle e che, ad un tempo dato, sta viaggiando tra di esse con una velocità finita. Vale a dire, dobbiamo tener conto della quantità di moto "in volo." Noi diciamo che il campo elettromagnetico porta questa quantità di moto e lo indichiamo con $\boldsymbol{p}_{\text{campo}}$ (Fig. 15–49). Così la legge di conservazione della quantità di moto richiede che

$$\boldsymbol{P}_{\text{field}} = \boldsymbol{P}_{\text{campo}}$$

Figura 15–49

We did not take retardation effects into account when we were writing Eq. (15.35), because a closed electric current produces a steady or time-independent magnetic field. The reason for this is that a closed, constant current is a stream of charged particles, and if they are evenly spaced and moving with the same velocity, the observed physical situation is time independent. On the other hand, it can be verified that the relativistic expressions (15.58) and (15.60) for the electric and magnetic fields of a moving charge already incorporate the effect of retardation.

Let us now consider two charges q_1 and q_2 moving with velocities $\boldsymbol{v}_1$ and $\boldsymbol{v}_2$ relative to an inertial observer O (Fig. 15–48). The force that charge q_1 produces on q_2, as measured by O, is $\boldsymbol{F}_2 = q_2(\mathcal{E}_1 + \boldsymbol{v}_2 \times \mathcal{B}_1)$, where $\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{B}_1$ are the electric and magnetic fields measured by O due to q_1, at the position occupied by q_2. On the other hand, the force that charge q_2 produces on q_1, as measured by O, is $\boldsymbol{F}_1 = q_1(\mathcal{E}_2 + \boldsymbol{v}_1 \times \mathcal{B}_2)$. Let us first compare the magnetic parts of $\boldsymbol{F}_1$ and $\boldsymbol{F}_2$. The term $\boldsymbol{v}_2 \times \mathcal{B}_1$ is perpendicular to the plane of $\boldsymbol{v}_2$ and $\mathcal{B}_1$, while $\boldsymbol{v}_1 \times \mathcal{B}_2$ is perpendicular to the plane of $\boldsymbol{v}_1$ and $\mathcal{B}_2$. Thus these two terms have, in general, different directions and magnitudes. In view of Eq. (15.64), the electric parts of $\boldsymbol{F}_1$ and $\boldsymbol{F}_2$ are also different in magnitude and, if the charges are accelerated, they also have different directions. Therefore we conclude that

the forces between two moving charges are neither equal in magnitude nor opposite in direction.

In other words, it appears that the law of action and reaction does not hold in the presence of magnetic interactions. This in turn implies that the principles of conservation of momentum, of angular momentum, and of energy would not hold for a system of two charged particles in motion. This *apparent* failure of such important laws is due to the following fact. In Chapter 7, when we wrote the law of conservation of momentum as $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \text{const}$, we were considering that $\boldsymbol{p}_1$ and $\boldsymbol{p}_2$ are measured *simultaneously* by O; i.e., at the same time relative to O. However, in the presence of an interaction propagating with a finite velocity, the retardation effect requires that the rate of change of momentum of one particle at a given time is not related to the change of momentum of the other particle at the same time, but rather *at an earlier time*, and conversely. Therefore, we cannot expect $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ to be constant if they are evaluated at the same time.

The student may recall, from Section 7.4, that we may describe the result of an interaction as an exchange of momentum between the two particles. To restore the law of conservation of momentum, we must include that momentum which is being exchanged between the two particles and which, at a given time, is traveling between them with a finite velocity. That is, we must take the momentum "in flight" into account. We say that the electromagnetic field carries this momentum, and we label it $\boldsymbol{p}_{\text{field}}$ (Fig. 15–49). Thus the law of conservation of momentum requires that

$$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_{\text{field}} = \text{const.} \qquad (15.68)$$

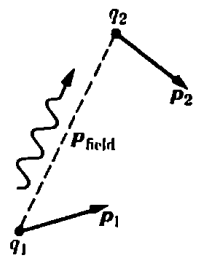


Figure 15–49

Similmente, dobbiamo attribuire un certo momento della quantità di moto ed una energia al campo elettromagnetico al fine di ristabilire la validità di questi due principi di conservazione. Rimanderemo sino al Capitolo 19 una discussione di come sono ottenute la quantità di moto, il momento della quantità di moto e l'energia associate al campo elettromagnetico.

Lo studente può ricordare che nel Paragrafo 7.7, quando abbiamo presentato una valutazione critica del concetto di forza, abbiamo indicato che l'Eq. (7.5) doveva essere considerata soltanto come preliminare, soggetta ad una ulteriore considerazione della meccanica della interazione. Questa revisione è stata ora incorporata nell'Eq. (15.68). A causa di ciò, il concetto di forza diventa di secondaria importanza e tecniche speciali devono essere sviluppate per analizzare il moto di due particelle interagenti.

ESEMPIO 15.16. Confrontare l'interazione magnetica tra due cariche con l'interazione elettrica tra di esse.

Soluzione: Poichè vogliamo soltanto gli ordini di grandezza, semplificheremo la scrittura delle formule. Così date due cariche q e q', possiamo dire che la forza elettrica prodotta da q' in q è $q\mathcal{E}$. Il campo magnetico prodotto da q' in q, se usiamo l'Eq. (15.54), è dell'ordine di grandezza di $v'\mathcal{E}/c^2$. La forza magnetica sulla carica q, se usiamo l'Eq. (15.1), è dell'ordine di grandezza di $qv(v'\mathcal{E}/c^2) = (vv'/c^2)q\mathcal{E}$. Quindi

$$\frac{\text{Forza magnetica}}{\text{Forza elettrica}} \approx \frac{vv'}{c^2}.$$

Così se le velocità delle cariche sono piccole in confronto alla velocità della luce c, la forza magnetica è trascurabile in confronto alla forza elettrica, ed in molti casi può essere ignorata. Pertanto possiamo dire che, in un certo senso, il magnetismo è una conseguenza della velocità finita di propagazione delle interazioni elettromagnetiche. Per esempio, se le cariche hanno una velocità dell'ordine di 10^6 m s^{-1}, corrispondente alla velocità orbitale degli elettroni negli atomi, abbiamo che

$$\frac{\text{Forza magnetica}}{\text{Forza elettrica}} \approx 10^{-4}.$$

Nonostante il suo piccolo valore rispetto alla forza elettrica, la forza magnetica è quella usata nei motori elettrici ed in molti altri dispositivi ingegneristici, per la seguente ragione. La materia è normalmente elettricamente neutra, e la forza elettrica netta fra due corpi è zero. Per esempio, quando due fili sono posti affiancati, la forza elettrica netta tra di essi è zero. Se i fili sono mossi come un tutto unico, le cariche positiva e negativa si muovono nella stessa direzione, così che la corrente netta in ciascuno di essi è zero e così il campo magnetico è anch'esso zero. Il risultato è che non vi è forza alcuna tra i due fili. Ma se si applica ai fili una differenza di potenziale, che ha come risultato un moto delle cariche negative rispetto alle positive, si produce una corrente netta in ogni filo e ne risulta un campo magnetico netto. Poichè il numero di elettroni liberi in un conduttore è molto grande, il loro effetto cumulativo, anche se le loro velocità sono piccole, produce un intenso campo magnetico che ha come risultato un'apprezzabile forza magnetica tra i fili.

Sebbene la forza magnetica sia debole in confronto alla forza elettrica, è ancora molto forte in confronto alla interazione gravitazionale. Ricordando la nostra discussione nel Paragrafo 14.6, possiamo dire che

$$\frac{\text{Interazione magnetica}}{\text{Interazione gravitazionale}} \approx 10^{36}\,\frac{vv'}{c^2}.$$

Per velocità paragonabili a quelle degli elettroni in orbita, questo rapporto è dell'ordine di 10^{32}.

Similarly we must attribute a certain angular momentum and energy to the electromagnetic field in order to restore these two conservation principles. We shall delay until Chapter 19 a discussion of how the momentum, angular momentum, and energy associated with the electromagnetic field are obtained.

The student may recall that in Section 7.7, when we presented a critical appraisal of the concept of force, we indicated that Eq. (7.5) was to be considered as only preliminary, subject to further consideration of the mechanics of interaction. This revision has now been incorporated in Eq. (15.68). Because of this, the concept of force becomes of secondary importance, and special techniques must be developed to analyze the motion of two interacting particles.

EXAMPLE 15.16. Compare the magnetic interaction between two charges with the electric interaction between them.

Solution: Since we want only orders of magnitude, we shall simplify the writing of the formulas. Thus, given charges q and q', we can say that the electric force produced by q' on q is $q\mathcal{E}$. The magnetic field produced by q' on q, if we use Eq. (15.54), is of the order of magnitude of $v'\mathcal{E}/c^2$. The magnetic force on charge q, if we use Eq. (15.1), is of the order of magnitude of $qv(v'\mathcal{E}/c^2) = (vv'/c^2)q\mathcal{E}$. Therefore

$$\frac{\text{Magnetic force}}{\text{Electric force}} \approx \frac{vv'}{c^2}.$$

So if the velocities of the charges are small compared with the velocity of light c, the magnetic force is negligible compared with the electric force, and in many cases can be ignored. Thus we can say that, in a sense, magnetism is a consequence of the finite velocity of propagation of electromagnetic interactions. For example, if the charges have a velocity of the order of 10^6 m s^{-1}, corresponding to the orbital speed of electrons in atoms, we have that

$$\frac{\text{Magnetic force}}{\text{Electric force}} \approx 10^{-4}.$$

In spite of its small value relative to the electric force, the magnetic force is the one used in electric motors and many other engineering devices, for the following reason. Matter is normally electrically neutral, and the net electric force between two bodies is zero. For example, when the two wires are placed side by side, the net electric force between them is zero. If the wires are moved as a whole, the positive and negative charges move in the same direction, so that the net current in each is zero, and thus the net magnetic field is also zero. This results in no force between the wires. But if a potential difference is applied to the wires, resulting in a motion of the negative charges relative to the positive, a net current is produced in each wire and a net magnetic field results. Since the number of free electrons in a conductor is very large, their cumulative effect, even if their velocities are small, produces a large magnetic field resulting in an appreciable magnetic force between the wires.

Although magnetic force is weak compared with electric force, it is still very strong compared with gravitational interaction. Recalling our discussion of Section 14.6, we may say that

$$\frac{\text{Magnetic interaction}}{\text{Gravitational interaction}} \approx 10^{36}\,\frac{vv'}{c^2}.$$

For velocities comparable to those of orbiting electrons, this ratio is of the order of 10^{32}.

Bibliografia

References

1. "Radiation Belts Around the Earth," J. Van Allen; *Sci. Am.*, March 1959, page 39
2. "Radiation Belts," B. O'Brien; *Sci. Am.*, May 1963, page 84
3. "The Mass Spectrometer," A. Nier; *Sci. Am.*, March 1953, page 68
4. "200 Man-Years of Life; The Story of E. O. Lawrence," D. Wilkes; *The Physics Teacher* **3**, 247 (1965)
5. "Particle Accelerators," R. Wilson; *Sci. Am.*, March 1958, page 64
6. "Early History of the Cyclotron," M. S. Livingston and A. E. McMillan; *Physics Today*, October 1959, page 18
7. "Strong Magnetic Fields," H. Furth, *et al.*; *Sci. Am.*, February 1958, page 28
8. "The Magnetism of the Sun," H. Babcock; *Sci. Am.*, February 1960, page 52
9. "Magnetic Monopoles," R. Ford; *Sci. Am.*, December 1963, page 122
10. "Resource Letter FC-1 on the Evolution of the Electromagnetic Field Concept," W. Scott; *Am. J. Phys.* **31**, 819 (1963)
11. *The Discovery of the Electron*, D. Anderson. Princeton, N.J.: Van Nostrand, Momentum Books, 1964
12. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz and F. J. Milford. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960, Sections 8.1 through 8.4
13. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos (editor). New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1959; Chapter 5, Coulomb; Chapter 9, Oersted
14. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 34. Volume II, Chapters 1, 13, 26, 27, and 29
15. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963; page 387, Gilbert; page 408, Coulomb; page 436, Oersted; page 541, Hall
16. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Sections 28.4 through 28.7

Problemi

15.1 Elettroni con velocità di 10^6/m s^{-1} entrano in una regione dove esiste un campo magnetico. Trovare l'intensità del campo magnetico se l'elettrone descrive una traiettoria avente un raggio di 0.10 m. Trovare anche la velocità angolare dell'elettrone.

15.2 Dei protoni sono accelerati, da una posizione di riposo, per mezzo di una differenza di potenziale di 10^6 V. Essi sono quindi lanciati in una regione di campo magnetico uniforme, di 2 T, in direzione perpendicolare al campo. Quale sarà il raggio della traiettoria e la velocità angolare dei protoni?

15.3 Un protone è in moto in un campo magnetico con un angolo di 30° rispetto al campo. La velocità è 10^7 m s^{-1} e l'intensità del campo è 1.5 T. Calcolare (a) il raggio dell'elica, (b) la distanza di avanzamento per rivoluzione, o passo dell'elica, e (c) la frequenza di rotazione nel campo.

15.4 Un deutone (un isotopo dell'idrogeno la cui massa è molto vicina a 2 amu) viaggia su una traiettoria circolare di raggio di 40 cm in un campo magnetico di 1.5 T. (a) Calcolare la velocità del deutone. (b) Determinare il tempo necessario perchè esso faccia una mezza rivoluzione. (c) Con quale differenza di potenziale avrebbe dovuto essere accelerato il deutone per acquistare la velocità calcolata nella parte (a)?

15.5 Un protone avente una energia cinetica di (a) 30 MeV, (b) 30 GeV è in moto trasversalmente ad un campo magnetico di 1.5 T. Determinare in ciascun caso il raggio della traiettoria e il

Problems

15.1 Electrons with a velocity of 10^6 m s^{-1} enter a region where a magnetic field exists. Find the intensity of the magnetic field if the electron describes a path having a radius of 0.10 m. Also find the angular velocity of the electron.

15.2 Protons are accelerated, from rest, through a potential difference of 10^6 V. These are then shot into a region of uniform magnetic field, of 2 T, with the trajectory perpendicular to the field. What will the trajectory radius and the angular velocity of the protons be?

15.3 A proton is in motion in a magnetic field at an angle of 30° with respect to the field. The velocity is 10^7 m s^{-1} and the field strength is 1.5 T. Compute (a) the radius of the helix of motion, (b) the distance of advance per revolution, or pitch of the helix, and (c) the frequency of rotation in the field.

15.4 A deuteron (an isotope of hydrogen whose mass is very nearly 2 amu) travels in a circular path of radius 40 cm in a magnetic field of 1.5 T. (a) Compute the speed of the deuteron. (b) Determine the time required for it to make one-half a revolution. (c) Through what potential difference would the deuteron have to be accelerated to acquire the velocity of part (a)?

15.5 A proton having a kinetic energy of (a) 30 MeV, (b) 30 GeV moves transverse to a magnetic field of 1.5 T. Determine, in each case, the radius of the path and the

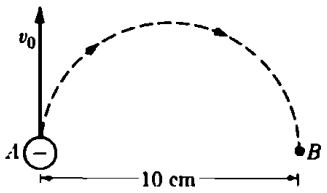


Figura 15–50

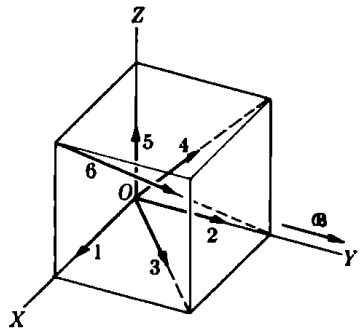


Figura 15–51

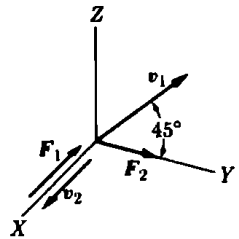


Figura 15–52

Figure 15–50

Figure 15–51

Figure 15–52

periodo di rivoluzione. Notare che in (a) il protone può essere trattato classicamente ed in (b) deve essere trattato relativisticamente.

15.6 Qual'è il campo magnetico necessario per costringere un protone da 30-GeV a descrivere un percorso di 100 m di raggio? Trovare anche la velocità angolare. Notare che il calcolo deve essere relativistico.

15.7 Uno ione ^{7}Li di carica pari a un elettrone ha una massa di 1.6×10^{-26} kg. Esso è accelerato mediante una differenza di potenziale di 500 V ed entra poi in un campo magnetico di 0.4 T, muovendosi perpendicolarmente al campo. Qual'è il raggio del suo percorso nel campo magnetico?

15.8 Un elettrone nel punto A nella Fig. 15–50 ha una velocità v_0 di 10^7 m s^{-1}. Calcolare (a) il modulo e la direzione del campo magnetico che costringerà l'elettrone a seguire il percorso semicircolare da A a B, (b) il tempo necessario all'elettrone per spostarsi da A a B.

15.9 Uno dei processi per separare gli isotopi ^{235}U e ^{238}U era basato sulla differenza dei raggi dei loro percorsi in un campo magnetico. Supporre che atomi di U ionizzati una sola volta partano da una sorgente comune e si muovano perpendicolarmente ad un campo uniforme. Trovare la massima separazione spaziale dei fasci quando il raggio di curvatura del fascio di ^{235}U è 0.5 m in un campo di 1,5 T, (a) se le energie sono le stesse, (b) se le velocità sono le stesse. La cifra scritta in alto alla sinistra del simbolo chimico è il numero di massa e, per gli scopi di questo problema, può essere identificata con la massa dell'atomo in amu.

15.10 Una sottile striscia di rame larga 1.50 cm e spessa 1.25 mm è posta perpendicolarmente ad un campo magnetico di 1.75 T. Lungo la striscia vi è una corrente di 100 A. Trovare (a) il campo elettrico trasverso dovuto all'effetto Hall, (b) la velocità di deriva degli elettroni, (c) la forza trasversa sugli elettroni. Supporre che ogni atomo di rame fornisca un elettrone libero.

15.11 Un campo magnetico uniforme $\mathfrak{B}$ giace nella direzione OY, come è illustrato nella Fig. 15–51. Trovare il modulo e la direzione della forza su di una carica q la cui velocità istantanea è v per ciascuna delle direzioni illustrate nella figura. (La figura è un cubo.)

15.12 Una particella di massa m e di carica q si muove con una velocità v_0 perpendicolarmente ad un campo magnetico uniforme. Esprimere, in funzione del tempo, le componenti della velocità e le coordinate della particella riferite al centro della traiettoria. Ripetere il problema per una particella la cui velocità fa un angolo α col campo magnetico.

15.13 Una particella porta una carica di 4×10^{-9} C. Quando essa si muove nel piano YZ con velocità v_1 di 3×10^4 m s^{-1} inclinata di 45° sopra l'asse Y, un campo magnetico uniforme esercita una forza F_1 lungo l'asse X. Quando la particella si muove con velocità v_2 di 2×10^4 m s^{-1} lungo l'asse X, vi è una forza F_2 di 4×10^{-5} N esercitata su di essa lungo l'asse Y. Quali sono il modulo e

period of revolution. Note that in (a) the proton can be treated classically and in (b) it has to be treated relativistically.

15.6 What is the magnetic field required to force a 30-GeV proton to describe a path 100 m in radius? Find also the angular velocity. Note that the calculation must be relativistic.

15.7 A singly charged ^{7}Li ion has a mass of 1.16×10^{-26} kg. It is accelerated through a potential difference of 500 V and then enters a magnetic field of 0.4 T, moving perpendicular to the field. What is the radius of its path in the magnetic field?

15.8 An electron at point A in Fig. 15–50 has a velocity v_0 of 10^7 m s^{-1}. Calculate (a) the magnitude and direction of the magnetic field that will cause the electron to follow the semicircular path from A to B, (b) the time required for the electron to move from A to B.

15.9 One of the processes for separating the isotopes ^{235}U and ^{238}U was based on the difference of radii of their paths in a magnetic field. Assume that singly ionized atoms of U start from a common source and move perpendicular to a uniform field. Find the maximum spatial separation of the beams when the radius of curvature of the ^{235}U beam is 0.5 m in a field of 1.5 T, (a) if the energies are the same, (b) if the velocities are the same. The superscript to the left of the chemical symbol is the mass number and, for the purposes of this problem, may be identified with the mass of the atom in amu.

15.10 A thin copper strip 1.50 cm wide and 1.25 mm thick is placed perpendicular to a magnetic field of 1.75 T. Along the strip there is a current of 100 A. Find (a) the transverse electric field due to the Hall effect, (b) the drift velocity of the electrons, (c) the transverse force on the electrons. Assume each copper atom contributes one electron.

15.11 A uniform magnetic field $\mathfrak{B}$ lies in the OY-direction, as shown in Fig. 15–51. Find the magnitude and direction of the force on a charge q whose instantaneous velocity is v for each of the directions shown in the figure. (The figure is a cube.)

15.12 A particle of mass m and charge q moves with a velocity v_0 perpendicular to a uniform magnetic field. Express, as a function of time, the components of the velocity and the coordinates of the particle referred to the center of the path. Repeat the problem for a particle whose velocity makes an angle α with the magnetic field.

15.13 A particle carries a charge of 4×10^{-9} C. When it moves with a velocity v_1 of 3×10^4 m s^{-1} at 45° above the Y-axis in the YZ-plane, a uniform magnetic field exerts a force F_1 along the X-axis. When the particle moves with a velocity v_2 of 2×10^4 m s^{-1} along the X-axis, there is a force F_2 of 4×10^{-5} N exerted on it along the Y-axis. What are the magnitude and

la direzione del campo magnetico? (Vedi Fig. 15–52.)

15.14 Particelle cariche vengono lanciate in una regione di campi elettrico e magnetico incrociati. La velocità della particella incidente è normale al piano dei due campi ed i campi sono normali l'un l'altro. L'intensità del campo magnetico è 0.1 T. Il campo elettrico è generato tra un paio di lastre eguali parallele e con cariche opposte, poste a 2 cm di distanza. Quando la differenza di potenziale tra le lastre è 300 V, non vi è deflessione delle particelle. Qual'è la velocità delle particelle?

15.15 (a) Qual'è la velocità di un fascio di elettroni quando l'influenza simultanea di un campo elettrico di intensità 3.4×10^5 V m^{-1} e di un campo magnetico di 2×10^{-2} T, essendo entrambi i campi normali al fascio e normali tra di loro, non produce nessuna deflessione degli elettroni? (b) Illustrare in un diagramma l'orientazione relativa dei vettori v, $\mathcal{E}$, e $\mathcal{B}$. (c) Qual'è il raggio dell'orbita dell'elettrone quando il campo elettrico viene rimosso?

15.16 Una particella avente una massa di 5×10^{-4} kg porta una carica di 2.5×10^{-8} C. Alla particella viene data una velocità iniziale orizzontale di 6×10^4 m s^{-1}. Qual'è il modulo e la direzione del minimo campo magnetico che manterrà la particella in moto in una direzione orizzontale, bilanciando la forza di gravità terrestre?

15.17 In uno spettrometro di massa come quello illustrato nella Fig. 15–12, una differenza di potenziale di 1000 V fa descrivere agli ioni di ^{24}Mg ionizzati una sola volta un percorso di raggio R. (a) Quale sarà il raggio descritto dagli ioni di ^{25}Mg se essi sono accelerati mediante lo stesso potenziale? (b) Quale differenza di potenziale farebbe descrivere agli ioni di ^{25}Mg un percorso dello stesso raggio R? (Supporre che le masse, in amu, siano le stesse dei numeri di massa sovrascritti alla sinistra del simbolo chimico.)

15.18 Uno spettrometro di massa ha una differenza di potenziale acceleratrice di 5 KeV ed un

the direction of the magnetic field? (See Fig. 15–52.)

15.14 Charged particles are shot into a region of crossed electric and magnetic fields. The incident particle velocity is normal to the plane of the two fields, and the fields are normal to each other. The magnetic field strength is 0.1 T. The electric field is generated between a pair of equal and oppositely charged parallel plates, placed 2 cm apart. When the potential difference between the plates is 300 V, there is no deflection of the particles. What is the particle velocity?

15.15 (a) What is the velocity of a beam of electrons when the simultaneous influence of an electric field of intensity 3.4×10^5 V m^{-1} and a magnetic field of 2×10^{-2} T, both fields being normal to the beam and to each other, produces no deflection of the electrons? (b) Show in a diagram the relative orientation of the vectors v, $\mathcal{E}$, and $\mathcal{B}$. (c) What is the radius of the electron orbit when the electric field is removed?

15.16 A particle having a mass of 5×10^{-4} kg carries a charge of 2.5×10^{-8} C. The particle is given an initial horizontal velocity of 6×10^4 m s^{-1}. What is the magnitude and direction of the minimum magnetic field that will keep the particle moving in a horizontal direction, balancing the earth's gravitational force?

15.17 In a mass spectrometer such as that illustrated in Fig. 15–12, a potential difference of 1000 V makes the single ionized ions of ^{24}Mg describe a path of radius R. (a) What will be the radius described by ^{25}Mg ions if they are accelerated through the same potential? (b) What potential difference would make the ^{25}Mg ions describe a path of the same radius R? (Assume that the masses, in amu, are the same as the mass numbers in the superscript to the left of the chemical symbol.)

15.18 A mass spectrometer has an accelerating voltage of 5 KeV and a mag-

campo magnetico di 10^{-2} T. Trovare la distanza tra i due isotopi dello zinco, ^{68}Zn e ^{70}Zn. Per distanza intendiamo la separazione delle due macchie che appaiono sulla emulsione della lastra fotografica dopo che ioni ^{68}Zn e ^{70}Zn con una sola carica elementare sono stati prima accelerati e poi fatti girare lungo un semicerchio. Vedere la Fig. 15–12. [*Suggerimento:* Non trovare i singoli raggi: scrivere piuttosto una equazione per trovare la separazione direttamente.] (b) Calcolare la velocità degli ioni per vedere se sarà necessario usare una correzione relativistica.

15.19 Lo spettrometro di massa di Dempster, illustrato nella Fig. 15–12, usa un campo magnetico per separare ioni aventi masse differenti ma *eguale energia*. Un altro dispositivo è lo *spettrometro di massa di Bainbridge* (Fig. 15–53) che separa ioni che hanno *uguale velocità*. Gli ioni, dopo aver attraversato le fenditure, passano attraverso un selettore di velocità composto da un campo elettrico prodotto dalle lastre cariche P e P', ed un campo magnetico $\mathcal{B}$ perpendicolare al campo elettrico. Quegli ioni che passano senza essere deviati attraverso i campi incrociati entrano in una regione dove esiste un secondo campo magnetico $\mathcal{B}'$, e vengono deviati in orbite circolari. Una lastra fotografica P registra il loro arrivo. Dimostrare che $q/m = \mathcal{E}/r\mathcal{B}\mathcal{B}'$.

15.20 Il campo elettrico tra le lastre del selettore di velocità in uno

Plate = Lastra

Figura 15–53

netic field of 10^{-2} T. Find the distance between the two isotopes of Zinc, ^{68}Zn and ^{70}Zn. By distance we mean the separation of the two spots that appear on the emulsion of the photographic plate after the singly charged ions ^{68}Zn and ^{70}Zn are first accelerated and then turned around in a half circle. See Fig. 15–12. [*Hint:* Do not find the individual radii; rather write an equation to find the separation directly.] (b) Compute the velocity of the ions to see if it will be necessary to use a relativistic correction.

15.19 Dempster's mass spectrometer, illustrated in Fig. 15–12, uses a magnetic field to separate ions having different masses but the *same energy*. Another arrangement is *Bainbridge's mass spectrometer* (Fig. 15–53) which separates ions having the *same velocity*. The ions, after crossing the slits, pass through a velocity selector composed of an electric field produced by the charged plates P and P', and a magnetic field $\mathcal{B}$ perpendicular to the electric field. Those ions that pass undeviated through the crossed fields enter into a region where a second magnetic field $\mathcal{B}'$ exists, and are bent into circular orbits. A photographic plate P registers their arrival. Show that $q/m = \mathcal{E}/r\mathcal{B}\mathcal{B}'$.

15.20 The electric field between the plates of the velocity selector in a Bainbridge

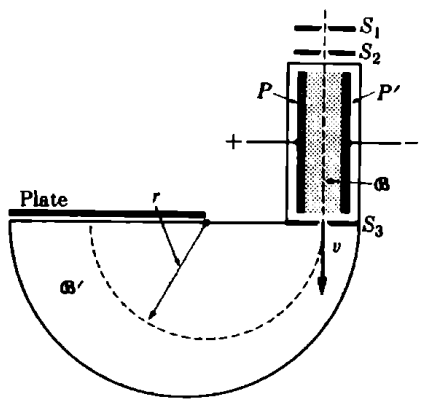


Figure 15–53

spettrometro di massa di Bainbridge è 1.2×10^5 V m^{-1} ed entrambi i campi magnetici sono 0.6 T. Un flusso di ioni di neon aventi una sola carica elementare si muove su un percorso circolare di 7.28 cm di raggio nel campo magnetico. Determinare la massa dell'isotopo di neon.

15.21 Supporre che l'intensità di campo elettrico fra le lastre P e P' nella Fig. 15—53 sia 1.5×10^4 V m^{-1}, e che entrambi i campi magnetici siano 0.5 T. Se la sorgente contiene i tre isotopi di magnesio, ^{24}Mg, ^{25}Mg, e ^{26}Mg, e gli ioni hanno una sola carica elementare, trovare la distanza tra le linee formate dai tre isotopi sulla lastra fotografica. Supporre che le masse atomiche degli isotopi, in amu, siano uguali ai loro numeri di massa indicati alla sinistra del loro simbolo chimico.

Emulsion = Emulsione fotografica
ℬ field up = campo ℬ all'insù
Slit = Fenditura

Figura 15—54

15.22 In uno spettrometro di massa, come quello illustrato nella Fig. 15—54, è difficile fare sì che sicuramente tutte le particelle arrivino perpendicolarmente alla fenditura. Se R è il raggio della loro traiettoria, mostrare che tutte quelle particelle che arrivano alla fenditura facendo un piccolo angolo θ con la normale arrivano alla lastra fotografica ad una distanza ρ (approssimativamente uguale a $R\theta^2$) da quelle che cadono perpendicolarmente. Qual'è il valore di θ per cui questa separazione è meno dello 0.1% di $2R$? (La situazione descritta in questo problema è chiamata *focalizzazione magnetica.*)

5.23 Nello spettrometro di massa della Fig. 15—55, ioni accelerati da una differenza di potenziale tra S ed A arrivano nel campo magnetico che si estende su un settore di 60° e sono

mass spectrograph is 1.2×10^5 V m^{-1} and both magnetic fields are 0.6 T. A stream of singly charged neon ions moves in a circular path of 7.28 cm radius in the magnetic field. Determine the mass of the neon isotope.

15.21 Suppose that the electric intensity between the plates P and P' in Fig. 15–53 is 1.5×10^4 V m^{-1}, and both magnetic fields are 0.5 T. If the source contains the three isotopes of magnesium, ^{24}Mg, ^{25}Mg, and ^{26}Mg, and the ions are singly charged, find the distance between the lines formed by the three isotopes on the photographic plate. Assume that the atomic masses of the isotopes, in amu, are equal to their mass numbers shown at the left of the chemical symbol.

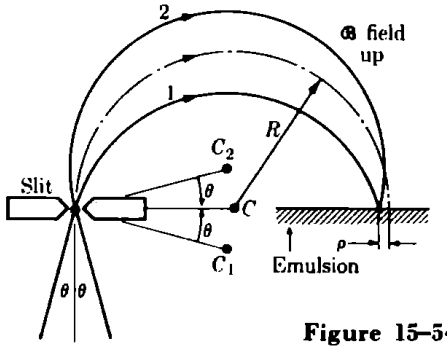


Figure 15–54

15.22 In a mass spectrometer, such as that shown in Fig. 15–54, it is difficult to assure that all particles arrive perpendicular to the slit. If R is the radius of their path, show that those particles arriving at the slit making a small angle θ with the normal will arrive at the photographic plate at a distance ρ (approximately equal to $R\theta^2$) from those that fall perpendicularly. What is the value of θ so that this separation is less than 0.1% of $2R$? (The situation described in this problem is called *magnetic focusing.*)

15.23 In the mass spectrograph of Fig. 15–55, ions accelerated by a potential difference between S and A fall on the magnetic field covering a sector of 60° and are

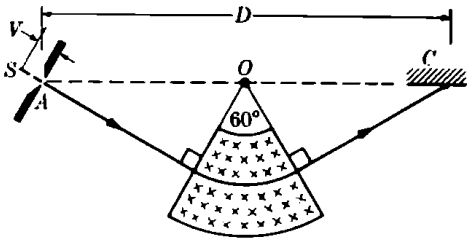


Figura 15—55

Figure 15–55

mandati verso una emulsione fotografica. Mostrare che $q/m = 32V/\mathfrak{B}^2D^2$. Discutere il cambiamento nella posizione di C per una piccola deviazione nella direzione di incidenza.

15.24 I protoni in un ciclotrone, proprio prima di emergere, descrivono una circonferenza di raggio 0.40 m. La frequenza del potenziale alternato tra le di è 10^7 Hz. Trascurando gli effetti relativistici, calcolare (a) il campo magnetico, (b) la velocità dei protoni, (c) l'energia dei protoni in J ed in MeV, (d) il numero minimo di giri completi dei protoni, se il valore massimo del potenziale tra le di è 20.000 V.

15.25 Ripetere il problema precedente per un deutone e per una particella alfa (nucleo di elio). Le loro rispettive masse sono 2,014 amu e 4.003 amu.

15.26 Il campo magnetico in un ciclotrone che accelera protoni è 1.5 T. (a) Quante volte al secondo dovrebbe invertirsi il potenziale attraverso le di? (b) Il raggio massimo del ciclotrone è 0.35 m. Qual'è la massima velocità del protone? (c) Attraverso quale differenza di potenziale dovrebbe essere accelerato il protone per dargli la massima velocità del ciclotrone?

15.27 Deutoni in un ciclotrone descrivono una circonferenza di raggio 32.0 cm proprio prima di emergere dalle di. La frequenza della tensione alternata applicata è 10^7 Hz. Trovare (a) il campo magnetico, e (b) l'energia e la velocità dei deutoni quando essi emergono. La massa di un deutone è 2.014 amu.

15.28 Un tubo a raggi catodici è posto in un campo magnetico uniforme ℬ con l'asse del

sent toward a photographic emulsion. Show that $q/m = 32V/\mathfrak{B}^2D^2$. Discuss the change in the position of C for a small deviation in the direction of incidence.

15.24 Protons in a cyclotron, just before they emerge, describe a circle of radius 0.40 m. The frequency of the alternating potential between the dees is 10^7 Hz. Neglecting relativistic effects, compute (a) the magnetic field, (b) the velocity of the protons, (c) the energy of the protons in J and in MeV, (d) the minimum number of complete turns of the protons if the peak value of the potential between the dees is 20,000 V.

15.25 Repeat the preceding problem for a deuteron and for an alpha particle (helium nucleus). Their respective masses are 2.014 amu and 4.003 amu.

15.26 The magnetic field in a cyclotron which is accelerating protons is 1.5 T. (a) How many times per second should the potential across the dees reverse? (b) The maximum radius of the cyclotron is 0.35 m. What is the maximum velocity of the proton? (c) Through what potential difference would the proton have to be accelerated to give it the maximum cyclotron velocity?

15.27 Deuterons in a cyclotron describe a circle of radius 32.0 cm just before emerging from the dees. The frequency of the applied alternating voltage is 10^7 Hz. Find (a) the magnetic field, and (b) the energy and speed of the deuterons when they emerge. The mass of a deuteron is 2.014 amu.

15.28 A cathode ray tube is placed in a uniform magnetic field ℬ with the axis of

tubo parallelo alle linee di forza. Se gli elettroni emergenti dal cannoncino elettronico con velocità v fanno un angolo θ con l'asse quando passano attraverso l'origine O, così che la loro traiettoria è un'elica, dimostrare (a) che essi toccheranno l'asse di nuovo all'istante $t = 2\pi m/\mathcal{B}q$, (b) che la coordinata del punto di contatto è $x = 2\pi mv \cos\theta/\mathcal{B}q$, e (c) che per piccoli valori di θ, la coordinata del punto di incrocio o contatto coll'asse è indipendente da θ. (d) Il dispositivo schematizzato in questo problema è chiamato una *lente magnetica*. Perchè? (e) Come differiscono le traiettorie degli elettroni, che passano attraverso l'origine con un angolo θ al disopra dell'asse, da quelle dirette con un angolo θ al disotto dell'asse?

15.29 Protoni aventi una energia di 3 MeV sono iniettati con un certo angolo rispetto ad un campo magnetico uniforme di 1 T. A quale distanza le particelle ritorneranno ad un punto comune di intersezione con l'asse?

15.30 Una particella di carica q e velocità v_0 (lungo l'asse X) entra in una regione dove esiste un campo magnetico (lungo l'asse Y). Dimostrare che, se la velocità v_0 è grande abbastanza da far sì che il suo cambiamento di direzione sia trascurabile, e la forza magnetica possa essere considerata costante e parallela all'asse Z, l'equazione del percorso della particella è $z = (q\mathcal{B}/2v_0m)x^2$.

15.31 Una particella di carica q e velocità v_0 (lungo l'asse X) entra in una regione (Fig. 15–56) dove esistono un campo elettrico ed un campo magnetico uniformi nella stessa direzione (lungo l'asse Y). Dimostrare che, se la velocità

Slow = Lento
Fast = Veloce
Heavy isotope = Isotopo pesante
Light isotope = Isotopo leggero

Figura 15–56

the tube parallel to the lines of force. If electrons emerging from the gun with a velocity v make an angle θ with the axis as they pass through the origin O, so that their trajectory is a helix, show (a) that they will touch the axis again at the time $t = 2\pi m/\mathcal{B}q$, (b) that the coordinate of the point of touching is $x = 2\pi mv \cos\theta/\mathcal{B}q$, and (c) that for small values of θ, the coordinate of the point of crossing or touching the axis is independent of θ. (d) The arrangement in this problem is called a *magnetic lens*. Why? (e) How do the trajectories of the electrons passing through the origin at an angle θ above the axis differ from those directed at an angle θ below the axis?

15.29 Protons having an energy of 3 MeV are injected at an angle with respect to a uniform magnetic field of 1 T. At what distance will the particles return to a common point of intersection with the axis?

15.30 A particle of charge q and velocity v_0 (along the X-axis) enters a region where a magnetic field exists (along the Y-axis). Show that, if the velocity v_0 is large enough so that its change in direction is negligible and the magnetic force can be considered as constant and parallel to the Z-axis, the equation of the path of the particle is $z = (q\mathcal{B}/2v_0m)x^2$.

15.31 A particle of charge q and velocity v_0 (along the X-axis) enters a region (Fig. 15–56) where uniform electric and magnetic fields exist in the same direction (along the Y-axis). Show that if the velocity v_0 è grande abbastanza da far sì che il suo cambiamento di direzione sia trascurabile e la forza magnetica possa essere considerata costante e parallela all'asse Z, (a) le coordinate nell'istante t sono $x = v_0t$, $y = \frac{1}{2}(q\mathcal{E}/m)t^2$, e $z = \frac{1}{2}(qv_0\mathcal{B}/m)t^2$. (b) Eliminando t e v_0 tra queste equazioni, ottenere la relazione $z^2/y = \frac{1}{2}(\mathcal{B}^2/\mathcal{E})\,(q/m)^2x^2$. Il risultato ha una applicazione in uno dei primi spettrometri di massa, perchè se noi inseriamo uno schermo perpendicolare all'asse X, tutte le particelle aventi lo stesso rapporto q/m cadranno lungo una data parabola, indipendentemente dalla loro velocità iniziale. Quindi vi sarà una parabola per ciascun isotopo presente nel fascio entrante.

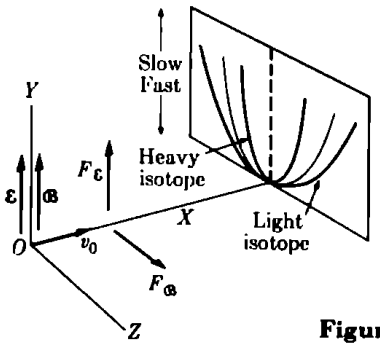


Figure 15–56

Figura 15–57

15.32 Una particella di carica q e massa m si muove tra due lastre cariche parallele separate da una distanza h. Un campo magnetico uniforme è applicato parallelamente alle lastre ed è diretto verso l'alto. Inizialmente, la particella è a riposo sulla lastra inferiore (vedi Fig. 15–57). (a) Scrivere le equazioni di moto della particella. (b) Dimostrare che alla distanza y dalla lastra inferiore, $v_x = (q/m)\mathcal{B}y$. (c) Dimostrare che il modulo della velocità è $v^2 = 2(q/m)\mathcal{E}y$. (d) Dai due precedenti risultati, dimostrare che $v_y = (q/m)^{1/2}\,[2\mathcal{E}y - (q/m)\mathcal{B}^2y^2]^{1/2}$, e che la particella mancherà per poco di raggiungere la lastra superiore se $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(q/m)\mathcal{B}^2h$.

15.33 In una regione dove vi sono un campo elettrico e un campo magnetico uniformi nella stessa direzione, una particella di carica q e massa m è iniettata con una velocità v_0 in una direzione perpendicolare alla direzione comune dei due campi. (a) Scrivere l'equazione del moto in coordinate cartesiane ortogonali. (b) Dimostrare per sostituzione diretta nell'equazione

ity v_0 is large enough so that its change in direction is negligible and the magnetic force can be considered as constant and parallel to the Z-axis, (a) the coordinates at time t are $x = v_0t$, $y = \frac{1}{2}(q\mathcal{E}/m)t^2$, and $z = \frac{1}{2}(qv_0\mathcal{B}/m)t^2$. (b) By eliminating t and v_0 between these equations, obtain the relation $z^2/y = \frac{1}{2}(\mathcal{B}^2/\mathcal{E})(q/m)^2x^2$. The result has an application in one of the earliest mass spectrographs because, if we insert a screen perpendicular to the X-axis, all particles having the same ratio q/m will fall along a given parabola, irrespective of their initial velocity. Therefore there will be one parabola for each isotope present in the incoming beam.

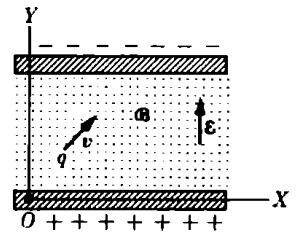


Figure 15–57

15.32 A particle of charge q and mass m moves between two parallel charged plates separated a distance h. A uniform magnetic field is applied parallel to the plates and is directed upward. Initially the particle is at rest at the lower plate (see Fig. 15–57). (a) Write the equations of motion of the particle. (b) Show that at the distance y from the lower plate, $v_x = (q/m)\mathcal{B}y$. (c) Show that the magnitude of the velocity is $v^2 = 2(q/m)\mathcal{E}y$. (d) From the two preceding results, show that $v_y = (q/m)^{1/2}[2\mathcal{E}y - (q/m)\mathcal{B}^2y^2]^{1/2}$, and that the particle will just fail to reach the upper plate if $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(q/m)\mathcal{B}^2h$.

15.33 In a region where there are uniform electric and magnetic fields in the same direction, a particle of charge q and mass m is injected with a velocity v_0 in a direction perpendicular to the common direction of the two fields. (a) Write the equation of motion in rectangular coordinates. (b) Show by direct substitution in the equation

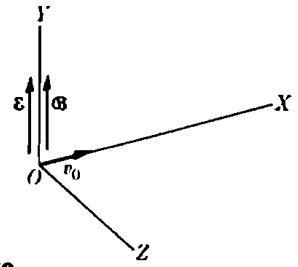


Figura 15–58

del moto che le componenti della velocità all'istante t sono $v_x = v_0 \cos (q\mathcal{B}/m)t$, $v_y = (q\mathcal{E}/m)t$, e $v_z = \sin (q\mathcal{B}/m)t$. (c) Dai risultati precedenti, ottenere le coordinate della particella all'istante t. (d) Fare un grafico della traiettoria. (e) Quale sarebbe il moto della particella se la velocità iniziale della particella fosse parallela ai campi? [*Suggerimento:* Per calcolare le risposte, si è scelto l'asse X nella direzione di v_0 e l'asse Y nella direzione comune dei due campi (Fig. 15–58).]

15.34 In una certa regione, vi sono un campo elettrico ed uno magnetico uniformi e perpendicolari l'un l'altro. Una particella è iniettata con una velocità v_0 parallelamente al campo magnetico. (a) Scrivere l'equazione del moto della particella in coordinate cartesiana orotogonali. (b) Dimostrare, per sostituzione diretta, che le componenti della velocità all'istante t sono $v_x = v_0$,

e

(c) Dal precedente risultato, derivare le coordinate della particella all'istante t. (d) Fare un grafico della traiettoria. [*Suggerimento:* Il campo magnetico ha la direzione e il verso dell'asse X ed il campo elettrico dell'asse Y.]

15.35 Risolvere il Problema 15.34 per una particella la cui velocità iniziale è parallela al campo elettrico. Verificare che le componenti della velocità sono $v_x = 0$,

Figure 15–58

of motion that the components of the velocity at time t are $v_x = v_0 \cos (q\mathcal{B}/m)t$, $v_y = (q\mathcal{E}/m)t$, and $v_z = \sin (q\mathcal{B}/m)t$. (c) From the previous result, obtain the coordinates of the particle at time t. (d) Make a plot of the path. (e) What would the motion of the particle be if the initial velocity of the particle were parallel to the fields? [*Hint:* For the answers given, the X-axis is in the direction of v_0 and the Y-axis is in the common direction of the two fields (Fig. 15–58).]

15.34 In a certain region there are uniform electric and magnetic fields perpendicular to each other. A particle is injected with a velocity v_0 parallel to the magnetic field. (a) Write the equation of motion of the particle in rectangular coordinates. (b) Show, by direct substitution, that the components of the velocity at time t are $v_x = v_0$,

$$v_y = (\mathcal{E}/\mathcal{B}) \sin (q\mathcal{B}/m)t,$$

and

$$v_z = -(\mathcal{E}/\mathcal{B})[1 - \cos (q\mathcal{B}/m)t].$$

(c) From the previous result, derive the coordinates of the particle at time t. (d) Make a plot of the path. [*Hint:* The magnetic field points along the X-axis and the electric field is along the Y-axis.]

15.35 Solve Problem 15.34 for a particle whose initial velocity is parallel to the electric field. Verify that the components of the velocity are $v_x = 0$,

$$v_y = v_0 \cos (q\mathcal{B}/m)t + (\mathcal{E}/\mathcal{B}) \sin (q\mathcal{B}/m)t,$$

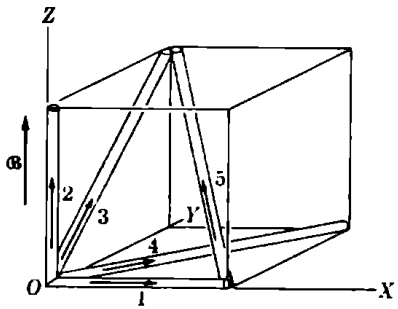


Figura 15–59

e

15.36 Risolvere il Problema 15.34 per una particella la cui velocità iniziale è perpendicolare ad entrambi i campi. Verificare che le componenti della velocità sono $v_x = 0$,

e

Dimostrare che, affinchè le particelle si muovano attraverso il campo senza essere deflesse, è necessario che $v_0 = -\mathcal{E}/\mathcal{B}$. Confrontare il risultato con le affermazioni fatte nel Paragrafo 15.4.

15.37 Con riferimento al Problema 15.34, verificare che quando la velocità ha una direzione iniziale arbitraria, le componenti della velocità all'istante t sono $v_x = v_{0x}$,

e

Ottenere (per integrazione) le coordinate della particella e discuterne la traiettoria. Confrontare coi risultati dei Problemi 15.35 e 15.36.

Figure 15–59

and

$$v_z = -(\mathcal{E}/\mathcal{B})[1 - \cos (q\mathcal{B}/m)t] - v_0 \sin (q\mathcal{B}/m)t.$$

15.36 Solve Problem 15.34 for a particle whose initial velocity is perpendicular to both fields. Verify that the components of the velocity are $v_x = 0$,

$$v_y = (\mathcal{E}/\mathcal{B} + v_0) \sin (q\mathcal{B}/m)t,$$

and

$$v_z = -(\mathcal{E}/\mathcal{B}) + (\mathcal{E}/\mathcal{B} + v_0) \cos (q\mathcal{B}/m)t.$$

Show that, in order for the particles to move through the field undeflected, it is necessary that $v_0 = -\mathcal{E}/\mathcal{B}$. Compare the result with the statements made in Section 15.4.

15.37 Referring to Problem 15.34, verify that when the velocity has an initial arbitrary direction, the components of the velocity at time t are $v_x = v_{0x}$,

$$v_y = (\mathcal{E}/\mathcal{B} + v_{0z}) \sin (q\mathcal{B}/m)t + v_{0y} \cos (q\mathcal{B}/m)t,$$

and

$$v_z = -\mathcal{E}/\mathcal{B} + (\mathcal{E}/\mathcal{B} + v_{0z}) \cos (q\mathcal{B}/m)t - v_{0y} \sin (q\mathcal{B}/m)t.$$

Obtain (by integration) the coordinates of the particle and discuss the path. Compare with the results of Problems 15.35 and 15.36.

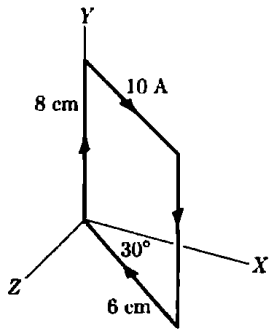


Figura 15–60

Figure 15–60

15.38 Con riferimento al Problema 15.33, (a) dimostrare che quando $(q\mathcal{B}/m)t \ll 1$, le coordinate della particella possono essere espresse come $x = v_0t$, $y = (q\mathcal{E}/2m)t^2$, e $z = (v_0q\mathcal{B}/2m)t^2$, in accordo col Problema 15.31.

15.38 Referring to Problem 15.33, (a) show that when $(q\mathcal{B}/m)t \ll 1$, the coordinates of the particle can be expressed as $x = v_0t$, $y = (q\mathcal{E}/2m)t^2$, and $z = (v_0q\mathcal{B}/2m)t^2$, in agreement with Problem 15.31.

15.39 Trovare la densità di corrente (supposta uniforme) richiesta in un filo di alluminio orizzontale per farlo "galleggiare" nel campo magnetico terrestre all'equatore. La densità dello Al è 2.7×10^3 kg m^{-3}. Supporre che il campo magnetico terrestre sia circa 7×10^{-5} T e che il filo sia orientato nella direzione Est-Ovest.

15.39 Find the current density (assumed uniform) required in a horizontal aluminum wire to make it "float" in the earth's magnetic field at the equator. The density of Al is 2.7×10^3 kg m^{-3}. Assume that the earth's field is about 7×10^{-5} T and that the wire is oriented in the East-West direction.

15.40 Trovare la forza su ciascuno dei segmenti del filo illustrato nella Fig. 15–59 se il campo $\mathcal{B} = 1.5$ T, è parallelo ad OZ ed $I = 2$ A. Lo spigolo del cubo è 0.1 m.

15.40 Find the force on each of the wire segments shown in Fig. 15–59 if the field, $\mathcal{B} = 1.5$ T, is parallel to OZ and $I = 2$ A. An edge of the cube is 0.1 m.

15.41 Il piano di una spira rettangolare 5 cm × 8 cm di filo è parallelo ad un campo magnetico di 0.15 T. (a) Se la spira porta una corrente di 10 A, quale coppia agisce su di essa? (b) Qual'è il momento magnetico della spira? (c) Qual'è la massima coppia che può essere ottenuta con la stessa lunghezza totale di filo che porta la stessa corrente in questo campo magnetico?

15.41 The plane of a rectangular loop of wire 5 cm × 8 cm is parallel to a magnetic field of 0.15 T. (a) If the loop carries a current of 10 A, what torque acts on it? (b) What is the magnetic moment of the loop? (c) What is the maximum torque that can be obtained with the same total length of wire carrying the same current in this magnetic field?

15.42 Il circuito rettangolare nella Fig. 15–60 gira facendo perno sull'asse Y e porta una corrente di 10 A nel verso indicato. (a) Se il circuito è in un campo magnetico uniforme di 0.2 T parallelo all'asse X. calcolare la forza su ciascun lato del circuito in N, e la coppia in N m, necessarie per mantenere il circuito nella posizione illustrata. (b)

15.42 The rectangular loop in Fig. 15–60 is pivoted about the Y-axis and carries a current of 10 A in the direction indicated. (a) If the loop is in a uniform magnetic field of 0.2 T parallel to the X-axis, calculate the force on each side of the loop, in N, and the torque in N m, required to hold the loop in the position shown. (b)

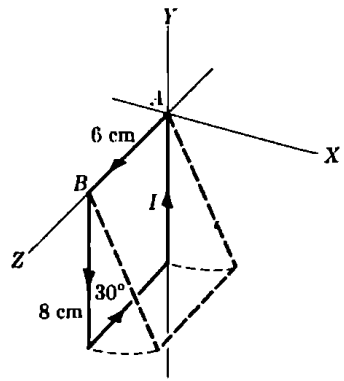


Figura 15–61

Come in (a), eccettuato il fatto che il circuito è in un campo parallelo all'asse Z. (c) Quale coppia sarebbe necessaria se il circuito fosse ruotabile attorno ad un asse, passante per il suo centro, parallelo all'asse Y?

Figure 15–61

Same as (a), except that the loop is in a field parallel to the Z-axis. (c) What torque would be required if the loop were pivoted about an axis through its center, parallel to the Y-axis?

15.43 Il circuito rettangolare di filo nella Fig. 15–61 ha una massa di 0.1 g per centimetro di lunghezza ed è ruotante attorno al lato AB come su di un asse privo di attrito. La corrente nel filo è di 10 A nel verso illustrato. (a) Calcolare il modulo ed il verso del campo magnetico parallelo all'asse Y, che fa ruotare il circuito verso l'alto finchè il suo piano fa un angolo di 30° col piano YZ. (b) Discutere il caso in cui il campo sia parallelo all'asse X.

15.43 The rectangular loop of wire in Fig. 15–61 has a mass of 0.1 g per centimeter of length, and is pivoted about side AB as a frictionless axis. The current in the wire is 10 A in the direction shown. (a) Calculate the magnitude and sense of the magnetic field, parallel to the Y-axis, that will cause the loop to swing up until its plane makes an angle of 30° with the YZ-plane. (b) Discuss the case in which the field is parallel to the X-axis.

15.44 Qual'è la massima coppia su di una bobina di area 5 cm × 12 cm, composta di 600 spire, quando essa porta una corrente di 10^{-5} A in un campo uniforme di 0.10 T?

15.44 What is the maximum torque on a coil 5 cm × 12 cm, composed of 600 turns, when it is carrying a current of 10^{-5} A in a uniform field 0.10 T?

15.45 L'avvolgimento di un galvanometro a bobina mobile ruotante ha 50 spire e racchiude un'area di 6 cm^2. Il campo magnetico nella regione in cui l'avvolgimento ruota è 0.01 T, ed è radiale. La costante di torsione delle molle di richiamo è $k = 10^{-6}$ N m/grado. Trovare la deflessione angolare dell'avvolgimento per una corrente di 1 mA.

15.45 The coil of a pivoted-coil galvanometer has 50 turns and encloses an area of 6 cm^2. The magnetic field in the region in which the coil swings is 0.01 T, and is radial. The torsional constant of the hairsprings is $k = 10^{-6}$ N m/deg. Find the angular deflection of the coil for a current of 1 mA.

15.46 Una spira di filo a forma di quadrato di lato 0.1 m giace nel piano XY, come illustrato nella Fig. 15–62. Vi è una corrente di 10 A nella spira come illustrato. Se è applicato un campo magnetico parallelo all'asse Z ed avente una intensità $\mathcal{B} = 0.1x$ T (dove x è in m),

15.46 A wire loop in the form of a square of side 0.1 m lies in the XY-plane, as shown in Fig. 15–62. There is a current of 10 A in the loop as shown. If a magnetic field parallel to the Z-axis and having an intensity $\mathcal{B} = 0.1x$ T (where x is in m) is applied,

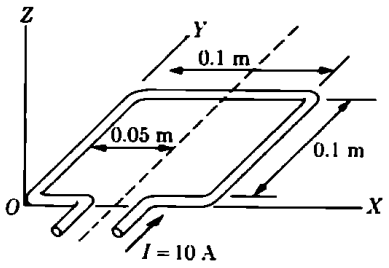


Figura 15–62

Figure 15–62

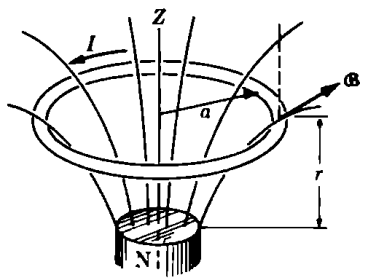


Figura 15–63

Figure 15–63

calcolare (a) la forza risultante sulla spira, e (b) la coppia risultante relativa ad O.

15.47 Ripetere il problema precedente per un campo magnetico che è applicato lungo l'asse X.

15.48 Una spira circolare di raggio a e corrente I ha come asse l'asse Z. Viene prodotto un campo magnetico che ha simmetria assiale attorno all'asse Z e fa un angolo θ con l'asse Z nei punti della spira (Fig. 15–63). (a) Trovare, per ognuna delle due possibili direzioni della corrente, il modulo, la direzione e il verso della forza. (b) Supposto che il circuito sia molto piccolo e possa essere considerato come un dipolo magnetico e che il campo magnetico varii come l'inverso del quadrato della distanza dall'asse ($\mathcal{B} = k/r^2$), dimostrare che la forza sul circuito è $F = \pm M(d\mathcal{B}/dr)$, dove M è il momento di dipolo magnetico, che è orientato lungo l'asse Z. Questo risultato è generale e mostra che un dipolo si muove nella direzione in cui il campo aumenta quando esso è orientato lungo il campo, e nella direzione opposta quando è orientato in senso opposto al campo. (Confrontare coll'angolo risultato per un dipolo elettrico nel Paragrafo 14.11.)

15.49 (a) Calcolare la velocità angolare di precessione di un elettrone dotato di spin, in un campo magnetico di 0.5 T. (b) Calcolare la stessa quantità per un protone nello stesso campo, presumendo che un protone abbia momento della quantità di moto di spin eguale a quello di un elettrone. [*Suggerimento:* Usare i valori γ dati a pagina 516.]

15.50 Calcolare il momento di dipolo magnetico dell'elettrone in un atomo di idrogeno in orbita su una traiettoria circolare ad una distanza di 0.53×10^{-10} m dal protone. Calcolare la velocità di precessione angolare dell'elettrone se esso è in un campo magnetico di 10^{-5} T che forma un angolo di 30° col momento orbitale angolare.

15.51 Calcolare il rapporto giromagnetico γ per un disco rotante di raggio R che porta una carica q uniformemente distribuita sulla sua superficie.

15.52 Ripetere il problema 15.51 per una sfera uniformemente carica in tutto il suo volume [*Suggerimento:* Dividere la sfera in dischi perpendicolari all'asse di rotazione.] Dal risultato di questo problema, che cosa ne concludete circa la struttura dell'elettrone?

15.53 Una unità di misura del campo magnetico che sino a poco tempo fà era frequentemente usata è il *gauss*. La relazione tra il gauss è il tesla è 1 T = 10^4 gauss. Dimostrare che, quando la forza è misurata in dine, la carica in stC, il campo magnetico in gauss e la velocità in cm s^{-1}, la forza magnetica è data da

15.54 Trovare la forza sulla porzione circolare del conduttore nella Fig. 15–64 se la corrente è I ed il campo magnetico uniforme $\mathcal{B}$ è diretto verso l'alto. Dimostrare che essa è la stessa che si avrebbe se il conduttore tra P e Q fosse rettilineo.

calculate (a) the resultant force on the loop, and (b) the resultant torque relative to O.

15.47 Repeat the preceding problem for a magnetic field which is applied along the X-axis.

15.48 A circular loop of radius a and current I is centered on the Z-axis and perpendicular to it. A magnetic field is produced having axial symmetry around the Z-axis and making an angle θ with the Z-axis and the points of the loop (Fig. 15–63). (a) Find, for each of the two possible directions of the current, the magnitude and direction of the force. (b) Assume that the circuit is very small and can be considered as a magnetic dipole, and that the magnetic field follows an inverse-square law ($\mathcal{B} = k/r^2$). Show that the force on the circuit is $F = \pm M(d\mathcal{B}/dr)$, where M is its magnetic dipole moment, which is oriented along the Z-axis. This result is general, and shows that a dipole will move in the direction in which the field increases when it is oriented along the field, and in the opposite direction when it is oriented opposite to the field. (Compare with the similar result for an electric dipole in Section 14.11.)

15.49 (a) Calculate the angular velocity of precession of a spinning electron in a magnetic field of 0.5 T. (b) Calculate the same quantity for a proton in the same field, assuming that a proton spins with the same angular momentum as that of an electron. [*Hint:* Use the γ values given on page 516.]

15.50 Compute the magnetic dipole moment of the electron in a hydrogen atom orbiting in a circular path at a distance of 0.53×10^{-10} m from the proton. Compute the angular precessional velocity of the electron if it is in a magnetic field of 10^{-5} T and is making an angle of 30° with the orbital angular momentum.

15.51 Compute the gyromagnetic ratio γ for a rotating disk of radius R carrying a charge q uniformly distributed over its surface.

15.52 Repeat Problem 15.51 for a sphere uniformly charged throughout its volume. [*Hint:* Divide the sphere into disks perpendicular to the axis of rotation.] From the result of this problem, what do you conclude about the electron's structure?

15.53 A unit of measurement of the magnetic field which until recently was frequently used is the *gauss*. The relation between the gauss and the tesla is 1 T = 10^4 gauss. Show that when the force is measured in dynes, the charge in stC, the magnetic field in gauss, and the velocity in cm s^{-1}, the magnetic force is given by $F = \frac{1}{3} \times 10^{-10} qv \times \mathcal{B}$.

15.54 Find the force on the circular portion of the conductor in Fig. 15–64 if the current is I and the uniform magnetic field $\mathcal{B}$ is directed upward. Show that it is the same as if the conductor between P and Q were straight.

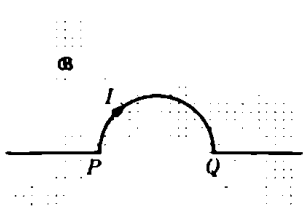


Figura 15–64

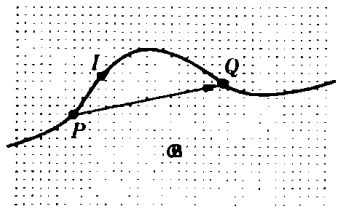


Figura 15–65

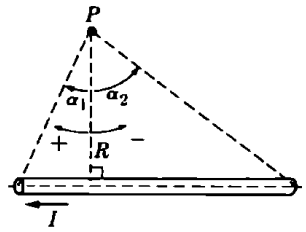


Figura 15–66

15.55 Dimostrare che la forza su di un tratto PQ del filo conduttore rappresentato nella Fig. 15–65, percorso da una corrente I e posto in un campo magnetico uniforme $\mathfrak{B}$, è $I(\vec{PQ}) \times \mathfrak{B}$, ed è pertanto indipendente dalla forma del conduttore. Riferirsi al problema precedente. Concludere da ciò che la forza su una corrente chiusa situata in un campo magnetico uniforme è zero.

15.56 Considerare un avvolgimento di filo a forma di quadrato, di 6 cm di lato, mentre porta una corrente costante di 0.1 A e si trova in un campo magnetico uniforme di intensità 10^{-4} T. (a) Se il piano dell'avvolgimento è inizialmente parallelo al campo magnetico, vi è una coppia agente sull'avvolgimento? (b) Rispondere alla domanda (a) per un avvolgimento che è inizialmente perpendicolare al campo magnetico. (c) Esprimere la coppia in funzione dell'angolo che la normale all'avvolgimento fa col campo magnetico. Fare un grafico della coppia variando l'angolo da 0 a 2π. (d) Se, nel punto in cui non vi è nessuna coppia sull'avvolgimento, l'avvolgimento ha una velocità angolare, che cosa succede?

15.57 Se la situazione è come descritta nel quesito (d) del problema precedente, ma la direzione della corrente elettrica viene istantaneamente rovesciata, cosa succede? Come potreste cambiare la direzione della corrente, per realizzare quanto detto nella prima parte di questo problema? A che servirebbe questo cambiamento?

15.58 Calcolare la intensità del campo magnetico prodotto da un filo infinitamente lungo, che porta una corrente di 1 A, a una distanza di 0.53×10^{-10} m e ad 1 m. Calcolare anche il campo elettrico in questi punti.

15.59 Un lungo filo rettilineo porta una corrente di 1.5 A. Un elettrone viaggia con una velocità di $5 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ parallelamente al filo, a 0.1 m da esso e nello stesso verso della corrente. Quale forza esercita il campo magnetico della corrente sull'elettrone in moto?

15.60 Dimostrare, usando l'Eq. (15.65), che il campo magnetico di una corrente rettilinea è dato dalla Eq. (15.41).

15.61 Dimostrare che il campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea I_1 di lunghezza finita è $(\mu_0 I/2\pi R)(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$, dove R è la distanza secondo la perpendicolare dal punto al filo e α_1 e α_2 sono gli angoli tra le linee dal punto agli estremi della corrente e la perpendicolare alla corrente (vedere Fig. 15–66). Applicare questo risultato per ottenere il campo magnetico nel centro di un circuito quadrato di lato L. [Notare i segni degli angoli.]

15.62 Un lungo filo rettilineo porta una corrente di 10 A lungo l'asse Y. Un campo magnetico uniforme $\mathfrak{B}$, che è di 10^{-6} T, è orientato parallelamente all'asse X. Qual'è il campo magnetico risultante nei seguenti punti: (a) $x = 0$, $z = 2$ m; (b) $x = 2$ m, $z = 0$; (c) $x = 0$, $z = -0{,}5$ m?

15.63 Due lunghi fili rettilinei e paralleli sono separati da una distanza $2a$. Se i fili portano correnti uguali in versi opposti, qual'è il campo magnetico nel piano dei fili e nel punto (a) a metà strada

15.55 Show that the force on a portion PQ of a conducting wire shown in Fig. 15–65, carrying a current I and placed in a uniform magnetic field $\mathfrak{B}$, is $I(\vec{PQ}) \times \mathfrak{B}$, and thus is independent of the shape of the conductor. Apply to the preceding problem. Conclude from this that the force on a closed current placed in a uniform magnetic field is zero.

15.56 Consider a square coil of wire, 6 cm on a side, when it carries a constant current of 0.1 A and is in a uniform magnetic field of strength 10^{-4} T. (a) If the plane of the coil is initially parallel to the magnetic field, is there any torque on the coil? (b) Answer (a) for a coil which is initially perpendicular to the magnetic field. (c) Express the torque as a function of the angle which the normal to the coil makes with the magnetic field. Plot the torque as the angle varies from 0 to 2π. (d) If, at the point where there is no torque on the coil, the coil has an angular velocity, what happens?

15.57 If the state of affairs is as stated in (d) of the previous problem, but the direction of the electric current is instantaneously reversed, what happens? How would you change the direction of the current, as mentioned in the first part of this question? Of what use would this change be?

15.58 Compute the intensity of the magnetic field produced by an infinitely long wire carrying an electric current of 1 A at a distance of 0.53×10^{-10} m and at 1 m. Also compute the electric field at these points.

15.59 A long straight wire carries a current of 1.5 A. An electron travels with a velocity of $5 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ parallel to the wire, 0.1 m from it, and in the same direction as the current. What force does the magnetic field of the current exert on the moving electron?

15.60 Show, by use of Eq. (15.65), that the magnetic field of a rectilinear current is given by Eq. (15.41).

15.61 Show that the magnetic field produced by a rectilinear current I_1 of finite length is $(\mu_0 I/2\pi R)(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$, where R is the perpendicular distance from the point to the wire and α_1 and α_2 are the angles between the lines from the point to the ends of the current and the perpendicular to the current (see Fig. 15–66). Apply this result to obtain the magnetic field at the center of a square circuit of side L. [Note the signs of the angles.]

15.62 A long straight wire carries a current of 10 A along the Y-axis. A uniform magnetic field $\mathfrak{B}$, which is 10^{-6} T, is directed parallel to the X-axis. What is the resultant magnetic field at the following points: (a) $x = 0, z = 2$ m; (b) $x = 2$ m, $z = 0$; (c) $x = 0$, $z = -0.5$ m?

15.63 Two long straight parallel wires are separated by a distance $2a$. If the wires carry equal currents in opposite directions, what is the magnetic field in the plane of the wires and at a point (a) midway be-

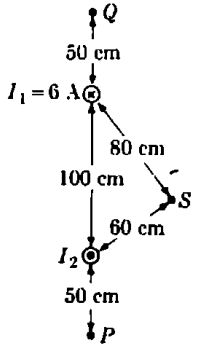


Figura 15–67

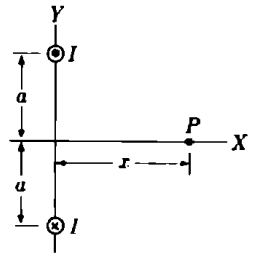


Figura 15–68

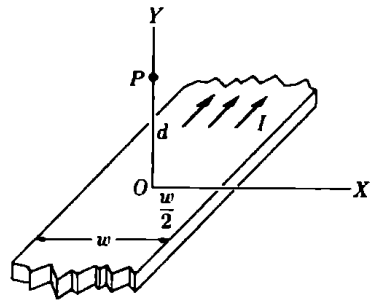


Figura 15–69

Figure 15–67

Figure 15–68

Figure 15–69

tra di essi, e (b) ad una distanza a dall'uno e 3 a dall'altro? (c) Per il caso in cui i fili portano correnti eguali nello stesso verso, rispondere ad (a) e (b).

15.64 Due lunghi fili rettilinei e paralleli sono distanti 100 cm come illustrato nella Fig. 15–67. Il filo superiore porta una corrente I_1 di 6 A in senso entrante nel piano del foglio. (a) Quali devono essere l'intensità ed il senso della corrente I_2 affinchè il campo risultante nel punto P sia zero? (b) Qual'è, in questo caso, il campo risultante in Q? (c) Quale in S?

15.65 La Figura 15.68 è una vista dall'estremità di due lunghi fili paralleli perpendicolari al piano XY, portanti ciascuno una corrente I, ma in sensi opposti. (a) Rappresentare, per mezzo di vettori, il campo magnetico di ogni filo ed il campo magnetico risultante nel punto P. (b) Ricavare l'espressione per il modulo di $\mathcal{B}$ in ogni punto dell'asse X, in termini di coordinate x del punto. (c) Costruire un grafico del modulo di $\mathcal{B}$ in un punto qualsiasi sull'asse X. (d) Per quale valore di x $\mathcal{B}$ è massimo? Ripetere per i punti sull'asse Y.

15.66 Ripetere il Problema 15.65 per correnti che siano nello stesso senso.

15.67 Un avvolgimento strettamente arrotolato ha un diametro di 0,4 m e porta una corrente di 2.5 A. Quante spire ha se il campo magnetico al centro dell'avvolgimento stesso è 1.272×10^{-4} T?

tween them, and (b) at a distance a from one and $3a$ from the other? (c) For a case in which the wires carry equal currents in the same direction, answer (a) and (b).

15.64 Two long straight parallel wires are 100 cm apart, as shown in Fig. 15–67. The upper wire carries a current I_1 of 6 A into the plane of the paper. (a) What must the magnitude and direction of the current I_2 be for the resultant field at point P to be zero? (b) What is then the resultant field at Q? (c) At S?

15.65 Figure 15–68 is an end view of two long parallel wires perpendicular to the XY-plane, each carrying a current I, but in opposite directions. (a) Show, by vectors, the magnetic field of each wire, and the resultant magnetic field at point P. (b) Derive the expression for the magnitude of $\mathcal{B}$ at any point on the X-axis, in terms of the coordinate x of the point. (c) Construct a graph of the magnitude of $\mathcal{B}$ at any point on the X-axis. (d) At what value of x is $\mathcal{B}$ a maximum? Repeat for points on the Y-axis.

15.66 Repeat Problem 15.65 for currents which are in the same direction.

15.67 A closely wound coil has a diameter of 0.4 m and carries a current of 2.5 A. How many turns does it have if the magnetic field at the center of the coil is 1.272×10^{-4} T?

15.68 Un solenoide è lungo 0.3 m ed è avvolto con due strati di filo. Lo strato interno è formato da 300 spire, l'esterno da 250 spire. La corrente è 3 A, nello stesso verso in entrambi gli strati. Qual'è il campo magnetico in un punto vicino al centro del solenoide?

15.69 Un conduttore sottile e piatto di grande lunghezza ha una corrente uniforme di densità j per unità di larghezza. Cioè $I_{totale} = jw$, dove w è la larghezza (Fig. 15.69). (a) Calcolare il campo magnetico in un punto P, situato ad una distanza d perpendicolarmente sopra il centro della striscia, come illustrato. [*Suggerimento:* L'espressione per il campo dovuto ad una lunga striscia rettilinea di larghezza dw è uguale all'espressione per un lungo filo rettilineo.] (b) Qual'è il campo se $d \ll w$; vale a dire, se la striscia diviene un piano infinito?

15.70 Due correnti circolari della stessa intensità I e dello stesso raggio a sono separate da una distanza $2b$, come illustrato in Fig. 15–70. (a) Provare che il campo magnetico nei punti lungo l'asse è dato da

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{(4b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2}x^2 + \frac{15}{8}\frac{(8b^4-12a^2b^2+a^4)}{(a^2+b^2)^4}x^4 + \cdots\right],$$

dove x è misurato dal punto di mezzo tra le due correnti. (b) Verificare che per $a = 2b$, il campo al centro è

15.68 A solenoid is 0.3 m long and is wound with two layers of wire. The inner layer consists of 300 turns, the outer layer of 250 turns. The current is 3 A, in the same direction in both layers. What is the magnetic field at a point near the center of the solenoid?

15.69 A thin flat conductor of great length has a uniform current density j per unit width. That is, $I_{total} = jw$, where w is the width (Fig. 15–69). (a) Calculate the magnetic field at a point P, at a perpendicular distance d above the center of the strip, as shown. [*Hint:* The expression for the field due to a long straight strip of width dw is the same as the expression for a long straight wire.] (b) What is the field if $d \ll w$; that is, if the strip becomes an infinite plane?

15.70 Two circular currents of the same strength I and the same radius a are separated the distance $2b$, as shown in Fig. 15–70. (a) Prove that the magnetic field at points along the axis is given by

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\left[1 + \frac{3}{2}\frac{(4b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2}x^2 + \frac{15}{8}\frac{(8b^4-12a^2b^2+a^4)}{(a^2+b^2)^4}x^4 + \cdots\right],$$

where x is measured from the midpoint between the two currents. (b) Verify that for $a = 2b$, the field at the center is in-

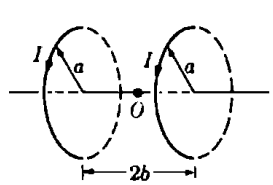


Figura 15–70

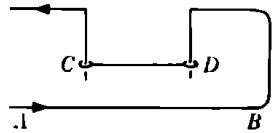


Figura 15–71

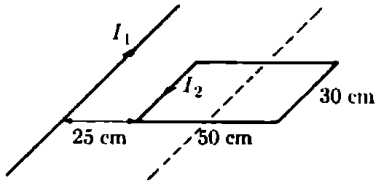


Figura 15–72

Figure 15–70

Figure 15–71

Figure 15–72

indipendente da x sino alla terza potenza. (Questo dispositivo è chiamato *bobine di Helmholtz*, ed è largamente usato in laboratorio per produrre un campo magnetico uniforme in una regione di spazio limitata.) (c) Supponendo che la condizione in (b) sia soddisfatta, trovare in funzione di a il valore di x per il quale il campo differisce dell'1% dal campo nel punto di mezzo.

15.71 Nella Fig. 15–71, un lungo filo orizzontale AB è posato sulla superficie di una tavola. Un altro filo CD, posto sopra il primo, è lungo 1,00 m ed è libero di scorrere su e giù su due guide metalliche verticali C e D. I due fili sono connessi per mezzo dei contatti striscianti e portano una corrente di 50 A. La massa del filo CD è 5×10^{-3} kg m^{-1}. A quale altezza sale il filo CD in condizioni di equilibrio, supposto che la forza magnetica su di esso sia dovuta alla corrente nel filo AB?

15.72 Un lungo filo rettilineo ed una spira rettangolare di filo sono posti sul piano di una tavola (Fig. 15–72). Il lato della spira parallelo al filo è lungo 30 cm, il lato perpendicolare al filo è lungo 50 cm. Le correnti sono $I_1 = 10$ A e $I_2 = 20$ A. (a) Qual'è la forza sulla spira? (b) Qual'è la componente secondo un asse coincidente con il filo rettilineo del momento delle forze applicate alla spira? E secondo un asse coincidente con la linea tratteggiata? Ripetere il calcolo dopo che l'avvolgimento è stato ruotato di 45° attorno all'asse tratteggiato.

15.73 Due lunghi fili paralleli sono appesi con corde di 4 cm di lunghezza ad un asse comune. I fili hanno una massa di 5×10^{-2} kg m^{-1} e portano la stessa corrente in sensi opposti. Qual'è la corrente se le corde pendono con un angolo di 6° rispetto alla verticale?

dependent of x up to the third power. (This arrangement is called *Helmholtz coils*, and is widely used in the laboratory to produce a uniform magnetic field over a limited region of space.) (c) Assuming that the condition in (b) is fulfilled, find the value of x in terms of a for which the field differs by 1% from the field at the midpoint.

15.71 A long horizontal wire AB in Fig. 15–71 rests on the surface of a table. Another wire CD, vertically above the first, is 1.00 m long and is free to slide up and down on the two vertical metal guides C and D. The two wires are connected through the sliding contacts and carry a current of 50 A. The mass of the wire CD is 5×10^{-3} kg m^{-1}. To what equilibrium height will the wire CD rise, assuming that the magnetic force on it is due to the current in the wire AB?

15.72 A long straight wire and a rectangular wire frame lie on a table top (Fig. 15–72). The side of the frame parallel to the wire is 30 cm long, the side perpendicular to the wire is 50 cm long. The currents are $I_1 = 10$ A and $I_2 = 20$ A. (a) What is the force on the loop? (b) What is the torque on the loop about the straight wire as an axis? About the dashed lined as an axis? (c) Find the torque after the coil has been rotated 45° about the dashed axis.

15.73 Two long parallel wires are hung by cords 4 cm in length from a common axis. The wires have a mass of 5×10^{-2} kg m^{-1} and carry the same current in opposite directions. What is the current if the cords hang at an angle of 6° with the vertical?

15.74 Nella Fig. 15–68 un terzo filo lungo e rettilineo, parallelo agli altri due, passa per il punto P. Ogni filo porta una corrente $I = 20$ A. Sia $a = 0.30$ m e $x = 0{,}4$ m. Trovare il modulo, la direzione e il verso della forza per unità di lunghezza sul terzo filo (a) se la corrente in esso è in senso uscente dal piano del foglio, (b) se la corrente è in senso entrante nel piano del foglio.

15.75 L'osservatore O' si muove relativamente all'osservatore O con una velocità v parallelamente all'asse comune X. Due cariche q_1 e q_2 sono a riposo relativamente ad O', separate dalla distanza r', e poste lungo l'asse X, secondo quanto misurato da O'. Trovare le forze su ciascuna carica come rilevate da O' e da O. Ripetere il problema, supponendo che le cariche siano sull'asse Y'.

15.76 Con riferimento all'Eq. (15.64), che dà il campo elettrico di una carica puntiforme, trovare il rapporto tra il campo elettrico in un piano passante per la carica e perpendicolare alla direzione del moto, e il campo lungo la direzione del moto per punti alla stessa distanza dalla carica. Considerare valori di v/c eguali a 0, 0.1, 0.5, e 0.9.

15.77 Valutare il rapporto tra i valori relativistici e non relativistici del campo elettrico prodotto da una carica in moto in un punto del piano passante per la carica e perpendicolare alla direzione del moto. Considerare valori di v/c eguati a 0, 0.1, 0.5, e 0.9.

15.78 Valutare il rapporto tra i valori relativistici e non relativistici del campo magnetico prodotto da una carica in moto,

15.74 In Fig. 15–68, a third long straight wire, parallel to the other two, passes through point P. Each wire carries a current $I = 20$ A. Let $a = 0.30$ m and $x = 0.4$ m. Find the magnitude and direction of the force per unit length on the third wire (a) if the current in it is away from the plane of the paper, (b) if the current is toward the plane of the paper.

15.75 Observer O' moves relative to observer O with a velocity v parallel to the common X-axis. Two charges q_1 and q_2 are at rest relative to O', separated the distance r', and placed along the X-axis, as measured by O'. Find the forces on each charge as recorded by O' and O. Repeat the problem, assuming that the charges are on the Y'-axis.

15.76 Referring to Eq. (15.64), which gives the electric field of a point charge, find the ratio between the electric field in a plane through the charge perpendicular to the direction of motion and the field along the direction of motion for points at the same distance from the charge. Consider values of v/c equal to 0, 0.1, 0.5, and 0.9.

15.77 Evaluate the ratio between the relativistic and nonrelativistic values of the electric field produced by a moving charge at a point on the plane through the charge perpendicular to the direction of motion. Consider values of v/c equal to 0, 0.1, 0.5, and 0.9.

15.78 Evaluate the ratio between the relativistic and nonrelativistic values of the magnetic field produced by a moving

in un punto sul piano passante per la carica e perpendicolare alla direzione del moto. Considerare valori di v/c eguali a 0, 0.1, 0.5, e 0.9.

15.79 Considerare due elettroni in moto su traiettorie rettilinee e parallele separate da 0.1 mm. (a) Se essi si muovono l'uno accanto all'altro alla stessa velocità di 10^6 m s^{-1}, trovare le forze elettriche e magnetiche tra di loro, come rilevate dall'osservatore nel laboratorio (assumendo che 10^6 m s^{-1} possa essere considerata una velocità non relativistica). (b) Qual'è la forza secondo un osservatore in moto con gli elettroni? (c) Ripetere quanto sopra per il caso di velocità 2.4×10^8 m s^{-1}, che è relativistica.

Figura 15–73

15.80 Un protone che ha una energia di 30 GeV passa ad una distanza di 10^{-7} m da uno ione. Considerando che il protone ha velocità relativistica, (a) trovare l'angolo α per il quale il campo elettrico sullo ione è 5% del campo nel momento in cui il protone è alla distanza di massimo avvicinamento allo ione. (b) Valutare la durata dell'impulso al quale lo ione è soggetto e la sua variazione di quantità di moto, considerando che essa è essenzialmente dovuta all'effetto del campo entro l'angolo trovato in (a). Ripetere il calcolo nel caso che la particella che passa sia un elettrone con la stessa energia, invece di un protone. (Vedere Fig. 15—73.)

15.81 Usando l'espressione relativistica (15.65) del campo magnetico di una carica in moto, ottenere l'espressione del campo magnetico di una corrente rettilinea.

15.82 Usando la regola generale per la trasformazione relativistica delle forze (Problema 11.29), ottenere le trasformazioni relativistiche dei campi elettromagnetici, equazioni (15.58) e (15.60).

15.83 Usando le equazioni (15.58) e (15.60) provare che le quantità $\mathcal{E}\cdot\mathcal{B}$ e $\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2$ sono invarianti rispetto ad una trasformazione Lorentz.

15.84 Una particella di carica q e massa m si muove in una regione dove sono presenti un campo elettrico $\mathcal{E}$ ed un campo magnetico $\mathcal{B}$. Dimostrare che se il moto della particella è riferito ad un sistema di riferimento rotante con la frequenza di Larmor della particella, $\omega_L = -q\mathcal{B}/2m$ (vedere Eq. 15.7), la sua equazione di moto diviene $m\boldsymbol{a}' = q[\mathcal{E} + (m/q)\omega_L \times (\omega_L \times r)]$. Calcolare il valore di ω_L per un elettrone e verificare che l'ultimo termine è trascurabile. Con questa approssimazione, l'equazione di moto della particella relativamente al sistema rotante diviene $m\boldsymbol{a}' = q\mathcal{E}$. Se noi confrontiamo questo risultato con l'Esempio 15.4, esso ci indica come ricondurre il problema ad uno in cui non interviene il campo magnetico. [*Suggerimento:* Usare le formule del Paragrafo 6.4 per esprimere l'accelerazione e la velocità della particella relativamente al sistema rotante.]

charge at a point on the plane through the charge perpendicular to the direction of motion. Consider values of v/c equal to 0, 0.1, 0.5, and 0.9.

15.79 Consider two electrons moving in straight parallel paths separated by 0.1 mm. (a) If they are moving side by side at the same velocity of 10^6 m s^{-1}, find the electric and magnetic forces between them, as seen by a laboratory observer (assuming that 10^6 m s^{-1} can be considered a nonrelativistic velocity). (b) What is the force according to an observer moving with the electrons? (c) Repeat the above for the case of velocity 2.4×10^8 m s^{-1}, which is relativistic.

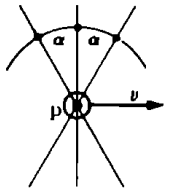


Figure 15–73

15.80 A proton having an energy of 30 GeV passes at a distance of 10^{-7} m from an ion. Since the proton must be considered relativistically, (a) find the angle α for which the electric field at the ion is 50% of the field when the proton is at its distance of closest approach to the ion. (b) Estimate the duration of the impulse to which the ion is subject and its change in momentum, considering it is essentially the result of the field within the angle found in (a). Repeat if the passing particle is an electron with the same energy, instead of a proton. (See Fig. 15–73.)

15.81 Using the relativistic expression (15.65) for the magnetic field of a moving charge, obtain the expression for the magnetic field of a rectilinear current.

15.82 Using the general rule for the relativistic transformation of force (Problem 11.29), obtain the relativistic transformations of the electromagnetic fields, Eqs. (15.58) and (15.60).

15.83 Using Eqs. (15.58) and (15.60), prove that the quantities $\mathcal{E}\cdot\mathcal{B}$ and $\mathcal{E}^2 - \mathcal{B}^2$ are invariant with respect to a Lorentz transformation.

15.84 A particle of charge q and mass m moves in a region where an electric field $\mathcal{E}$ and a magnetic field $\mathcal{B}$ are present. Show that if the motion of the particle is referred to a frame of reference rotating with the Larmor frequency of the particle, $\omega_L = -q\mathcal{B}/2m$ (see Eq. 15.7), its equation of motion becomes $m\boldsymbol{a}' = q[\mathcal{E} + (m/q)\omega_L \times (\omega_L \times r)]$. Estimate the value of ω_L for an electron and verify that the last term is negligible. Under this approximation the equation of motion of the particle relative to the rotating frame becomes $m\boldsymbol{a}' = q\mathcal{E}$. If we compare this result with Example 15.4, it shows us how to eliminate the effect of a magnetic field. [*Hint:* Use the formulas of Section 6.4 to express the acceleration and velocity of the particle relative to the rotating frame.]

16
CAMPI ELETTROMAGNETICI STATICI

16.1 Introduzione
16.2 Flusso di un campo vettoriale
16.3 Legge di Gauss per il campo elettrico
16.4 Legge di Gauss in forma differenziale
16.5 Polarizzazione della materia
16.6 Spostamento elettrico
16.7 Calcolo della suscettibilità elettrica
16.8 Capacità elettrica; condensatori
16.9 Energia del campo elettrico
16.10 Conduttività elettrica: legge di Ohm
16.11 Forza elettromotrice
16.12 Legge di Ampère per il campo magnetico
16.13 Legge di Ampère in forma differenziale
16.14 Flusso magnetico
16.15 Magnetizzazione della materia
16.16 Il campo magnetizzante
16.17 Calcolo della suscettibilità magnetica
16.18 Riassunto delle leggi per campi statici

16
STATIC ELECTROMAGNETIC FIELDS

16.1 Introduction
16.2 Flux of a Vector Field
16.3 Gauss' Law for the Electric Field
16.4 Gauss' Law in Differential Form
16.5 Polarization of Matter
16.6 Electric Displacement
16.7 Calculation of Electric Susceptibility
16.8 Electric Capacity; Capacitors
16.9 Energy of the Electric Field
16.10 Electrical Conductivity; Ohm's Law
16.11 Electromotive Force
16.12 Ampère's Law for the Magnetic Field
16.13 Ampère's Law in Differential Form
16.14 Magnetic Flux
16.15 Magnetization of Matter
16.16 The Magnetizing Field
16.17 Calculation of Magnetic Susceptibility
16.18 Summary of the Laws for Static Fields

16.1 Introduzione

Nei due capitoli precedenti abbiamo discusso le interazioni elettromagnetiche e considerato il moto di particelle cariche risultante da tali interazioni. Nell'analizzare le interazioni elettromagnetiche, abbiamo introdotto il concetto di campo elettromagnetico. In questo capitolo e nel prossimo discuteremo in dettaglio le caratteristiche del campo elettromagnetico considerando il campo come un'entità indipendente. Esamineremo in questo capitolo il campo elettromagnetico statico indipendente dal tempo, studiando dapprima il campo elettrico e poi il campo magnetico. Nel Capitolo 17, verrà considerato il campo elettromagnetico dipendente dal tempo.

16.2 Flusso di un campo vettoriale

Discutiamo anzitutto il *flusso di un campo vettoriale*. È questo un concetto di grande utilità in molti problemi di fisica e comparirà spesso in questo capitolo e nei successivi. Consideriamo una superficie S posta in una regione dove vi è un campo vettoriale $\boldsymbol{V}$ (Fig. 16–1). Dividiamo la superficie in superficie molto piccole (o infinitesime) di aree dS_1, dS_2, dS_3, ... Su ciascuna di esse possiamo disegnare un vettore unitario $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots$ perpendicolare alla superficie in quel punto. I vettori unitari sono orientati nel senso dell'avanzamento di una vite destrorsa che venga ruotata nel verso secondo cui decidiamo di orientare il bordo della superficie, in accordo con la convenzione introdotta nel Paragrafo 3.10. Se la superficie è chiusa, i vettori $\boldsymbol{u}_N$ sono orientati verso l'esterno. Siano $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ gli angoli fra i vettori normali $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots$ e i vettori del campo $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{V}_3, \ldots$ in ogni punto della superficie. Allora, per definizione, il *flusso* Φ del campo vettoriale $\boldsymbol{V}$ attraverso la superficie S è

$$\Phi = V_1\,dS_1\cos\theta_1 + V_2\,dS_2\cos\theta_2 + V_3\,dS_3\cos\theta_3 + \cdots$$
$$= \boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{u}_1\,dS_1 + \boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{u}_2\,dS_2 + \boldsymbol{V}_3\cdot\boldsymbol{u}_3\,dS_3 + \cdots,$$

oppure

$$\Phi = \int_S V\cos\theta\,dS = \int_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS, \tag{16.1}$$

dove l'integrale è esteso a tutta la superficie, come indicato dall'indice S. Per questo, un'espressione come l'Eq. (16.1) è chiamata un *integrale di superficie*. A causa del fattore $\cos\theta$ nell'Eq. (16.1), il flusso attraverso l'elemento di superficie dS può essere positivo o negativo, a seconda che θ sia minore o maggiore di $\pi/2$. Se il campo $\boldsymbol{V}$ è tangente o parallelo all'elemento di superficie dS, l'angolo θ è $\pi/2$ e $\cos\theta = 0$, per cui il flusso attraverso dS è nullo. Anche il flusso totale Φ può essere positivo, negativo, o nullo. Quando è positivo, il flusso è "uscente," e quando è negativo è "entrante." Se la superficie è chiusa, come avviene per una sfera o un ellissoide, il segno di integrale viene munito di un circoletto, cosicchè l'Eq. (16.1) diventa

$$\Phi = \oint_S V\cos\theta\,dS = \oint_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS. \tag{16.2}$$

Il nome di flusso dato all'integrale dell'Eq. (16.1) è dovuto alla sua applicazione nello studio del moto di fluidi. Supponiamo di avere un flusso di particelle, che si muovono tutte verso

16.1 Introduction

In the two preceding chapters we discussed electromagnetic interactions and considered the motion of charged particles as a result of these interactions. In analyzing electromagnetic interactions, we introduced the concept of the electromagnetic field. In this chapter and the next, we shall discuss in detail the characteristics of the electromagnetic field itself, considering the field as an independent entity. We shall examine the static or time-independent electromagnetic field in this chapter, first studying the electric field and then the magnetic field. In Chapter 17 the time-dependent electromagnetic field will be considered.

16.2 Flux of a Vector Field

Let us first discuss the *flux of a vector field*. This is a concept of great usefulness in many physical problems and it will appear many times in this and succeeding chapters. Consider a surface S placed in a region where there is a vector field $\boldsymbol{V}$ (Fig. 16–1). We divide the surface into very small (or infinitesimal) surfaces of areas dS_1, dS_2, dS_3, ... We may draw at each of them a unit vector $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, ... perpendicular to the surface at that point. The unit vectors are oriented in the sense of advance of a right-handed screw rotated in the sense in which we may decide to orient the rim of the surface, according to the convention stated in Section 3.10. If the surface is closed, the vectors $\boldsymbol{u}_N$ are oriented in the outward direction. Let θ_1, θ_2, θ_3, ... be the angles between the normal vectors $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, ... and the field vectors $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$, ... at each point on the surface. Then, by definition, the *flux* Φ of the vector field $\boldsymbol{V}$ through the surface S is

$$\Phi = V_1\,dS_1\cos\theta_1 + V_2\,dS_2\cos\theta_2 + V_3\,dS_3\cos\theta_3 + \cdots$$
$$= \boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{u}_1\,dS_1 + \boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{u}_2\,dS_2 + \boldsymbol{V}_3\cdot\boldsymbol{u}_3\,dS_3 + \cdots,$$

or

$$\Phi = \int_S V\cos\theta\,dS = \int_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS, \tag{16.1}$$

where the integral extends over all the surface, as indicated by the subscript S. For that reason an expression like Eq. (16.1) is called a *surface integral*. Because of the $\cos\theta$ factor in Eq. (16.1), the flux through the surface element dS may be positive or negative, depending on whether θ is smaller or larger than $\pi/2$. If the field $\boldsymbol{V}$ is tangent or parallel to the surface element dS, the angle θ is $\pi/2$ and $\cos\theta = 0$, resulting in zero flux through dS. The total flux Φ may also be positive, negative, or zero. When it is positive the flux is "outgoing" and when it is negative the flux is "incoming." If the surface is closed, such as it is for a sphere or an ellipsoid, a circle is written on top of the integral sign, so that Eq. (16.1) becomes

$$\Phi = \oint_S V\cos\theta\,dS = \oint_S \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS. \tag{16.2}$$

The name flux given to the integral in Eq. (16.1) is due to its application in the study of fluid flow. Suppose that we have a stream of particles, all moving to the

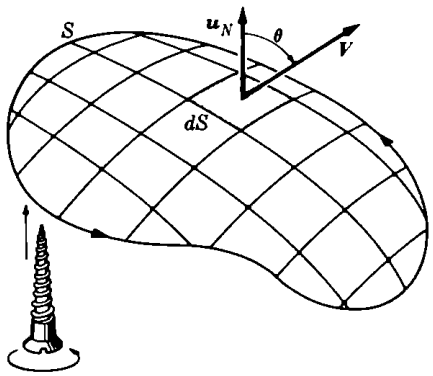


Fig. 16–1. Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

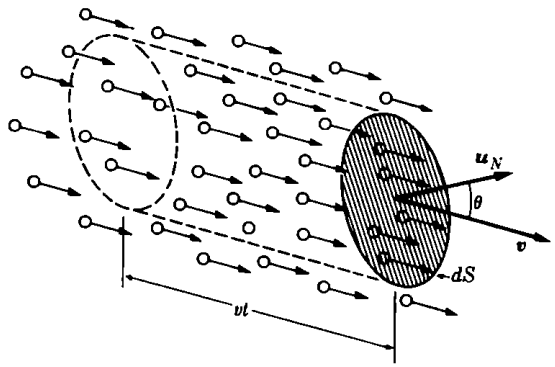


Fig. 16–2. Flusso di particelle attraverso un'area.

Fig. 16–1. Flux of a vector field through a surface.

Fig. 16–2. Flux of particles through an area.

destra con velocità v. Le particelle che in un tempo t attraversano una superficie dS (Fig. 16–2) sono contenute in un cilindro di base dS, con la generatrice parallela a v e di lunghezza uguale a vt. Il suo volume è $vt\ dS \cos\theta$. Se vi sono n particelle per unità di volume, il numero totale di particelle che attraversano dS nel tempo t è $nvt\ dS \cos\theta$, e il numero che passa nell'unità di tempo, o *flusso delle particelle*, è $nv\ dS \cos\theta = n\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_N\ dS$. Quindi, il flusso totale di particelle attraverso una superficie S è

right with velocity v. Those particles passing through a surface dS (Fig. 16–2) in time t will be contained in a cylinder whose base is dS, whose generatrix is parallel to v, and which has a length equal to vt. This volume is $vt\ dS \cos\theta$. Given that there are n particles per unit volume, the total number of particles passing through dS in time t is $nvt\ dS \cos\theta$, and the number passing per unit time, or the *flux of particles*, is $nv\ dS \cos\theta = n\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_N\ dS$. The total flux of particles through a surface S is then

$$\Phi = \int_S n\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_N\ dS.$$

Questa espressione è simile all'Eq. (16.1), con il campo vettoriale V eguale a nv. Bisogna però tenere presente che il nome di "flusso" applicato all'Eq. (16.1) non significa, in generale, che alcunchè si muova attraversando la superficie.

This is an expression similar to Eq. (16.1), with the vector field V equal to nv. It must be realized, however, that the name "flux" as applied to Eq. (16.1) does not, in general, mean the actual motion of something through the surface.

ESEMPIO 16.1. Esprimere la corrente elettrica attraverso una superficie come flusso di una densità di corrente.

EXAMPLE 16.1. Express the electric current through a surface as a flux of a current density.

Soluzione: Abbiamo visto che $n\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_N\ dS$ rappresenta il numero di particelle passanti attraverso la superficie dS nell'unità di tempo. Ammesso che ogni particella trasporti una carica q, la carica che attraversa la superficie dS nell'unità di tempo è

Solution: We have seen that $n\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_N\ dS$ expresses the number of particles passing through the surface dS per unit time. Assuming that each particle carries a charge q, the charge passing through the surface dS per unit time is

$$qn\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_N\ dS = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N\ dS,$$

dove $j = nqv$ è la densità di corrente così come è stata definita nell'Eq. (15.12). Perciò, la carica totale che attraversa una superficie S nell'unità di tempo (cioè, la corrente elettrica attraverso la superficie) è

where $j = nqv$ is the current density as defined in Eq. (15.12). Therefore the total charge passing through a surface S per unit time (i.e., the electric current through the surface) is

$$I = \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N\ dS.$$

In altre parole, la corrente elettrica attraverso una superficie è uguale al flusso della densità di corrente elettrica attraverso tale superficie. Se la densità di corrente è uniforme, e la superficie è piana, l'equazione si riduce a

In other words, the electric current through a surface is equal to the flux of the electric current density through that surface. If the current density is uniform, and the surface plane, the equation reduces to

$$I = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N S = jS\cos\theta.$$

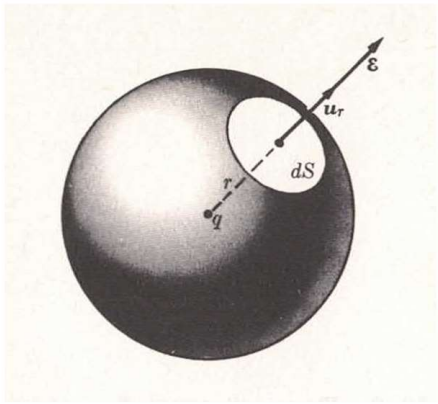


Fig. 16–3. Flusso elettrico di una carica puntiforme attraverso una sfera.

Fig. 16–4. Il flusso elettrico attraverso sfere concentriche che circondano la stessa carica è il medesimo.

Fig. 16–3. Electric flux of a point charge through a sphere.

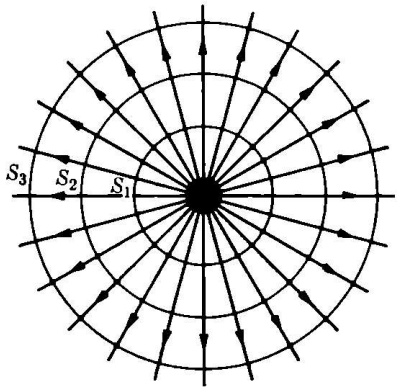


Fig. 16–4. The electric flux through concentric spheres surrounding the same charge is the same.

I. IL CAMPO ELETTRICO

16.3 La legge di Gauss per il campo elettrico

Consideriamo una carica puntiforme q (Fig. 16–3) e calcoliamo il flusso del campo elettrico $\mathcal{E}$ da essa prodotto attraverso una superficie sferica avente il centro coincidente con la carica. Se r è il raggio della sfera, il campo elettrico prodotto in ogni punto della superficie sferica è

Il vettore unitario normale ad una sfera coincide con il vettore unitario $\boldsymbol{u}_r$ lungo la direzione radiale. Perciò, l'angolo θ fra il campo elettrico $\mathcal{E}$ e il vettore unitario normale $\boldsymbol{u}_r$ è nullo, e $\cos\theta = 1$. Osservando che il campo elettrico ha lo stesso valore in tutti i punti della superficie sferica e che l'area della sfera è $4\pi r^2$, vediamo che l'Eq. (16.2) dà per il flusso elettrico $\Phi_\mathcal{E}$ l'espressione

Il flusso elettrico attraverso la sfera è perciò proporzionale alla carica e indipendente dal raggio della superficie. Perciò, se tracciamo attorno alla carica q più superficie sferiche concentriche S_1, S_2, S_3, ... (Fig. 16–4), il flusso elettrico è lo stesso attraverso ognuna di tali superficie ed è uguale a q/ϵ_0. Questo risultato deriva dalla dipendenza del campo da $1/r^2$, e vale anche per il campo gravitazionale di una massa dato dall'Eq. (13.15). Il flusso del campo gravitazionale si ottiene sostituendo $q/4\pi\epsilon_0$ con γm, dove m è la massa *entro* la superficie. Questa sostituzione dà

I. THE ELECTRIC FIELD

16.3 Gauss' Law for the Electric Field

Let us now consider a point charge q (Fig. 16–3) and let us compute the flux of its electric field $\mathcal{E}$ through a spherical surface concentric with the charge. Given that r is the radius of the sphere, the electric field produced by the charge at each point of the spherical surface is

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\boldsymbol{u}_r.$$

The unit vector normal to a sphere coincides with the unit vector $\boldsymbol{u}_r$ along the radial direction. Therefore the angle θ between the electric field $\mathcal{E}$ and the normal unit vector $\boldsymbol{u}_r$ is zero, and $\cos\theta = 1$. Noting that the electric field has the same magnitude at all points of the spherical surface and that the area of the sphere is $4\pi r^2$, we see that Eq. (16.2) gives the electric flux $\Phi_\mathcal{E}$ as

$$\Phi_\mathcal{E} = \oint_S \mathcal{E}\,dS = \mathcal{E}\oint_S dS = \mathcal{E}S = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

The electric flux through the sphere, then, is proportional to the charge and independent of the radius of the surface. Therefore, if we draw several concentric spherical surfaces S_1, S_2, S_3, ... (Fig. 16–4) around the charge q, the electric flux through all of them is the same and equal to q/ϵ_0. This result is due to the $1/r^2$ dependence of the field, and applies also to the gravitational field of a mass given by Eq. (13.15). The flux of the gravitational field is found by replacing $q/4\pi\epsilon_0$ with γm, where m is the mass *inside* the surface. This substitution yields

$$\Phi_\mathcal{G} = 4\pi\gamma m.$$

External charge = Carica esterna
Internal charge = Carica interna

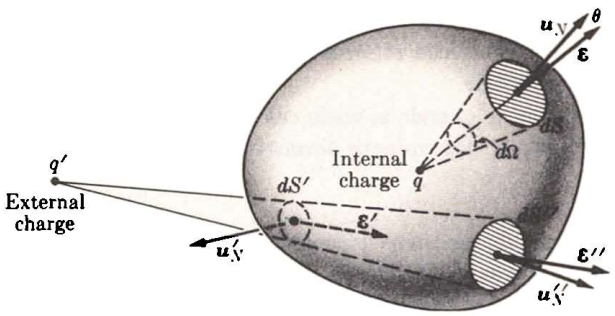


Fig. 16–5. Il flusso elettrico attraverso una superficie chiusa che circonda una carica è indipendente dalla forma della superficie.

Fig. 16–5. The electric flux through a closed surface surrounding a charge is independent of the shape of the surface.

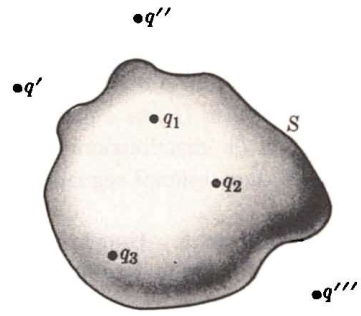


Fig. 16–6. Il flusso elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è proporzionale alla carica netta contenuta entro la superficie.

Fig. 16–6. The electric flux through any closed surface is proportional to the net charge contained within the surface.

Consideriamo ora una carica q *dentro* una arbitraria superficie *chiusa* S (Fig. 16–5). Il flusso attraverso S del campo elettrico prodotto da q è dato da

Next consider a charge q *inside* an arbitrary *closed* surface S (Fig. 16–5). The total flux through S of the electric field produced by q is given by

$$\Phi_\varepsilon = \oint_S \varepsilon \cos\theta \, dS = \oint_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \, dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{dS \cos\theta}{r^2}.$$

Ma $dS \cos\theta/r^2$ è l'angolo solido $d\Omega$ sotto cui l'elemento di superficie dS è visto dalla carica q (ricordate l'Eq. 2.8). Poichè l'angolo solido totale attorno a un punto è 4π, vediamo che

But we have that $dS \cos\theta/r^2$ is the solid angle $d\Omega$ subtended by the surface element dS as viewed from the charge q (remember Eq. 2.8). Since the total solid angle around a point is 4π, we then see that

$$\Phi_\varepsilon = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (4\pi) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Questo risultato coincide con quello precedentemente trovato per una superficie sferica con il centro nella carica, e vediamo così che esso è valido per qualsiasi superficie chiusa, indipendentemente dalla posizione della carica entro la superficie. Se una carica, ad esempio q', è posta *esternamente* ad una superficie chiusa, il flusso elettrico è nullo, perchè il flusso entrante è uguale al flusso uscente; perciò ne risulta un flusso netto che è nullo. Per esempio, il flusso elettrico di q' attraverso dS' è uguale in modulo, ma di segno opposto, al flusso elettrico attraverso dS'', e perciò la loro somma è nulla.

Se vi sono diverse q_1, q_2, q_3, ... entro la superficie arbitraria S (Fig. 16–6), il flusso elettrico totale sarà la somma dei flussi prodotti da ciascuna carica. Possiamo allora enunciare la *legge di Gauss:*

This is the same as our previous result for a spherical surface concentric with the charge, and thus we see that it is valid for any closed surface, irrespective of the position of the charge within the surface. If a charge such as q' is *outside* a closed surface, the electric flux is zero, because the incoming flux is equal to the outgoing flux; hence a net flux of zero results. For example, the electric flux of q' through dS' is equal in magnitude, but opposite in sign, to the electric flux through dS'', and therefore they add to zero.

If there are several charges $q_1, q_2, q_3, \ldots$ inside the arbitrary surface S (Fig. 16–6), the total electric flux will be the sum of the fluxes produced by each charge. We may then state *Gauss' law:*

il flusso elettrico attraverso una superficie chiusa racchiudente cariche q_1, q_2, q_3, ... è

The electric flux through a closed surface surrounding charges q_1, q_2, q_3, ... is

$$\Phi_\varepsilon = \oint_S \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_N \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}, \tag{16.3}$$

dove $q = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots$ è la carica totale netta contenuta entro la superficie chiusa.

where $q = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots$ is the total net charge inside the closed surface.

Se non vi sono cariche *entro* la superficie chiusa, o se la carica netta è nulla, il flusso elettrico totale attraverso essa è nullo. Le cariche *esterne* alla superficie chiusa, come q', q'', . . ., non contribuiscono al flusso totale.

La legge di Gauss è particolarmente utile quando si vuole calcolare il campo elettrico prodotto da distribuzioni di carica aventi determinate simmetrie geometriche, come appare dagli esempi seguenti.

ESEMPIO 16.2. Usando la legge di Gauss, discutere il campo elettrico creato da (a) una carica distribuita uniformemente su di un piano, (b) due piani paralleli con cariche uguali ma di segno opposto.

Soluzione: (a) Consideriamo il piano della Fig. 16–7, su cui si trova una carica σ per unità di superficie. Per la simmetria del problema, le linee di forza sono perpendicolari al piano e, se la carica è positiva, esse hanno il verso indicato nella figura. Scegliendo come superficie chiusa il cilindro mostrato nella figura, possiamo scomporre il flusso elettrico $\Phi_\mathcal{E}$ in tre termini: il flusso attraverso S_1 che vale $+\mathcal{E}S$, dove S è l'area della base del cilindro; il flusso attraverso S_2, che vale anch'esso $+\mathcal{E}S$, poichè, per simmetria, il campo elettrico deve avere lo stesso modulo, ma verso opposto, in punti a uguale distanza dalle due parti del piano; infine, il flusso attraverso la superficie laterale del cilindro, che vale zero perchè il campo elettrico è parallelo alla superficie. Perciò, abbiamo $\Phi_\mathcal{E} = 2\mathcal{E}S$. La carica entro la superficie chiusa è quella contenuta nell'area tratteggiata ed è uguale a $q = \sigma S$. Perciò, applicando la legge di Gauss, Eq. (16.3), abbiamo $2\mathcal{E}S = \sigma S/\epsilon_0$, oppure

risultato che mostra che il campo elettrico è indipendente dalla distanza dal piano e perciò è uniforme. Il potenziale elettrico, usando la relazione $\mathcal{E} = -dV/dx$ e assumendo nullo il potenziale del piano, è allora

Questi risultati sono identici a quelli dell'Esempio 13.8 per il caso gravitazionale se sostituiamo γ con $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ (vedi anche il Problema 14.62). Lo studente può rendersi conto che il metodo qui usato è molto più semplice a causa della simmetria del problema.

If no charges are present *inside* the closed surface, or if the net charge is zero, the total electric flux through it is zero. The charges *outside* the closed surface, such as q', q'', . . . , do not contribute to the total flux.

Gauss' law is particularly useful when we wish to compute the electric field produced by charge distributions having certain geometrical symmetries, as shown in the following examples.

EXAMPLE 16.2. Using Gauss' law, discuss the electric field created by (a) a charge uniformly distributed over a plane, (b) two parallel planes with equal but opposite charges.

Solution: (a) Let us consider the plane of Fig. 16–7, which carries a charge σ per unit area. The symmetry of the problem indicates that the lines of force are perpendicular to the plane, and if the charge is positive they are oriented as indicated in the figure. Choosing for our closed surface the cylinder shown in the figure, we may separate the electric flux $\Phi_\mathcal{E}$ into three terms: The flux through S_1 which is $+\mathcal{E}S$, where S is the area of the base of the cylinder; the flux through S_2, which is also $+\mathcal{E}S$ since, by symmetry, the electric field must be the same in magnitude and opposite in direction at points at the same distance on both sides of the plane; and the flux through the lateral surface of the cylinder, which is zero because the electric field is parallel to the surface. Therefore we have $\Phi_\mathcal{E} = 2\mathcal{E}S$. The charge inside the closed surface is that in the shaded area and is equal to $q = \sigma S$. Therefore, applying Gauss' law, Eq. (16.3), we have $2\mathcal{E}S = \sigma S/\epsilon_0$, or

$$\mathcal{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

a result that indicates that the electric field is independent of the distance to the plane and is therefore uniform. The electric potential, using the relation $\mathcal{E} = -dV/dx$ and assuming that the potential of the plane is zero, is then

$$V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x.$$

These results are identical to those of Example 13.8 for the gravitational case if we replace γ by $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ (also see Problem 14.62). The student can appreciate that the present technique is much simpler because of the symmetry of the problem.

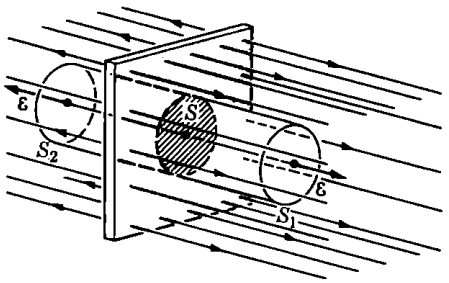


Fig. 16–7. Campo elettrico di una superficie piana uniformemente carica.

Fig. 16–8. Campo elettrico tra una coppia di superficie piane, parallele, recanti cariche uguali ma opposte.

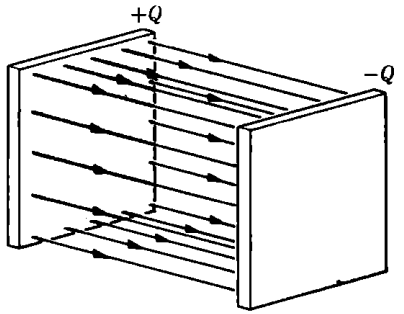


Fig. 16–7. Electric field of a uniformly charged plane surface.

Fig. 16–8. Electric field between a pair of plane parallel surfaces carrying equal but opposite charges.

(b) La Figura 16–8 mostra due piani paralleli con cariche uguali, ma opposte di segno. Notiamo che nello spazio esterno ai due piani recanti cariche opposte vi sono campi elettrici uguali in modulo, di verso opposto, per cui dànno un campo risultante nullo. Nella regione compresa fra i piani invece, i campi hanno lo stesso verso e il campo risultante è il doppio del campo prodotto da un singolo piano, cioè vale $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_0$. Dunque i due piani paralleli recanti cariche di segno opposto producono un campo uniforme contenuto nella regione di spazio da essi delimitata.

ESEMPIO 16.3. Usando il teorema di Gauss, discutere il campo elettrico creato da una distribuzione sferica di carica.

Soluzione: Questo problema è già stato discusso in maniera differente nel Paragrafo 13.7 nel caso del campo gravitazionale di un corpo sferico. Consideriamo una sfera di raggio a e carica Q 16–9). La simmetria del problema richiede che il campo in ogni punto sia radiale e dipenda solo dalla distanza r del punto dal centro della sfera. Perciò, tracciata una superficie sferica di raggio r concentrica con la sfera carica, troviamo che il flusso elettrico attraverso essa vale

Considerando dapprima $r > a$, troviamo che la carica contenuta entro la superficie S è la carica totale Q della sfera. Quindi, applicando la legge di Gauss, Eq. (16.3), otteniamo $\mathcal{E}(4\pi r^2) = Q/\epsilon_0$, e cioè

Questo è lo stesso risultato ottenuto per il campo prodotto da una carica puntiforme. Quindi *il campo elettrico in punti al di fuori di una sfera carica è lo stesso che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata nel suo centro.*

Figura 16–9

Considerando poi $r < a$, abbiamo due possibilità. Se tutta la carica è sulla superficie della sfera carica, la carica totale entro la superficie sferica S' è nulla, e la legge di Gauss dà $\mathcal{E}(4\pi r^2) = 0$ cioè $\mathcal{E} = 0$. Perciò *il campo elettrico nei punti interni ad una sfera carica solo sulla superficie è nullo.* Ma se la sfera è caricata uniformemente in tutto il suo volume, e Q' è la carica contenuta entro la superficie S', si ha

Perciò, la legge di Gauss fornisce in questo caso $\mathcal{E}(4\pi r^2) = Q'/\epsilon_0 = Qr^3/\epsilon_0 a^3$, e cioè

Ciò mostra che *il campo elettrico in un punto entro una sfera carica uniformemente è direttamente proporzionale alla distanza del punto dal centro della sfera.* Se γm è sostituito mediante $Q/4\pi\epsilon_0$, questi risultati sono in accordo con quelli del Paragrafo 13.7 per il caso gravitazionale.

(b) Figure 16–8 shows two parallel planes with equal but opposite charges. We observe that in the region outside the two oppositely charged planes there are electric fields equal in magnitude but opposite in direction, giving a resultant field that is zero. But in the region between the planes, the fields are in the same direction, and the resultant field is twice as large as the field of a single plane, or $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_0$. Thus the two parallel and oppositely charged planes produce a uniform field contained in the region between them.

EXAMPLE 16.3. Using Gauss' theorem, discuss the electric field created by a spherical distribution of charge.

Solution: This problem has already been discussed in a different manner in Section 13.7 for the case of the gravitational field of a spherical body. Let us consider a sphere of radius a and charge Q (Fig. 16–9). The symmetry of the problem suggests that the field at each point must be radial and depend only on the distance r from the point to the center of the sphere. Therefore, drawing a spherical surface of radius r concentric with the charged sphere, we find that the electric flux through it is

$$\Phi_\mathcal{E} = \oint_S \mathcal{E}\, dS = \mathcal{E} \oint_S dS = \mathcal{E}(4\pi r^2).$$

Considering first $r > a$, we find that the charge inside our surface S is the total charge Q of the sphere. Thus, applying Gauss' law, Eq. (16.3), we obtain $\mathcal{E}(4\pi r^2) = Q/\epsilon_0$ or

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

This is the same result as for the field of a point charge. Thus *the electric field at points outside a charged sphere is the same as if all the charge were concentrated at its center.*

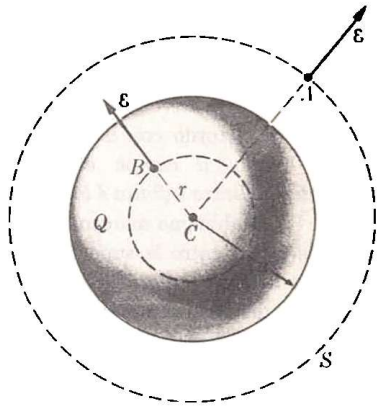


Figure 16–9

Considering next $r < a$, we have two possibilities. If all the charge is at the surface of the charged sphere, the total charge inside the spherical surface S' is zero, and Gauss' law gives $\mathcal{E}(4\pi r^2) = 0$ or $\mathcal{E} = 0$. Thus *the electric field at points inside a sphere which is charged only on its surface is zero.* But if the sphere is uniformly charged throughout its volume and Q' is the charge inside the surface S', we have

$$Q' = \frac{Q}{4\pi a^3/3}(4\pi r^3/3) = \frac{Qr^3}{a^3}.$$

Therefore Gauss' law now gives $\mathcal{E}(4\pi r^2) = Q'/\epsilon_0 = Qr^3/\epsilon_0 a^3$ or

$$\mathcal{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3},$$

showing that *the electric field at a point inside a uniformly charged sphere is directly proportional to the distance from the point to the center of the sphere.* If γm is replaced by $Q/4\pi\epsilon_0$, these results agree with those of Section 13.7 for the gravitational case.

ESEMPIO 16.5. Usando il teorema di Gauss, discutere il campo elettrico generato da una distribuzione cilindrica di carica di lunghezza infinita.

Soluzione: Consideriamo un tratto di lunghezza L del cilindro C, avente raggio a (Fig. 16—10). Se λ è la carica per unità di lunghezza, la carica totale in questa parte del cilindro è $q = \lambda L$. La simmetria del problema indica che il campo elettrico in un punto dipende solo dalla distanza fra il punto e l'asse del cilindro ed è diretto radialmente. Come superficie chiusa di integrazione, prendiamo una superficie cilindrica di raggio r, coassiale con la distribuzione di carica. Il flusso elettrico attraverso tale superficie ha quindi tre termini. Due termini rappresentano il flusso attraverso ciascuna base; ma essi sono nulli perchè il campo elettrico è tangente a ciascuna base. Così il flusso attraverso la superficie laterale è tutto ciò che rimane, e vale $\mathcal{E}(2\pi rL)$. Cioè,

Considerando $r > a$, la carica totale entro la superficie cilindrica S è $q = \lambda L$, e usando la legge di Gauss, Eq. (16.3), otteniamo $2\pi rL\mathcal{E} = \lambda L/\epsilon_0$ ossia

Questo è in accordo con il risultato dell'Esempio 14.7 per il campo elettrico di un filamento carico. Perciò, *il campo elettrico in punti esterni ad una distribuzione cilindrica di carica di lunghezza infinita è lo stesso che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata sull'asse.*

Per $r < a$, abbiamo nuovamente due possibilità. Se tutta la carica è sulla superficie del cilindro, non vi è carica entro la superficie S', e la legge di Gauss dà $2\pi rL\mathcal{E} = 0$, ossia $\mathcal{E} = 0$. Cioè, *il campo elettrico, in punti all'interno di un cilindro carico solo sulla sua superficie, è nullo.* Ma se la carica è distribuita uniformemente entro il volume del cilindro C, troviamo che la carica entro la superficie S' è $q' = \lambda Lr^2/a^2$, e la legge di Gauss dà $2\pi rL\,\mathcal{E} = q'$, ossia

Perciò, il campo elettrico in un punto interno ad un cilindro uniformemente carico e di lunghezza infinita è proporzionale alla distanza del punto dall'asse.

EXAMPLE 16.4. Using Gauss' theorem, discuss the electric field created by a cylindrical charge distribution of infinite length.

Solution: Let us consider a length L of the cylinder C, whose radius is a (Fig. 16–10). If λ is the charge per unit length, the total charge in that portion of the cylinder is $q = \lambda L$. The symmetry of the problem indicates that the electric field at a point depends only on the distance from the point to the axis of the cylinder and is directed radially. We take as the closed surface of integration a cylindrical surface of radius r, coaxial with the charge distribution. Then the electric flux through that surface has three terms. Two terms represent the flux through each base; but they are zero because the electric field is tangent to each base. Thus the flux through the lateral surface is all that remains, giving $\mathcal{E}(2\pi rL)$. That is,

$$\Phi_\mathcal{E} = 2\pi rL\mathcal{E}.$$

Considering $r > a$, the total charge within the cylindrical surface S is $q = \lambda L$, and using Gauss' law, Eq. (16.3), we get $2\pi rL\mathcal{E} = \lambda L/\epsilon_0$ or

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

This agrees with the result of Example 14.7 for the electric field of a charged filament. Therefore *the electric field at points external to a cylindrical charge distribution of infinite length is the same as if all the charge were concentrated along the axis.*

For $r < a$, we again have two possibilities. If all the charge is on the surface of the cylinder, there is no charge inside the surface S', and Gauss' law gives $2\pi rL\mathcal{E} = 0$ or $\mathcal{E} = 0$. Thus *the electric field, at points inside a cylinder charged only on its surface, is zero.* But if the charge is distributed uniformly over the volume of the cylinder C, we find the charge within the surface S' is $q' = \lambda Lr^2/a^2$, and Gauss' law gives $2\pi rL\mathcal{E} = q'$ or

$$\mathcal{E} = \frac{\lambda r}{2\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Thus the electric field at a point within a uniformly charged cylinder of infinite length is proportional to the distance of the point from the axis.

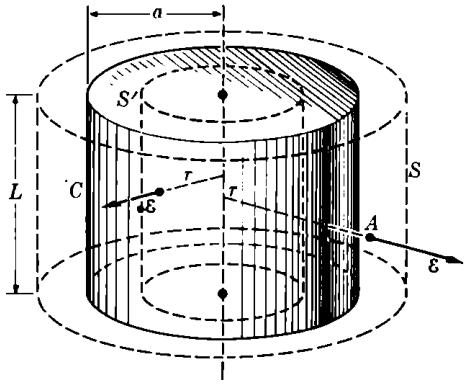


Figura 16—10

Fig. 16–11. Elemento di volume per ricavare la legge di Gauss in forma differenziale.

Figure 16–10

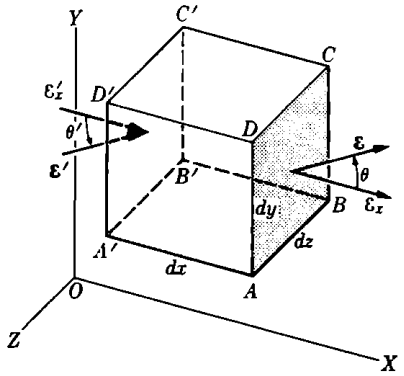


Fig. 16–11. Volume element to evaluate Gauss' law in differential form.

16.4 La legge di Gauss in forma differenziale

Abbiamo dimostrato che la legge di Gauss si può applicare a una superficie di forma qualsiasi. Applichiamola alla superficie che delimita un volume infinitesimo avente gli spigoli paralleli agli assi XYZ, come indicato in Fig. 16–11. I lati dell'elemento di volume sono dx, dy, e dz. L'area della superficie $ABCD$ è $dy\,dz$, e il flusso elettrico attraverso essa è

poichè $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}\cos\theta$. Il flusso attraverso la faccia $A'B'C'D'$ ha una espressione simile, ma è negativo poichè il campo è diretto verso l'interno del volume; cioè, $-\mathcal{E}'_x\,dy\,dz$. Il flusso totale attraverso queste due superficie è la somma

Ma poichè la distanza $A'A = dx$ fra le due superficie è molto piccola, anche la quantità $\mathcal{E}_x - \mathcal{E}'_x$ è molto piccola, e possiamo scrivere

che fornisce il flusso totale nella direzione X

La quantità $dv = dx\ dy\ dz$ è il volume dell'elemento. Poichè risultati simili si ottengono per il flusso attraverso le rimanenti quattro faccie dell'elemento di volume, il *flusso totale* attraverso l'elemento di volume è

Se dq è la carica elettrica entro l'elemento di volume, la legge di Gauss dà

Ponendo $dq = \rho\,dv$ nell'espressione sopra scritta, dove ρ è la densità di carica elettrica (o carica per unità di volume), e cancellando il fattore comune dv, otteniamo

Questa è la legge di Gauss espressa in forma differenziale. L'espressione a primo membro nell'Eq. (16.4) è chiamata *divergenza di* $\mathcal{E}$, abbreviata div $\mathcal{E}$. cosicchè la legge di Gauss può essere scritta nella forma compatta

16.4 Gauss' Law in Differential Form

We have proved that Gauss' law can be applied to a surface of any shape. Let us apply it to the surface surrounding an infinitesimal volume whose edges are parallel to the XYZ-axes, as indicated in Fig. 16–11. The sides of the volume element are dx, dy, and dz. The area of the surface $ABCD$ is $dy\,dz$, and the electric flux through it is

$$\mathcal{E}\,dS\cos\theta = (\mathcal{E}\cos\theta)\,dy\,dz = \mathcal{E}_x\,dy\,dz,$$

since $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}\cos\theta$. The flux through the face $A'B'C'D'$ has a similar expression, but is negative because the field is pointing into the volume; that is, $-\mathcal{E}'_x\,dy\,dz$. The total flux through these two surfaces is the sum

$$\mathcal{E}_x\,dy\,dz + (-\mathcal{E}'_x\,dy\,dz) = (\mathcal{E}_x - \mathcal{E}'_x)\,dy\,dz.$$

But since the distance $A'A = dx$ between the two surfaces is very small, the quantity $\mathcal{E}_x - \mathcal{E}'_x$ is also very small, and we may write

$$\mathcal{E}_x - \mathcal{E}'_x = d\mathcal{E}_x = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x}\,dx,$$

giving the total flux in the X-direction as

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x}\,dv.$$

The quantity $dv = dx\,dy\,dz$ is the volume of the box. Since similar results are obtained for the flux through the remaining four faces of the volume element, the *total flux* through the volume element is

$$\Phi_{\mathcal{E}} = \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x}\,dv + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y}\,dv + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z}\,dv = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z}\right)dv.$$

If dq is the electric charge within the volume element, Gauss' law gives

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z}\right)dv = \frac{dq}{\epsilon_0}.$$

Setting $dq = \rho\,dv$ in the above expression, where ρ is the density of electric charge (or charge per unit volume), and canceling the common factor dv, we obtain

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{16.4}$$

This is Gauss' law expressed in differential form. The expression on the left-hand side of Eq. (16.4) is called the *divergence of* $\mathcal{E}$, abbreviated div $\mathcal{E}$, so that Gauss' law can be written in the compact form

$$\text{div}\,\mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{16.5}$$

Il significato fisico della legge di Gauss in forma differenziale è che lega il campo elettrico $\mathcal{E}$ in un punto dello spazio alla distribuzione di carica, indicata con ρ, nello *stesso* punto dello spazio; cioè, esprime una relazione *locale* fra queste due grandezze fisiche. Possiamo perciò dire che le cariche elettriche sono le *sorgenti* del campo elettrico, e che la loro distribuzione ed intensità determinano il campo elettrico in ogni punto dello spazio.

ESEMPIO 16.5. Discutere la legge di Gauss in termini di potenziale elettrico.

Soluzione: Ricordando che le componenti del campo elettrico sono espresse mediante il potenziale elettrico R da $\mathcal{E}_x = -\partial V/\partial x$ ed espressioni simili per $\mathcal{E}_y$ ed $\mathcal{E}_z$ (vedi Eq. 14.27), possiamo scrivere

con risultati simili per $\mathcal{E}_y$ ed $\mathcal{E}_z$. Operando la sostituzione nell'Eq. (16.4), otteniamo un'altra espressione per la legge di Gauss,

un'espressione che è chiamata *equazione di Poisson*. Possiamo usare l'Eq. (16.6) per ottenere il potenziale elettrico quando conosciamo la distribuzione di carica e viceversa, sintanto che la distribuzione di carica non dipende dal tempo. Nello spazio vuoto, ove non vi sono cariche, $\rho = 0$, l'Eq. (16.5) diventa div $\mathcal{E} = 0$, e l'Eq. (16.6) dà

Questa equazione è chiamata *equazione di Laplace*. È una delle equazioni più importanti della fisica matematica, e compare in molti problemi al di fuori della teoria del campo elettromagnetico, come il moto dei fluidi e l'elasticità.

L'espressione che appare a primo membro nelle Equazioni (16.6) e (16.7) è detta il *laplaciano di V*.

ESEMPIO 16.6. Verificare che il potenziale di una carica puntiforme soddisfa l'equazione di Laplace, Eq. (16.7), tranne nell'origine dove è localizzata la carica.

Soluzione: Il potenziale di una carica puntiforme è $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ secondo l'Eq. (14.32). Ora $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, cosicchè, derivando rispetto ad x, abbiamo

oppure

Perciò

e

The physical meaning of Gauss' law in its differential form is that it relates the electric field $\mathcal{E}$ at a point in space to the charge distribution, expressed by ρ, at the *same* point in space; that is, it expresses a *local* relation between these two physical quantities. Thus we may say that electric charges are the *sources* of the electric field, and that their distribution and magnitude determine the electric field at each point of space.

EXAMPLE 16.5. Discuss Gauss' law in terms of the electric potential.

Solution: Remembering that the components of the electric field $\mathcal{E}$ are expressed in terms of the electric potential V by $\mathcal{E}_x = -\partial V/\partial x$ and similar expressions for $\mathcal{E}_y$ and $\mathcal{E}_z$ (see Eq. 14.27), we may write

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

with similar results for $\mathcal{E}_y$ and $\mathcal{E}_z$. Making the substitution in Eq. (16.4), we get an alternative expression for Gauss' law,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{16.6}$$

an expression which is called *Poisson's equation*. We can use Eq. (16.6) to obtain the electric potential when we know the charge distribution, and conversely, so long as the charge distribution is time independent. In free space, where there are no charges, $\rho = 0$ and Eq. (16.5) becomes div $\mathcal{E} = 0$ and Eq. (16.6) gives us

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{16.7}$$

This equation is called *Laplace's equation*. It is one of the most important equations in mathematical physics, and appears in many problems outside the theory of the electromagnetic field, such as fluid motion and elasticity.

The expression appearing on the left in Eqs. (16.6) and (16.7) is called the *laplacian of V*.

EXAMPLE 16.6. Verify that the potential of a point charge satisfies Laplace's equation, Eq. (16.7), at all points except at the origin where the charge is located.

Solution: The potential of a point charge is $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ according to Eq. (14.32). Now $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so that, taking the derivative relative to x, we have

$$2r\,\partial r/\partial x = 2x \quad \text{or} \quad \partial r/\partial x = x/r.$$

Therefore

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}$$

and

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{r^3}\right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

Quindi

Then $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0.$$

Moltiplicando il risultato sopra scritto per $q/4\pi\epsilon_0$, otteniamo l'Eq. (16.7). Il nostro metodo matematico non è valido per $r = 0$, poichè la funzione $1/r$ va all'infinito in tale punto, e perciò l'origine deve essere esclusa dal conto. Inoltre, l'Eq. (16.7) non si può applicare a punti occupati da cariche.

Multiplying the above result by $q/4\pi\epsilon_0$, we obtain Eq. (16.7). Our mathematical method is not valid for $r = 0$ because the function $1/r$ goes to infinity at that point, and therefore the origin must be excluded from the calculation. In addition, Eq. (16.7) is not applicable at points occupied by charges.

ESEMPIO 16.7. Usando l'equazione di Laplace, ottenere il potenziale elettrico e il campo elettrico nella regione vuota fra due piani paralleli caricati a potenziali V_1 e V_2.

EXAMPLE 16.7. Using Laplace's equation, obtain the electric potential and the electric field in the empty region between two parallel planes charged at potentials V_1 and V_2.

Soluzione: La simmetria del problema suggerisce che il campo deve dipendere solo dalla coordinata x (Fig. 16–12). Perciò, dato che non vi sono cariche nello spazio fra i due piani, dobbiamo applicare l'equazione di Laplace, Eq. (16.7), che dà $d^2V/dx^2 = 0$. Si noti che non usiamo il simbolo di derivata parziale perchè vi è una sola variabile indipendente, x. Integrando, abbiamo $dV/dx = \text{cost}$. Ma il campo elettrico è $\mathcal{E} = -dV/dx$. Concludiamo allora che il campo elettrico fra i piani è costante. Integrando ancora l'espressione $\mathcal{E} = -dV/dx$, ricordando che $\mathcal{E}$ è costante, otteniamo l'equazione seguente:

Solution: The symmetry of the problem suggests that the field must depend only on the x-coordinate (Fig. 16–12). Therefore, since there are no charges in the space between the planes, we must apply Laplace's equation, Eq. (16.7), giving $d^2V/dx^2 = 0$. Note that we do not use the partial derivative notation because there is only one independent variable, x. Integrating, we have $dV/dx = \text{const}$. But the electric field is $\mathcal{E} = -dV/dx$. We conclude then that the electric field between the planes is constant. Again integrating the expression $\mathcal{E} = -dV/dx$, keeping in mind that $\mathcal{E}$ is constant, we obtain the following equation:

$$\int_{V_1}^{V} dV = -\int_{x_1}^{x} \mathcal{E}\,dx = -\mathcal{E}\int_{x_1}^{x} dx,$$

che ha come risultato $V - V_1 = -\mathcal{E}(x - x_1)$ o $V = V_1 - \mathcal{E}(x - x_1)$. Ciò mostra che il potenziale elettrico varia linearmente con la distanza x. Ponendo $x = x_2$, abbiamo $V = V_2$. Perciò

resulting in $V - V_1 = -\mathcal{E}(x - x_1)$ or $V = V_1 - \mathcal{E}(x - x_1)$. This shows that the electric potential varies linearly with the distance x. Setting $x = x_2$, we have $V = V_2$. Therefore

$$\mathcal{E} = -\frac{V_2 - V_1}{x_2 - x_1} = -\frac{V_2 - V_1}{d},$$

dove $d = x_2 - x_1$. Questi risultati sono in accordo con la nostra precedente discussione nel Paragrafo 14.8, che conduceva all'Eq. (14.31).

where $d = x_2 - x_1$. These results are in agreement with our previous discussion in Section 14.8, leading to Eq. (14.31).

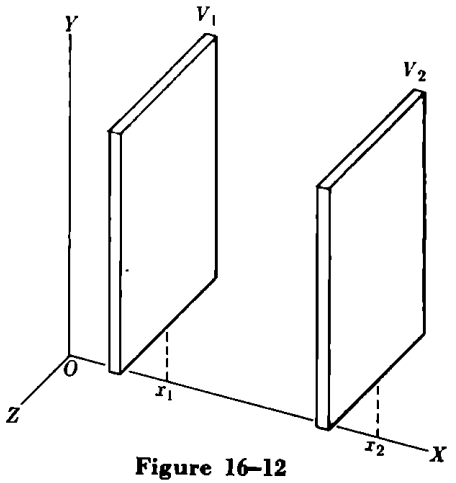


Figura 16–12 **Figure 16–12**

ESEMPIO 16.8. Risolvere lo stesso problema dell'Esempio 16.7, assumendo che vi sia una distribuzione di carica uniforme fra i piani. Questa può essere, ad esempio, la situazione fra le placche di un tubo elettronico.

EXAMPLE 16.8. Solve the same problem as in Example 16.7, assuming that there is a uniform charge distribution between the planes. This may be, for example, the situation between the plates of an electron tube.

Soluzione: Ora dobbiamo applicare l'equazione di Poisson, Eq. (16.6). Per la simmetria del problema, il potenziale dipende solo dalla coordinata x, e possiamo scrivere $d^2V/dx^2 = -\rho/\epsilon_0$, con $\rho = \text{cost}$. Integrando, otteniamo

Solution: Now we must apply Poisson's equation, Eq. (16.6). Because of the symmetry of the problem, the potential depends only on the coordinate x, and we may write $d^2V/dx^2 = -\rho/\epsilon_0$, with $\rho = \text{const}$. Integrating, we have

$$\int_{x_1}^{x}\frac{d^2V}{dx^2}\,dx = -\frac{1}{\epsilon_0}\int_{x_1}^{x}\rho\,dx = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\int_{x_1}^{x}dx,$$

che ha come risultato

oppure

dove $\mathcal{E}_1 = -(dV/dx)_{x=x_1}$ è il campo elettrico per $x = x_1$. Poichè $\mathcal{E} = -dV/dx$, il campo fra i piani è

Figura 16–13

da cui appare che il campo varia linearmente con x, come illustrato in Fig. 16–13. Integrando ancora l'Eq. (16.8), il potenziale elettrico, in funzione di x, è

Oppure

Il potenziale elettrico ora varia quadraticamente con x, come è mostrato in Fig. 16–13. La quantità $\mathcal{E}_1$ può essere determinata ponendo $x = x_2$, così che

e risolvendo poi rispetto a $\mathcal{E}_1$.

16.5 *Polarizzazione della materia*

In questo paragrafo vogliamo discutere l'effetto di un campo elettrico su un pezzo di materia. Ricordiamo che gli atomi non hanno momenti elettrici di dipolo permanenti a causa della loro simmetria sferica, ma quando sono posti in un campo elettrico, si polarizzano, acquistando momenti elettrici di dipolo *indotti* nella direzione del campo. Ciò deriva dalla perturbazione del moto degli elettroni prodotta dal campo elettrico applicato (vedi Paragrafo 14.11).

D'altro canto, molte molecole hanno momenti elettrici di dipolo *permanenti*. Quando una molecola possiede un momento di dipolo permanente, tende ad essere orientata parallelamente al campo elettrico applicato a causa della coppia cui è soggetta (data dall'Eq. 14.50). In conseguenza di ambedue questi effetti, un pezzo di materiale posto in un campo elettrico diviene elettricamente *polarizzato*. Cioè, le sue molecole (o atomi) divengono dipoli elettrici orientati nella direzione del campo elettrico locale,

which results in

$$\frac{dV}{dx} - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_1} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}(x - x_1)$$

or

$$\frac{dV}{dx} = -\mathcal{E}_1 - \frac{\rho}{\epsilon_0}(x - x_1), \tag{16.8}$$

where $\mathcal{E}_1 = -(dV/dx)_{x=x_1}$ is the electric field at $x = x_1$. Since $\mathcal{E} = -dV/dx$, the field between the planes is

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \frac{\rho}{\epsilon_0}(x - x_1),$$

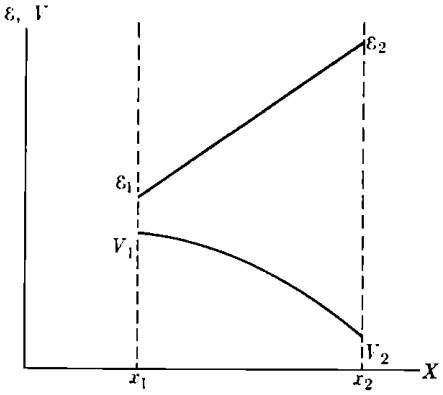


Figure 16–13

showing that the electric field varies linearly with x, as illustrated in Fig. 16–13. Integrating Eq. (16.8) again, the electric potential, as a function of x, is

$$\int_{V_1}^{V} dV = -\int_{x_1}^{x} \mathcal{E}_1\, dx - \frac{\rho}{\epsilon_0}\int_{x_1}^{x} (x - x_1)\, dx$$

or

$$V = V_1 - \mathcal{E}_1(x - x_1) - \frac{\rho}{2\epsilon_0}(x - x_1)^2. \tag{16.9}$$

The electric potential now varies quadratically with x, as shown also in Fig. 16–13. The quantity $\mathcal{E}_1$ can be determined by setting $x = x_2$, so that

$$V_2 = V_1 - \mathcal{E}_1(x_2 - x_1) - (\rho/2\epsilon_0)(x_2 - x_1)^2,$$

and then solving for $\mathcal{E}_1$.

16.5 *Polarization of Matter*

In this section we are going to discuss the effect of an electric field on a piece of matter. We recall that atoms do not have permanent electric dipole moments because of their spherical symmetry, but when they are placed in an electric field, they become polarized, acquiring *induced* electric dipole moments in the direction of the field. This results from the perturbation of the motion of the electrons produced by the applied electric field (see Section 14.11).

On the other hand, many molecules do have *permanent* electric dipole moments. When a molecule has a permanent electric dipole moment, it tends to be oriented parallel to the applied electric field because of the torque it experiences (given by Eq. 14.50). As a consequence of either of these two effects, a piece of matter placed in an electric field becomes electrically *polarized*. That is, its molecules (or atoms) become electric dipoles oriented in the direction of the local electric

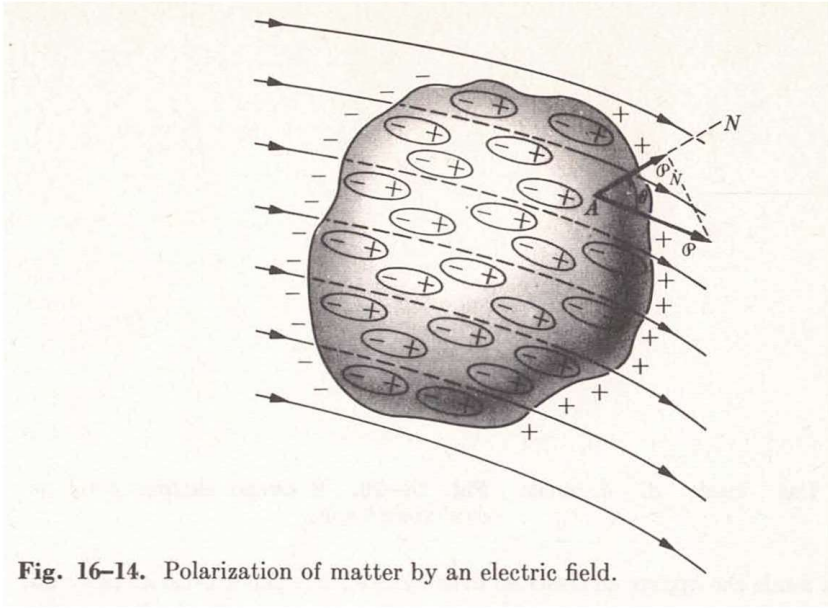


Fig. 16–14. Polarization of matter by an electric field.

Fig. 16–14. Polarizzazione della materia da parte di un campo elettrico.

field (Fig. 16–14), either because of the distortion of the electronic motion or the orientation of their permanent dipoles. A medium that can be polarized by an electric field is called a *dielectric*. The polarization gives rise to a net positive charge on one side of the piece of matter and a net negative charge on the opposite side. The piece of matter then becomes a large electric dipole that *tends* to move in the direction in which the field increases, as discussed in Section 14.11. This explains the phenomenon described in Section 14.1 in which an electrified glass rod or a comb attracts small pieces of paper or a cork ball.

The *polarization* $\mathcal{P}$ of a material is defined as the electric dipole moment of the medium per unit volume. Therefore, if $\boldsymbol{p}$ is the dipole moment induced in each atom or molecule and n is the number of atoms or molecules per unit volume, the polarization is $\mathcal{P} = n\boldsymbol{p}$. In general, $\mathcal{P}$ is proportional to the applied electric field $\mathcal{E}$. Since $\mathcal{P}$ is measured in $(\text{C m})\text{m}^{-3} = \text{C m}^{-2}$, or charge per unit area, and from Eq. (14.8), $\epsilon_0\mathcal{E}$ is also measured in C m^{-2}, it is customary to write

$$\mathcal{P} = \chi_e\epsilon_0\mathcal{E}. \tag{16.10}$$

The quantity χ_e is called the *electric susceptibility* of the material. It is a pure number. For most substances, it is a positive quantity.

Consider now a slab of material of thickness l and surface S placed perpendicular to a uniform field $\mathcal{E}$ (Fig. 16–15). The polarization $\mathcal{P}$, being parallel to $\mathcal{E}$, is also perpendicular to S. The volume of the slab is lS, and therefore its total electric dipole moment is $\mathcal{P}(lS) = (\mathcal{P}S)l$. But l is just the separation between the positive and negative charges that appear on the two surfaces. Since by definition the electric dipole moment is equal to charge times distance, we conclude that the total

(Fig. 16—14), o a causa della distorsione del moto degli elettroni o a causa dell'orientamento dei loro momenti permanenti di dipolo. Un mezzo che può essere polarizzato da un campo elettrico è chiamato un *dielettrico*. La polarizzazione fa nascere una carica netta positiva su un lato del pezzo di materiale e una carica netta negativa sul lato opposto. Il pezzo di materiale diventa allora un grosso dipolo elettrico che *tende* a muoversi nella direzione in cui il campo cresce, come discusso nel Paragrafo 14.11. Ciò spiega il fenomeno descritto nel paragrafo 14.1 in cui una barretta di vetro o un pettine elettrizzati attraggono piccoli pezzi di carta o una pallina di sughero.

La *polarizzazione* $\mathcal{P}$ di un materiale è definita come il momento elettrico di dipolo del mezzo per unità di volume. Perciò, se $\boldsymbol{p}$ è il momento di dipolo indotto in ciascun atomo o molecola, ed n è il numero di atomi o molecole per unità di volume, la polarizzazione vale $\mathcal{P} = n\boldsymbol{p}$. In generale, $\mathcal{P}$ è proporzionale al campo elettrico applicato $\mathcal{E}$. Poichè $\mathcal{P}$ è misurato in $(\text{c m})\text{m}^{-3} = \text{C m}^{-2}$, o carica per unità di superficie, e, secondo l'Eq. (14.8), $\epsilon_0\mathcal{E}$ è pure misurato in C m^{-2} è d'uso scrivere

La grandezza χ_e viene chiamata *suscettibilità elettrica* del materiale. È un numero puro. Per la maggior parte delle sostanze, è una quantità positiva.

Consideriamo ora una lastra di materiale di spessore l e superficie S posta perpendicolarmente a un campo uniforme $\mathcal{E}$ (Fig. 16—15). La polarizzazione $\mathcal{P}$, essendo parallela a $\mathcal{E}$, è pure essa perpendicolare a S. Il volume della lastra è lS, e perciò il suo momento di dipolo elettrico totale è $\mathcal{P}(lS) = (\mathcal{P}S)l$. Ma l è proprio la distanza fra le cariche positive e negative che compaiono sulle due facce. Poichè per definizione il momento elettrico di dipolo è uguale alla carica moltiplicata per la distanza, concludiamo che la

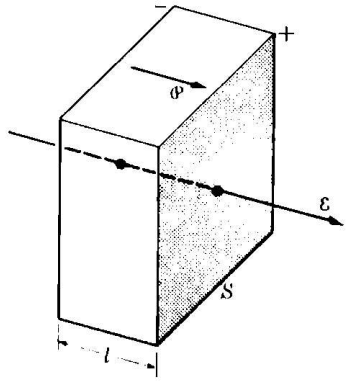


Fig. 16–15. Una lastra di materiale polarizzato.

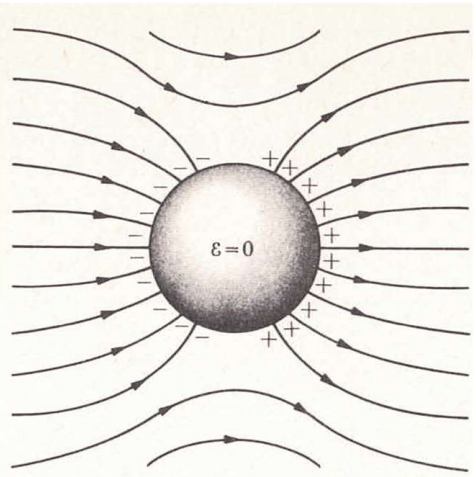


Fig. 16–16. Il campo elettrico entro un conduttore è nullo.

Fig. 16–15. A slab of polarized material.

Fig. 16–16. The electric field within a conductor is zero.

carica elettrica totale che appare su ciascuna delle facce è $\mathcal{P}S$, è perciò la carica per unità di superficie $\sigma_{\mathcal{P}}$ sulle facce della lastra polarizzata è $\mathcal{P}$, ossia $\sigma_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$. Sebbene questo risultato sia stato ottenuto per una disposizione geometrica particolare, è di validità generale, e

la carica per unità di superficie di un pezzo di materiale polarizzato è uguale alla componente della polarizzazione $\mathcal{P}$ nella direzione della normale alla superficie del corpo.

Così, in Fig. 16–14, la carica per unità di superficie nel punto A è $\mathcal{P}_N = \mathcal{P}\cos\theta$.

Alcuni materiali, come ad esempio la maggior parte dei metalli, contengono particelle cariche che possono muoversi più o meno liberamente attraverso il mezzo. Questi materiali sono chiamati *conduttori*. In presenza di un campo elettrico, anche essi si polarizzano, ma in maniera sostanzialmente diversa dai dielettrici. A meno che non vengano opportunamente rimosse, le cariche elettriche mobili in un conduttore si accumulano sulla superficie sino a che il campo che esse producono cancella completamente nell'interno del conduttore il campo applicato dall'esterno, dando luogo così alla condizione di equilibrio (Fig. 16–16). Concludiamo allora che, *entro un conduttore che si trova in equilibrio elettrico, il campo elettrico è nullo*. Per la stessa ragione, *il campo elettrico deve essere ortogonale alla superficie*, poichè se vi fosse una componente parallela, le cariche si muoverebbero lungo la superficie del conduttore. Inoltre, poichè il campo all'interno del conduttore vale zero, *tutti i punti di un conduttore che si trova in equilibrio devono essere allo stesso potenziale*. Se il campo elettrico entro il conduttore è nullo, abbiamo anche div $\mathcal{E} = 0$, e perciò la legge di Gauss in forma differenziale, Eq. (16.5), dà $\rho = 0$, e perciò la densità di carica nel volume occupato dal conduttore è nulla. Ciò significa che *tutta la carica elettrica di un conduttore in equilibrio si trova sulla sua superficie*. Con questa affermazione, in realtà, noi intendiamo dire che la carica elettrica netta è distribuita entro uno strato superficiale avente uno spessore di alcuni strati atomici, non su una superficie in senso geometrico.

electric charge that appears on each of the surfaces is $\mathcal{P}S$, and therefore the charge per unit area $\sigma_{\mathcal{P}}$ on the faces of the polarized slab is $\mathcal{P}$, or $\sigma_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$. Although this result has been obtained for a particular geometrical arrangement, it is of general validity, and

the charge per unit area on the surface of a polarized piece of matter is equal to the component of the polarization $\mathcal{P}$ in the direction of the normal to the surface of the body.

So, in Fig. 16–14, the charge per unit area on the surface at A is $\mathcal{P}_N = \mathcal{P}\cos\theta$.

Some materials, such as most metals, contain charged particles that can move more or less freely through the medium. These materials are called *conductors*. In the presence of an electric field they are also polarized, but in a way that is essentially different from dielectrics. Unless properly removed, the mobile charges in a conductor accumulate on the surface until the field they produce completely cancels the external applied field within the conductor, thereby producing equilibrium (Fig. 16–16). We conclude, then, that *inside a conductor which is in electrical equilibrium, the electric field is zero*. For the same reason, *the electric field at the surface must be normal*, since if there is a parallel component, the charges will move along the surface of the conductor. Furthermore, because the field inside the conductor is zero, *all points of a conductor which is in equilibrium must be at the same potential*. If the electric field inside the conductor is zero, we have also that div $\mathcal{E} = 0$, and therefore Gauss' law in differential form, Eq. (16.5), gives $\rho = 0$, and thus the charge density in the volume of the conductor is zero. That means that *the entire electric charge of a conductor in equilibrium resides on its surface*. By this statement we really mean that the net charge is distributed over a section of the surface having a thickness of several atomic layers, not a surface in the geometrical sense.

Conductor = conduttore
Vacuum = vuoto

Inside = dentro
Surface layer = Strato superficiale
Outside = fuori
$\mathcal{E}_{ave} = \mathcal{E}_{med}$

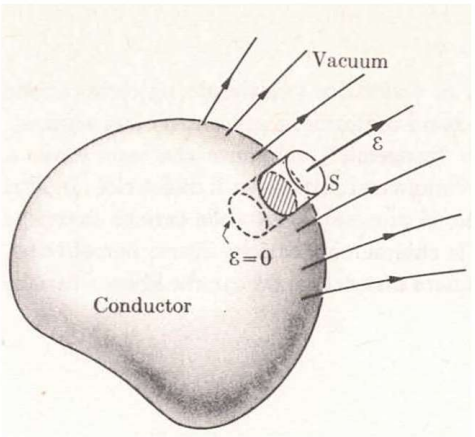


Fig. 16–17. Il campo elettrico statico sulla superficie di un conduttore è normale alla superficie.

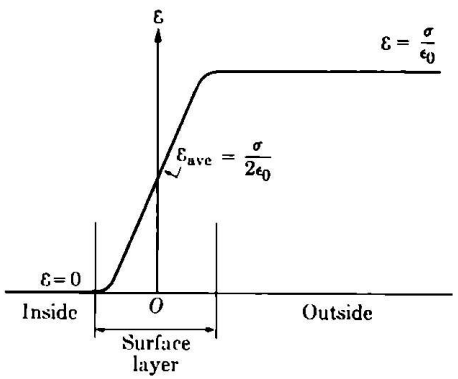


Fig. 16–18. Variazione del campo elettrico attraverso la superficie di un conduttore.

ESEMPIO 16.9. Collegare il campo elettrico sulla superficie di un conduttore con la carica elettrica superficiale.

Soluzione: Consideriamo un conduttore di forma qualsiasi, come in Fig. 16–17. Per trovare il campo elettrico in un punto immediatamente al di fuori della superficie del conduttore, costruiamo una superficie cilindrica piatta della forma di una pastiglia, con una base immediatamente al di fuori della superficie del conduttore e l'altra base ad una profondità tale che tutta la carica superficiale si trova entro il cilindro e che si possa dire che ivi il campo elettrico è già nullo. Il flusso elettrico attraverso questa superficie e composto di tre termini. Il flusso attraverso la base interna è nullo poichè è nullo il campo. Il flusso attraverso la superficie laterale è nullo poichè il campo è tangente ad essa; Così rimane solo il flusso attraverso la base esterna. Posta uguale ad S l'area della base, abbiamo $\Phi_E = \mathcal{E}S$. D'altro canto, se σ è la densità di carica superficiale del conduttore, la carica entro il cilindro è $q = \sigma S$. Perciò, applicando la legge di Gauss, $\mathcal{E}S = \sigma S/\epsilon_0$, ossia

Questa relazione ci fornisce il campo elettrico in un punto immediatamente all'esterno della superficie di un conduttore carico, mentre all'interno il campo è nullo. Perciò, attraversando la superficie di un conduttore carico, il campo elettrico varia nel modo illustrato in Fig. 16–18.

ESEMPIO 16.10. Trovare la forza per unità di superficie sulle cariche sulla superficie di un conduttore.

Soluzione: Le cariche sulla superficie di un conduttore sono soggette ad una forza repulsiva dovuta alle altre cariche. La forza per unità di superficie, o sforzo elettrico, può essere calcolata moltiplicando il campo elettrico medio per la carica per unità di superficie. Il campo medio, dalla Fig. 16–18, risulta $\mathcal{E}_{med} = \sigma/2\epsilon_0$. Perciò lo sforzo elettrico è

Esso e sempre positivo, poichè dipende da σ^2, e perciò corrisponde ad una forza che tira via le cariche dal conduttore.

Fig. 16–17. The electric field at the surface of a conductor is normal to the surface.

Fig. 16–18. Variation of the electric field when crossing the surface of a conductor.

EXAMPLE 16.9. Relate the electric field at the surface of a conductor to the surface electric charge.

Solution: Let us consider a conductor of arbitrary shape, as in Fig. 16–17. To find the electric field at a point immediately outside the surface of the conductor, we construct a flat cylindrical surface similar to a pillbox, with one base immediately outside the surface of the conductor and the other base at a depth such that all the surface charge is within the cylinder and we may say that the electric field is already zero. The electric flux through that surface is composed of three terms. The flux through the inner base is zero because the field is zero. The flux through the side is zero because the field is tangent to this surface. Thus only the flux through its outer base remains. Given that the area of the base is S, we have $\Phi_E = \mathcal{E}S$. On the other hand, if σ is the surface charge density of the conductor, the charge within the cylinder is $q = \sigma S$. Therefore, applying Gauss' law, $\mathcal{E}S = \sigma S/\epsilon_0$ or

$$\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_0. \tag{16.11}$$

This gives the electric field at a point immediately outside the surface of a charged conductor, while the field inside is zero. Therefore, as the surface of a charged conductor is crossed, the electric field varies in the way illustrated in Fig. 16–18.

EXAMPLE 16.10. Find the force per unit area on the charges on the surface of a conductor.

Solution: The charges on the surface of a conductor are subject to a repulsive force due to the other charges. The force per unit area, or electric stress, can be computed by multiplying the average electric field by the charge per unit area. The average field is, from Fig. 16–18, $\mathcal{E}_{ave} = \sigma/2\epsilon_0$. Therefore the electric stress is

$$F_s = \sigma\mathcal{E}_{ave} = \sigma^2/2\epsilon_0.$$

It is always positive, since it depends on σ^2, and therefore corresponds to a force pulling the charges away from the conductor.

16.6 *Lo spostamento elettrico*

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che un dielettrico polarizzato ha certe cariche sulla sua superficie (e, se la sua polarizzazione non è uniforme, anche entro il suo volume). Queste cariche di polarizzazione, però, sono "congelate" nel senso che sono legate a specifici atomi o molecole e non sono libere di muoversi attraverso il dielettrico. In altri materiali, come un metallo o un gas ionizzato, vi possono essere delle cariche elettriche libere di muoversi entro il materiale, e perciò le chiameremo cariche *libere*. In molti casi, come in questo paragrafo, dovremo fare una chiara distinzione fra cariche libere e cariche di polarizzazione.

Fig. 16–19. Dielettrico posto fra due piastre cariche di segno opposto. Le cariche sulle piastre sono cariche libere e le cariche sulla superficie del dielettrico sono cariche di polarizzazione.

Consideriamo di nuovo una lastra di un materiale dielettrico posta fra due piastre conduttrici parallele (Fig. 16–19), che posseggono cariche uguali ed opposte. La densità di carica superficiale sulla piastra di sinistra è $+\sigma_{\text{lib.}}$ e sulla piastra di destra, $-\sigma_{\text{lib.}}$ Queste cariche producono un campo elettrico che polarizza la lastra così che appaiono cariche di polarizzazione su ciascuna delle sue facce. Queste cariche di polarizzazione hanno segno opposto a quelle sulle piastre. Perciò le cariche di polarizzazione sulle facce della lastra di dielettrico compensano parzialmente le cariche libere sulle piastre conduttrici. Se $\mathcal{P}$ è l'intensità della polarizzazione nella lastra, la densità di carica superficiale sulla faccia sinistra è $-\mathcal{P}$, mentre sulla faccia destra è $\sigma = \sigma_{\text{lib.}} - \mathcal{P}$, con un risultato uguale ed opposto a destra. Queste cariche nette superficiali generano un campo elettrico uniforme che, in base all'Eq. (16.11), è dato da $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_0$. Così usando il valore efficace di σ, abbiamo

$$\text{free} = \text{lib.} \qquad \text{cioè}$$

espressione che dà le cariche libere sulla superficie di un conduttore circondato da un dielettrico in funzione del campo elettrico nel dielettrico e della polarizzazione del dielettrico. Se notiamo che nel caso che stiamo discutendo, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{P}$ sono

16.6 *Electric Displacement*

In the preceding section we saw that a polarized dielectric has certain charges on its surface (and also, unless the polarization is uniform, throughout its volume). These polarization charges, however, are "frozen" in the sense that they are bound to specific atoms or molecules and are not free to move through the dielectric. In other materials, such as a metal or an ionized gas, there may be electric charges capable of moving through the material, and therefore we shall call them *free* charges. In many instances, as in this section, we shall have to make a clear distinction between free charges and polarization charges.

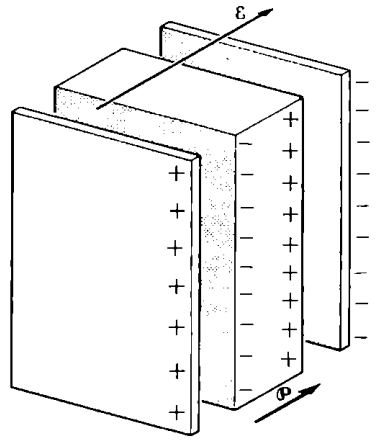


Fig. 16–19. Dielectric placed between oppositely charged plates. Charges on the plates are free charges and charges on the dielectric surface are polarization charges.

Let us again consider a slab of a dielectric material placed between two conducting parallel plates (Fig. 16–19), carrying equal and opposite free charges. The surface charge density on the left-hand plate is $+\sigma_{\text{free}}$ and on the right-hand plate is $-\sigma_{\text{free}}$. These charges produce an electric field that polarizes the slab so that polarization charges appear on each surface of the slab. These polarization charges have a sign opposite to that on the plates. Therefore the polarization charges on the faces of the dielectric slab partially balance the free charges on the conducting plates. Given that $\mathcal{P}$ is the magnitude of the polarization in the slab, the surface charge density on the left face of the slab is $-\mathcal{P}$, while on the right face it is $+\mathcal{P}$. The effective, or net, surface charge density on the left is $\sigma = \sigma_{\text{free}} - \mathcal{P}$, with an equal and opposite result on the right. These net surface charges give rise to a uniform electric field that, according to Eq. (16.11), is given by $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_0$. Thus, using the effective value of σ, we have

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_{\text{free}} - \mathcal{P}) \qquad \text{or} \qquad \sigma_{\text{free}} = \epsilon_0\mathcal{E} + \mathcal{P},$$

an expression that gives the free charges on the surface of a conductor surrounded by a dielectric in terms of the electric field in the dielectric and the polarization of the dielectric. When we note that, in the case we are discussing, $\mathcal{E}$ and $\mathcal{P}$ are

vettori aventi la stessa direzione, il risultato sopra trovato suggerisce l'introduzione di un nuovo campo vettoriale, che viene chiamato *spostamento elettrico*, e che è definito da

Ovviamente, $\mathfrak{D}$ è espresso in C m^{-2}, poichè queste sono le unità di misura dei due termini che compaiono nel secondo membro dell'Eq. (16.12). Nel caso particolare che stiamo considerando, troviamo che $\sigma_{\text{lib}} = \mathfrak{D}$; cioè, le cariche libere per unità di superficie sul conduttore uguagliano lo spostamento elettrico nel dielettrico. Questo risultato è di validità generale e può venire esteso a conduttori di forma qualsiasi. Così *la componente di $\mathfrak{D}$ lungo la normale alla superficie di un conduttore immerso in un dielettrico dà la densità di carica superficiale sul conduttore*. Cioè,

free = lib.

mentre la componente normale di $\epsilon_0\mathcal{E}$ dà la carica effettiva o netta, tenendo conto della compensazione dovuta alle cariche sulla superficie del dielettrico. Cioè, $\sigma = \epsilon_0\mathcal{E}\cdot\boldsymbol{u}_N$. La carica elettrica libera totale su un conduttore vale dunque

free = lib.

Un'analisi più dettagliata, che non riportiamo, mostra che *il flusso di $\mathfrak{D}$ attraverso una qualsiasi superficie chiusa è uguale alla carica "libera" totale entro la superficie, escluse tutte le cariche dovute alla polarizzazione del mezzo*. Perciò l'Eq. (16.13) è di validità generale per qualsiasi superficie chiusa.

Nei casi in cui vale l'Eq. (16.10), possiamo scrivere

dove il coefficiente

è chiamato *permettività* del mezzo, ed è espresso nelle stesse unità di misura di ϵ_0; cioè, m^{-3} kg^{-1} s^2 C^2. La *permettività relativa* è definita come

ed è un numero puro, indipendente da qualsiasi sistema di unità di misura. La permettività relativa è chiamata anche *costante dielettrica*. Per la maggior parte delle sostanze, è maggiore di uno.

Quando vale la relazione $\mathfrak{D} = \epsilon$ per un mezzo, possiamo scrivere l'Eq. (16.13) nella forma $q_{\text{lib}} = \oint_S \epsilon\,\mathcal{E}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS$ e, se il mezzo è omogeneo così che ϵ è costante,

free = lib.

Confrontando l'Eq. (16.17) con l'Eq. (16.3), vediamo che l'effetto del dielettrico sul campo elettrico $\mathcal{E}$ è di sostituire ϵ_0 con ϵ se si considerano solo le cariche libere.

vectors in the same direction, the above result suggests the introduction of a new vector field, which is called the *electric displacement*, and which is defined by

$$\mathfrak{D} = \epsilon_0\mathcal{E} + \mathcal{P}. \tag{16.12}$$

Obviously, $\mathfrak{D}$ is expressed in C m^{-2}, since those are the units of the two terms that appear on the right-hand side of Eq. (16.12). In the special case we are considering, we find that $\sigma_{\text{free}} = \mathfrak{D}$; that is, the free charges per unit area on the surface of the conductor are equal to the electric displacement in the dielectric. This result is of general validity and may be extended to conductors of any shape. Thus *the component of $\mathfrak{D}$ along the normal to the surface of a conductor embedded in a dielectric gives the surface charge density on the conductor*. That is,

$$\sigma_{\text{free}} = \mathfrak{D}\cdot\boldsymbol{u}_N,$$

while the normal component of $\epsilon_0\mathcal{E}$ gives the effective or net charge, taking into account the compensation due to the charges on the surface of the dielectric. That is, $\sigma = \epsilon_0\mathcal{E}\cdot\boldsymbol{u}_N$. The total free charge on a conductor is then

$$q_{\text{free}} = \oint_S \sigma_{\text{free}}\,dS = \oint_S \mathfrak{D}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS = \Phi_{\mathfrak{D}}. \tag{16.13}$$

A more detailed analysis, which we shall omit, indicates that *the flux of $\mathfrak{D}$ over any closed surface is equal to the total "free" charge inside the surface, excluding all charges due to the polarization of the medium*. Therefore Eq. (16.13) is of general validity for any closed surface.

For cases in which Eq. (16.10) holds, we may write

$$\mathfrak{D} = \epsilon_0\mathcal{E} + \epsilon_0\chi_e\mathcal{E} = (1+\chi_e)\epsilon_0\mathcal{E} = \epsilon\mathcal{E}, \tag{16.14}$$

where the coefficient

$$\epsilon = \frac{\mathfrak{D}}{\mathcal{E}} = (1+\chi_e)\epsilon_0 \tag{16.15}$$

is called the *permittivity* of the medium, and is expressed in the same units as ϵ_0; that is, m^{-3} kg^{-1} s^2 C^2. The *relative permittivity* is defined as

$$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi_e, \tag{16.16}$$

and is a pure number, independent of any system of units. The relative permittivity is also called the *dielectric constant*. For most substances, it is larger than one.

When the relation $\mathfrak{D} = \epsilon\mathcal{E}$ holds for a medium, we may write Eq. (16.13) as $q_{\text{free}} = \oint_S \epsilon\mathcal{E}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS$ and, if the medium is homogeneous so that ϵ is constant,

$$\Phi_{\mathcal{E}} = \oint \mathcal{E}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS = q_{\text{free}}/\epsilon. \tag{16.17}$$

Comparing Eq. (16.17) with Eq. (16.3), we see that the effect of the dielectric on the electric field $\mathcal{E}$ is to replace ϵ_0 by ϵ if only the free charges are taken into ac-

Perciò il campo elettrico e il potenziale prodotti da una carica puntiforme immersa in un dielettrico sono

e

L'intensità della forza di interazione fra due cariche elettriche puntiformi immerse in un dielettrico è allora

Poichè ϵ è in generale maggiore di ϵ_0, la presenza del dielettrico ha l'effetto di ridurre l'interazione a causa dello schermaggio dovuto alla polarizzazione delle molecole del dielettrico.

Calcolo della suscettibilità elettrica

La suscettibilità elettrica χ_e, che descrive la risposta di un mezzo all'azione di un campo elettrico esterno, è ovviamente legata alle proprietà degli atomi e delle molecole del mezzo. In questo paragrafo descriveremo brevemente come questa grandezza, di carattere macroscopio, è legata alle proprietà atomiche del mezzo.

Abbiamo spiegato precedentemente che un atomo posto in un campo elettrico viene polarizzato a causa di uno spostamento relativo di cariche positive e negative. Se $\boldsymbol{p}$ è il momento di dipolo elettrico indotto nell'atomo da un campo esterno $\mathcal{E}$, possiamo supporre che $\boldsymbol{p}$ sia proporzionale ad $\mathcal{E}$, un risultato confermato dall'esperienza, e scrivere

dove α è una costante caratteristica di ciascun atomo, ed è chiamata *polarizzabilità*; è espressa in m^3. La costante ϵ_0 è scritta esplicitamente nell'equazione per motivi di convenienza. Se vi sono n atomi o molecole per unità di volume, la polarizzazione del mezzo è $\mathcal{P} = n\boldsymbol{p} = n\alpha\epsilon_0\mathcal{E}$. Un confronto con l'Eq. (16.10) della suscettibilità elettrica del materiale* dà $\chi_e = f\alpha$.

Così il calcolo della suscettibilità elettrica si riconduce al calcolo della polarizzabilità degli atomi (o molecole) della sostanza. Ciò corrisponde a determinare l'effetto di un campo esterno sul moto degli elettroni atomici. Ma questo a sua volta richiede informazioni dettagliate sul moto degli elettroni in un atomo. Questo moto segue le leggi della meccanica quantistica e il calcolo dell'effetto perturbativo del campo elettrico esterno è al di là degli

*A rigore, quando si scrive l'Eq. (16.20) per un atomo o una molecola che siano immersi in un mezzo materiale e non siano isolati, il campo elettrico che compare nel secondo membro dell'equazione deve essere il campo elettrico risultante nel mezzo meno il campo elettrico prodotto dall'atomo stesso. Se si tiene conto di questa correzione, il legame fra χ_e e α diviene $\chi_e = n\alpha/(1 - n\alpha/3)$. Peraltro, per la maggior parte dei materiali (principalmente i gas), la relazione $\chi_e = n\alpha$ è una buona approssimazione.

count. Therefore the electric field and potential produced by a point charge embedded in a dielectric are

$$\mathcal{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2}\,\boldsymbol{u}_r \qquad \text{and} \qquad V = \frac{q}{4\pi\epsilon r}. \tag{16.18}$$

The magnitude of the force of interaction between two point charges embedded in a dielectric is then

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2}. \tag{16.19}$$

Since ϵ is in general larger than ϵ_0, the presence of the dielectric effectively reduces the interaction because of the screening due to the polarization of the molecules of the dielectric.

16.7 Calculation of Electric Susceptibility

The electric susceptibility χ_e, describing the response of a medium to the action of an external electric field, is obviously related to the properties of the atoms and molecules of the medium. In this section we shall briefly describe how this quantity, of macroscopic character, is related to the atomic properties of the medium.

We have previously explained that an atom placed in an electric field becomes polarized due to a relative displacement of the positive and negative charges. If $\boldsymbol{p}$ is the electric dipole moment induced in the atom by an external field $\mathcal{E}$, we may assume that $\boldsymbol{p}$ is proportional to $\mathcal{E}$, a result confirmed by experience, and write

$$\boldsymbol{p} = \alpha\epsilon_0\mathcal{E}, \tag{16.20}$$

where α is a constant characteristic of each atom, and is called *polarizability;* it is expressed in m^3. The constant ϵ_0 is written into the equation explicitly for convenience. If there are n atoms or molecules per unit volume, the polarization of the medium is $\mathcal{P} = n\boldsymbol{p} = n\alpha\epsilon_0\mathcal{E}$. Comparison with Eq. (16.10) for the electric susceptibility of the material* gives $\chi_e = n\alpha$.

Thus the calculation of electric susceptibility reduces to the calculation of the polarizability of the atoms (or molecules) of the substance. This amounts to determining the effect of an external field on the motion of atomic electrons. But that in turn requires that we have some detailed information about the electronic motion in an atom. This motion follows the laws of quantum mechanics, and the calculation of the perturbative effect of the external electric field is beyond the

* Strictly speaking, when one is writing Eq. (16.20) for an atom or molecule that is embedded in a material medium and is not isolated, the electric field appearing on the right-hand side of the equation must be the resultant electric field in the medium minus the electric field produced by the atom itself. When this correction is included, the relation between χ_e and α becomes $\chi_e = n\alpha/(1 - n\alpha/3)$. However, for most materials (mainly gases), the relation $\chi_e = n\alpha$ is a good approximation.

scopi di questo libro. Presenteremo perciò solo i risultati principali, distinguendo l'effetto per sostanze non polari da quello per sostanze polari.

(a) ***Effetto di distorsione.*** Quando le molecole di una sostanza non hanno un momento di dipolo elettrico permanente, la polarizzazione nasce unicamente dall'effetto di distorsione prodotto dal campo elettrico sulle orbite elettroniche. Possiamo descrivere questo effetto come uno spostamento del centro della distribuzione di carica elettronica rispetto al nucleo. Ciò dà origine a un dipolo elettrico che, negli atomi e nella maggior parte delle molecole, è parallelo al campo elettrico applicato.

Ogni atomo (o molecola) possiede un insieme caratteristico di pulsazioni ω_1, ω_2, ω_3, ... che corrispondono alle pulsazioni della radiazione elettromagnetica che la sostanza può emettere o assorbire. Queste pulsazioni costituiscono lo *spettro elettromagnetico* della sostanza. La polarizzabilità atomica, quando il campo elettrico è costante, detta *polarizzabilità statica*, è data dall'espressione

dove ω_i si riferisce ad una generica pulsazione dello spettro elettromagnetico della sostanza e la somma è estesa a tutte le pulsazioni. Le quantità indicate con f_i sono chiamate *intensità di oscillatore* della sostanza. Sono tutte positive e minori di uno e rappresentano la proporzione relativa secondo cui ciascuna delle frequenze dello spettro contribuisce alla polarizzabilità dell'atomo. Esse soddisfano le relazione $\Sigma_i f_i = 1$. Le altre quantità nell'Eq. (16.21) hanno il loro usuale significato.

Può sorprendere lo studente il vedere una pulsazione ω_i associata con un effetto prodotto da un campo statico. La sua presenza, peraltro, può essere giustificata usando un modello fenomenologico molto semplice, come indicato nell'Esempio 16.11.

Usando la relazione $\chi_e = n\alpha$, troviamo che la suscettibilità statica è

Questa espressione collega una proprietà macroscopica, χ_e, alle proprietà atomiche n, ω_i e f_i, della sostanza. Vediamo sino a qual punto i nostri risultati sono in accordo con l'esperienza. Se la radiazione dell'atomo cade nella regione del visibile, le pulsazioni ω_i sono dell'ordine di 5×10^{15} Hz, così che la sommatoria che compare nell'Eq. (16.22) è dell'ordine di 4×10^{-32}. Inoltre, n è dell'ordine di 10^{28} atomi per metro cubo per la maggior parte dei solidi e dei liquidi e circa 10^{25} atomi/m^3 per i gas in condizioni standard di temperatura e di pressione (STP). L'Eq. (16.22) mostra allora che la suscettibilità elettrica statica χ_e di materiali non polari che irraggiano nella regione visibile è dell'ordine di 10^0 (ossia uno) per i solidi e 10^{-3} per i gas. Dato che le nostre stime sono molto grossolane, non dobbiamo attenderci una perfetta corrispondenza coi risultati sperimentali. Ciònonostante, un confronto con i valori sperimentali della suscettibilità elettrica per alcuni materiali, dati colla Tabella 16–1, mostra un accordo per quanto riguarda l'ordine di grandezza.

scope of this book. Thus we shall present only the main results, separating the effect for nonpolar substances from that for polar substances.

(a) ***Distortion effect.*** When the molecules of a substance do not have a permanent electric dipole moment, polarization arises entirely from the distortion effect produced by the electric field on the electronic orbits. We may describe this effect as a displacement of the center of the electronic charge distribution relative to the nucleus. This results in an induced electric dipole that, in atoms and most molecules, is parallel to the applied electric field.

Each atom (or molecule) has a characteristic set of frequencies ω_1, ω_2, ω_3, ... that correspond to the frequencies of the electromagnetic radiation that the substance can emit or absorb. These frequencies constitute the *electromagnetic spectrum* of the substance. The atomic polarizability when the electric field is constant, called the *static polarizability*, is given by the expression

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2}, \tag{16.21}$$

where ω_i refers to any of the frequencies of the electromagnetic spectrum of the substance and the summation extends over all the frequencies. The quantities designated by f_i are called the *oscillator strengths* of the substance. They are all positive and smaller than one, and represent the relative proportion in which each of the frequencies of the spectrum contribute to the polarizability of the atom. They satisfy the relation $\sum_i f_i = 1$. The other quantities in Eq. (16.21) have their standard meaning.

It may be puzzling to the student to see a frequency ω_i associated with an effect produced by a static field. Its presence may, however, be justified by using a very simple phenomenological model, as indicated in Example 16.11.

Using the relation $\chi_e = n\alpha$, we find that the static electric susceptibility is

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2} = 3.19 \times 10^3 n \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2}. \tag{16.22}$$

This expression relates a macroscopic property, χ_e, to the atomic properties n, ω_i, and f_i, of the substance. Let us see to what extent our results agree with experiment. If the radiation of the atom falls in the visible region, the frequencies ω_i are of the order of 5×10^{15} Hz, so that the summation that appears in Eq. (16.22) is of the order of 4×10^{-32}. Also, n is of the order of 10^{28} atoms per cubic meter for most solids and liquids and about 10^{25} atoms/m^3 for gases at STP. Therefore Eq. (16.22) shows that the static electric susceptibility χ_e of nonpolar materials that radiate in the visible region is of the order of 10^0 (or one) for solids and 10^{-3} for gases. Since our estimates are very crude, we may not expect a precise reproduction of experimental results. However, comparison with experimental values of the electric susceptibility for a few materials, as given in Table 16–1, shows agreement insofar as the order of magnitude is concerned.

Tabella 16–1 Suscettibilità elettriche a temperatura ambiente

Sostanza	χ_e	Sostanza	χ_e
Solidi		*Gas**	
Mica		Idrogeno	
Porcellana		Elio	
Vetro		Azoto	
Bachelite		Ossigeno	
		Argon	
Liquidi		Anidride carbonica	
Olio		Vapore acqueo	
Terpentina		Aria	
Benzene		Aria (100 atm)	
Alcool (etilico)			
Acqua			

*A 1 atm e 20°C.

La discussione precedente è valida solo per campi statici. Se un campo dipende dal tempo, ci possiamo attendere un risultato diverso per la polarizzabilità atomica, che prende allora il nome di *polarizzabilità dinamica*, poichè la distorsione del moto elettronico sotto l'azione di un campo elettrico dipendente dal tempo sarà ovviamente diversa da quella dovuta a un campo elettrico statico. Supponiamo che il campo elettrico oscilli con una ben definita pulsazione ω. Questo campo oscillante sovrapporrà al moto naturale dell'elettrone una perturbazione oscillatoria che è analoga alle oscillazioni forzate discusse nel Paragrafo 12.13. Se non si considera presente alcuna attenuazione, il risultato del calcolo, usando le tecniche della meccanica quantistica, fornisce per la suscettibilità dinamica

dove tutte le quantità hanno il significato precedentemente dato. Una semplice giustificazione fenomenologica di questo risultato è data nell'Esempio 16.11. Si noti che il risultato per il caso dinamico (16.23) si riduce a quello per il caso statico, Eq. (16.22), se $\omega = 0$.

La costante dielettrica o permettività relativa del mezzo, usando l'Eq. (16.23), diviene, nel caso dinamico,

Tracciando il grafico di ϵ_r in funzione di ω, troveremo che ϵ_r è infinito ogni qual volta ω è uguale ad una delle pulsazioni caratteristiche ω_i, in contrasto con ciò che si osserva. Questo risultato fisicamente assurdo è dovuto al fatto che non abbiamo tenuto conto di un termine di smorzamento quando abbiamo calcolato la suscettibilità dinamica. Lo smorzamento che si verifica non è dovuto al fatto che l'elettrone si muove in un fluido viscoso; ha piuttosto un'origine diversa. Corrisponde all'energia persa dall'elettrone sotto forma di radiazione come conseguenza delle oscillazioni forzate. (Ciò verrà spiegato nel paragrafo 19.4.)

TABLE 16–1 Electric Susceptibilities at Room Temperature

Substance	χ_e	Substance	χ_e
Solids		*Gases**	
Mica	5	Hydrogen	5.0×10^{-4}
Porcelain	6	Helium	0.6×10^{-4}
Glass	8	Nitrogen	5.5×10^{-4}
Bakelite	4.7	Oxygen	5.0×10^{-4}
		Argon	5.2×10^{-4}
Liquids		Carbon dioxide	9.2×10^{-4}
Oil	1.1	Water vapor	7.0×10^{-3}
Turpentine	1.2	Air	5.4×10^{-4}
Benzene	1.84	Air (100 atm)	5.5×10^{-2}
Alcohol (ethyl)	24		
Water	78		

* At 1 atm and 20°C.

The foregoing discussion is valid only for static fields. If a field is time dependent, we may expect a different result for the atomic polarizability, then called *dynamic polarizability*, because the distortion of the electronic motion under a time-dependent electric field will obviously be different from that for a static electric field. Let us assume that the electric field oscillates with a definite frequency ω. This oscillating field will superpose an oscillatory perturbation on the natural motion of the electrons that is analogous to the forced oscillations discussed in Section 12.13. When damping is not considered, the result of the calculation, using the techniques of quantum mechanics, gives the dynamic susceptibility as

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}, \tag{16.23}$$

where all quantities have the meaning stated previously. A simple phenomenological justification of this result is given in Example 16.11. Note that the dynamic result (16.23) reduces to the static case, Eq. (16.22), if $\omega = 0$.

The dielectric constant or relative permittivity of the medium, using Eq. (16.23), is, in the dynamic case,

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = 1 + \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}. \tag{16.24}$$

If we were to plot ϵ_r against ω, we would find that ϵ_r is infinite for ω equal to each characteristic frequency ω_i, in contradiction to observation. This unphysical result is due to the fact that we excluded a damping term when we calculated the dynamic susceptibility. The damping that occurs is not due to the electron moving in a viscous fluid; rather it has a different origin. It corresponds to the energy lost by the electron as radiation as a result of the forced oscillations. (This will be explained in Section 19.4.)

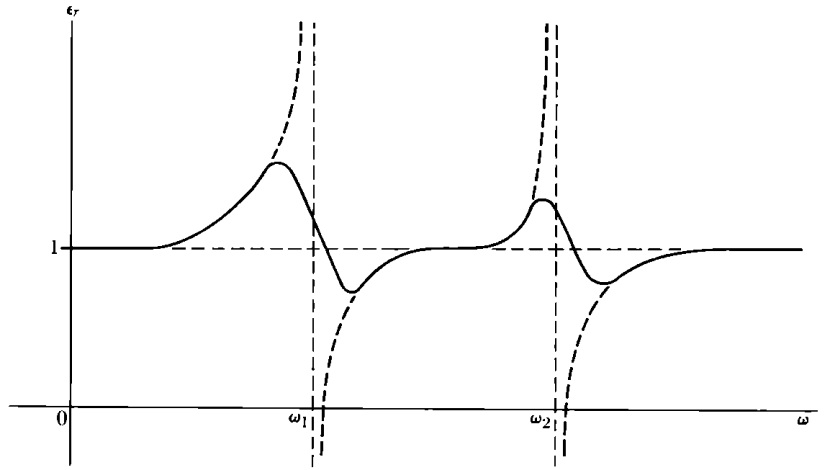


Fig. 16–20. Variazione della permettività relativa in funzione della frequenza del campo elettrico.

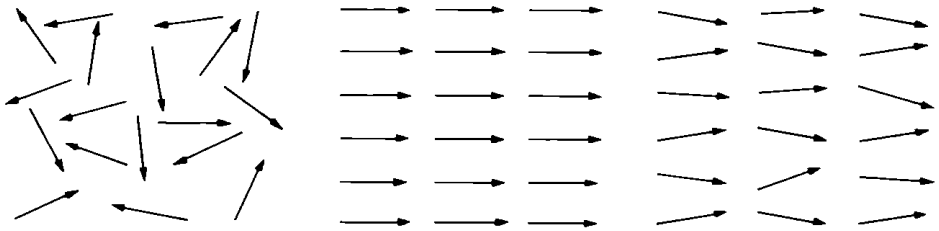
Fig. 16–20. Variation of relative permittivity as a function of the frequency of the electric field.

La variazione osservata di ϵ_r in funzione di ω è illustrata nella Fig. 16—20. L'andamento si ripete in corrispondenza delle pulsazioni caratteristiche ω_1, ω_2, ω_3, ... di ogni sostanza. Questa variazione ha una profonda influenza sul comportamento ottico ed elettrico della sostanza.

(b) ***Molecole con momento di dipolo permanente.*** Le polarizzabilità che abbiamo ottenuto nelle Equazioni (16.22) e (16.23) sono "indotte" poichè derivano dalla distorsione del moto elettronico a causa di un campo esterno. D'altro canto, quando esiste un momento elettrico di dipolo permanente, entra in gioco un altro effetto. Consideriamo un gas polare le cui molecole hanno un momento di dipolo permanente p_0. In assenza di qualsiasi campo elettrico esterno, questi momenti di dipolo sono orientati a caso e non si osserva alcun momento di dipolo macroscopico o collettivo (Fig. 16—27). Quando invece viene applicato un campo elettrico statico, esso tende ad orientare tutti i dipoli elettrici lungo la direzione del campo. L'allineamento sarebbe perfetto in assenza di qualsiasi

The observed variation of ϵ_r in terms of ω is illustrated in Fig. 16–20. The pattern repeats itself for the characteristic frequencies ω_1, ω_2, ω_3, ... of each substance. This variation has a profound influence on the optical and electrical behavior of the substance.

(b) ***Molecules with permanent dipole moment.*** The polarizabilities we obtained in Eqs. (16.22) and (16.23) are "induced" because they result from a distortion of the electronic motion by an external field. However, when a permanent electric dipole exists, another effect enters into play. Let us consider a polar gas whose molecules have a permanent dipole moment p_0. In the absence of any external electric field, these dipole moments are oriented at random and no macroscopic or collective dipole moment is observed (Fig. 16–21). However, when a static electric field is applied, it tends to orient all the electric dipoles along the direction of the field. The alignment would be perfect in the absence of all molecu-



(a) Senza campo (b) Campo elettrico senza interazioni molecolari (c) Campo elettrico con interazioni molecolari

Fig. 16–21. Orientazione di dipoli elettrici in un campo elettrico.

(a) No field (b) Electric field without molecular interactions (c) Electric field with molecular interactions

Fig. 16–21. Orientation of electric dipoles in an electric field.

interazione fra le molecole (Fig. 16–21b); ma gli urti molecolari tendono a disordinare i dipoli elettrici. Il disordinamento non è completo poichè il campo elettrico applicato favorisce l'orientazione secondo il campo rispetto a quella opposta (Fig. 16–21c). Di conseguenza, il valor medio della componente del momento di dipolo elettrico di una molecola parallelamente al campo elettrico è dato da

$$P_{\text{med}} =$$

dove k è la costante di Boltzmann, definita nell'Eq. (9.60), e T è la temperatura assoluta del gas. Si noti che p_{med} diminuisce quando la temperatura cresce. Questa dipendenza dalla temperatura si ha poichè l'agitazione molecolare cresce al crescere della temperatura; quanto più velocemente si muovono le molecole, tanto più efficacemente contrastano l'effetto allineante del campo elettrico applicato. Ciò dà luogo a una diminuzione del momento medio di dipolo nella direzione del campo.

Confrontando l'Eq. (16.25) con l'Eq. (16.20), otteniamo la polarizzabilità media, o efficace, di una molecola $\alpha = p_0^2/3\epsilon_0 kT$ e, se vi sono n molecole per unità di volume, la suscettibilità efficace $\chi_e = n\alpha$ è

risultato noto come *formula di Langevin*. I momenti elettrici molecolari di dipolo sono dell'ordine di grandezza della carica elettronica (1.6×10^{-19} C) moltiplicata per le dimensioni molecolari (10^{-10} m) ossia circa 10^{-30} C m (ricordate la Tabella 14–1). Introducendo i valori delle altre costanti nell'Eq. (16.26), abbiamo che, a temperatura ambiente ($T = 298\,°\text{K}$), la suscettibilità elettrica di una sostanza composta di molecole polari è anche in questo caso dell'ordine di 10^0 (ossia uno) per i solidi e 10^{-3} per i gas, il che è in accordo con i valori per la maggior parte dei gas polari.

Possiamo osservare che la suscettibilità elettrica dovuta alla orientazione delle molecole che possiedono momenti di dipolo permanente è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta, mentre la suscettibilità elettrica indotta dovuta alla distorsione del moto degli elettroni negli atomi o nelle molecole, Eq. (16. 22), è essenzialmente indipendente dalla temperatura, eccezion fatta per la variazione di n con la temperatura dovuta alla dilatazione termica. Ciò consente di separare i due effetti sperimentalmente. Misurando χ_e a diverse temperature, dovremmo trovare una dipendenza dalla temperatura del tipo

Quando il campo elettrico dipende dal tempo, si ottiene un risultato più complesso.

Una classe particolare di sostanze chiamate *sostanze ferroelettriche* presenta polarizzazione permanente in assenza di un campo elettrico esterno; ciò fa pensare ad una naturale tendenza dei dipoli permanenti delle loro molecole ad allinearsi. L'allineamento probabilmente deriva dalle interazioni mutue delle molecole che hanno come conseguenza intensi campi elettrici locali che favoriscono l'allineamento. Fra queste sostanze possiamo citare $BaTiO_3$, $KNbO_3$, e $LiTaO_3$. Una delle sostanze ferroelettriche note da più lungo tempo è il sale di Rochelle: $NaK(C_4H_4O_6) \cdot 4H_2O$.

lar interactions (Fig. 16-21b); but molecular collisions tend to disarrange the electric dipoles. The disarrangement is not complete because the applied electric field favors orientation along the field over orientation against it (Fig. 16-21c). As a result, the average value of the component of the electric dipole moment of a molecule parallel to the electric field is given by

$$p_{\text{ave}} = \frac{p_0^2}{3kT}\,\mathcal{E}, \tag{16.25}$$

where k is the Boltzmann constant, defined in Eq. (9.60), and T is the absolute temperature of the gas. Note that p_{ave} decreases when the temperature increases. This temperature dependence occurs because molecular agitation increases with an increase in temperature; the more rapidly the molecules move about, the more effective they become in offsetting the aligning effect of the applied electric field. This results in a decreased average dipole moment along the field direction.

Comparing Eq. (16.25) with Eq. (16.20), we obtain the average, or effective, polarizability of a molecule as $\alpha = p_0^2/3\epsilon_0 kT$ and, if there are n molecules per unit volume, the effective susceptibility $\chi_e = n\alpha$ is

$$\chi_e = \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 kT}, \tag{16.26}$$

a result known as *Langevin's formula*. The molecular electric dipole moments are of the order of magnitude of the electronic charge (1.6×10^{-19} C) multiplied by the molecular dimensions (10^{-10} m) or about 10^{-30} C m (remember Table 14-1). Introducing the values of the other constants into Eq. (16.26), we have that, at room temperature ($T = 298°\text{K}$), the electric susceptibility of a substance composed of polar molecules is again of the order of 10^0 (or one) for solids and 10^{-3} for gases, which is in agreement with the values for most polar gases.

We may note that the electric susceptibility due to the orientation of molecules with permanent dipole moments is inversely proportional to the absolute temperature, while the induced electric susceptibility due to the distortion of electronic motion in atoms or molecules, Eq. (16.22), is essentially temperature independent, except for the variation of n with temperature due to thermal expansion. This offers a means of separating the two effects experimentally. By measuring χ_e at different temperatures, we should find a temperature dependence of the form

$$\chi_e = A + \frac{B}{T}.$$

When the electric field is time dependent, a more complex result is obtained.

A special class of substances called *ferroelectrics* exhibit a permanent polarization in the absence of an external electric field; this suggests a natural tendency for the permanent dipoles of their molecules to align. The alignment probably results from the mutual interactions of the molecules which produces strong local fields that favor alignment. Among these substances we may mention $BaTiO_3$, $KNbO_3$, and $LiTaO_3$. One of the oldest known ferroelectrics is Rochelle salt: $NaK(C_4H_4O_6) \cdot 4H_2O$.

ESEMPIO 16.11. Discutere la polarizzazione di un atomo dovuta a un campo elettrico esterno.

Soluzione: In questo esempio cercheremo, usando un modello sovrasemplificato e fenomenologico, di determinare l'effetto che un campo elettrico esterno produce sul moto degli elettroni negli atomi.

Supponiamo che, quando il centro del moto degli elettroni è spostato di una distanza x rispetto al nucleo, agisca sull'elettrone una forza media $-kx$, che tende a riportare l'elettrone nella configurazione normale. L'equilibrio richiede che questa forza bilanci la forza $-e\mathcal{E}$ dovuta al campo elettrico applicato. Perciò $-kx - e\mathcal{E} = 0$ ossia $x = -e\mathcal{E}/k$. Il segno meno indica che l'orbita dell'elettrone è spostata nella direzione opposta a quella del campo elettrico. Il momento di dipolo elettrico indotto nell'atomo dalla perturbazione del moto elettronico è $p = -ex = (e^2/k)\mathcal{E}$, ed ha quindi lo stesso verso del campo elettrico. Possiamo esprimere questa relazione in un modo lievemente diverso, associando alla costante k una pulsazione ω_0, data dall'Eq. (12.6); cioè, $k = m_e\omega_0^2$. Allora in forma vettoriale

Confrontando questo risultato con la definizione data nell'Eq. (16.20), abbiamo che la polarizzabilità atomica per questo semplice modello è

Usando la relazione $\chi_e = n\alpha$, troviamo che la polarizzabilità elettrica statica è

Affinchè il nostro modello abbia un significato fisico dobbiamo identificare la pulsazione ω_0 con qualche proprietà atomica. Se si toglie il campo $\mathcal{E}$, possiamo dire, utilizzando i concetti sviluppati nel Capitolo 12, che la forza di richiamo $-kx$ sovrappone al moto naturale dell'elettrone una oscillazione di frequenza ω_0. Più avanti, nel Capitolo 19, mostreremo che una carica oscillante irraggia energia. Possiamo così identificare ω_0 con la pulsazione della radiazione emessa dall'atomo. Di conseguenza, se lo spettro della sostanza contiene una sola pulsazione ω_0, il nostro modello si identifica fondamentalmente con l'Eq. (16.21).

Consideriamo ora il caso dipendente dal tempo in cui il campo elettrico applicato varia nel tempo secondo $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. È allora ragionevole ritenere che vi sia una perturbazione oscillante sovrapposta al moto naturale dell'elettrone, per cui l'equazione del moto è data da

dove l'ultimo termine è la forza dovuta al campo oscillante. Ponendo $k = m_e\omega_0^2$, possiamo scrivere l'equazione precedente nella forma

Questa equazione è simile all'Eq. (12.56) per le oscillazioni forzate di un oscillatore smorzato.

EXAMPLE 16.11. Discuss the polarization of an atom due to an external electric field.

Solution: In this example we shall attempt, by using an oversimplified and phenomenological model, to determine the effect that an external electric field produces on the electronic motion in atoms.

Suppose that, when the center of the electronic motion is displaced a distance x relative to the nucleus, an average force $-kx$ acts on the electron, which tends to restore the electron to the normal configuration. Equilibrium requires that this force balance the force $-e\mathcal{E}$ due to the applied electric field. Therefore $-kx - e\mathcal{E} = 0$ or $x = -e\mathcal{E}/k$. The negative sign indicates that the electron's orbit is displaced in the direction opposite to that of the electric field. The electric dipole moment induced in the atom by the perturbation of the electronic motion is $p = -ex = (e^2/k)\mathcal{E}$, and thus is in the same direction as the electric field. We may express this relation in a slightly different manner by associating a frequency ω_0 with the constant k, as given by Eq. (12.6); that is, $k = m_e\omega_0^2$. Then in vector form

$$\boldsymbol{p} = \frac{e^2}{m_e\omega_0^2}\boldsymbol{\mathcal{E}}.$$

Comparing this result with the definition given in Eq. (16.20), we have that the atomic polarizability for this simple model is

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e\omega_0^2}.$$

Using the relation $\chi_e = n\alpha$, we find that the static electric polarizability is

$$\chi_e = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e\omega_0^2} = (3.19 \times 10^3)\frac{n}{\omega_0^2}. \tag{16.27}$$

If our model is to have physical meaning, we must identify the frequency ω_0 with some atomic property. If the field $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ is removed, we may say that, by using the ideas developed in Chapter 12, the restoring force $-kx$ superposes, on the natural motion of the electron, an oscillation of frequency ω_0. Later on, in Chapter 19, we shall prove that an oscillating charge radiates energy. Thus we may identify ω_0 with the frequency of the radiation emitted by the atom. Hence, if the spectrum of the substance contains only one frequency ω_0, our model basically coincides with Eq. (16.21).

Let us now consider the time-dependent case in which the applied electric field varies with time according to $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. It is then reasonable to assume that there is an oscillatory perturbation superposed on the natural motion of the electron, resulting in an equation of motion given by

$$m_e\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - e\mathcal{E}_0 \cos \omega t, \tag{16.28}$$

where the last term is the force due to the oscillating field. Setting $k = m_e\omega_0^2$, we may write the above equation in the form

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = -\frac{e\mathcal{E}_0}{m_e}\cos \omega t. \tag{16.29}$$

This equation is similar to Eq. (12.56) for the forced oscillations of a damped oscillator.

La differenza principale, d'altro canto, è che nell'Eq. (16.29) non vi è alcun termine di smorzamento. Possiamo considerare una soluzione del tipo $x = A \cos \omega t$ che, sostituita nell'Eq. (16.29), dà $A = -e\mathcal{E}_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Perciò

poichè $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. Il momento di dipolo elettrico indotto è

da cui otteniamo per la polarizzabilità dinamica dell'atomo

Per ottenere la suscettibilità dinamica, usiamo nuovamente la relazione $\chi_e = n\alpha$, e troviamo

dynamic = dinamica

che è sostanzialmente identica all'Eq. (16.23) se vi è una sola pulsazione ω_0 nello spettro elettromagnetico della sostanza. Ancora una volta possiamo notare che il nostro grossolano modello fenomenologico non può fornire risultati precisi. Una delle ragioni è che, come nel caso statico, consideriamo una singola pulsazione naturale ω_0. Un'altra ragione è che stiamo ignorando il fatto che il moto dell'elettrone segue le leggi della meccanica quantistica piuttosto che quelle della meccanica newtoniana.

16.8 *Capacità elettrica; condensatori*

Abbiamo mostrato (Paragrafo 14.8) che il potenziale elettrico sulla superficie di una sfera di raggio R avente una carica Q è $V = Q/4\pi\epsilon_0 R$. Se la sfera è circondata da un dielettrico, abbiamo invece, sotituendo ϵ_0 con ϵ,

Il rapporto Q/V per la sfera è allora $4\pi\epsilon R$, quantità costante, indipendente dalla carica Q. Questo è comprensibile poichè, se il potenziale è proporzionale alla carica che lo produce, il rapporto dei due deve essere una costante. Questa ultima affermazione è valida per qualsiasi conduttore carico di qualsiasi forma geometrica. Di conseguenza, la *capacità* elettrica di un conduttore isolato è definita come il rapporto fra la sua carica e il suo potenziale,

The main difference, however, is that in Eq. (16.29) there is no damping term. We may assume a solution of the form $x = A \cos \omega t$ which, when substituted into Eq. (16.29), gives $A = -e\mathcal{E}_0/(\omega_0^2 - \omega^2)$. Therefore

$$x = -\frac{e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}\mathcal{E}_0 \cos \omega t = -\frac{e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}\mathcal{E},$$

since $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. The induced electric dipole is

$$p = -ex = \frac{e^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}\mathcal{E},$$

from which we obtain the dynamic polarizability of the atom as

$$\alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{16.30}$$

To obtain the dynamic susceptibility, we again use the relation $\chi_e = n\alpha$, and find that

$$\chi_{e(\text{dynamic})} = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}, \tag{16.31}$$

which is essentially identical to Eq. (16.23) if there is only one frequency ω_0 in the electromagnetic spectrum of the substance. Once more we may note that our crude phenomenological model cannot give precise results. One of the reasons is that, as in the static case, we are assuming a single natural frequency ω_0. Another reason is that we are ignoring the fact that the electron's motion follows the laws of quantum mechanics rather than newtonian mechanics.

16.8 *Electric Capacity; Capacitors*

We have proved (Section 14.8) that the electric potential at the surface of a sphere of radius R having a charge Q is $V = Q/4\pi\epsilon_0 R$. If the sphere is surrounded by a dielectric, we have instead, replacing ϵ_0 by ϵ,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}.$$

The relation Q/V for the sphere is then $4\pi\epsilon R$, a constant quantity, independent of the charge Q. This is understandable because, if the potential is proportional to the charge producing it, the ratio of the two must be a constant. This last statement is valid for all charged conductors of any geometrical shape. Accordingly, the electric *capacity* of an isolated conductor is defined as the ratio of its charge to its potential,

$$C = \frac{Q}{V}. \tag{16.32}$$

La capacità di un conduttore sferico, come abbiamo appena detto è

Se la sfera è circondata dal vuoto invece che da un dielettrico, abbiamo per la sua capacità $C = 4\pi\epsilon_0 R$. Dunque il circondare una sfera e in generale un conduttore qualsiasi, con un dielettrico aumenta la sua capacità elettrica di un fattore ϵ/ϵ_0. Ciò è dovuto all'effetto schermante delle cariche di segno opposto che sono state indotte sulla superficie del dielettrico adiacente al conduttore. Queste cariche riducono la carica efficace del conduttore e diminuiscono il potenziale del conduttore secondo lo stesso fattore.

La capacità di un conduttore è espressa in $C\ V^{-1}$, una unità chiamata il *farad* (abbreviato F) in onore di Michele Faraday. Il farad è definito come la capacità di un conduttore isolato il cui potenziale elettrico, avendo esso ricevuto la carica di un coulomb, vale un volt. Utilizzando le unità fondamentali, abbiamo che $F = C\ V^{-1} = m^{-2}\ kg^{-1}\ s^2\ C^2$.

Il concetto di capacità elettrica può essere esteso a un sistema di conduttori. Consideriamo il caso di due conduttori aventi cariche Q e $-Q$ (Fig. 16–22). Se V_1 e V_2 sono i rispettivi potenziali, sicchè $V = V_1 - V_2$ è la loro *differenza* di potenziale, la capacità del sistema è definita come

Questa disposizione costituisce ciò che si chiama un condensatore. I condensatori hanno ampia applicazione nei circuiti elettrici. Un tipico condensatore è formato da due conduttori piani paralleli separati da una distanza d, con lo spazio fra l'uno e l'altro riempito da un dielettrico (Fig. 16–23). Il campo elettrico nello spazio fra i conduttori è

The capacity of a spherical conductor, as we have just indicated, is

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon R.$$

If the sphere is surrounded by vacuum instead of a dielectric, we have for its capacity $C = 4\pi\epsilon_0 R$. Therefore surrounding a sphere, and in general any conductor, by a dielectric increases its electric capacity by the factor ϵ/ϵ_0. This is due to the screening effect of the opposite charges that have been induced on the surface of the dielectric adjacent to the conductor. These charges reduce the effective charge of the conductor and decrease the potential of the conductor by the same factor.

The capacity of a conductor is expressed in $C\ V^{-1}$, a unit called the *farad* (abbreviated F) in honor of Michael Faraday. The farad is defined as the capacity of an isolated conductor whose electric potential, after it receives a charge of one coulomb, is one volt. In terms of the fundamental units, we have that $F = C\ V^{-1} = m^{-2}\ kg^{-1}\ s^2\ C^2$.

The concept of electric capacity can be extended to a system of conductors. Let us consider the case of two conductors having charges Q and $-Q$ (Fig. 16–22). If V_1 and V_2 are their respective potentials, so that $V = V_1 - V_2$ is their potential *difference*, the capacity of the system is defined as

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{V}. \tag{16.33}$$

This arrangement constitutes what is called a *capacitor*. Capacitors have wide application in electric circuits. A typical capacitor is formed by two parallel plane conductors separated by a distance d, with the space between them filled by a dielectric (Fig. 16–23). The electric field in the space between the conductors is

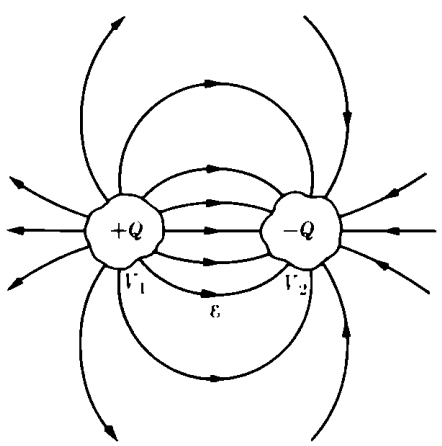


Fig. 16–22. Sistema di due conduttori con cariche uguali ma opposte.

Fig. 16–22. System of two conductors with equal but opposite charges.

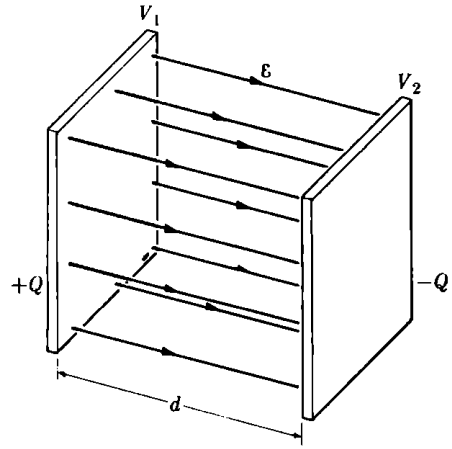


Fig. 16–23. Condensatore a piastre parallele.

Fig. 16–23. Parallel plate capacitor.

uniforme, ed è dato da $\mathcal{E} = (V_1 - V_2)/d$ in accordo con l'Eq. (14.31). Ma se σ è la densità di carica superficiale, l'intensità del campo elettrico nello spazio fra le piastre, come visto nell'Esempio 16.2, è $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon$, dove ϵ_0 è stato sostituito con ϵ, a causa della presenza del dielettrico. Perciò

$$V_1 - V_2 = \mathcal{E}d = \sigma d/\epsilon.$$

D'altra parte, se S è l'area delle piastre metalliche, dobbiamo avere $Q = \sigma S$. Perciò, sostituendo nell'Eq. (16.33), otteniamo per la capacità del sistema

$$C = \epsilon S/d. \tag{16.34}$$

Ciò suggerisce un metodo pratico per misurare la permettività o la costante dielettrica di un materiale. Dapprima misuriamo la capacità di un condensatore senza materiale fra le piastre, ottenendo

$$C_0 = \epsilon_0 S/d.$$

Riempiamo poi lo spazio fra le piastre con il materiale da studiare e misuriamo la nuova capacità, data dall'Eq. (16.34). Abbiamo allora:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \epsilon_r.$$

Perciò il rapporto fra le due capacità dà la permettività relativa o costante dielettrica del materiale posto fra le piastre.

ESEMPIO 16.12. Discutere la combinazione di più condensatori.

Soluzione: I condensatori possono essere combinati in due diversi modi: in *serie* e in *parallelo*. Nella combinazione in serie (vedi Fig. 16–24a), la piastra negativa di un condensatore è connessa a quella positiva del successivo, e così via. Di conseguenza, tutti i condensatori hanno la stessa carica, positiva o negativa, sulle loro piastre. Chiamiamo $V_1, V_2, \ldots, V_n$ le differenze

uniform, and is given by $\mathcal{E} = (V_1 - V_2)/d$ according to Eq. (14.31). But if σ is the surface charge density, the intensity of the electric field in the space between the plates, according to Example 16.2, is $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon$, where ϵ_0 has been replaced by ϵ, due to the presence of a dielectric. Therefore

On the other hand, if S is the area of the metal plates, we must have $Q = \sigma S$. Therefore, making the substitutions in Eq. (16.33), we obtain the capacity of the system as

This suggests a practical means for measuring the permittivity or the dielectric constant of a material. First we measure the capacity of a capacitor with *no* material between the plates, resulting in

Next we fill the space between the plates with the material being investigated, and measure the new capacity, given by Eq. (16.34). Then we have

Therefore the ratio of the two capacities gives the relative permittivity or dielectric constant of the material placed between the plates.

EXAMPLE 16.12. Discuss the combination of capacitors.

Solution: Capacitors can be combined in two kinds of arrangements: *series* and *parallel*. In the series combination (see Fig. 16–24a), the negative plate of one capacitor is connected to the positive of the next, and so on. As a result, all capacitors carry the same charge, positive or negative, on their plates. Call $V_1, V_2, \ldots, V_n$ the potential differ-

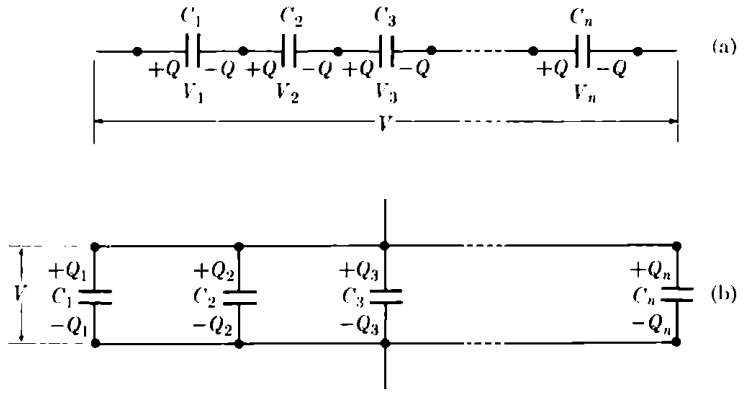


Fig. 16–24. Combinazione serie e parallelo di condensatori.

Fig. 16–24. Series and parallel arrangements of capacitors.

di potenziale ai capi di ciascun condensatore. Se $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sono le loro capacità abbiamo che $V_1 = Q/C_1$, $V_2 = Q/C_2$, $\ldots$, $V_n = Q/C_n$. Così la differenza di potenziale complessiva è

ences across each capacitor. If $C_1, C_2, \ldots, C_n$ are their respective capacities we have that $V_1 = Q/C_1$, $V_2 = Q/C_2, \ldots, V_n = Q/C_n$. Thus the overall potential difference is

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right) Q.$$

Il sistema può essere assimilato ad un singolo condensatore la cui capacità C soddisfa la relazione $V = Q/C$. Perciò

The system can be equated to a single capacitor whose capacity C satisfies the relation $V = Q/C$. Therefore

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}, \tag{16.35}$$

che fornisce la capacità complessiva di una combinazione in serie di condensatori.

Nella combinazione in parallelo (Fig. 16–24b), tutte le piastre positive sono collegate ad un punto comune e le piastre negative sono anch'esse collegate ad un altro punto comune, così che la differenza di potenziale V è la stessa per tutti i condensatori. Così, se le loro cariche sono $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, dobbiamo avere $Q_1 = C_1V$, $Q_2 = C_2V$, $\ldots$, $Q_n = C_nV$. La carica totale del sistema è

which gives the resultant capacity for a series arrangement of capacitors.

In the parallel association (Fig. 16–24b), all positive plates are connected to a common point, and the negative plates are also connected to another common point, so that the potential difference V is the same for all the capacitors. Thus, if their charges are $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, we must have $Q_1 = C_1V$, $Q_2 = C_2V, \ldots, Q_n = C_nV$. The total charge on the system is

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = (C_1 + C_2 + \cdots + C_n)V.$$

Il sistema può essere assimilato ad un singolo condensatore la cui capacità C soddisfa la relazione $Q = CV$. Perciò

The system can be equated to a single capacitor whose capacity C satisfies the relation $Q = CV$. Therefore

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \tag{16.36}$$

fornisce la capacità complessiva di una combinazione in parallelo di condensatori.

gives the resultant capacity for a parallel arrangement of capacitors.

16.9 *Energia del campo elettrico*

16.9 *Energy of the Electric Field*

Il caricare un condensatore richiede una spesa di energia poichè, per portare più carica su un conduttore, bisogna compiere un lavoro per vincere la repulsione della carica già presente. Questo lavoro ha come risultato un aumento dell'energia del conduttore. Per esempio, consideriamo un conduttore di capacità C avente una carica q. Il suo potenziale è $V = q/C$. Se aggiungiamo una carica dq al conduttore portandovela dall'infinito, il lavoro fatto, secondo l'Eq. (14.37), è $dW = V\,dq$. Questo lavoro è uguale all'aumento in energia $dE_\mathcal{E}$ del conduttore. Perciò, usando il valore di V, abbiamo che

Charging a conductor requires expending energy because, to bring more charge to a conductor, work must be done to overcome the repulsion of the charge already present. This work results in an increase in the energy of the conductor. For example, consider a conductor of capacity C having a charge q. Its potential is $V = q/C$. If we add a charge dq to the conductor by bringing it from infinity, the work done, according to Eq. (14.37), is $dW = V\,dq$. This work is equal to the increase in energy $dE_\mathcal{E}$ of the conductor. Therefore, using the value of V, we have that

$$dE_\mathcal{E} = \frac{q\,dq}{C}.$$

L'aumento complessivo di energia del conduttore quando la sua carica è aumentata da zero al valore Q (che è uguale al lavoro fatto durante il processo) è

The total increase in energy of the conductor when its charge is increased from zero to the value Q (which is equal to the work done during the process) is

$$E_\mathcal{E} = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}. \tag{16.37}$$

Per il caso di un conduttore sferico, $C = 4\pi\epsilon R$, e l'energia è

For the case of a spherical conductor, $C = 4\pi\epsilon R$, and the energy is

$$E_\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon R}\right). \tag{16.38}$$

Questa espressione può essere collegata al campo elettrico prodotto dalla sfera in un modo molto interessante. Il campo elettrico creato da un conduttore sferico a una distanza r, maggiore del suo raggio, è

This expression can be related to the electric field produced by the sphere in a very interesting way. The electric field created by the spherical conductor at a distance r, larger than its radius, is

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Calcoliamo l'integrale di $\mathcal{E}^2$ su tutto il volume esterno alla sfera. Per ottenere l'elemento di volume per l'integrazione, dividiamo lo spazio esterno in sottili croste sferiche di raggio r e spessore dr (Fig. 16–25). L'area di ciascuna crosta è $4\pi r^2$, e perciò il suo volume è dv = area × spessore = $4\pi r^2\,dr$. Perciò abbiamo

Let us compute the integral of $\mathcal{E}^2$ over all the volume exterior to the sphere. To obtain the volume element for the integration, we divide the outer space into thin spherical shells of radius r and thickness dr (Fig. 16–25). The area of each shell is $4\pi r^2$, and therefore its volume is dv = area × thickness = $4\pi r^2\,dr$. Therefore we have

$$\int_R^\infty \mathcal{E}^2\,dv = \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}\right)^2 (4\pi r^2\,dr) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon^2}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon^2 R}.$$

Confrontando questo risultato con l'Eq. (16.38), possiamo scrivere l'energia di un conduttore sferico carico nella forma

Comparing this result with Eq. (16.38), we may write the energy of a charged spherical conductor as

$$E_\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\epsilon\int_R^\infty \mathcal{E}^2\,dv.$$

Un calcolo matematico più generale mostra che questo risultato è di validità generale e l'energia richiesta per costituire un sistema di cariche può perciò essere espressa nella forma

A more general mathematical calculation indicates that this result is of general validity, and the energy required to assemble a system of charges can thus be expressed as

$$E_\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\epsilon\int_{\text{All space}} \mathcal{E}^2\,dv. \tag{16.39}$$

A questa espressione può essere dato un importante significato fisico. Possiamo dire che l'energia spesa nel mettere insieme le cariche è stata immagazzinata nello spazio circostante, così che al volume dv corrisponde un'energia $\frac{1}{2}\epsilon\mathcal{E}^2 dv$. Perciò

This expression can be given an important physical interpretation. We may say that the energy spent in assembling the charges has been *stored* in the surrounding space, so that to the volume dv there corresponds an energy $\frac{1}{2}\epsilon\mathcal{E}^2\,dv$. Hence the

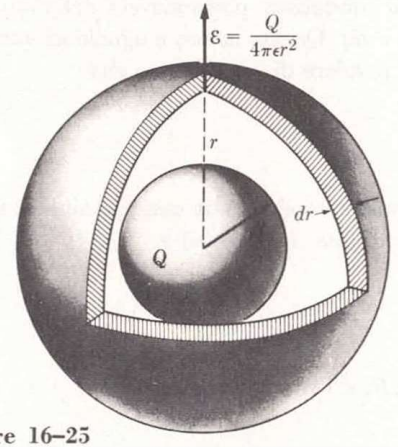


Figura 16–25 Figure 16–25

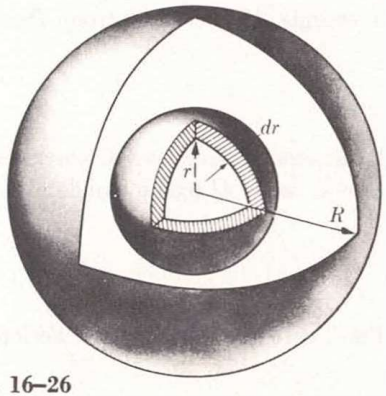


Figura 16–26 Figure 16–26

l'energia per unità di volume o densità di energia E_ε "immagazzinata" nel campo elettrico, è

energy per unit volume, or energy density E_ε "stored" in the electric field, is

$$E_\varepsilon = \tfrac{1}{2}\epsilon\mathcal{E}^2. \tag{16.40}$$

Questa interpretazione dell'energia di un sistema di particelle cariche distribuita in tutto lo spazio dove esiste il campo elettrico è molto utile nella discussione di molti fenomeni.

This interpretation of the energy of a system of charged particles distributed throughout all the space where the electric field is present is very useful in the discussion of many processes.

ESEMPIO 16.13. Calcolare l'energia richiesta per costituire una carica sferica distribuita uniformemente entro tutto il volume della sfera (Fig. 16–26).

EXAMPLE 16.13. Calculate the energy required to build a spherical charge distributed uniformly throughout all the volume of the sphere (Fig. 16–26).

Soluzione: Chiameremo R il raggio della sfera e Q la carica distribuita uniformemente entro il suo volume (Fig. 16–26). Dividiamo il volume della sfera in una serie di sottili croste sferiche di raggio crescente da zero sino al raggio R della sfera. Possiamo immaginare che la distribuzione sferica sia stata costruita come una sorta di cipolla aggiungendo successivi strati sferici sino a che si è raggiunto il raggio finale. Per calcolare l'energia della carica sferica, dobbiamo allora sommare l'energia spesa nell'aggiungere ciascuno degli strati.

Solution: We shall call R the radius of the sphere and Q the charge which is distributed uniformly throughout its volume (Fig. 16–26). Let us divide the volume of the sphere into a series of thin spherical shells of increasing radius from zero up to the radius R of the sphere. We may imagine that the spherical distribution of charge has been built in an onionlike fashion by adding successive spherical shells until the final radius is attained. To compute the energy of the spherical charge, we must then add the energy spent in adding each of the shells.

La densità di carica entro la sfera è

The charge density throughout the sphere is

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}.$$

Quando il raggio della sfera è r, la carica q contenuta in essa è

When the radius of the sphere is r, the charge q contained in it is

$$q = \rho(\tfrac{4}{3}\pi r^3) = \frac{Qr^3}{R^3} \tag{16.41}$$

e il potenziale elettrico sulla superficie è

and the electric potential at the surface is

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Qr^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Per aumentare il raggio della quantità dr aggiungendo un nuovo strato, dobbiamo aggiungere una carica dq ottenuta differenziando l'Eq. (16.41), che vale

To increase the radius by the amount dr by adding a new shell we must add a charge dq obtained by differentiating Eq. (16.41), yielding

$$dq = \frac{3Qr^2}{R^3}\,dr.$$

L'energia richiesta per aggiungere questa carica alla sfera è

The energy required to add this charge to the sphere is

$$dE_\varepsilon = V\,dq = \frac{3Q^2r^4}{4\pi\epsilon_0 R^6}\,dr.$$

L'energia totale richiesta per portare la carica sino al suo valore finale è quindi

The total energy required to build up the charge to its final value is then

$$E_\varepsilon = \int_0^Q V\,dq = \int_0^R \frac{3Q^2r^4}{4\pi\epsilon_0 R^6}\,dr = \frac{3Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^6}\int_0^R r^4\,dr.$$

Eseguendo l'integrazione, otteniamo

Performing the integration, we get

$$E_\varepsilon = \frac{3}{5}\left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}\right), \tag{16.42}$$

risultato che differisce dall'Eq. (16.37). La ragione è che quando abbiamo ricavato L'Eq. (16.37), abbiamo considerato una sfera di raggio costante su cui veniva aggiunta della carica, mentre per l'Eq. (16.42), abbiamo considerato una sfera caricata in tutto il suo volume aggiungendo strati successivi fino a raggiungere le dimensioni finali. Lasciamo allo studente il compito di verificare che in questo caso vale ancora la relazione (16.39), ma che deve includere l'energia associata al campo elettrico *entro* la sfera.

Un'applicazione interessante dell'Eq. (16.42) è la stima dell'energia elettrica o coulombiana di un nucleo la cui carica è $Q = Ze$. Abbiamo allora

a result which differs from Eq. (16.37). The reason is that when we derived Eq. (16.37) we assumed a sphere of constant radius on which charge was added, while for Eq. (16.42) we assumed a sphere charged throughout its volume by adding successive layers until the final size was attained. We leave it to the student to verify that in this case the relation (16.39) still holds, but that it must include the energy associated with the electric field *inside* the sphere.

An interesting application of Eq. (16.42) is to estimate the electric or coulomb energy of a nucleus whose charge is $Q = Ze$. We have then

$$E_\varepsilon = \frac{3}{5}\frac{Z^2e^2}{4\pi\epsilon_0 R}. \tag{16.43}$$

Tuttavia nel caso di un nucleo composto di protoni e neutroni, non si ha una distribuzione uniforme della carica in tutto il volume della sfera. La carica e concentrata nei protoni, e un'analisi più accurata fornisce un risultato lievemente differente in cui Z^2 è sostituito da $Z(Z - 1)$.

However, in the case of a nucleus composed of protons and neutrons, there is not a uniform distribution of the charge throughout the volume of the sphere. The charge is concentrated on the protons, and a more careful analysis gives a slightly different result, in which Z^2 is replaced by $Z(Z - 1)$.

ESEMPIO 16.14. Stimare il "raggio" dell'elettrone.

Soluzione: Sappiamo assai poco della forma geometrica dell'elettrone. Tutto ciò che possiamo dire con sicurezza è che l'elettrone è una particella carica negativamente con carica $-e$. Abbiamo interesse a stimare le dimensioni della regione in cui è concentrata la carica. Per semplificare i nostri conti, supponiamo che l'elettrone sia una sfera di raggio R. Possiamo calcolare la sua energia elettrica usando i metodi sopra esposti, dopo aver fatto alcune ipotesi su come la carica è distribuita nel volume dell'elettrone. Supponendo ad esempio, che sia assimilabile ad una sfera solida di raggio R e carica $-e$, la sua energia sarà

EXAMPLE 16.14. Estimate the "radius" of the electron.

Solution: There is very little we know about the geometrical shape of an electron. All we can say for certain is that an electron is a negatively charged particle of charge $-e$. We are interested in estimating the size of the region where that charge is concentrated. To simplify our calculation, let us consider that the electron is a sphere of radius R. We may compute its electrical energy by using the above methods, after making some assumptions about how the charge is distributed over the volume of the electron. Assuming, for example, that it resembles a solid sphere of radius R and charge $-e$, its energy will be

$$E_\varepsilon = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Possiamo eguagliare questa energia con l'energia di riposo dell'elettrone ottenendo

oppure

We may equate this energy with the rest mass energy m_ec^2 of the electron, resulting in

$$m_ec^2 = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{or} \quad R = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)\frac{e^2}{m_ec^2}. \tag{16.44}$$

Questa espressione dà il raggio dell'elettrone in base al modello da noi scelto. Se supponiamo che l'elettrone invece di essere una sfera uniformemente carica, sia carico solo sulla sua superficie, dobbiamo usare l'Eq. (16.37) per l'energia. L'espressione che otteniamo per il raggio è simile all'Eq. (16.44), ma con il fattore $\frac{3}{5}$ sostituito dal fattore $\frac{1}{2}$. Poichè l'elettrone probabilmente non corrisponde a nessuno dei due modelli, si usa adottare come *definizione* del raggio dell'elettrone la quantità

This expression gives the radius of the electron according to the model we have chosen. If we assume that the electron, instead of being a uniformly charged sphere, is charged only on its surface, we must use Eq. (16.37) for the energy. The expression we obtain for the radius is similar to Eq. (16.44), but with the factor $\frac{3}{5}$ replaced by the factor $\frac{1}{2}$. Since the electron probably does not correspond to either of these models, it is customary to adopt as the *definition* of the radius of the electron the quantity

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_ec^2} = 2.8178 \times 10^{-15}\ \text{m}. \tag{16.45}$$

Ripetiamo che questo raggio non può venir considerato in senso strettamente geometrico, ma sostanzialmente come una stima delle dimensioni della regione dove è "concentrato" l'elettrone.

We repeat that this radius cannot be considered in a strictly geometrical sense, but mainly as an estimate of the size of the region where the electron is "concentrated."

16.10 Conduttività elettrica; la legge di Ohm

Negli ultimi tre paragrafi abbiamo discusso determinati aspetti del comportamento di una sostanza quando ad essa è applicato un campo elettrico. Questo comportamento è stato rappresentato mediante la suscettibilità elettrica del materiale. Vi è un'altra importante proprietà collegata ad un campo elettrico esterno. Questa proprietà è chiamata *conduttività (o conducibilità) elettrica*, e la discuteremo in questo paragrafo con riferimento alla conduzione elettrica in un metallo.

Quando un campo elettrico è applicato ad un dielettrico, ne risulta una polarizzazione del dielettrico. Ma se il campo è applicato ad una regione dove esiste della carica libera, le cariche vengono messe in moto e ne risulta una corrente elettrica invece che una polarizzazione del mezzo. Le cariche vengono accelerate dal campo e perciò acquistano energia. (questa situazione è stata considerata nel Paragrafo 14.9.)

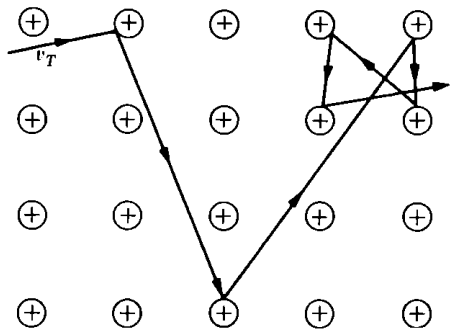


Fig. 16–27. Moto di elettroni attraverso il reticolo cristallino di un metallo. Nella figura, v_T è la velocità termica degli elettroni.

Quando cariche libere sono presenti entro un corpo, come elettroni in un metallo, il loro moto è ostacolato dall'interazione con gli ioni positivi che formano il reticolo cristallino del metallo. Consideriamo, ad esempio, un metallo con gli ioni positivi regolarmente disposti in tre dimensioni, come in Fig. 16–27. Gli elettroni liberi si muovono in un campo elettrico che presenta la medesima periodicità del reticolo, e durante il loro moto vengono frequentemente deviati dal campo. Per descrivere questo tipo di moto elettronico, dobbiamo utilizzare i metodi della meccanica quantistica. Poichè gli elettroni si muovono in tutte le direzioni, non ne risulta alcun trasporto netto di carica o corrente elettrica. Se però viene applicato un campo elettrico esterno, un moto di deriva si sovrappone al naturale moto casuale degli elettroni e si origina una corrente elettrica. È naturale supporre che l'intensità della corrrente deve essere legata all'intensità del campo elettrico, e che la relazione deve essere una diretta conseguenza della struttura interna del metallo.

Per avere un'indicazione su tale relazione, occupiamoci dapprima dei risultati sperimentali. Una delle leggi della fisica forse più familiari allo studente è la *legge di Ohm* che dice che, *per un conduttore metallico a temperatura costante, il rapporto tra la differenza di potenziale V fra due punti e la corrente elettrica I è costante*. Questa costante è chiamata *resistenza elettrica R* del conduttore fra i due punti. Possiamo perciò esprimere la legge di Ohm nella forma

oppure

16.10 Electrical Conductivity; Ohm's Law

In the last three sections we have discussed certain aspects of the behavior of a substance under an applied electric field. This behavior has been represented by the electric susceptibility of the material. There is another important property related to an external electric field. This property is called *electrical conductivity*, which we shall discuss in this section in connection with electrical conduction in a metal.

When an electric field is applied to a dielectric, a polarization of the dielectric results. But if the field is applied in a region where free charges exist, the charges are set in motion and an electric current instead of a polarization of the medium results. The charges are accelerated by the field and therefore gain energy. (This situation was considered in Section 14.9.)

Fig. 16–27. Electron motion through the crystal lattice of a metal. In the figure, v_T is the thermal velocity of the electrons.

When free charges are present within a body, such as electrons in a metal, their motion is hindered by the interaction with the positive ions that form the crystal lattice of the metal. Let us consider, for example, a metal with the positive ions regularly arranged in three dimensions, as in Fig. 16–27. The free electrons move in an electric field that exhibits the same periodicity as the lattice, and during their motion they are very frequently scattered by the field. To describe this type of electronic motion we must utilize the methods of quantum mechanics. Because the electrons are moving in all directions, no net charge transport or electric current results. However, if an external electric field is applied, a drift motion is superposed on the natural random motion of the electrons and an electric current results. It seems natural to assume that the strength of the current must be related to the intensity of the electric field, and that the relation must be a direct consequence of the internal structure of the metal.

For the clue to this relation, let us first turn to the experimental results. One of the laws of physics that is perhaps most familiar to the student is *Ohm's law*, which states that, *for a metallic conductor at constant temperature, the ratio of the potential difference V between two points to the electric current I is constant.* This constant is called the *electrical resistance R* of the conductor between the two points. Thus we may express Ohm's law by

$$V/I = R \quad \text{or} \quad V = RI. \tag{16.46}$$

Tabella 16–2 Conduttività elettrica a temperatura ambiente

Sostanza	Sostanza
Metalli	*Semiconduttori*
Rame	Carbone
Argento	Germanio
Alluminio	Silicio
Ferro	
Tungsteno	*Isolanti*
	Vetro
Leghe	Lucite
Manganina	Mica
Costantana	Quarzo
Nichelcromo	Teflon
	Paraffina

Questa legge, formulata dal fisico tedesco Georg Ohm (1787—1854), è seguita con sorprendente esattezza da molti conduttori per un ampio campo di valori di V, I, e temperature del conduttore. Peraltro molte sostanze, in particolare i semiconduttori, non seguono la legge di Ohm.

Dall'Eq.(16.46), vediamo che R è espressa in volt/ampère ,o m^2 kg s^{-1} C^{-2}, un'unità chiamata *ohm* e abbreviata Ω. Perciò un ohm è la resistenza di un conduttore attraverso il quale fluisce una corrente di un ampère quando viene mantenuta ai suoi capi una differenza di potenziale di un volt.

Consideriamo ora un conduttore cilindrico di lunghezza l e sezione S (Fig. 16—28). La corrente può essere espressa come $I = jS$, dove j è la densità di corrente. Il campo elettrico lungo il conduttore è $\mathcal{E} = V/l$. (Ricordate l'Eq. 14.30.) Perciò, possiamo scrivere l'Eq. (16.46) nella forma $\mathcal{E}l = RjS$ ossia

dove $\sigma = l/RS$ è *una nuova costante chiamata conduttività elettrica* del materiale. Si esprime in $\Omega^{-1}\, m^{-1}$ o m^{-3} kg^{-1} s C^2. Il legame fra σ ed R si scrive più frequentemente nella forma

Figura 16–28

La Tabella 16–2 dà la conduttività elettrica di alcuni materiali.

L'Equazione (16.47) esprime una relazione tra i moduli dei vettori $\boldsymbol{j}$ ed $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Assumendo per essi ugual direzione, cosa che si verifica nella maggior parte delle sostanze, possiamo sostituire l'Eq. (16.47) con l'equazione vettoriale

TABLE 16–2 Electrical Conductivities at Room Temperature

Substance	σ, Ω^{-1} m^{-1}	Substance	σ, Ω^{-1} m^{-1}
Metals		*Semiconductors*	
Copper	5.81×10^7	Carbon	2.8×10^4
Silver	6.14×10^7	Germanium	2.2×10^{-2}
Aluminum	3.54×10^7	Silicon	1.6×10^{-5}
Iron	1.53×10^7		
Tungsten	1.82×10^7	*Insulators*	
Alloys		Glass	10^{-10} to 10^{-14}
Manganin	2.27×10^6	Lucite	$<10^{-13}$
Constantan	2.04×10^6	Mica	10^{-11} to 10^{-15}
Nichrome	1.0×10^6	Quartz	1.33×10^{-18}
		Teflon	$<10^{-13}$
		Paraffin	3.37×10^{-17}

This law, formulated by the German physicist Georg Ohm (1787–1854), is obeyed with surprising accuracy by many conductors over a wide range of values of V, I, and temperatures of the conductor. However, many substances, especially the semiconductors, do not obey Ohm's law.

From Eq. (16.46), we see that R is expressed in volts/ampere or m^2 kg s^{-1} C^{-2}, a unit called an *ohm*, and abbreviated Ω. Thus one ohm is the resistance of a conductor through which there is a current of one ampere when a potential difference of one volt is maintained across its ends.

Let us now consider a cylindrical conductor of length l and cross section S (Fig. 16–28). The current may be expressed as $I = jS$, where j is the current density. The electric field along the conductor is $\mathcal{E} = V/l$. (Remember Eq. 14.30.) Therefore we may write Eq. (16.46) in the form $\mathcal{E}l = RjS$ or

$$j = \left(\frac{l}{RS}\right)\mathcal{E} = \sigma\mathcal{E}, \qquad (16.47)$$

where $\sigma = l/RS$ is a new constant called the *electrical conductivity* of the material. It is expressed in Ω^{-1} m^{-1} or m^{-3} kg^{-1} s C^2. The relation between σ and R is more frequently written in the form

$$R = l/\sigma S. \qquad (16.48)$$

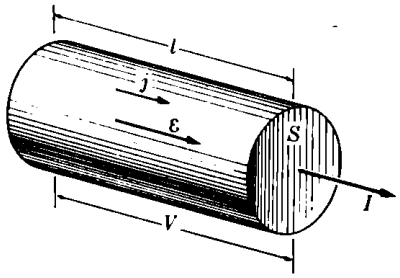


Figure 16–28

Table 16–2 gives the electrical conductivity of several materials.

Equation (16.47) expresses a relation between the magnitudes of the vectors $\boldsymbol{j}$ and $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Assuming that they have the same direction, a situation found in most substances, we may replace Eq. (16.47) by the vector equation

$$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{\mathcal{E}}, \qquad (16.49)$$

che è semplicemente un'altra maniera di scrivere la legge di Ohm. Ricordando dall'Eq. (15.12), con $q = -e$, che $\boldsymbol{j} = -en\boldsymbol{v}_\mathcal{E}$, dove n è il numero di elettroni per unità di volume e $\boldsymbol{v}_\mathcal{E}$ è la velocità di drift degli elettroni dovuta al campo elettrico applicato $\mathcal{E}$, abbiamo

which is merely another way of writing Ohm's law. Recalling from Eq. (15.12), with $q = -e$, that $\boldsymbol{j} = -en\boldsymbol{v}_\mathcal{E}$, where n is the number of electrons per unit volume and $\boldsymbol{v}_\mathcal{E}$ is the electrons' drift velocity due to the applied electric field $\mathcal{E}$, we have that

$$\boldsymbol{v}_\mathcal{E} = -\frac{\sigma}{en}\mathcal{E}. \tag{16.50}$$

Questa equazione mostra che gli elettroni di conduzione nel metallo raggiungono una velocità di deriva *costante* in conseguenza del campo elettrico esterno applicato. Arriviamo qui ad una conclusione del tutto diversa da quella da noi raggiunta nella nostra discussione del moto di uno ione entro il tubo evacuato di un acceleratore (Paragrafo 14.9). Allora avevamo trovato che l'accelerazione è $\boldsymbol{a} = -(e/m)\mathcal{E}$, e conseguentemente una velocità $\boldsymbol{v} = -(e/m)\mathcal{E}t$, che cresce continuamente nel tempo.

Tuttavia non è la prima volta che incontriamo una situazione come questa. Sappiamo che un corpo in caduta libera, nel vuoto, ha una velocità $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}t$ che cresce continuamente nel tempo. Ma se il corpo cade attraverso un fluido viscoso, il suo moto diviene uniforme con una velocità limite costante, come abbiamo visto nel Paragrafo 7.10. Per analogia, possiamo dire che l'effetto del reticolo cristallino può essere rappresentato da una forza "viscosa" analoga, agente sugli elettroni di conduzione quando il loro moto naturale è disturbato dal campo elettrico applicato. L'esatta natura di questa forza "viscosa" dipende dalle caratteristiche dinamiche del moto degli elettroni attraverso il reticolo cristallino; ce ne occuperemo più in dettaglio nell'Esempio 16.15.

This equation shows that the conduction electrons in the metal attain a *constant* drift velocity as a result of the external applied electric field. Here we reach a conclusion quite different from that reached in our discussion of the motion of an ion along the evacuated tube of an accelerator (Section 14.9). There we found that the acceleration is $\boldsymbol{a} = -(e/m)\mathcal{E}$, resulting in a velocity $\boldsymbol{v} = -(e/m)\mathcal{E}t$, which increases continuously with time.

However, this is not the first time we have encountered a situation like this. We know that a freely falling body, in a vacuum, has a velocity $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g}t$ that increases continuously with time. But if the body falls through a viscous fluid, its motion becomes uniform with a constant limiting velocity, as we discussed in Section 7.10. By analogy, we may say that the effect of the crystal lattice may be represented by a similar "viscous" force, acting on the conduction electrons when their natural motion is disturbed by the applied electric field. The exact nature of this "viscous" force depends on the dynamics of the electronic motion through the crystal lattice; we shall elaborate on it in Example 16.15.

Il mantenere una corrente in un conduttore richiede spesa di energia. Deve essere spesa dell'energia anche per accelerare uno ione in un acceleratore o in un tubo elettronico (Paragrafo 14.9), ma vi è una differenza. Nell'acceleratore, tutta l'energia è spesa nell'accelerare gli ioni. In un conduttore, a causa dell'interazione fra gli elettroni e gli ioni positivi del reticolo cristallino, l'energia degli elettroni è trasferita al reticolo, aumentandone l'energia vibrazionale. Ciò conduce ad un aumento di temperatura del materiale, che è il ben noto effetto riscaldatore di una corrente, chiamato *effetto joule*.

Maintaining a current in a conductor requires the expenditure of energy. Energy must also be expended to accelerate an ion in an accelerator or an electron tube (Section 14.9), but there is a difference. In the accelerator, all the energy is spent in speeding up the ions. In a conductor, because of the interaction of the electrons and the positive ions of the crystal lattice the electrons' energy is transferred to the lattice, increasing its vibrational energy. This leads to an increase in the temperature of the material, which is the well-known heating effect of a current, called the *Joule effect*.

Possiamo facilmente stimare il ritmo a cui energia viene trasferita al reticolo cristallino. Il lavoro fatto per unità di tempo su un elettrone è $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_\mathcal{E} = -e\mathcal{E}\cdot\boldsymbol{v}_\mathcal{E}$ (ricordate L'Eq. 8.10) e il lavoro fatto per unità di tempo e unità di volume (o *potenza* per unità) di volume) è $p = n(-e\mathcal{E}\cdot\boldsymbol{v}_\mathcal{E})$. Usando le Equazioni (16.47) e (16.50) per eliminare $\boldsymbol{v}_\mathcal{E}$, otteniamo

We may easily estimate the rate at which energy is transferred to the crystal lattice. The work done per unit time on an electron is $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_\mathcal{E} = -e\mathcal{E}\cdot\boldsymbol{v}_\mathcal{E}$ (remember Eq. 8.10) and the work done per unit time and unit volume (or *power* per unit volume) is $p = n(-e\mathcal{E}\cdot\boldsymbol{v}_\mathcal{E})$. Using Eqs. (16.47) and (16.50) to eliminate $\boldsymbol{v}_\mathcal{E}$, we obtain

$$p = \sigma\mathcal{E}^2 = j\mathcal{E}. \tag{16.51}$$

Consideriamo nuovamente il conduttore cilindrico di Fig. 16–28, il cui volume è Sl. La potenza richiesta per mantenere in esso la corrente è

Let us again consider the cylindrical conductor of Fig. 16–28, whose volume is Sl. The power required to maintain the current in it is

$$P = (Sl)p = (Sl)(j\mathcal{E}) = (jS)(\mathcal{E}l).$$

Ma $jS = I$ e $\mathcal{E}l = V$. Perciò la potenza richiesta per mantenere la corrente nel conduttore è

But $jS = I$ and $\mathcal{E}l = V$. Therefore the power required to maintain the current in the conductor is

$$P = VI. \tag{16.52}$$

Questa equazione è identica all'Eq. (14.43), che era stata ottenuta in modo più generale ed è indipendente dalla natura del processo di conduzione. Per conduttori che seguono la legge di Ohm, $V = RI$, e l'Eq. (16.52) può essere scritta nella forma equivalente

This equation is identical to Eq. (14.43), which was obtained in a more general way, and is independent of the nature of the conduction process. For conductors which follow Ohm's law, $V = RI$, and Eq. (16.52) may be written in the alternative form

$$P = RI^2. \tag{16.53}$$

Molti materiali, però, non seguono la legge di Ohm e per essi l'Eq. (16.53) non è corretta, mentre l'Eq. (16.52) rimane valida. Un conduttore avente resistenza chiamato anche un *resistore*, è rappresentato schematicamente in Fig. 16–29.

Many materials, however, do not follow Ohm's law, and for them Eq. (16.53) is not correct, although Eq. (16.52) remains valid. A conductor with resistance, also called a *resistor*, is represented diagrammatically in Fig. 16–29.

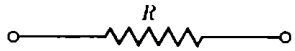


Fig. 16–29. Rappresentazione di una resistenza elettrica.

Fig. 16–29. Symbolic representation of an electric resistance.

ESEMPIO 16.15. Discutere il moto degli elettroni di conduzione in un metallo.

Soluzione: Abbiamo detto che possiamo rappresentare fenomenologicamente l'effetto dell'interazione del reticolo cristallino e degli elettroni di conduzione in un metallo per mezzo di una forza "viscosa". Supponendo che questa forza sia della stessa forma considerata nel caso del moto in un fluido (Paragrafo 7.10), cioè, $-kv$, scriviamo l'equazione del moto di un elettrone in un metallo nella forma

EXAMPLE 16.15. Discuss the motion of the conduction electrons in a metal.

Solution: We have indicated that we may phenomenologically represent the effect of the interaction of the crystal lattice and the conduction electrons in a metal by a "viscous" force. Assuming that this force is of the same form as that considered in the case of motion in a fluid (Section 7.10), that is, $-kv$, we write the equation of motion of an electron in a metal as

$$m_e \frac{dv}{dt} = -e\mathcal{E} - kv. \tag{16.54}$$

Così la velocità limite di deriva, ottenuta ponendo $dv/dt = 0$, è $v_\mathcal{E} = -e\mathcal{E}/K$. Se confrontiamo questo risultato con l'Eq. (16.50), la conduttività elettrica è $\sigma = ne^2/k$.

Possiamo esprimere questo risultato in modo differente introducendo una quantità chiamata *tempo di rilassamento*. Supponiamo che il campo $\mathcal{E}$ venga tolto bruscamente dopo che è stata raggiunta la velocità limite di deriva. L'equazione del moto per l'elettrone è allora

Thus the limiting drift velocity, obtained by making $dv/dt = 0$, is $v_\mathcal{E} = -e\mathcal{E}/k$. If we compare this result with Eq. (16.50), the electrical conductivity is $\sigma = ne^2/k$.

We may express this result in a different way by introducing a quantity called *relaxation time*. Suppose that the electric field $\mathcal{E}$ is suddenly cut off after the limiting drift velocity has been attained. The equation of motion for the electron is then

$$m_e \frac{dv}{dt} = -kv,$$

la cui soluzione è $v = v_\mathcal{E} e^{-(k/m)t}$. Lo studente può controllare questo risultato o per sostituzione diretta o facendo riferimento al Problema 7.82. Quindi il tempo necessario perchè la velocità di deriva diminuisca di un fattore e è $\tau = m/k$. Questo è il tempo di rilassamento del moto dell'elettrone, simile a quello introdotto nell'Esempio 7.8 per il moto di un corpo attraverso un fluido viscoso. Perciò per la conduttività otteniamo la relazione

whose solution is $v = v_\mathcal{E} e^{-(k/m)t}$. The student may check this result either by direct substitution or by referring to Problem 7.82. Then the time required for the drift velocity to drop by the factor e is $\tau = m/k$. This is the relaxation time of the electron's motion, similar to that introduced in Example 7.8 for the motion of a body through a viscous fluid. Thus for the conductivity we obtain the relation

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}. \tag{16.55}$$

Se σ è nota, τ può essere calcolata, e viceversa, poichè n, e, ed m_e sono quantità note. Supponendo che ogni atomo contribuisca con un elettrone, possiamo stimare che n è circa 10^{28} elettroni m^{-3} nella maggior parte dei metalli. Usando i valori di e ed m_e, troviamo che, con σ dell'ordine di $10^7\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$, il tempo di rilassamento è dell'ordine di 10^{-14} s.

Deve essere chiaro a questo punto che l'unica cosa che abbiamo fatto è stata quella di immaginare un modello fenomenologico mediante il quale si ottiene il risultato richiesto dalla legge di Ohm; ma ciò

If σ is known, τ can be computed, and conversely, since n, e, and m_e are known quantities. Assuming that each atom contributes one electron, we may estimate that n is about 10^{28} electrons m^{-3} in most metals. Using the values of e and m_e, we find that, with σ of the order of $10^7\ \Omega^{-1}\ m^{-1}$, the relaxation time τ is of the order of 10^{-14} s.

It must be understood at this point that the only thing we have done is to devise a phenomenological model by which the result required by Ohm's law is obtained; but this

ci ha indotto ad introdurre una nuova quantità τ. Per "spiegare" la legge di Ohm e la conduzione elettrica nei metalli, dobbiamo collegare τ alle caratteristiche dinamiche del moto degli elettroni. Ma, come già detto, poichè questo moto avviene seguendo le leggi della meccanica quantistica, un'ulteriore discussione dell'Eq. (16.55) deve essere rimandata. (Vedi Volume III, Cap. 4.)

Possiamo, tuttavia, stimare la bontà del nostro modello controllando gli ordini di grandezza delle quantità che intervengono. È ragionevole supporre che il tempo di rilassamento sia dello stesso ordine di grandezza del tempo fra due successive collisioni di un elettrone con gli ioni del reticolo cristallino. Ma se l è la distanza media fra gli ioni e v è una certa velocità media degli elettroni, il tempo di collisione può essere stimato mediante il rapporto l/v. Per la maggior parte dei solidi l è dell'ordine di 5×10^{-9} m. Per ottenere v, supponiamo di poter usare la stessa relazione (9.59) ricavata per le molecole di un gas. Allora a temperatura ambiente v è dell'ordine di 10^5 m s^{-1}. Concludiamo che τ è circa 5×10^{-14} s. Questo risultato è in accordo con le stime che abbiamo fatto precedentemente, usando l'Eq. (16.55) e i valori sperimentali di σ.

ESEMPIO 16.16. Discutere la combinazione dei resistori.

Soluzione: I resistori possono essere combinati in due tipi di collegamento, simili a quelli discussi nell'Esempio 16.12 per i condensatori: *serie* e *parallelo*. Nella combinazione serie (Fig. 16–30a), i resistori sono collegati in modo che la stessa corrente I fluisce attraverso ciascuno di essi. La caduta di potenziale ai capi di ciascun resistore, secondo la legge di Ohm, è $V_1 = R_1 I$, $V_2 = R_2 I$, . . . , $V_n = R_n I$. Perciò la differenza di potenziale complessiva è

Il sistema può essere in effetti ridotto ad un solo resistore R che soddisfi $V = RI$. Perciò

dà la resistenza risultante di una combinazione in serie di resistori.

Nella combinazione in parallelo (Fig. 16–30b), i resistori sono connessi in modo che la differenza di potenziale V è la stessa per tutti. La corrente attraverso ciascun resistore, secondo la legge di Ohm, è $I_1 = V/R_1$, $I_2 = V/R_2$, . . . , $I_n = V/R_n$. La

Fig. 16–30. Combinazione serie e parallelo di resistori.

has led us to introduce a new quantity τ. To "explain" Ohm's law and electrical conduction in metals, we must relate τ to the dynamics of the motion of electrons. But, as indicated before, since this motion takes place according to the laws of quantum mechanics, further discussion of Eq. (16.55) must be postponed. (See Volume III, Chapter 4.)

We may, however, estimate the correctness of our model by checking the orders of magnitude of the quantities involved. It is reasonable to assume that the relaxation time is of the same order of magnitude as the time between two successive collisions of an electron with the ions of the crystal lattice. But if l is the average separation of the ions and v is some average velocity of the electrons, the collision time can be estimated by the ratio l/v. For most solids l is of the order of 5×10^{-9} m. To obtain v, let us assume that we may use the same relation (9.59) devised for gas molecules. Thus at room temperature v is of the order of 10^5 m s^{-1}. We conclude then that τ is about 5×10^{-14} s. This result agrees with the estimates we made previously, using Eq. (16.55) and the experimental values of σ.

EXAMPLE 16.16. Discuss the combination of resistors.

Solution: Resistors can be combined in two kinds of arrangements, similar to those discussed in Example 16.12 for capacitors: *series* and *parallel*. In the series combination (Fig. 16–30a), the resistors are connected in such a way that the same current I flows along all of them. The potential drop across each resistor, according to Ohm's law, is $V_1 = R_1 I$, $V_2 = R_2 I$, . . . , $V_n = R_n I$. Thus the overall potential difference is

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n)I.$$

The system can be reduced effectively to a single resistor R satisfying $V = RI$. Therefore

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \tag{16.56}$$

gives the resultant resistance for a series arrangement of resistors.

In the parallel combination (Fig. 16–30b), the resistors are connected in such a way that the potential difference V is the same for all of them. The current through each resistor, according to Ohm's law, is $I_1 = V/R_1$, $I_2 = V/R_2$, . . . , $I_n = V/R_n$. The

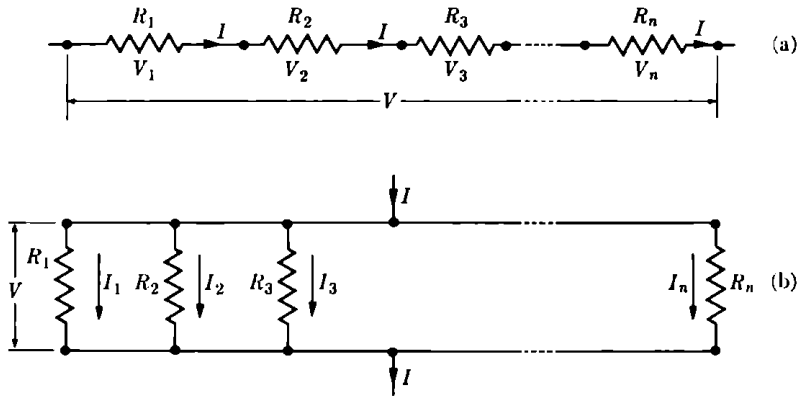


Fig. 16–30. Series and parallel arrangements of resistors.

corrente totale I fornita al sistema è

$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right) V.$$

Il sistema può essere ridotto in effetti a un singolo resistore R che soddisfi $I = V/R$. Perciò

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \tag{16.57}$$

dà la resistenza risultante per una combinazione in parallelo di resistori.

16.11 *Forza elettromotrice*

Supponiamo che una particella si muova da A a B lungo un percorso L sotto l'azione di una forza $\boldsymbol{F}$. Abbiamo spiegato nel capitolo 8 che in questo caso il lavoro fatto dalla forza è $W = \int_L \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$, dove l'indice L significa che l'integrale è calcolato lungo tale percorso, e $d\boldsymbol{l}$ è un elemento di linea del percorso. Abbiamo anche dimostrato che quando la forza è conservativa (cioè la forza è legata all'energia potenziale da $\boldsymbol{F} = -\text{grad}\, E_p$), il lavoro è indipendente dal percorso e risulta $\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = E_{p,A} - E_{p,B}$. Un'importante conseguenza, anch'essa enunciata nel capitolo 8, è che quando il percorso è chiuso, il lavoro di una forza conservativa è nullo, poichè il punto B coincide con il punto A e perciò $E_{p,A} = E_{p,B}$.

Questi risultati possono essere estesi ad un qualsiasi campo vettoriale, come i campi elettrico e magnetico. Indichiamo con $\boldsymbol{V}$ il campo vettoriale. L'*integrale di linea* del campo vettoriale $\boldsymbol{V}$ dal punto A al punto B lungo un percorso L è definito come

$$\text{Integrale di linea di } \boldsymbol{V} = \int_L \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}. \tag{16.58}$$

In generale, l'integrale di linea dipende dal percorso. Se il percorso lungo cui è calcolato l'integrale di linea è un percorso *chiuso*, l'integrale di linea è chiamato la *circolazione* del campo vettoriale. Viene indicato con un cerchio sopra il segno di integrale.

$$\text{Circolazione di } \boldsymbol{V} = \oint \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}. \tag{16.59}$$

Un caso importante è quello in cui il campo $\boldsymbol{V}$ può essere espresso come il gradiente di una funzione. Questa è la stessa situazione trovata nel caso di una forza conservativa, e perciò possiamo dire che

> *quando un campo vettoriale può essere espresso come il gradiente di una funzione, l'integrale di linea del campo tra due punti è indipendente dal percorso che congiunge i due punti e la circolazione lungo un arbitrario percorso chiuso vale zero.*

Man mano che procediamo in questo libro, lo studente scoprirà che i concetti di integrale di linea e di circolazione di un campo vettoriale sono molto utili per formulare le leggi dell'elettromagnetismo. Applicheremo ora queste due nuove definizioni al campo elettrico.

total current I supplied to the system is

The system can be reduced effectively to a single resistor R satisfying $I = V/R$. Therefore

gives the resultant resistance for a parallel arrangement of resistors.

16.11 Electromotive Force

Suppose that a particle moves from A to B along a path L under the action of a force $\boldsymbol{F}$. We explained in Chapter 8 that in this case the work done by the force is $W = \int_L \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}$, where the subscript L means that the integral is performed along such path and $d\boldsymbol{l}$ is a line element of the path. We also proved that when the force is conservative (i.e., the force is related to the potential energy by $\boldsymbol{F} = -\text{grad}\, E_p$), the work is independent of the path, resulting in $\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = E_{p,A} - E_{p,B}$. An important consequence, also stated in Chapter 8, is that when the path is closed the work of a conservative force is zero, since point B is the same as point A and thus $E_{p,A} = E_{p,B}$.

These results can be extended to any vector field, such as the electric or magnetic fields. Let us designate the vector field by $\boldsymbol{V}$. The *line integral* of the vector field $\boldsymbol{V}$ from point A to point B along a path L is defined as

$$\text{Line integral of } \boldsymbol{V} = \int_L \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}. \tag{16.58}$$

In general the line integral depends on the path. If the path along which the line integral is calculated is a *closed* path, the line integral is called the *circulation* of the vector field. It is indicated by a circle on top of the integral sign:

$$\text{Circulation of } \boldsymbol{V} = \oint \boldsymbol{V} \cdot d\boldsymbol{l}. \tag{16.59}$$

An important case is that in which the field $\boldsymbol{V}$ can be expressed as the gradient of a function. This is the same situation found in the case of conservative forces, and therefore we may say that

> *when a vector field can be expressed as the gradient of a function, the line integral of the field between two points is independent of the path joining the points and the circulation around an arbitrary closed path is zero.*

As we progress through this text, the student will discover that the concepts of line integral and circulation of a vector field are very useful in formulating the laws of electromagnetism. We shall now apply these two new definitions to the electric field.

Poichè il campo elettrico è uguale alla forza per unità di carica, l'integrale di linea del campo elettrico, $\int_L \mathcal{E} \cdot dl$, è uguale al lavoro fatto quando si sposta una carica unitaria lungo il percorso L. Se il percorso è chiuso (Fig. 16–31), l'integrale di linea diviene la circolazione del campo elettrico. Viene chiamato la *forza elettromotrice* (f.e.m.) applicata al percorso chiuso. Indicando la forza elettromotrice con $V_\mathcal{E}$, abbiamo che

Closed path = Percorso chiuso

$$\text{f.e.m.} = \oint_L \mathcal{E} \cdot dl. \tag{16.60}$$

Figura 16–31

Perciò *la forza elettromotrice applicata a un percorso chiuso è uguale al lavoro fatto nello spostare un'unità di carica lungo il percorso.* (La parola "forza" è equivoca poichè ci riferiamo a un "energia," ma è stata accettata dall'uso comune.) Naturalmente, la f.e.m. è espressa in volt.

Consideriamo ora il caso particolare di un campo elettrico *statico*. Ricordando che il campo elettrico statico è legato al potenziale elettrico da $\mathcal{E} = -\text{grad } V$, possiamo scrivere

$$\int_L \mathcal{E} \cdot dl = V_A - V_B, \tag{16.61}$$

dove A e B sono i due punti collegati dal percorso L. Perciò l'integrale di linea di un campo elettrico statico tra due punti è uguale alla differenza di potenziale fra i punti. Se il percorso è chiuso, i punti A e B coincidono e l'Eq. (16.61) dà

$$V_\mathcal{E} = \oint \mathcal{E} \cdot dl = 0. \tag{16.62}$$

Esprimendo ciò in parole, possiamo dire che

> *la fem o circolazione di un campo elettrico statico lungo un arbitrario percorso chiuso vale zero.*

Questa affermazione significa che il lavoro fatto da un campo elettrico statico nel muovere una carica lungo un percorso chiuso è nullo.

Se il campo elettrico è applicato a un conduttore, possiamo combinare l'Eq. (16.61) con la legge di Ohm e scrivere l'Eq. (16.46) nella forma

$$\int_L \mathcal{E} \cdot dl = RI, \tag{16.63}$$

dove L è un percorso lungo il conduttore ed R è la resistenza elettrica tra i punti del conduttore collegati dal percorso L.

Come abbiamo detto in precedenza, il mantenere una corrente fra due punti in un conduttore implica che dell'energia venga fornita al sistema dalla sorgente della

Since the electric field is equal to the force per unit charge, the line integral of the electric field, $\int_L \mathcal{E} \cdot dl$, is equal to the work done when moving one unit of charge along the path L. If the path is closed (Fig. 16–31), the line integral becomes the circulation of the electric field. It is called the *electromotive force* (emf) applied to the closed path. Designating the emf by $V_\mathcal{E}$, we have that

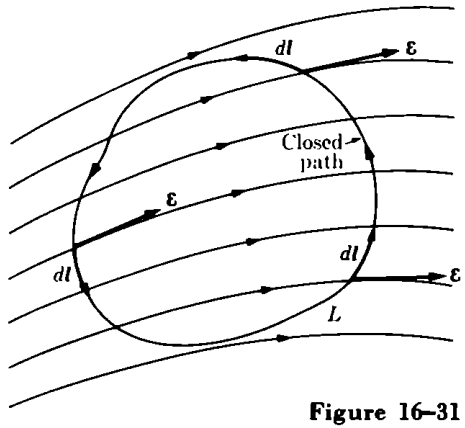


Figure 16–31

Therefore *the electromotive force applied to a closed path is equal to the work done when moving one unit of charge around the path.* (The word "force" is misleading since we are referring to "energy," but it has been accepted by common usage.) Naturally emf is expressed in volts.

Let us now consider the special case of a *static* electric field. Recalling that the static electric field is related to the electric potential by $\mathcal{E} = -\text{grad } V$, we may write

where A and B are the two points joined by the path L. Thus the line integral of a static electric field between two points is equal to the potential difference between the points. If the path is closed, points A and B coincide, and Eq. (16.61) gives

Expressing this in words, we may say that

> *the emf, or circulation, of a static electric field around an arbitrary closed path is zero.*

This statement means that the work done by a static electric field in moving a charge around a closed path is zero.

If the electric field is applied to a conductor, we may combine Eq. (16.61) with Ohm's law and write Eq. (16.46) in the form

where L is a path along the conductor and R is the electric resistance between the points of the conductor joined by the path L.

As we have previously mentioned, maintaining a current between two points in a conductor implies that energy must be supplied to the system by the source of

differenza di potenziale. Sorge ora la domanda se una corrente possa o no essere mantenuta in un conduttore *chiuso* o *circuito elettrico*. L'equazione (16.63), che rappresenta essenzialmente la conservazione dell'energia nel conduttore, applicata a un conduttore chiuso è

Il primo membro di questa equazione è la fem applicata al circuito e R è la resistenza totale del circuito chiuso.

Se il conduttore è posto in un campo elettrico *statico*, allora, in base all'Eq. (16.62), abbiamo che la fem è nulla ($V_\varepsilon = 0$) e l'Eq. (16.64) dà $I = 0$. In altre parole,

un campo elettrico statico non può mantenere una corrente in un circuito chiuso.

La ragione di ciò è che un campo elettrico statico è conservativo e l'energia netta totale fornita a una carica che segue un percorso chiuso vale zero. Tuttavia, una carica che si muove entro un conduttore trasferisce l'energia ricevuta dal campo elettrico al reticolo cristallino e questo processo è irreversibile; cioè, il reticolo non la restituisce agli elettroni. Perciò, se non viene fornita agli elettroni una quantità netta di energia, essi non possono muoversi continuamente lungo un circuito chiuso.

the potential difference. The question now arises as to whether or not a current can be maintained in a *closed* conductor or *electric circuit*. Equation (16.63), which essentially describes energy conservation in the conductor, when applied to a closed conductor is

$$\oint_L \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\boldsymbol{l} = RI. \tag{16.64}$$

The left-hand side of this equation is the emf applied to the circuit and R is the total resistance of the closed circuit.

If the conductor is placed in a *static* electric field, then, according to Eq. (16.62), we have that the emf is zero ($V_\varepsilon = 0$) and Eq. (16.64) gives $I = 0$. In other words,

a static electric field cannot maintain a current in a closed circuit.

The reason for this is that a static electric field is conservative and the total net energy supplied to a charge describing a closed path is zero. However, a charge moving inside a conductor is transferring the energy received from the electric field to the crystal lattice and this process is irreversible; that is, the lattice does not give it back to the electrons. Therefore, unless a net amount of energy is supplied to the electrons, they cannot move steadily around a closed circuit.

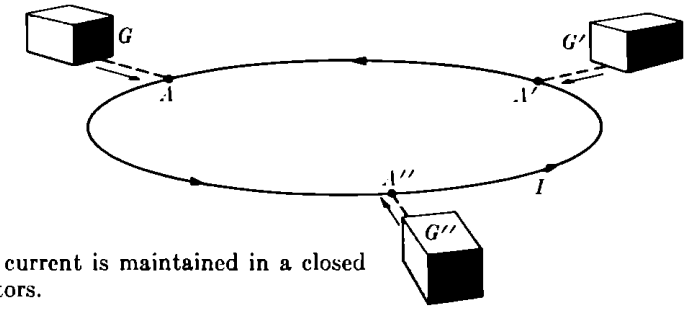


Fig. 16–32. Una corrente elettrica è mantenuta in un circuito chiuso per mezzo di generatori elettrici.

Fig. 16–32. An electric current is maintained in a closed circuit by electric generators.

Di conseguenza, per mantenere una corrente in un circuito chiuso è necessario immettere energia nel circuito in certi punti A, A', A'', ... (Fig. 16–32). Chiamiamo i dispositivi che forniscono energia *generatori elettrici* G, G', G'', ..., e possiamo dire che sono le sorgenti della fem. Perciò, il campo elettrico $\boldsymbol{\varepsilon}$ che compare nell'Eq. (16.64) non è un campo statico, e nei punti A, A', A'', corrisponde a campi locali prodotti dai generatori G, G', G'', ...

Vi sono molti modi di generare una forza elettromotrice. Un metodo comune è mediante una reazione chimica, come in una pila a secco o una batteria di accumulatori, in cui l'energia interna rilasciata nella reazione chimica è trasferita agli elettroni. Un altro metodo importante è mediante il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, che sarà discusso nel prossimo capitolo.

Una sorgente di fem è rappresentata schematicamente nella Fig. 16–33, dove il senso della corrente prodotta nel circuito *all'esterno della sorgente di forza elettromotrice* va dalla barretta lunga, o polo positivo, alla barretta corta, o polo negativo.

Accordingly, to maintain a current in a closed circuit it is necessary to feed energy into the circuit at certain points A, A', A'', ... (Fig. 16–32). The suppliers of energy we call *electric generators* G, G', G'', ..., and we may say that they are the sources of the emf. Therefore the electric field $\boldsymbol{\varepsilon}$ appearing in Eq. (16.64) is not a static field, and at points A, A', A'', it corresponds to local fields produced by the generators G, G', G'', ...

There are many ways of generating an electromotive force. A common method is by a chemical reaction, such as in a dry cell or a storage battery, in which the internal energy released in the chemical reaction is transferred to the electrons. Another important method is by the phenomenon of electromagnetic induction, to be discussed in the next chapter.

A source of emf is represented diagrammatically in Fig. 16–33, where the sense of the current that is produced in the circuit *external to the source of emf* is from the long bar, or positive pole, to the short bar or negative pole.

Quando applichiamo la legge di Ohm (Eq. 16.46) a un semplice circuito come quello della Fig. 16–33, dobbiamo renderci conto che la resistenza totale R è la somma della resistenza interna R_i della sorgente di fem e della resistenza esterna R_e del conduttore collegato al generatore (o batteria). Perciò $R = R_i + R_e$, e la legge di Ohm diviene

Questa può anche essere scritta nella forma $V_\mathcal{E} - R_iI = R_eI$. Ambedue i membri dell'equazione dànno la differenza di potenziale fra i poli del generatore (o batteria). Possiamo notare che questa differenza di potenziale è minore della fem.

Fig. 16–33. Rappresentazione simbolica di un circuito con una forza elettromotrice.

When we apply Ohm's law (Eq. 16.46) to a simple circuit such as that of Fig. 16–33, we must recognize that the total resistance R is the sum of the internal resistance R_i of the source of emf and the external resistance R_e of the conductor connected to the generator (or battery). Thus $R = R_i + R_e$, and Ohm's law becomes

$$V_\mathcal{E} = (R_e + R_i)I. \qquad (16.65)$$

This may also be written in the form $V_\mathcal{E} - R_iI = R_eI$. Each side of the equation gives the potential difference between the poles of the generator (or battery). We may note that this potential difference is smaller than the emf.

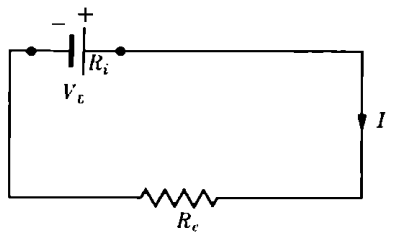


Fig. 16–33. Symbolic representation of a circuit with an electromotive force.

ESEMPIO 16.17. Discutere metodi per calcolare le correnti che esistono in una rete elettrica.

Soluzione: Una rete elettrica è una combinazione di conduttori e fem, come quella illustrata in Fig. 16–34. Considereremo ora solo il caso in cui le fem sono costanti e sono state raggiunte condizioni di stazionarietà nella rete, così che le correnti sono anch'esse costanti. Usualmente il problema consiste nel trovare le correnti in funzione delle fem e delle resistenze. Le regole per risolvere questo tipo di problema, regole note come *leggi di Kirchhoff*, esprimono semplicemente la conservazione della carica elettrica e dell'energia. Le leggi di Kirchhoff possono venire enunciate nel modo seguente:

(1) *La somma di tutte le correnti in un nodo di una rete vale zero.*
(2) *La somma di tutte le differenze di potenziale lungo un qualsiasi percorso chiuso entro la rete vale zero.*

Nello scrivere la prima legge, dobbiamo considerare positive quelle correnti che si allontanano dal nodo e negative quelle dirette verso il nodo. La prima legge esprime la conservazione della carica poichè, dato che non si accumulano cariche in un nodo, il numero di cariche che arriva ad un nodo in un certo tempo deve andarsene nello stesso tempo.

EXAMPLE 16.17. Discuss methods for calculating the currents that exist in an electric network.

Solution: An electric network is a combination of conductors and emf's, such as the one illustrated in Fig. 16–34. We shall now consider only the case when the emf's are constant and steady conditions have been reached in the network, so that the currents are also constant. Usually the problem consists in finding the currents in terms of the emf's and the resistances. The rules to solve this kind of problem, rules known as *Kirchhoff's laws*, merely express the conservation of electric charge and of energy. Kirchhoff's laws may be stated as follows:

(1) *The sum of all currents at a junction in a network is zero.*
(2) *The sum of all potential drops along any closed path in a network is zero.*

In writing the first law, we must consider those currents directed away from the junction as positive and those directed toward the junction as negative. The first law expresses the conservation of charge because, since charges are not accumulated at a junction, the number of charges that arrive at a junction in a certain time must leave it in the same time.

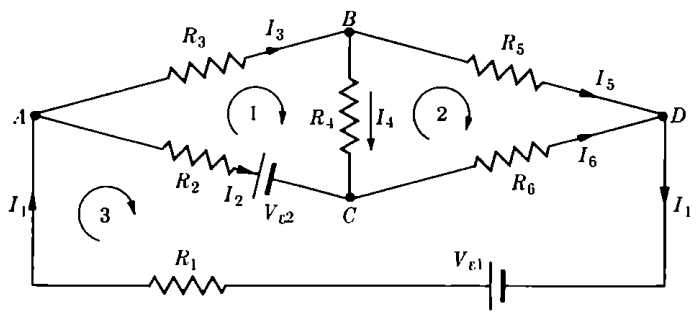


Fig. 16–34. Una rete elettrica.

Fig. 16–34. An electric network.

Nell'applicare la seconda legge, dobbiamo tener conto delle seguenti regole. Una caduta di potenziale attraverso una resistenza è considerata positiva o negativa a seconda che ci si muova nello stesso senso della corrente o in senso opposto. Quando passiamo attraverso una fem, prendiamo la caduta di potenziale come negativa o come positiva a seconda che passiamo nella direzione in cui agisce la fem (aumento di potenziale) o nella direzione opposta (diminuzione di potenziale). La seconda legge esprime la conservazione dell'energia, giacchè la variazione netta di energia di una carica dopo che la carica ha compiuto un percorso chiuso deve essere nulla. Questa condizione è già stata rispettata nell'Eq. (16.65), che si legge $RI - V_\mathcal{E} = 0$ per un singolo circuito, dove $R = R_i + R_e$.

Illustreremo ora l'uso delle leggi di Kirchhoff applicandole alla rete di Fig. 16–34. La prima legge applicata alle giunzioni A, B, e C dà:

Giunzione A :

Giunzione B :

Giunzione C :

La seconda legge applicata ai percorsi indicati con 1, 2, e 3 dà:

Percorso 1 :

Percorso 2 :

Percorso 3 :

Le sei equazioni che abbiamo scritto sono sufficienti per determinare le sei correnti nella rete.

Una regola pratica da sequire per trovare le correnti in una rete avente n nodi è di applicare la prima legge ad $n - 1$ nodi solamente, poichè quando la legge è soddisfatta per $n - 1$ nodi, lo è automaticamente per il nodo rimanente. (Lo studente farebbe bene a verificare questa affermazione nel caso della rete di Fig. 16–34.) La seconda legge deve essere applicata a tanti percorsi chiusi quanti sono necessari affinchè ogni conduttore faccia parte di un percorso almeno una volta.

II. IL CAMPO MAGNETICO

16.12 La legge di Ampère per il campo magnetico

Discuteremo ora alcune delle proprietà del campo magnetico statico, ossia indipendente dal tempo. Consideriamo dapprima una corrente I rettilinea di lunghezza infinita (Fig. 16–35). Il campo magnetico $\mathcal{B}$ in un punto A è perpendicolare ad OA ed è dato dall'Eq. (15.41) come

Calcoliamo la circolazione di $\mathcal{B}$ lungo un percorso circolare di raggio r. Il campo magnetico $\mathcal{B}$ è tangente al percorso, così che $\mathcal{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mathcal{B}\, dl$, ed è costante in ampiezza. Perciò la circolazione magnetica (indicata con $\Lambda_\mathcal{B}$) è

In applying the second law, we must take the following rules into account. A potential drop across a resistance is considered positive or negative depending on whether one moves in the same sense as the current or in the opposite sense. When we are passing through an emf, we take the potential drop as negative or positive depending on whether we pass in the direction the emf acts (increase in potential) or in the opposite direction (drop in potential). The second law expresses the conservation of energy, since the net change in the energy of a charge after the charge completes a closed path must be zero. This requirement has already been met in Eq. (16.65), which reads $RI - V_\mathcal{E} = 0$ for a single circuit, where $R = R_i + R_e$.

We shall now illustrate the use of Kirchhoff's laws by applying them to the network of Fig. 16–34. The first law applied to junctions A, B, and C gives:

$$\begin{aligned} &\text{Junction } A: && -I_1 + I_2 + I_3 = 0,\\ &\text{Junction } B: && -I_3 + I_4 + I_5 = 0,\\ &\text{Junction } C: && -I_2 - I_4 + I_6 = 0. \end{aligned}$$

The second law applied to the paths marked 1, 2, and 3 gives:

$$\begin{aligned} &\text{Path 1:} && -R_2I_2 + R_3I_3 + R_4I_4 - V_{\mathcal{E}_2} = 0,\\ &\text{Path 2:} && R_5I_5 - R_6I_6 - R_4I_4 = 0,\\ &\text{Path 3:} && R_1I_1 + R_2I_2 + R_6I_6 - V_{\mathcal{E}_1} + V_{\mathcal{E}_2} = 0. \end{aligned}$$

The six equations we have written are enough to determine the six currents in the network.

A practical rule to follow in finding the currents in a network having n junctions is to apply the first law to $n - 1$ junctions only, because once the law is satisfied for $n - 1$ junctions, it is automatically satisfied for the remaining junction. (The student should verify this statement for the network in Fig. 16–34.) The second law must be applied to as many closed paths as required in order for each conductor to be part of a path at least once.

II. THE MAGNETIC FIELD

16.12 Ampère's Law for the Magnetic Field

We shall now discuss some of the properties of the static, or time-independent, magnetic field. Let us consider first an infinite rectilinear current I (Fig. 16–35). The magnetic field $\mathcal{B}$ at a point A is perpendicular to OA and is given by Eq. (15.41) as

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, \boldsymbol{u}_\theta.$$

Let us compute the circulation of $\mathcal{B}$ around a circular path of radius r. The magnetic field $\mathcal{B}$ is tangent to the path, so that $\mathcal{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mathcal{B}\, dl$, and is constant in magnitude. Therefore the magnetic circulation (designated by $\Lambda_\mathcal{B}$) is

$$\Lambda_\mathcal{B} = \oint_L \mathcal{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_L \mathcal{B}\, dl = \mathcal{B} \oint_L dl = \mathcal{B}L = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)(2\pi r)$$

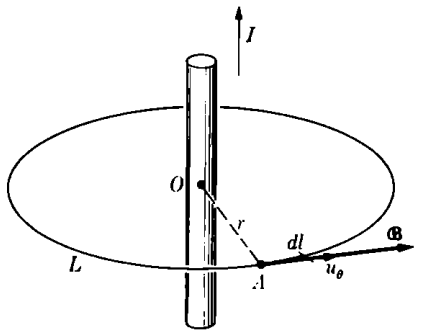


Fig. 16–35. Campo magnetico di una corrente rettilinea.

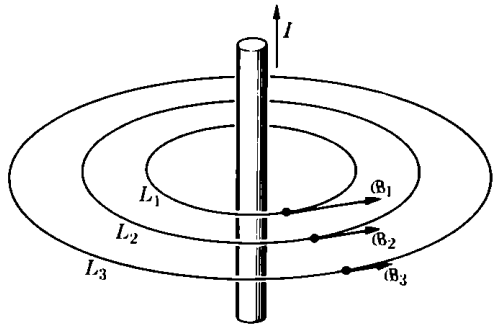


Fig. 16–36. La circolazione magnetica lungo tutti i percorsi circolari concentrici attorno a una corrente rettilinea è la stessa, e vale $\mu_0 I$.

Fig. 16–35. Magnetic field of a rectilinear current.

Fig. 16–36. The magnetic circulation along all concentric circular paths around a rectilinear current is the same, and equal to $\mu_0 I$.

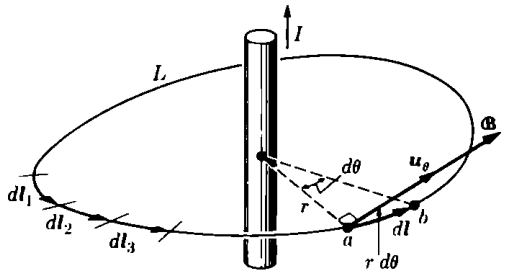


Figura 16–37

Figure 16–37

poichè $L = 2\pi r$. Perciò

because $L = 2\pi r$. Thus

$$\Lambda_{\mathfrak{B}} = \mu_0 I. \tag{16.66}$$

La circolazione magnetica è quindi proporzionale alla corrente elettrica I, ed è indipendente dal raggio del percorso. Perciò, se attorno alla corrente I tracciamo diversi cerchi L_1, L_2, L_3, ... (Fig. 16–36), la circolazione magnetica lungo uno qualsiasi di essi è la stessa, ed è eguale a $\mu_0 I$, come risulta dall'Eq. (16.66).

Consideriamo poi un percorso chiuso L qualsiasi che circonda la corrente I (Fig. 16–37). La circolazione magnetica lungo L è

The magnetic circulation is then proportional to the electric current I, and is independent of the radius of the path. Therefore, if around the current I we draw several circles L_1, L_2, L_3, ... (Fig. 16–36), the magnetic circulation around all of them is the same, and is equal to $\mu_0 I$, according to Eq. (16.66).

We next consider an arbitrary closed path L surrounding the current I (Fig. 16–37). The magnetic circulation along L is

$$\Lambda_{\mathfrak{B}} = \oint_L \mathfrak{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L \frac{\boldsymbol{u}_\theta \cdot d\boldsymbol{l}}{r}.$$

Ma $\boldsymbol{\mu}_\theta \cdot d\boldsymbol{l}$ è la componente di $d\boldsymbol{l}$ nella direzione del vettore unitario $\boldsymbol{\mu}_\theta$, e perciò è uguale a $r\,d\theta$. Quindi

But $\boldsymbol{u}_\theta \cdot d\boldsymbol{l}$ is the component of $d\boldsymbol{l}$ in the direction of the unit vector $\boldsymbol{u}_\theta$, and therefore is equal to $r\,d\theta$. Hence

$$\Lambda_{\mathfrak{B}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (2\pi) = \mu_0 I,$$

poichè l'angolo piano totale attorno a un punto è 2π. Questo è nuovamente il nostro precedente risultato (16.66), che perciò è valido per qualsiasi percorso chiuso attorno alla corrente rettilinea, indipendentemente dalla posizione della corrente rispetto al percorso.

since the total plane angle around a point is 2π. This is again our previous result (16.66), which therefore is valid for any closed path around the rectilinear current, irrespective of the position of the current relative to the path.

Un'analisi più elaborata, che ometteremo, mostra che l'Eq. (16.66) è valida per *qualsiasi* forma della corrente, non necessariamente solo per una rettilinea. Se abbiamo diverse correnti $I_1, I_2, I_3, \ldots$ concatenate da una linea chiusa L (Fig. 16–38), ciascuna corrente contribuisce alla circolazione del campo magnetico lungo L. Perciò possiamo enunciare così la legge di Ampère:

la circolazione del campo magnetico lungo una linea chiusa che concatena correnti $I_1, I_2, I_3, \ldots$ *è*

dove $I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots$ *rappresenta la corrente totale concatenata dal percorso* L.

Fig. 16–38. La circolazione magnetica lungo un qualsiasi percorso chiuso è proporzionale alla corrente netta attraverso il percorso.

Quando applichiamo l'Eq. (16.67), prendiamo una corrente come positiva se passa attraverso L nel senso di avanzamento di una vite destrorsa fatta ruotare nello stesso senso in cui è orientato L e negativa se nel senso opposto. Così, nella Fig. 16–38, le correnti I_1 e I_3 sono considerate positive e I_2 negativa.

Ricordando dall'Esempio 16.1 che la corrente elettrica può essere espressa come il flusso della densità di corrente (cioè $I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS$), possiamo esprimere la legge di Ampère, Eq. (16.67), anche nella forma

dove S è una qualsiasi superficie delimitata da L.

Il fatto che la circolazione del campo magnetico $\mathfrak{B}$ generalmente non è nulla, indica che il campo magnetico non ha un potenziale magnetico nello stesso senso in cui il campo elettrico ha un potenziale elettrico. La legge di Ampère è particolarmente utile quando vogliamo calcolare il campo magnetico prodotto da distribuzioni di correnti aventi certe simmetrie geometriche, come mostrato nei seguenti esempi.

ESEMPIO 16.18. Usando la legge di Ampère, discutere il campo magnetico prodotto da una corrente lungo un cilindro circolare di lunghezza infinita.

Soluzione: Consideriamo una corrente I lungo un cilindro di raggio a (Fig. 16–39). La simmetria del problema indica chiaramente che le linee di forza del campo magnetico sono cerchi con i loro centri lungo l'asse del cilindro e che il campo magnetico $\mathfrak{B}$ in un punto dipende solo dalla distanza del punto dall'asse. Perciò, quando scegliamo per il nostro percorso L un cerchio di raggio r concentrico con la corrente, la circolazione magnetica è

A more elaborate analysis, which we shall omit, indicates that Eq. (16.66) is correct for *any* shape of the current, not necessarily only a rectilinear one. If we have several currents $I_1, I_2, I_3, \ldots$ linked by a closed line L (Fig. 16–38), each current makes a contribution to the circulation of the magnetic field along L. Therefore we may state Ampère's law as

the circulation of the magnetic field along a closed line which links currents $I_1, I_2, I_3, \ldots$ *is*

$$\Lambda_{\mathfrak{B}} = \oint \mathfrak{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I, \qquad (16.67)$$

where $I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots$ *stands for the total current linked by the path* L.

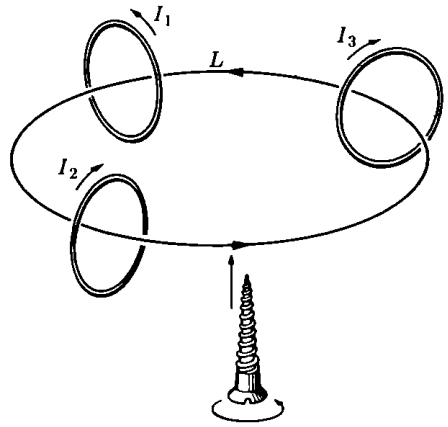


Fig. 16–38. The magnetic circulation along any closed path is proportional to the net current through the path.

When we apply Eq. (16.67), we take a current as positive if it passes through L in the sense of advance of a right-handed screw rotated in the same sense as L is oriented, and negative if it is in the opposite sense. Thus, in Fig. 16–38, currents I_1 and I_3 are considered positive and I_2 negative.

When we remember from Example 16.1 that the electric current can be expressed as the flux of the current density (that is, $I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS$), we may also express Ampère's law, Eq. (16.67), in the form

$$\Lambda_{\mathfrak{B}} = \int_L \mathfrak{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS, \qquad (16.68)$$

where S is any surface bounded by L.

The fact that the circulation of the magnetic field $\mathfrak{B}$ generally is not zero indicates that the magnetic field does not have a magnetic potential in the same sense that the electric field has an electric potential. Ampère's law is particularly useful when we wish to compute the magnetic field produced by current distributions having certain geometrical symmetries, as shown in the following examples.

EXAMPLE 16.18. Using Ampère's law, discuss the magnetic field produced by a current along a circular cylinder of infinite length.

Solution: Let us consider a current I along a cylinder of radius a (Fig. 16–39). The symmetry of the problem clearly suggests that the lines of force of the magnetic field are circles with their centers along the axis of the cylinder, and that the magnetic field $\mathfrak{B}$ at a point depends only on the distance from the point to the axis. Therefore, when we choose a circle of radius r concentric with the current as our path L, the magnetic circulation is

$$\Lambda_{\mathfrak{B}} = \oint_L \mathfrak{B} \, dl = \mathfrak{B} \oint_L dl = \mathfrak{B}L = 2\pi r \mathfrak{B}.$$

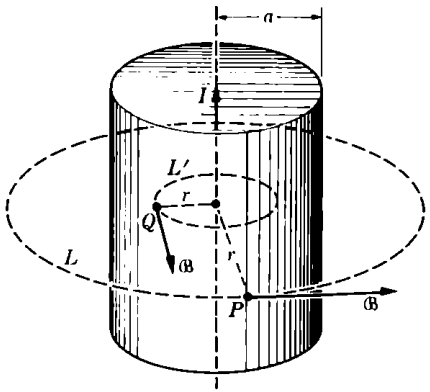


Figura 16–39

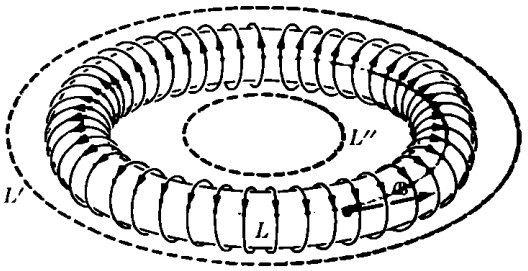


Fig. 16–40. Un avvolgimento toroidale.

Se il raggio r è maggiore del raggio a della corrente, tutta la corrente I passa attraverso il cerchio. Perciò, applicando l'Eq. (16.67), abbiamo

oppure

Questo è proprio il risultato trovato nel Capitolo 15 per la corrente in un filamento. Perciò, *in punti al di fuori di una corrente cilindrica, il campo magnetico è lo stesso che si avrebbe se tutta la corrente fosse concentrata lungo l'asse.*

Se invece r è minore di a, abbiamo due possibilità. Se la corrente è solo lungo la superficie del cilindro (come può accadere se il conduttore è un tubo cilindrico di metallo), la corrente attraverso L' è nulla e la legge di Ampère dà $2\pi r\mathcal{B} = 0$, ossia $\mathcal{B} = 0$. Perciò, *il campo magnetico in punti interni ad un cilindro che porta corrente sulla sua superficie è nullo.* Se invece la corrente è distribuita uniformemente entro tutta la sezione del conduttore, la corrente attraverso L' è

Perciò, applicando la legge di Ampère, otteniamo $2\pi r\mathcal{B} = \mu_0 I' = \mu_0 I r^2/a^2$, ossia

Quindi, *il campo magnetico in un punto interno a un cilindro che porta una corrente distribuita uniformemente entro la sua sezione è proporzionale alla distanza dal punto all'asse del cilindro.*

ESEMPIO 16.19. Usando la legge di Ampère, discutere il campo magnetico prodotto da un avvolgimento toroidale.

Soluzione: Un avvolgimento toroidale consiste in un filo avvolto uniformemente su un toro, o superficie a forma di ciambella, come in Fig. 16–40. Sia N il numero di spire, tutte ugualmente distanziate, ed I sia la corrente elettrica che le percorre. La simmetria del problema suggerisce che le linee di forza del campo magnetico sono cerchi concentrici al toro. Prendiamo dapprima come

Figure 16–39

Fig. 16–40. A toroidal coil.

If the radius r is larger than the current radius a, all the current I passes through the circle. Therefore, applying Eq. (16.67), we have

$$2\pi r\mathcal{B} = \mu_0 I \quad \text{or} \quad \mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{16.69}$$

This is just the result found in Chapter 15 for a current in a filament. Therefore, *at points outside a cylindrical current, the magnetic field is the same as if all the current were concentrated along the axis.*

But if r is smaller than a, we have two possibilities. If the current is only along the surface of the cylinder (as may occur if the conductor is a cylindrical sheath of metal), the current through L' is zero and Ampère's law gives $2\pi r\mathcal{B} = 0$ or $\mathcal{B} = 0$. Therefore, *the magnetic field at points inside a cylinder carrying a current on its surface is zero.* But if the current is uniformly distributed throughout the cross section of the conductor, the current through L' is

$$I' = \frac{I}{\pi a^2}(\pi r^2) = \frac{Ir^2}{a^2}.$$

Therefore, applying Ampère's law, we get $2\pi r\mathcal{B} = \mu_0 I' = \mu_0 I r^2/a^2$ or

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}. \tag{16.70}$$

Thus *the magnetic field at a point inside a cylinder carrying a current uniformly distributed throughout its cross section is proportional to the distance from the point to the axis of the cylinder.*

EXAMPLE 16.19. Using Ampère's law, discuss the magnetic field produced by a toroidal coil.

Solution: A toroidal coil consists of a wire uniformly wound on a torus, or doughnut-shaped surface, as in Fig. 16–40. Let N be the number of turns, all equally spaced, and I be the electric current along them. The symmetry of the problem suggests that the lines of force of the magnetic field are circles concentric with the torus. Let us take first as

percorso di integrazione un cerchio L entro il toro. La circolazione magnetica è allora $\Lambda_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}L$. Il percorso L concatena tutte le spire attorno al toro e perciò la corrente totale che lo attraversa è NI. Perciò, applicando la legge di Ampère, otteniamo $\mathcal{B}L = \mu_0 NI$, ossia

Se il raggio della sezione del toro è piccolo rispetto al suo raggio, possiamo considerare L uguale per tutti i percorsi interni. Dato che $n = N/L$ è il numero di spire per unità di lunghezza, concludiamo che il campo magnetico entro il toro è uniforme e ha il valore costante

Per un qualsiasi percorso che giace al di fuori del toro, come L' o L'', la corrente totale che lo concatena vale zero. Quindi otteniamo $\mathcal{B} = 0$. In altre parole, il campo magnetico di un avvolgimento toroidale è totalmente confinato nel suo interno. Questa situazione è applicabile solo al caso di avvolgimenti toroidali in cui le spire del filo sono assai poco spaziate fra loro.

ESEMPIO 16.20. Usando la legge di Ampère, discutere il campo magnetico al centro di un solenoide molto lungo.

Soluzione: Consideriamo il solenoide di Fig. 16–41, avente n spire per unità di lunghezza, ciascuna che porta una corrente I. Se le spire sono assai poco spaziate fra loro e il solenoide è molto lungo, possiamo ritenere che il campo magnetico è tutto confinato nel suo interno ed è uniforme, come indicato dalle linee di forza nella figura. Come percorso di integrazione, scegliamo il rettangolo $PQRS$. Il contributo dei lati QR ed SP alla circolazione magnetica vale zero poichè il campo è ad essi perpendicolare; anche il contributo del lato RS vale zero perchè ivi non si ha campo. Perciò solo il lato PQ contribuisce con la quantità $\mathcal{B}x$, sicchè $\Lambda_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}x$. La corrente totale concatenata con il percorso di integrazione è nxI, poichè nx dà il numero di spire. Perciò la legge di Ampère dà $\mathcal{B}x = \mu_0 nxI$, ossia $\mathcal{B} = \mu_0 nI$, in accordo col nostro precedente risultato nell'esempio 15.9 per il campo nel centro di un lungo solenoide.

Lo studente si sarà reso conto attraverso questi esempi dell'utilità pratica della legge di Ampère per calcolare campi magnetici aventi determinate simmetrie.

our path of integration a circle L within the torus. The magnetic circulation is then $\Lambda_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}L$. Path L links with all the turns around the torus, and therefore the total current flowing through it is NI. Thus, applying Ampère's law, we get $\mathcal{B}L = \mu_0 NI$ or

$$\mathcal{B} = \mu_0 NI/L.$$

If the cross-sectional radius of the torus is small compared with its radius, we may assume that L is practically the same for all interior paths. Given that $n = N/L$ is the number of turns per unit length, we conclude that the magnetic field inside the torus is uniform and has the constant value

$$\mathcal{B} = \mu_0 nI. \tag{16.71}$$

For any path lying outside the torus, such as L' or L'', the total current linking with it is zero. Therefore we get $\mathcal{B} = 0$. In other words, the magnetic field of a toroidal coil is entirely confined to its interior. This situation applies only for toroidal coils on which the turns of the wire are very closely spaced.

EXAMPLE 16.20. Using Ampère's law, discuss the magnetic field at the center of a very long solenoid.

Solution: Let us consider the solenoid of Fig. 16–41, having n turns per unit length, each carrying a current I. If the turns are very closely spaced and the solenoid is very long, we may consider that the magnetic field is entirely confined to its interior and is uniform, as indicated by the lines of force in the figure. For our path of integration we choose the rectangle $PQRS$. The contribution by sides QR and SP to the magnetic circulation is zero because the field is perpendicular to them; also the contribution of side RS is zero because there is no field there. Therefore only side PQ contributes by the amount $\mathcal{B}x$, so that $\Lambda_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}x$. The total current linking with the integration path is nxI, since nx gives the number of turns. Therefore Ampère's law gives $\mathcal{B}x = \mu_0 nxI$, or $\mathcal{B} = \mu_0 nI$, in agreement with our previous result in Example 15.9 for the field at the center of a long solenoid.

The student will have realized from these examples the practical usefulness of Ampère's law for computing magnetic fields which have certain symmetries.

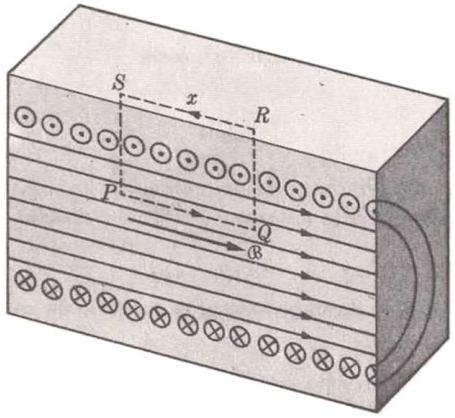


Fig. 16–41. Un solenoide.

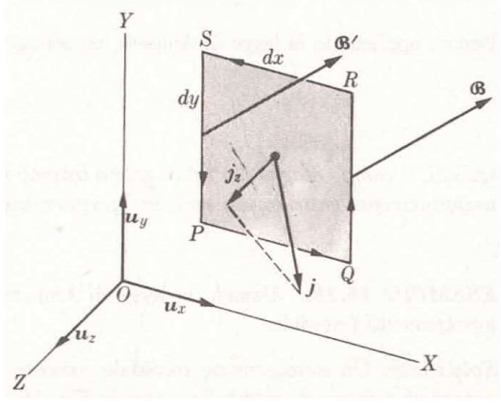


Fig. 16–42. Percorso elementare per ricavare la legge di Ampère in forma differenziale.

Fig. 16–41. A solenoid.

Fig. 16–42. Elementary path to evaluate Ampère's law in differential form.

16.13 *La legge di Ampère in forma differenziale*

Dato che sappiamo che la legge di Ampère può essere applicata a un percorso di forma qualsiasi, applichiamola ad un percorso rettangolare molto piccolo o infinitesimo $PQRS$ nel piano XY, avente lati dx e dy ed un'area $dx\,dy$ (Fig. 16–42). Il senso di circolazione lungo $PQRS$ è quello indicato dalle frecce. La circolazione $\Lambda_{\mathfrak{B}}$ consiste di quattro termini, uno per ciascun lato; cioè

Ora lungo il percorso QR, che è orientato parallelamente alla direzione $+Y$, $d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_y\,dy$ e

Analogamente, per il lato SP, che è orientato nella direzione $-Y$, $d\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{u}_y dy$, e perciò

così che

Ma, poichè $PQ = dx$, $\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B}'_y = d\mathfrak{B}_y = (\partial\mathfrak{B}_y/\partial x)\,dx$. Perciò

Con un ragionamento analogo, i rimanenti due integrali nell'Eq. (16.72) sono

Sommando i due risultati, otteniamo infine

Se dI è la corrente che passa attraverso $PQRS$, possiamo legarla alla densità di corrente $\boldsymbol{j}$ scrivendo

Scriviamo j_z poichè questa è la sola componente della densità di corrente $\boldsymbol{j}$ che contribuisce alla corrente dI attraverso $PQRS$. Le componenti j_x e j_y corrispondono a moti paralleli alla superficie e non attraverso essa. Sostituendo le Equazioni (16.73) e (16.74) nella legge di Ampère, Eq. (16.67), possiamo scrivere

16.13 *Ampère's Law in Differential Form*

Since we know that Ampère's law can be applied to a path of any shape, let us apply it to a very small or infinitesimal rectangular path $PQRS$ in the XY-plane, having sides dx and dy and an area $dx\,dy$ (Fig. 16–42). The sense of circulation around $PQRS$ is as indicated by the arrows. The circulation $\Lambda_{\mathfrak{B}}$ consists of four terms, one for each side; that is,

$$\Lambda_{\mathfrak{B}} = \oint_{PQRS} \mathfrak{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RS} + \int_{SP}. \tag{16.72}$$

Now along the path QR, which is oriented parallel to the $+Y$-direction, $d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{u}_y\,dy$ and

$$\int_{QR} \mathfrak{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mathfrak{B}\cdot\boldsymbol{u}_y\,dy = \mathfrak{B}_y\,dy.$$

Similarly, for side SP, which is oriented in the $-Y$-direction, $d\boldsymbol{l} = -\boldsymbol{u}_y\,dy$, and thus

$$\int_{SP} \mathfrak{B}\cdot d\boldsymbol{l} = -\mathfrak{B}'\cdot\boldsymbol{u}_y\,dy = -\mathfrak{B}'_y\,dy,$$

so that

$$\int_{QR} + \int_{SP} = (\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B}'_y)\,dy.$$

But, since $PQ = dx$, $\mathfrak{B}_y - \mathfrak{B}'_y = d\mathfrak{B}_y = (\partial\mathfrak{B}_y/\partial x)\,dx$. Therefore

$$\int_{QR} + \int_{SP} = \frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial x}\,dx\,dy.$$

By similar reasoning, the remaining two integrals in Eq. (16.72) are

$$\int_{PQ} + \int_{RS} = -\frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Adding the two results, we finally get

$$\Lambda_{\mathfrak{B}} = \oint_{PQRS} \mathfrak{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \left(\frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial y}\right)dx\,dy. \tag{16.73}$$

Given that dI is the current passing through $PQRS$, we may relate it to the current density $\boldsymbol{j}$ by writing

$$dI = j_z\,dS = j_z\,dx\,dy. \tag{16.74}$$

We write j_z because this is the only component of the current density $\boldsymbol{j}$ that contributes to the current dI through $PQRS$. The components j_x and j_y correspond to motions parallel to the surface and not through it. Substituting Eqs. (16.73) and (16.74) in Ampère's law, Eq. (16.67), we may write

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{B}_x}{\partial y}\right)dx\,dy = \mu_0\,dI = \mu_0 j_z\,dx\,dy.$$

Cancellando il fattore comune $dx\,dy$ in ambo i membri, otteniamo la legge di Ampère nella sua forma differenziale,

Possiamo ora disporre la nostra superficie $PQRS$ nei piani YZ o ZX, ottenendo le espressioni analoghe

Le tre Equazioni (16.75), (16.76), e (16.77) possono essere riunite in un'equazione vettoriale. Notiamo che i secondi membri sono le componenti del vettore $\boldsymbol{j}$, densità di corrente, moltiplicate per μ_0. Analogamente, i primi membri possono essere considerati le componenti di un vettore ottenuto da $\mathfrak{B}$ combinando le derivate nel modo indicato, chiamato il *rotore* di $\mathfrak{B}$, scritto rot $\mathfrak{B}$. Allora le tre equazioni possono essere compendiate nell'equazione vettoriale

$$\text{rot}\ \mathfrak{B} = \mu_0\, \boldsymbol{j}. \tag{16.78}$$

Questa è l'espressione della legge di Ampère in forma differenziale. Possiamo usare l'Eq. (16.78) per ottenere il campo magnetico quando conosciamo la distribuzione di corrente e viceversa. In una regione dove non vi sono correnti elettriche, rot $\mathfrak{B} = 0$.

La legge di Ampère in forma differenziale stabilisce una relazione *locale* fra il campo magnetico $\mathfrak{B}$ in un punto e la densità di corrente $\boldsymbol{j}$ nello *stesso* punto dello spazio, in modo simile a quello in cui la legge di Gauss lega il campo elettrico alle cariche elettriche nello stesso punto dello spazio. Possiamo perciò dire che le correnti elettriche sono le sorgenti del campo magnetico.

L'espressione corrispondente all'Eq. (16.78) per un campo elettrico statico è

$$\text{rot}\ \mathfrak{E} = 0, \tag{16.79}$$

poichè abbiamo dimostrato (Eq. 16.62) che per tale campo la circolazione è nulla ($\oint_L \mathfrak{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$).

16.14 *Il flusso magnetico*

Il flusso magnetico attraverso una qualsiasi superficie, chiusa o no, posta in un campo magnetico, è

Il concetto di flusso magnetico attraverso una superficie arbitraria è di grande importanza, specialmente quando la superficie non è chiusa, come vedremo nel Capitolo 17. Così si è trovato conveniente definire un'unità di flusso magnetico. Ovviamente, il

By canceling the common factor $dx\,dy$ on both sides, we obtain Ampère's law in its differential form,

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} = \mu_0 j_z. \tag{16.75}$$

Now we can also place our surface $PQRS$ in the YZ- or the ZX-planes, resulting in the equivalent expressions

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z} = \mu_0 j_x, \tag{16.76}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} = \mu_0 j_y. \tag{16.77}$$

The three equations (16.75), (16.76), and (16.77) can be combined into one vector equation. Note that the right-hand sides are the components of the vector $\boldsymbol{j}$, the current density, multiplied by μ_0. Similarly, the left-hand sides can be considered as the component of a vector obtained from $\mathfrak{B}$ by combining derivatives in the form indicated, and it is called the *curl* of $\mathfrak{B}$, written curl $\mathfrak{B}$. Then the three equations can be consolidated in the vector equation

$$\text{curl}\ \mathfrak{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}. \tag{16.78}$$

This is the expression of Ampère's law in differential form. We can use Eq. (16.78) to obtain the magnetic field when we know the current distribution, and conversely. In a region where there are no electric currents, curl $\mathfrak{B} = 0$.

Ampère's law in differential form establishes a *local* relation between the magnetic field $\mathfrak{B}$ at a point and the current density $\boldsymbol{j}$ at the *same* point of space, in a way similar to that in which Gauss' law relates the electric field and the charges at the same point of space. We may thus say that electric currents are the sources of the magnetic field.

The expression equivalent to Eq. (16.78) for a static electric field is

$$\text{curl}\ \mathfrak{E} = 0, \tag{16.79}$$

since we have proved (Eq. 16.62) that for such a field the circulation is zero ($\oint_L \mathfrak{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0$).

16.14 *Magnetic Flux*

The magnetic flux across any surface, closed or not, placed in a magnetic field is

$$\Phi_{\mathfrak{B}} = \int_S \mathfrak{B}\cdot \boldsymbol{u}_N\, dS. \tag{16.80}$$

The concept of magnetic flux across an arbitrary surface is of great importance, especially when the surface is not closed, as we shall see in Chapter 17. Thus it has been found convenient to define a unit of magnetic flux. Obviously, the mag-

flusso magnetico, che è il campo magnetico moltiplicato per un'area, è espresso in $T\,m^2$, un'unità chiamata il *weber*, in onore del fisico tedesco Wilhelm E. Weber (1804–1891). Viene abbreviata Wb. Notiamo che poichè $T = kg\,s^{-1}\,C^{-1}$, $Wb = T\,m^2 = m^2\,kg\,s^{-1}\,C^{-1}$. Molti testi esprimono il campo magnetico in $Wb\ m^{-2}$ invece che in T.

Poichè non vi sono masse o poli magnetici (per lo meno non sono ancora stati osservati), le linee di forza del campo magnetico $\mathfrak{B}$ sono chiuse, come indicato negli esempi discussi nel Capitolo 15. Concludiamo che

il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è sempre nullo.

Cioè, il flusso entrante attraverso una superficie chiusa è uguale al flusso uscente. Perciò

risultato che può anche essere verificato matematicamente partendo dall'espressione generale di $\mathfrak{B}$ data nell'Eq. (15.35). Tralasciamo la dimostrazione. Il risultato costituisce la *legge di Gauss per il campo magnetico*. In forma differenziale abbiamo, per analogia con l'Eq. (16.4) per il campo elettrico,

ossia

16.15 Magnetizzazione della materia

Nel Paragrafo 15.10 abbiamo mostrato che una piccola corrente, come quella dovuta agli elettroni in un atomo, costituisce un dipolo magnetico. Gli atomi possono possedere o meno un momento di dipolo magnetico, a seconda della loro simmetria o dell'orientazione relativa delle loro orbite elettroniche. Poichè la maggior parte delle molecole non sono a simmetria sferica, esse possono avere un momento di dipolo magnetico permanente per via di particolari orientazioni delle orbite elettroniche. Per esempio, molecole diatomiche hanno simmetria assiale, e possono possedere un momento di dipolo magnetico parallelo all'asse molecolare. Anche così, un pezzo di materiale, con l'eccezione dei materiali ferromagnetici, non presenta un momento magnetico netto, a causa dell'orientazione casuale delle molecole, situazione simile a quella che si ha nel caso della polarizzazione elettrica della materia. Tuttavia, la presenza di un campo magnetico esterno distorce il moto degli elettroni, dando origine a una polarizzazione magnetica netta o *magnetizzazione* del materiale. Ciò che accade, essenzialmente, è che il campo magnetico produce, su tutti gli elettroni, un moto di precessione o di rotazione attorno alla direzione del campo magnetico locale, come spiegato nel Paragrafo 15.6. Ogni elettrone contribuisce con un momento di dipolo magnetico, dato dall'Eq. (15.27).

Consideriamo, per semplicità, una sostanza nella forma di un cilindro magnetizzato uniformemente parallelamente all'asse del cilindro (Fig. 16–43). Ciò significa che i momenti molecolari di dipolo magnetico sono orientati parallelamente all'asse del cilindro e, perciò, le correnti elettroniche molecolari sono orientate perpendicolarmente all'asse del cilindro. Possiamo vedere dalla Fig. 16–43 (e in maggior dettaglio nella vista frontale

netic flux, being magnetic field times area, is expressed in $T\,m^2$, a unit called the *weber*, in honor of the German physicist Wilhelm E. Weber (1804–1891). It is abbreviated Wb. Note that since $T = kg\ s^{-1}\,C^{-1}$, $Wb = T\,m^2 = m^2\ kg\ s^{-1}C^{-1}$. Many texts express the magnetic field in $Wb\ m^{-2}$ instead of in T.

Since there are no magnetic masses or poles (or at least they have not yet been observed), the lines of force of the magnetic field $\mathfrak{B}$ are closed, as indicated in the examples discussed in Chapter 15. We conclude that

the flux of the magnetic field through a closed surface is always zero.

That is, the inward flux through a closed surface is equal to the outward flux. Thus

$$\oint_S \mathfrak{B} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS = 0, \tag{16.81}$$

a result that can also be verified mathematically from the general expression for $\mathfrak{B}$ given in Eq. (15.35). The proof will be omitted. This result constitutes *Gauss' law for the magnetic field.* In differential form we have, by similarity with Eq. (16.4) for the electric field,

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} = 0 \qquad \text{or} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \tag{16.82}$$

16.15 Magnetization of Matter

In Section 15.10 we indicated that a small current, such as that due to the electrons in an atom, constitutes a magnetic dipole. Atoms may or may not exhibit a net magnetic dipole moment, depending on their symmetry or on the relative orientation of their electronic orbits. Since most molecules are not spherically symmetric, they may exhibit a permanent magnetic dipole moment because of special orientation of the electronic orbits. For example, diatomic molecules have axial symmetry, and may possess a magnetic dipole moment parallel to the molecular axis. Even so, matter in bulk, with the exception of ferromagnetic materials, does not exhibit a net magnetic moment, because of the random orientation of the molecules, a situation similar to that found in the electric polarization of matter. However, the presence of an external magnetic field distorts the electronic motion, giving rise to a net magnetic polarization or *magnetization* of the material. What happens, essentially, is that the magnetic field produces, on all the electrons, a precessional or rotational motion about the direction of the local magnetic field, as explained in Section 15.6. Each electron contributes a magnetic dipole moment, as given by Eq. (15.27).

Let us consider, for simplicity, a substance in the form of a cylinder that is magnetized uniformly parallel to the axis of the cylinder (Fig. 16–43). This means that the molecular magnetic dipoles are oriented parallel to the axis of the cylinder, and therefore the molecular electronic currents are oriented perpendicular to the axis of the cylinder. We can see from Fig. 16–43 (and in more detail in the front view

mostrata nella Fig. 16—44), che le correnti interne tendono a cancellarsi l'un l'altra a causa degli effetti opposti delle correnti adiacenti, così che non si osserva alcuna corrente netta nell'interno della sostanza. Tuttavia, la magnetizzazione dà origine ad una corrente netta $I_{\mathfrak{M}}$ sulla superficie del materiale, che pertanto si comporta come un solenoide.

Il *vettore magnetizzazione* $\mathfrak{M}$ di un materiale è definito come il momento magnetico del mezzo per unità di volume. Se $\boldsymbol{m}$ è il momento di dipolo magnetico dato da ciascun atomo o molecola e n è il numero di atomi o molecole per unità di volume, la magnetizzazione è $\mathfrak{M} = n\boldsymbol{m}$. Il momento magnetico di una corrente elementare è espresso in A m^2, e perciò la megnetizzazione $\mathfrak{M}$ è espressa in A m^2/m^3 = A m^{-1} oppure m^{-1} s^{-1} C, ed equivale a una corrente per unità di lunghezza.

Surface current = Corrente superficiale

shown in Fig. 16–44), that the internal currents tend to cancel each other due to the contrary effects of adjacent currents, so that no net current is observed inside the substance. However, the magnetization gives rise to a net current $I_{\mathfrak{M}}$ on the surface of the material, which therefore behaves as a solenoid.

The *magnetization vector* $\mathfrak{M}$ of a material is defined as the magnetic moment of the medium per unit volume. If $\boldsymbol{m}$ is the magnetic dipole moment contributed by each atom or molecule and n is the number of atoms or molecules per unit volume, the magnetization is $\mathfrak{M} = n\boldsymbol{m}$. The magnetic moment of an elementary current is expressed in A m^2, and therefore the magnetization $\mathfrak{M}$ is expressed in A m^2/m^3 = A m^{-1} or m^{-1} s^{-1} C, and is equivalent to current per unit length.

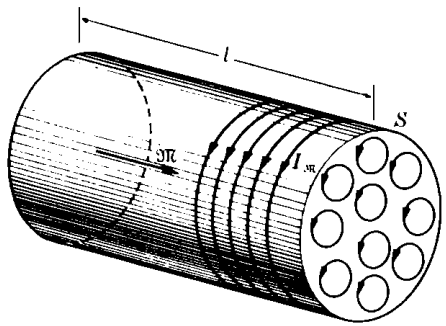


Fig. 16–43. Corrente superficiale di magnetizzazione su un cilindro magnetizzato.

Fig. 16–43. Magnetization surface current on a magnetized cylinder.

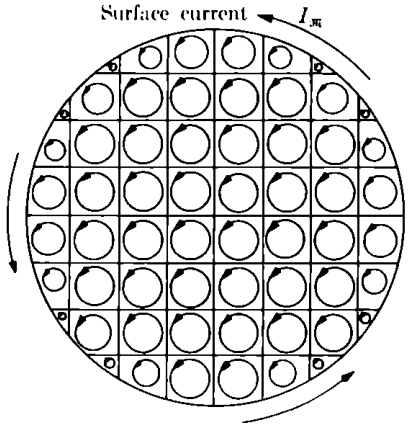


Fig. 16–44. Correnti elementari in un cilindro magnetizzato.

Fig. 16–44. Elementary currents in a magnetized cylinder.

Vi è una relazione molto importante tra la corrente superficiale sul corpo magnetizzato e la magnetizzazione $\mathfrak{M}$. Notiamo dalla Fig. 16—43 che $I_{\mathfrak{M}}$ fluisce in direzione perpendicolare ad $\mathfrak{M}$. Il cilindro stesso si comporta come un grande dipolo magnetico risultante dalla sovrapposizione di tutti i dipoli individuali. Se S è l'area della sezione del cilindro ed l la sua lunghezza, il volume è lS e, perciò, il suo momento di dipolo magnetico totale è $\mathfrak{M}(lS) = (\mathfrak{M}l)S$. Ma S è proprio l'area della sezione dei circuiti formati dalla corrente superficiale. Poichè il momento di dipolo magnetico = corrente moltiplicata per area, concludiamo che la corrente totale di magnetizzazione che compare sulla superficie del cilindro è $\mathfrak{M}l$ e, perciò, la corrente per unità di lunghezza $I_{\mathfrak{M}}$ sulla superficie del cilindro magnetizzato è $\mathfrak{M}$, ossia $I_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$. Sebbene questo risultato sia stato ottenuto in una particolare configurazione geometrica, è di validità più generale. Perciò possiamo dire che

la corrente per unità di lunghezza sulla superficie di un pezzo magnetizzato di materia è uguale alla componente del vettore magnetizzazione $\mathfrak{M}$ parallela al piano tangente alla superficie del corpo ed ha direzione perpendicolare a $\mathfrak{M}$.

There is a very important relation between the surface current on the magnetized body and the magnetization $\mathfrak{M}$. We note from Fig. 16–43 that $I_{\mathfrak{M}}$ flows in a direction perpendicular to $\mathfrak{M}$. The cylinder itself behaves like a large magnetic dipole resulting from the superposition of all individual dipoles. If S is the area of the cross section of the cylinder and l is its length, its volume is lS, and therefore its total magnetic dipole moment is $\mathfrak{M}(lS) = (\mathfrak{M}l)S$. But S is just the cross-sectional area of the circuits formed by the surface current. Since magnetic dipole moment = current times area, we conclude that the total magnetization current that appears on the surface of the cylinder is $\mathfrak{M}l$, and therefore the current per unit length $I_{\mathfrak{M}}$ on the surface of the magnetized cylinder is $\mathfrak{M}$, or $I_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$. Although this result has been obtained for a particular geometrical arrangement, it is of more general validity. Thus we can say that

the current per unit length on the surface of a magnetized piece of matter is equal to the component of the magnetization vector $\mathfrak{M}$ parallel to a plane tangent to the surface of the body, and it has a direction perpendicular to $\mathfrak{M}$.

16.16 Il campo magnetizzante

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che una sostanza magnetizzante ha certe correnti sulla sua superficie (ed entro tutto il suo volume se la magnetizzazione non è uniforme). Queste correnti di magnetizzazione, tuttavia, sono "congelate" nel senso che sono dovute ad elettroni legati a specifici atomi o molecole e non sono libere di muoversi attraverso la sostanza. D'altro canto, in altre sostanze come nei metalli, vi sono cariche elettriche capaci di muoversi attraverso la sostanza. La corrente elettrica dovuta a queste cariche elettriche la chiameremo corrente *libera*. In molti casi è necessario distinguere esplicitamente fra correnti libere e correnti di magnetizzazione, come faremo in questo paragrafo.

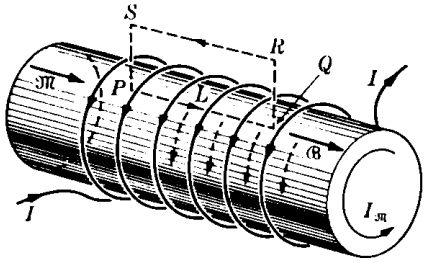


Figura 16–45

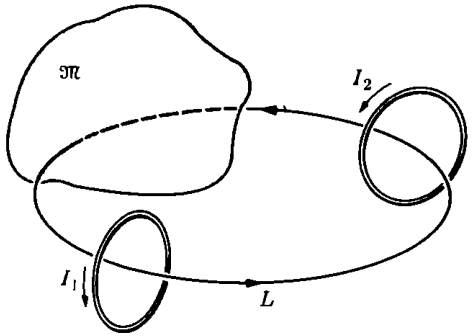


Figura 16–46

Consideriamo di nuovo un pezzo cilindrico di materia posto entro un lungo solenoide che trasporta una corrente I (Fig. 16–45). Questa corrente produce un campo magnetico che magnetizza il cilindro e dà origine ad una corrente superficiale di magnetizzazione sul cilindro nella stessa direzione di I. La corrente superficiale di magnetizzazione per unità di lunghezza è uguale a $\mathfrak{M}$. Se il solenoide ha n spire per unità di lunghezza, il sistema solenoide più cilindro magnetizzato è equivalente ad un solo solenoide che porta una corrente per unità di lunghezza uguale a $nI + \mathfrak{M}$. Questa corrente efficace del solenoide dà origine ad un campo magnetico risultante $\mathfrak{B}$ parallelo all'asse del cilindro, un campo la cui ampiezza è data dall'Eq. (16.71), con nI sostituito dalla totale corrente per unità di lunghezza $nI + \mathfrak{M}$. Cioè, $\mathfrak{B} = \mu_0(nI + \mathfrak{M})$, ossia

Questa espressione dà le correnti di conduzione o libere per unità di lunghezza, nI, sulla superficie del cilindro in funzione del campo magnetico $\mathfrak{B}$ nel mezzo e della magnetizzazione $\mathfrak{M}$ del mezzo. Notando che $\mathfrak{B}$ ed $\mathfrak{M}$ sono vettori aventi la stessa direzione, il risultato precedente suggerisce di introdurre un nuovo campo vettoriale, chiamato il *campo magnetizzante*, definito da

16.16 The Magnetizing Field

In the preceding section we saw that a magnetized substance has certain currents on its surface (and throughout its volume if the magnetization is not uniform). These magnetization currents, however, are "frozen" in the sense that they are due to electrons bound to specific atoms or molecules and are not free to move through the substance. On the other hand, in other substances such as metals, there are electric charges capable of moving through the substance. The electric current due to these free charges we shall call *free* current. In many instances one needs to distinguish explicitly between free currents and magnetization currents, as we shall do in this section.

Figure 16–45

Figure 16–46

Let us again consider a cylindrical piece of matter placed inside a long solenoid which is carrying a current I (Fig. 16–45). This current produces a magnetic field that magnetizes the cylinder and gives rise to a magnetization surface current on the cylinder in the same direction as I. The magnetization surface current per unit length is equal to $\mathfrak{M}$. If the solenoid has n turns per unit length, the system of solenoid plus magnetized cylinder is equivalent to a single solenoid carrying a current per unit length equal to $nI + \mathfrak{M}$. This effective solenoidal current gives rise to a resultant magnetic field $\mathfrak{B}$ parallel to the axis of the cylinder, a field whose magnitude is given by Eq. (16.71), with nI replaced by the total current per unit length $nI + \mathfrak{M}$. That is, $\mathfrak{B} = \mu_0(nI + \mathfrak{M})$ or

$$\frac{1}{\mu_0}\mathfrak{B} - \mathfrak{M} = nI.$$

This expression gives the conduction or free currents per unit length, nI, on the surface of the cylinder in terms of the magnetic field $\mathfrak{B}$ in the medium and the magnetization $\mathfrak{M}$ of the medium. When we note that $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{M}$ are vectors in the same direction, the above result suggests the introduction of a new vector field, called the *magnetizing field*, defined by

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathfrak{B} - \mathfrak{M}. \tag{16.83}$$

È espresso in A m^{-1} o m^{-1} s^{-1} C, che sono le unità dei due termini che compaiono nel secondo membro.

Nel nostro particolare esempio, abbiamo $\mathcal{H} = nI$, che lega $\mathcal{H}$ alle correnti di conduzione o libere per unità di lunghezza del solenoide. Quando consideriamo un tratto di lunghezza $PQ = L$ lungo la superficie, abbiamo

$$\text{free} = \text{lib}$$

dove $I_{\text{lib}} = LnI$ è la totale corrente libera del solenoide corrispondente alla lunghezza L. Calcolando la circolazione di $\mathcal{H}$ lungo il rettangolo $PQRS$, abbiamo che $\Lambda_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}L$, poichè $\mathcal{H}$ è nullo fuori dal solenoide (lo sono sia $\mathcal{B}$ che $\mathcal{M}$) e i lati QR e SP non contribuiscono alla circolazione, poichè sono perpendicolari al campo magnetico. Perciò l'Eq. (16.84) può essere scritta nella forma $\Lambda_{\mathcal{H}} = I_{\text{lib}}$, dove I_{lib} è la corrente libera totale attraverso il rettangolo $PQRS$. Questo risultato è di validità più generale di quanto non possa suggerire la nostra dimostrazione semplificata. Infatti, si può verificare che *la circolazione del campo magnetizzante lungo una linea chiusa è uguale alla corrente libera totale attraverso il percorso*. Cioè,

$$\text{free} = \text{lib}$$

dove L_{lib} è la totale corrente libera concatenata con il percorso L dovuta alle cariche fluenti liberamente nel mezzo o in un circuito elettrico, escluse però le correnti dovute alla magnetizzazione della materia. Per esempio, se il percorso L (Fig. 16–46) è concatenato con i circuiti I_1 e I_2 e con un corpo avente magnetizzazione $\mathcal{M}$, dobbiamo introdurre nell'Eq. (16.85) solo le correnti I_1 e I_2, mentre nella legge di Ampère, (Eq. 16.67), per il campo magnetico $\mathcal{B}$, dobbiamo introdurre tutte le correnti; cioè I_1 e I_2 dovute a cariche che si muovono liberamente, come anche quelle dovute alla magnetizzazione $\mathcal{M}$ del corpo derivanti da elettroni legati.

Scriviamo l'Eq. (16.83) nella forma

Poichè la magnetizzazione $\mathcal{M}$ del corpo è legata fisicamente al campo magnetico risultante $\mathcal{B}$, potremmo introdurre una relazione fra $\mathcal{M}$ e $\mathcal{B}$ simile alla relazione, nel caso elettrico, fra $\mathcal{P}$ e $\mathcal{E}$, data nell'Eq. (16.10). Tuttavia per ragioni storiche è d'uso procedere in maniera differente ed esprimere, invece, la relazione fra $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{H}$, scrivendo

La quantità χ_m è chiamata *suscettibilità magnetica* del materiale ed è un puro numero indipendente dalle unità scelte per $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{H}$. Sostituendo l'Eq. (16.87) nell'Eq. (16.86), possiamo scrivere

dove

It is expressed in A m^{-1} or m^{-1} s^{-1} C, which are the units of the two terms that appear on the right-hand side.

In our special example, we have that $\mathcal{H} = nI$, which relates $\mathcal{H}$ to the conduction or free currents per unit length of the solenoid. When we consider a length $PQ = L$ along the surface, we then have

$$\mathcal{H}L = LnI = I_{\text{free}}, \tag{16.84}$$

where $I_{\text{free}} = LnI$ is the total free current of the solenoid corresponding to the length L. Computing the circulation of $\mathcal{H}$ around the rectangle $PQRS$, we have that $\Lambda_{\mathcal{H}} = \mathcal{H}L$, since $\mathcal{H}$ is zero outside the solenoid (both $\mathcal{B}$ and $\mathcal{M}$ are) and the sides QR and SP do not contribute to the circulation, since they are perpendicular to the magnetic field. Thus Eq. (16.84) may be written in the form $\Lambda_{\mathcal{H}} = I_{\text{free}}$, where I_{free} is the total free current across the rectangle $PQRS$. This result is of more general validity than what our simplified proof may suggest. In fact, it can be verified that *the circulation of the magnetizing field along a closed line is equal to the total free current through the path.* That is,

$$\Lambda_{\mathcal{H}} = \oint_L \mathcal{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{free}}, \tag{16.85}$$

where I_{free} is the total current linking with the path L due to free-flowing charges in the medium or in an electric circuit, but excluding currents due to the magnetization of matter. For example, if the path L (Fig. 16–46) links with circuits I_1 and I_2 and a body with magnetization $\mathcal{M}$, we must include in Eq. (16.85) only the currents I_1 and I_2, while in Ampère's law, Eq. (16.67), for the magnetic field $\mathcal{B}$, we must include all currents; that is, I_1 and I_2, due to freely moving charges, as well as those due to the magnetization $\mathcal{M}$ of the body resulting from bound electrons.

Let us write Eq. (16.83) in the form

$$\mathcal{B} = \mu_0(\mathcal{H} + \mathcal{M}). \tag{16.86}$$

Since the magnetization $\mathcal{M}$ of the body is physically related to the resultant magnetic field $\mathcal{B}$, we could introduce a relation between $\mathcal{M}$ and $\mathcal{B}$ similar to the relation, in the electrical case, between $\mathcal{P}$ and $\mathcal{E}$, given in Eq. (16.10). However, for historical reasons it is customary to proceed in a different manner, and express a relation between $\mathcal{M}$ and $\mathcal{H}$ instead, by writing

$$\mathcal{M} = \chi_m \mathcal{H}. \tag{16.87}$$

The quantity χ_m is called the *magnetic susceptibility* of the material, and is a pure number independent of the units chosen for $\mathcal{M}$ and $\mathcal{H}$. Substituting Eq. (16.87) into Eq. (16.86), we may write

$$\mathcal{B} = \mu_0(\mathcal{H} + \chi_m \mathcal{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathcal{H} = \mu \mathcal{H}, \tag{16.88}$$

where

$$\mu = \mathcal{B}/\mathcal{H} = \mu_0(1 + \chi_m) \tag{16.89}$$

è chiamata la *permeabilità* del mezzo, ed è espressa nelle stesse unità di μ_0; cioè, m kg^{-2} C. La permeabilità relativa è definita da

ed è un puro numero indipendente dal sistema di unità di misura.

Quando vale la relazione $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$, possiamo scrivere, al posto dell'Eq. (16.85),

free = lib

Se il mezzo è omogeneo, così che μ è costante, la circolazione del campo magnetico è

free = lib

Questo risultato è simile alla legge di Ampère, Eq. (16.67), ma con la corrente totale sostituita dalla corrente libera e μ al posto di μ_0. Possiamo allora concludere che l'effetto della materia magnetizzata sul campo magnetico $\mathfrak{B}$ è di sostituire μ_0 con μ. Per esempio, il campo magnetico di una corrente rettilinea I immersa in un mezzo magnetizzante è

invece del valore dato dall'Eq. (15.41).

16.17 Calcolo della suscettibilità magnetica

Poichè la suscettibilità magnetica χ_m, come la suscettibilità elettrica χ_e, rappresenta la risposta di un mezzo a un campo magnetico esterno, essa è legata alle proprietà degli atomi e delle molecole del mezzo. Due effetti entrano nel fenomeno della magnetizzazione della materia da parte di un campo magnetico esterno. Uno è la *distorsione* del moto degli elettroni dovuta al campo magnetico. L'altro è un *effetto di orientamento* quando l'atomo o la molecola ha un momento magnetico permanente. Ambedue gli effetti contribuiscono al valore di χ_m e verranno discussi separatamente.

(a) ***Effetto di distorsione.*** Sappiamo che un campo magnetico esercita una forza su una carica in moto. Perciò se un campo magnetico esterno è applicato ad una sostanza, gli elettroni in moto negli atomi o nelle molecole sono assoggettati ad una forza addizionale dovuta al campo magnetico applicato. Ciò ha come conseguenza una perturbazione del moto degli elettroni. Se volessimo valutare con precisione questa perturbazione, dovremmo usare i metodi della meccanica quantistica. Così ci limiteremo ad enunciare i risultati principali, fornendo una spiegazione limitata nell'Esempio 16.21.

L'effetto di un campo magnetico sul moto degli elettroni in un atomo è equivalente ad una corrente addizionale indotta nell'atomo. Questa corrente è orientata in una direzione tale che il momento di dipolo magnetico ad essa associato è nella direzione *opposta* a quella del campo magnetico. Poichè questo effetto è indipendente dall'orientazione

is called the *permeability* of the medium, and is expressed in the same units as μ_0; that is, m kg^{-2} C. The relative permeability is defined by

$$\mu_r = \mu/\mu_0 = 1 + \chi_m, \tag{16.90}$$

and is a pure number independent of the system of units.

When the relation $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$ holds, we may write, instead of Eq. (16.85),

$$\oint_L \frac{1}{\mu}\,\mathfrak{B}\cdot d\boldsymbol{l} = I_{\text{free}}.$$

If the medium is homogeneous, so that μ is constant, the circulation of the magnetic field is

$$\Lambda_{\mathfrak{B}} = \oint_L \mathfrak{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu I_{\text{free}}. \tag{16.91}$$

This result is similar to Ampère's law, Eq. (16.67), but with the total current replaced by the free current and μ instead of μ_0. We may then conclude that the effect of magnetized matter on the magnetic field $\mathfrak{B}$ is to replace μ_0 by μ. For example, the magnetic field of a rectilinear current I embedded in a magnetized medium is

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu I}{2\pi r} \tag{16.92}$$

instead of the value given by Eq. (15.41).

16.17 Calculation of Magnetic Susceptibility

Since the magnetic susceptibility χ_m, like the electric susceptibility χ_e, expresses the response of a medium to an external magnetic field, it is related to the properties of the atoms and molecules of the medium. Two effects enter into the phenomenon of the magnetization of matter by an external magnetic field. One is a *distortion* of the electronic motion due to the magnetic field. The other is an *orientation effect* when the atom or molecule has a permanent magnetic moment. Both effects contribute to the value of χ_m, and they will be discussed separately.

(a) ***Distortion effect.*** We know that a magnetic field exerts a force on a moving charge. Therefore if an external magnetic field is applied to a substance, the electrons moving in the atoms or molecules are subject to an additional force due to the applied magnetic field. This results in a perturbation of the electronic motion. If we were to evaluate this perturbation precisely, we would have to use the methods of quantum mechanics. Thus we shall limit ourselves to stating the main results, providing a simplified illustration in Example 16.21.

The effect of a magnetic field on the electronic motion in an atom is equivalent to an additional current induced in the atom. This current is oriented in a direction such that the magnetic dipole moment associated with it is in the direction *opposite* to that of the magnetic field. Since this effect is independent of the orien-

Tabella 16–3 Suscettibilità magnetiche a temperatura ambiente

Sostanze diamagnetiche	χ_m	Sostanze paramagnetiche	χ_m
Idrogeno (1 atm)		Ossigeno (1 atm)	
Azoto (1 atm)		Magnesio	
Sodio		Alluminio	
Rame		Tungsteno	
Bismuto		Titanio	
Diamante		Platino	
Mercurio		Cloruro di gadolinio ($GdCl_3$)	

dell'atomo ed è lo stesso per tutti gli atomi, concludiamo che *la sostanza ha acquistato una magnetizzazione* $\mathfrak{M}$ *opposta al campo magnetico*, un risultato che è in contrasto con quello trovato nel caso del campo elettrico. Questo comportamento, chiamato *diamagnetismo*, è comune a tutte le sostanze, sebbene in molte sia mascherato dall'effetto paramgnetico descritto sotto. La magnetizzazione risultante è data da

ave = med

dove $\mathfrak{H}$ è il campo magnetizzante nella sostanza, n è il numero di atomi per unità di volume ed r_i è la distanza dell'iesimo elettrone dal nucleo in un atomo. La somma è estesa a tutti gli elettroni nell'atomo e la media deve essere calcolata secondo i metodi della meccanica quantistica. Le altre quantità hanno il loro usuale significato. Il segno meno è dovuto al fatto che $\mathfrak{M}$ è opposto a $\mathfrak{H}$.

Quindi, secondo l'Eq. (16.87), la suscettibilità magnetica è

ave = med

e, poichè è negativa, la permeabilità relativa $\mu_r = 1 + \chi_m$ è minore di uno. Se introduciamo i valori delle costanti note, prendiamo n circa uguale a 10^{28} atomi per m^3 in un solido, e stimiamo che r_i sia circa 10^{-10} m (che è l'ordine di grandezza di un'orbita elettronica), abbiamo che χ_m è dell'ordine di grandezza di 10^{-5} per i solidi, in accordo con i valori elencati nella Tabella 16–3. Il risultato (16.94) è l'analogo magnetico della suscettibilità elettrica statica, derivata nell'Eq. (16.22).

(b) ***Effetto di orientamento.*** Arriviamo poi all'effetto di orientamento. Come mostrato nell'Esempio 15.6, un atomo o una molecola può possedere un momento di dipolo magnetico permanente, associato al momento angolare dei suoi elettroni. In questo caso la presenza di un campo magnetico esterno produce una coppia che tende ad allineare tutti i dipoli magnetici lungo il campo magnetico, dando come risultato un'addizionale magnetizzazione chiamata *paramagnetismo*. Il magnetismo acquistato da una sostanza paramagnetica è perciò nella direzione e nel verso del campo magnetico. Questo è un effetto molto più intenso del

TABLE 16–3 Magnetic Susceptibilities at Room Temperature

Diamagnetic substances	χ_m	Paramagnetic substances	χ_m
Hydrogen (1 atm)	-2.1×10^{-9}	Oxygen (1 atm)	2.1×10^{-6}
Nitrogen (1 atm)	-5.0×10^{-9}	Magnesium	1.2×10^{-5}
Sodium	-2.4×10^{-6}	Aluminum	2.3×10^{-5}
Copper	-1.0×10^{-5}	Tungsten	6.8×10^{-5}
Bismuth	-1.7×10^{-5}	Titanium	7.1×10^{-5}
Diamond	-2.2×10^{-5}	Platinum	3.0×10^{-4}
Mercury	-3.2×10^{-5}	Gadolinium chloride ($GdCl_3$)	2.8×10^{-3}

tation of the atom and is the same for all atoms, we conclude that *the substance has acquired a magnetization* $\mathfrak{M}$ *opposed to the magnetic field*, a result which is in contrast to that found in the electric field case. This behavior, called *diamagnetism*, is common to all substances, although in many it is masked by the paramagnetic effect described below. The resulting magnetization is given by

$$\mathfrak{M} = -\frac{ne^2\mu_0}{6m_e}\left(\sum_i r_i^2\right)_{\text{ave}} \mathfrak{H}, \tag{16.93}$$

where $\mathfrak{H}$ is the magnetizing field in the substance, n is the number of atoms per unit volume, and r_i is the distance of the ith electron from the nucleus in an atom. The summation extends over all the electrons in the atom, and the average must be computed according to the prescriptions of quantum mechanics. The other quantities have their usual meaning. The negative sign is due to the fact that $\mathfrak{M}$ is opposed to $\mathfrak{H}$.

Then, according to Eq. (16.87), the magnetic susceptibility is

$$\chi_m = -\frac{ne^2\mu_0}{6m_e}\left(\sum_i r_i^2\right)_{\text{ave}} \tag{16.94}$$

and, since it is negative, the relative permeability $\mu_r = 1 + \chi_m$ is smaller than one. If we introduce the values of the known constants, assume that n is about 10^{28} atoms per m^3 in a solid, and estimate that r_i is about 10^{-10} m (which is the order of magnitude of an electronic orbit), we then have that χ_m is of the order of magnitude of 10^{-5} for solids, in agreement with the values listed in Table 16–3. Result (16.94) is the magnetic equivalent of the static electric susceptibility, derived in Eq. (16.22).

(b) ***Orientation effect.*** Next we come to the orientation effect. As indicated in Example 15.6, an atom or molecule may have a permanent magnetic dipole moment, associated with the angular momentum of its electrons. In this case the presence of an external magnetic field produces a torque that tends to align all the magnetic dipoles along the magnetic field, resulting in an additional magnetization called *paramagnetism*. The magnetism acquired by a paramagnetic substance is therefore in the direction of the magnetic field. This is a much stronger effect than

diamagnetismo e, nel caso delle sostanze paramagnetiche, gli effetti diamagnetici sono in generale completamente schermati dagli effetti paramagnetici.

La *suscettibilità paramagnetica* dei gas è data, approssimativamente, da un'espressione simile all'Eq. (16.26) per la suscettibilità elettrica dovuta a molecole polari,

dove m_0 è il momento magnetico atomico o molecolare permanente, T è la temperatura assoluta della sostanza, e k è la costante di Boltzmann. Come nel caso elettrico, χ_m decresce se la temperatura della sostanza cresce. Questa dipendenza dalla temperatura è dovuta al moto molecolare, che cresce con la temperatura, e perciò tende a contrastare l'effetto allineante del campo magnetico. Ora, dal Problema 15.50, sappiamo che l'ordine di grandezza del momento magnetico atomico è $10^{-23}\,\mathrm{J\,T^{-1}}$. Perciò, introducendo i valori delle altre costanti, l'Eq. (16.35) dà la suscettibilità paramagnetica a temperatura ambiente (298 °K) dell'ordine di 10^{-4} per i solidi e di 10^{-7} per i gas in condizioni standard di temperatura e di pressione. Questo risultato è in accordo soddisfacente con i valori dati nella Tabella 16–3 per le sostanze paramagnetiche.

Una conclusione importante è che, sia per le sostanze paramagnetiche che diamagnetiche, χ_m è molto piccola rispetto all'unità e, in molti casi, possiamo sostituire $\mu_r = 1 + \chi_m$ con uno.

(c) ***Altri effetti.*** Una terza classe di sostanze magnetiche è chiamata *ferromagnetica*. La principale caratteristica delle sostanze ferromagnetiche è che presentano una magnetizzazione permanente, il che suggerisce una naturale tendenza dei momenti magnetici dei loro atomi o molecole ad allinearsi per effetto di interazioni mutue. La magnetite ed altri magneti naturali menzionati al principio del Cap. 15 sono esempi di sostanze ferromagnetiche. Il ferromagnetismo è perciò simile alla ferroelettricità per quanto riguarda il comportamento generale, sebbene le sue origini siano differenti. È dovuto ad una interazione tra gli spin S_1 ed S_2 di due elettroni che sostanzialmente è del tipo $-JS_1 \cdot S_2$, dove la quantità J, chiamata *integrale di scambio*, dipende dalla distanza fra gli elettroni. Quando J è positivo, l'equilibrio è raggiunto quando $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$ sono paralleli, il che dà origine ad un orientamento parallelo

diamagnetism and, in the case of paramagnetic substances, the diamagnetic effects are in general completely screened by the paramagnetic effects.

The *paramagnetic susceptibility* of gases is given, approximately, by an expression similar to Eq. (16.26) for the electric susceptibility due to polar molecules,

$$\chi_m = \frac{nm_0^2\mu_0}{3kT}, \tag{16.95}$$

where m_0 is the permanent atomic or molecular magnetic moment, T is the absolute temperature of the substance, and k is the Boltzmann constant. As in the electrical case, χ_m decreases if the temperature of the substance increases. This temperature dependence is due to the molecular motion, which increases with temperature, and therefore tends to offset the aligning effect of the magnetic field. Now, from Problem 15.50, we know that the order of magnitude of the atomic magnetic moment is $10^{-23}\,\mathrm{J\,T^{-1}}$. Thus, when we introduce the values of the other constants, Eq. (16.95) gives the paramagnetic susceptibility at room temperature (298°K) with an order of magnitude of 10^{-4} for solids and 10^{-7} for gases at STP. This result is in satisfactory agreement with the values given in Table 16–3 for paramagnetic substances.

An important conclusion is that, for both paramagnetic and diamagnetic substances, χ_m is very small compared with unity, and in many instances we may replace $\mu_r = 1 + \chi_m$ by one.

(c) ***Other effects.*** A third class of magnetic substances is called *ferromagnetic*. The chief characteristic of ferromagnetic substances is that they exhibit a permanent magnetization, which suggests a natural tendency of the magnetic moments of its atoms or molecules to align under their mutual interactions. The lodestone and other natural magnets mentioned at the beginning of Chapter 15 are examples of ferromagnetic substances. Ferromagnetism is thus similar to ferroelectricity in its overall behavior, although its origin is different. It is associated with an interaction between the spins $\boldsymbol{S}_1$ and $\boldsymbol{S}_2$ of two electrons that basically is of the form $-JS_1 \cdot S_2$, where the quantity J, called the *exchange integral*, depends on the distance between the electrons. When J is positive, equilibrium is attained if $\boldsymbol{S}_1$ and $\boldsymbol{S}_2$ are parallel, resulting in a parallel orientation

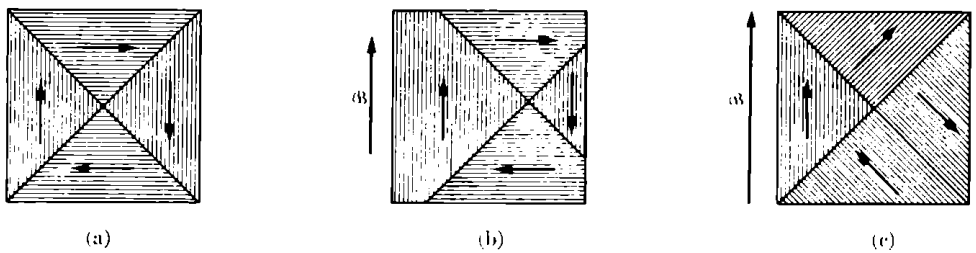


Fig. 16–47. Domini magnetici. (a) Sostanze non magnetizzate, (b) Magnetizzazione per crescita dei domini, (c) Magnetizzazione per orientamento dei domini.

Fig. 16–47. Magnetic domains. (a) Unmagnetized substances, (b) magnetization by domain growth, (c) magnetization by domain orientation.

degli spin elettronici in regioni microscopiche chiamate *domini* (Fig. 16—47a e 16—48a), che hanno dimensioni dell'ordine di 10^{-8} sino a $10^{-12}/m^3$ e contengono da 10^{21} a 10^{17} atomi. La direzione di magnetizzazione di un dominio dipende dalla struttura cristallina della sostanza. Per esempio, per il ferro, che cristallizza in una struttura cubica, le direzioni di *facile* magnetizzazione sono lungo i tre assi del cubo. In un pezzo di materia gli stessi domini possono essere orientati in differenti direzioni, dando un effetto netto, o macroscopico, che può essere nullo o trascurabile. In presenza di un campo magnetico esterno, i domini risentono di due effetti. Quei domini che sono orientati favorevolmente rispetto al campo magnetico crescono a spese di quelli orientati meno favorevolmente (Fig. 16—47b); al crescere dell'intensità del campo magnetico esterno, la magnetizzazione dei domini tende a disporsi secondo la direzione del campo (Fig. 16—47c), e il pezzo di materiale diviene un *magnete*. Il ferromagnetismo è una proprietà che dipende dalla temperatura, e per ogni sostanza ferromagnetica vi è una temperatura, chiamata *temperatura di Curie*, al disopra della quale diviene paramagnetica. Questo fenomeno si verifica quando l'agitazione termica è abbastanza forte da neutralizzare le forze allineanti. Sostanze che sono ferromagnetiche a temperatura ambiente sono: ferro, nichel, cobalto e gadolinio. Le loro temperature di Curie sono 770°C, 365°C, 1075°C, e 15°C, rispettivamente.

Ferromagnetism = Ferromagnetismo
Antiferromagnetism = Antiferromagnetismo
Ferrimagnetism = Ferrimagnetismo

of electronic spins in microscopic regions called *domains* (Figs. 16–47a and 16–48a), which have dimensions of the order of 10^{-8} to 10^{-12} m^3 and which contain from 10^{21} to 10^{17} atoms. The direction of magnetization of a domain depends on the crystal structure of the substance. For example, for iron, which crystalizes with a cubic structure, the directions of *easy* magnetization are along the three axes of the cube. In a piece of matter the domains themselves may be oriented in different directions, giving a net, or macroscopic, effect that may be zero or negligible. In the presence of an external magnetic field, the domains suffer from two effects: Those domains oriented favorably with respect to the magnetic field grow at the expense of those oriented less favorably (Fig. 16–47b); as the strength of the external magnetic field increases, the magnetization of the domains tends to align in the direction of the field (Fig. 16–47c), and the piece of matter becomes a *magnet*. Ferromagnetism is a property that depends on temperature, and for each ferromagnetic substance there is a temperature, called the *Curie temperature*, above which it becomes paramagnetic. This phenomenon occurs when thermal motion is great enough to offset the aligning forces. Substances which are ferromagnetic at room temperature are: iron, nickel, cobalt, and gadolinium. Their Curie temperatures are 770°C, 365°C, 1075°C, and 15°C, respectively.

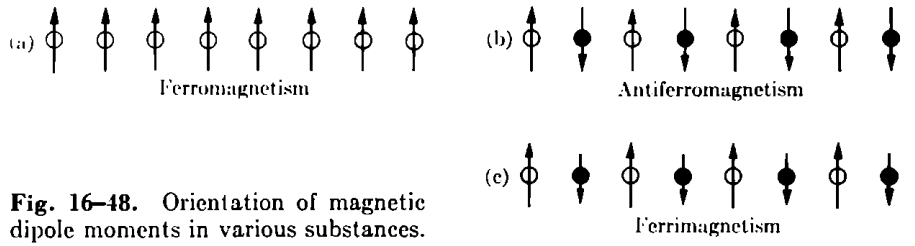


Fig. 16—48. Orientamento di momenti di dipolo magnetici in varie sostanze.

Fig. 16–48. Orientation of magnetic dipole moments in various substances.

Tuttavia, può anche accadere per alcune sostanze che J sia negativo. Allora l'equilibrio è raggiunto se gli spin elettronici sono antiparalleli, il che dà luogo ad una magnetizzazione netta nulla (Fig. 16—48b). In questo caso la sostanza è chiamata *antiferromagnetica*. Alcune sostanze antiferromagnetiche sono MnO, FeO, CoO, e NiO.

Un altro tipo di magnetizzazione è chiamato *ferrimagnetismo*. È simile all'antiferromagnetismo, ma i momenti magnetici atomici o ionici in una direzione sono differenti da quelli orientati nella direzione opposta, il che ha come conseguenza una magnetizzazione netta (Fig. 16—48c). Queste sostanze sono chiamate ferriti e possono essere generalmente rappresentate dalla formula chimica $MOFe_2O_3$, dove M sta per Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd, ecc. Si noti che se M è Fe, si ha il composto Fe_3O_4, o magnetite.

However, it is also possible for some substances that J be negative. Then equilibrium is attained if the electronic spins are antiparallel, resulting in a zero net magnetization (Fig. 16–48b). In this case the substance is called *antiferromagnetic*. Some antiferromagnetic substances are MnO, FeO, CoO, and NiO.

Another type of magnetization is called *ferrimagnetism*. It is similar to antiferromagnetism, but the atomic or ionic magnetic moments in one direction are different from those oriented in the opposite direction, resulting in a net magnetization (Fig. 16–48c). These substances are called *ferrites*, and can be generally represented by the chemical formula $MOFe_2O_3$, where M stands for Mn, Co, Ni, Cu, Mg, Zn, Cd, etc. Note that if M is Fe, the compound Fe_3O_4, or magnetite, results.

ESEMPIO 16.21. Calcolare il momento magnetico atomico indotto da un campo magnetico esterno.

Soluzione: Abbiamo detto che un campo magnetico esterno produce in un atomo un momento magnetico in direzione opposta al campo. Ciò può essere giustificato in base ad un modello molto semplice. Consideriamo un elettrone la cui carica è $-e$, rotante attorno a

EXAMPLE 16.21. Calculate the atomic magnetic moment induced by an external magnetic field.

Solution: We have indicated that an external magnetic field produces in an atom a magnetic moment in a direction opposite to the field. This can be justified by means of a very simple model. Let us consider an electron whose charge is $-e$, revolving around

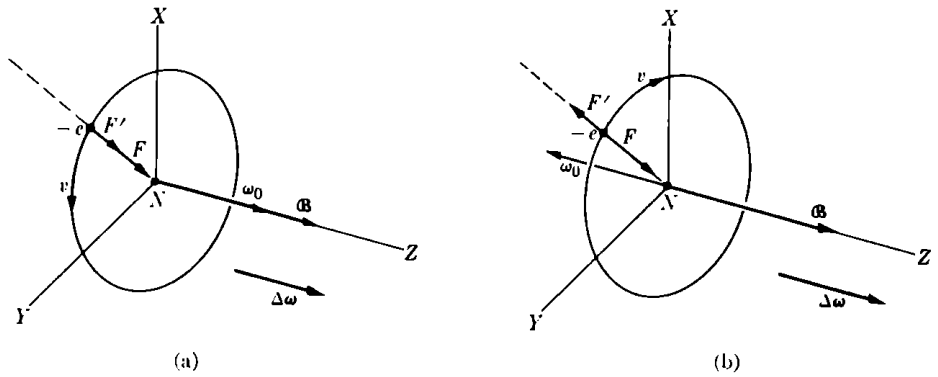


Fig. 16–49. Spiegazione del diamagnetismo.

Fig. 16–49. Explanation of diamagnetism.

un nucleo N, e per semplicità supponiamo che l'orbita sia circolare, di raggio ρ e nel piano XY. Se ω_0 è la velocità angolare dell'elettrone ed $\mathbf{F}$ è la forza agente sull'elettrone dovuta al nucleo. l'equazione del moto dell'elettrone è

a nucleus N, and for simplicity let us assume the orbit to be circular, of radius ρ, and in the XY-plane. If $\boldsymbol{\omega}_0$ is the electron's angular velocity and $\boldsymbol{F}$ the force on the electron due to the nucleus, the equation of motion of the electron is then

$$m_e\omega_0^2\rho = F.$$

Se ora un campo magnetico $\mathfrak{B}$ è applicato lungo l'asse Z (cioè, perpendicolarmente al piano dell'orbita), una forza addizionale $\boldsymbol{F}' = -e\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ è esercitata sull'elettrone. Questa forza sarà o nella stessa direzione di $\mathbf{F}$ o nella direzione opposta, a seconda dell'orientazioni relative di ω_0 e $\mathfrak{B}$, come indicato nella Fig. 16–49. Poichè la forza radiale sull'elettrone è cambiata, la frequenza, angolare (supponendo che il raggio rimanga lo stesso) cambierà anch'essa, divenendo ω. L'equazione del moto dell'elettrone, usando $v = \omega\rho$ e il fatto che l'intensità di $\mathbf{F}'$ è $ev\mathfrak{B}$, è ora

If now a magnetic field $\mathfrak{B}$ is applied along the Z-axis (that is, perpendicular to the plane of the orbit), an additional force $\boldsymbol{F}' = -e\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ is exerted on the electron. This force will be either in the same direction as $\boldsymbol{F}$ or in the opposite direction, depending on the relative orientation of $\boldsymbol{\omega}_0$ and $\mathfrak{B}$, as indicated in Fig. 16–49. Since the radial force on the electron has changed, the angular frequency (assuming the radius remains the same) will also change, becoming ω. The equation of motion of the electron, using $v = \omega\rho$ and the fact that the magnitude of $\boldsymbol{F}'$ is $ev\mathfrak{B}$, is now

$$m_e\omega^2\rho = F \pm e\omega\rho\mathfrak{B},$$

dove il segno + vale nel caso (a) della Fig. 16–49, e il segno meno nel caso (b). Sottraendo le equazioni del moto l'una dall'altra per eliminare F, troviamo

where the plus sign holds for case (a) of Fig. 16–49 and the minus sign for case (b). Subtracting both equations of motion to eliminate F, we find

$$m_e(\omega^2 - \omega_0^2)\rho = \pm e\omega\mathfrak{B} \quad \text{or} \quad m_e(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) = \pm e\omega\mathfrak{B}.$$

ossia

Ora la variazione di frequenza, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, è molto piccola e possiamo sostituire $\omega + \omega_0$ con 2ω senza grande errore. Allora otteniamo

Now the change in frequency, $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, is very small and we may replace $\omega + \omega_0$ by 2ω without great error. Then we have

$$2m_e\Delta\omega = \pm e\mathfrak{B} \quad \text{or} \quad \Delta\omega = \pm\frac{e}{2m_e}\mathfrak{B},$$

ossia

sicchè la variazione in frequenza è uguale alla frequenza di Larmor Ω_L, che abbiamo definito nell'Esempio 15.7. Il segno più, valevole nel caso (a), significa un aumento di ω_0, e $\Delta\omega$ è allora diretto verso destra. Il segno meno che vale nel caso (b) significa una diminuzione di ω_0, e $\Delta\omega$ è allora diretto ancora verso destra. Così in ambedue i casi possiamo scrivere la relazione vettoriale

so that the change in frequency is equal to the Larmor frequency Ω_L, which we defined in Example 15.7. The plus sign holding in case (a) means an increase in $\boldsymbol{\omega}_0$, and $\Delta\boldsymbol{\omega}$ is then pointing to the right. The minus sign holding in case (b) means a decrease in $\boldsymbol{\omega}_0$, and $\Delta\boldsymbol{\omega}$ is then also pointing to the right. So in both cases we may write the vector relation

$$\Delta\boldsymbol{\omega} = \frac{e}{2m_e}\mathfrak{B}.$$

La variazione in frequenza del moto dell'elettrone produce una corrente netta $-e(\Delta\omega/2\pi)$ e perciò, usando la definizione (15.19), un momento magnetico

Perciò il momento magnetico dell'atomo è nella direzione opposta a quella del campo magnetico $\mathcal{B}$, e la sostanza nel suo complesso acquisterà una magnetizzazione opposta al campo magnetico applicato. Giacchè il nostro calcolo è stato sovrasemplificato, per ottenere un risultato di validità più generale dobbiamo tener conto della distribuzione casuale nello spazio delle orbite elettroniche e analizzare in maggiore dettaglio la natura del campo magnetico locale $\mathcal{B}$ che agisce sull'elettrone. In ogni caso, il nostro calcolo coincide sostanzialmente con il risultato citato nell'Eq. (16.93).

16.18 *Riassunto delle leggi per campi statici*

In questo capitolo abbiamo discusso i campi elettrico e magnetico statici come due entità separate che non hanno alcuna relazione l'una con l'altra, tranne che le sorgenti del campo elettrico sono le cariche elettriche e le sorgenti del campo magnetico sono le correnti elettriche. Siamo arrivati a due insiemi separati di equazioni, che compaiono nella Tabella 16–4, sia in forma integrale che differenziale. Queste equazioni ci permettono di calcolare il campo elettrico $\mathcal{E}$ e il campo magnetico $\mathcal{B}$ se sono note le cariche e le correnti e viceversa. Appare perciò che campi elettrici e magnetici statici potrebbero venire considerati come due campi indipendenti. Sappiamo però che ciò non è vero, poichè nel capitolo 15 abbiamo ricavato le regole per correlare i campi elettrici e magnetici misurati da due osservatori in moto relativo uniforme, usando la trasformazione di Lorentz, e abbiamo notato che $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sono strettamente legati. Perciò possiamo attenderci che in casi di dipendenza dal tempo le equazioni precedenti richiederanno qualche modifica. Imparare come fare queste modifiche è compito del prossimo capitolo, dove otterremo un nuovo insieme di equazioni che sono basate sull'evidenza sperimentale e sono estensioni delle equazioni precedenti.

Tabella 16–4 Equazione del Campo Elettromagnetico Statico

	Legge	Forma integrale	Forma differenziale
I.	Legge di Gauss per il campo elettrico [Eq. (16.3) e (16.5)]		
II.	Legge di Gauss per il campo magnetico [Eq. (16.81) e (16.82)]		
III.	Circolazione del campo elettrico [Eq. (16.62) e (16.79)]		curl = rot
IV.	Circolazione del campo magnetico (Legge di Ampère) [Eq. (16.67) e (16.78)]		

The change in frequency of the electronic motion produces a net current $-e(\Delta\omega/2\pi)$ and therefore, using definition (15.19), a magnetic moment

$$m = -e\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\right)(\pi\rho^2) = -\frac{e^2\rho^2}{4m_e}\mathcal{B}.$$

Therefore the magnetic moment of the atom is in the direction opposite to that of the magnetic field $\mathcal{B}$, and the substance as a whole will acquire a magnetization opposed to the applied magnetic field. Since our calculation has been oversimplified, in order to obtain a more general result we must take into account the random distribution in space of the electronic orbits and analyze the nature of the local magnetic field $\mathcal{B}$ acting on the electron in greater detail. In any case, our calculation basically coincides with the result quoted in Eq. (16.93).

16.18 *Summary of the Laws for Static Fields*

In this chapter we have discussed the static electric and magnetic fields as two separate entities with no relation between them whatsoever, except that the sources of the electric field are electric charges and the sources of the magnetic field are electric currents. Hence we arrived at two separate sets of equations, which appear in Table 16–4, both in integral and differential form. These equations allow us to compute the electric field $\mathcal{E}$ and the magnetic field $\mathcal{B}$ if the charges and currents are known, and conversely. It thus appears that static electric and magnetic fields could be considered as two independent fields. We know, however, that this is not true, since in Chapter 15 we derived the rules for relating the electric and magnetic fields as measured by two observers in uniform relative motion, using the Lorentz transformation, and noted that $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ are closely related. Thus we may expect that in time-dependent cases the preceding equations will require some modifications. Learning how to make these modifications is the task of the next chapter, where we shall obtain a new set of equations which are based on experimental evidence and which are extensions of the preceding equations.

TABLE 16–4 Equations of the Static Electromagnetic Field

	Law	Integral form	Differential form
I.	Gauss' law for the electric field [Eqs. (16.3) and (16.5)]	$\oint_S \mathcal{E}\cdot u_N\,dS = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div}\mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
II.	Gauss' law for the magnetic field [Eqs. (16.81) and (16.82)]	$\oint_S \mathcal{B}\cdot u_N\,dS = 0$	$\operatorname{div}\mathcal{B} = 0$
III.	Circulation of the electric field [Eqs. (16.62) and (16.79)]	$\oint_L \mathcal{E}\cdot dl = 0$	$\operatorname{curl}\mathcal{E} = 0$
IV.	Circulation of the magnetic field (Ampère's law) [Eqs. (16.67) and (16.78)]	$\oint_L \mathcal{B}\cdot dl = \mu_0 I$	$\operatorname{curl}\mathcal{B} = \mu_0 j$

Bibliografia

References

1. "Nonuniform Electric Fields," H. Pohl, *Sci. Am.*, December 1960, page 106
2. "Equipment for the Determination of Magnetic Susceptibilities," J. A. McMillan, *Am. J. Phys.* **27**, 352 (1959)
3. "Resource Letter *FC*-1 on the Evolution of the Electromagnetic Field Concept," W. Scott, *Am. J. Phys.* **31**, 819 (1963)
4. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz and F. J. Milford. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960
5. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume II, R. Feynman, R. Leighton, and M. L. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 2, 3, 10 through 14, and 34 through 37
6. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 431 (Volta); page 446 (Ampère); page 465 (Ohm); page 519 (Gauss)

Problemi

16.1 Una sfera di raggio R_1 ha una cavità centrale di raggio R_2. Una carica q è distribuita uniformemente entro il suo volume. (a) Trovare il campo elettrico e il potenziale fuori dalle sfere, entro la sfera e nella cavità centrale. (b) Tracciare il grafico del campo e del potenziale elettrico in funzione della distanza dal centro.

16.2 Una sfera conduttrice di raggio R_1 ha una cavità centrale di raggio R_2. Al centro della cavità vi è una carica q. (a) Trovare la carica sulle superficie esterna ed interna del conduttore. (b) Calcolare il campo elettrico e il potenziale fuori dalla sfera, entro la sfera e nella cavità. (c) Tracciare il grafico del campo e del potenziale elettrico in funzione della distanza dal centro. [*Suggerimento:* Ricordare che il campo entro un conduttore è nullo.]

16.3 L'elettrone in un atomo di idrogeno può *ritenersi "distribuito"* in tutto lo spazio con una densita $\rho = Ce^{-2r/a_0}$, dove $a_0 = 0.53 \times 10^{-10}$ m. (a) Trovare la costante C in modo che la carica totale sia $-e$. (b) Determinare la carica totale entro una sfera di raggio a_0, che corrisponde al raggio dell'orbita dell'elettrone. (c) Calcolare il campo elettrico in funzione di r. (d) A quale distanza il campo elettrico differisce da $-e/4\pi\epsilon_0 r^2$ dell'1%? [*Suggerimento:* per il punto (a), dividere lo spazio in strati sferici, ciascuno di volume $4\pi r^2\, dr$.]

16.4 Si consideri la superficie cubica chiusa di lato a mostrata nella Fig. 16–50. Essa è posta in una regione dove vi è un campo elettrico parallelo all'asse X. Trovare il flusso elettrico attraverso la superficie e la carica totale entro di essa se il campo elettrico (a) è uniforme, (b) varia secondo $\mathcal{E} = Cx$.

Figura 16–50

16.5 Trovare il flusso elettrico e la carica totale entro il cubo di lato a (Fig. 16–50) se è posto in una regione dove il campo elettrico è (a) $\mathcal{E} = \boldsymbol{u}_x cx^2$, (b) $\mathcal{E} = c(\boldsymbol{u}_x y + \boldsymbol{u}_y x)$. Trovare anche, in ambedue i casi, la densità di carica.

16.6 Due sfere conduttrici di raggi 0.10 cm e 0.15 cm hanno cariche di

Problems

16.1 A sphere of radius R_1 has a central cavity of radius R_2. A charge q is uniformly distributed over its volume. (a) Find the electric field and the potential outside the sphere, inside the sphere, and in the central cavity. (b) Plot the electric field and potential as functions of the distance from the center.

16.2 A conducting sphere of radius R_1 has a central cavity of radius R_2. At the center of the cavity there is a charge q. (a) Find the charge on the inner and outer surfaces of the conductor. (b) Compute the electric field and the potential outside the sphere, inside the sphere, and in the cavity. (c) Plot the electric field and potential as functions of the distance from the center. [*Hint:* Remember that the field inside a conductor is zero.]

16.3 The electron in a hydrogen atom may be assumed to be "spread" over all space with a density $\rho = Ce^{-2r/a_0}$, where $a_0 = 0.53 \times 10^{-10}$ m. (a) Find the constant C such that the total charge is $-e$. (b) Determine the total charge within a sphere of radius a_0, which corresponds to the orbit radius of the electron. (c) Obtain the electric field as a function of r. (d) At what distance does the electric field differ from $-e/4\pi\epsilon_0 r^2$ by 1%? [*Hint:* For part (a), divide the space into spherical shells, each of volume $4\pi r^2\, dr$.]

16.4 Consider the cubical closed surface of side a shown in Fig. 16–50. It is placed in a region where there is an electric field parallel to the X-axis. Find the electric flux across the surface and the total charge inside it if the electric field (a) is uniform, (b) varies according to $\mathcal{E} = Cx$.

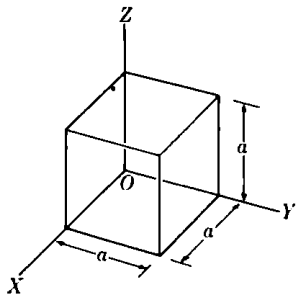


Figure 16–50

16.5 Find the electric flux and the total charge inside the cube of side a (Fig. 16–50) if it is placed in a region where the electric field is (a) $\mathcal{E} = \boldsymbol{u}_x cx^2$, (b) $\mathcal{E} = c(\boldsymbol{u}_z y + \boldsymbol{u}_y x)$. Also find, in each case, the charge density.

16.6 Two conducting spheres of radii 0.10 cm and 0.15 cm have charges of

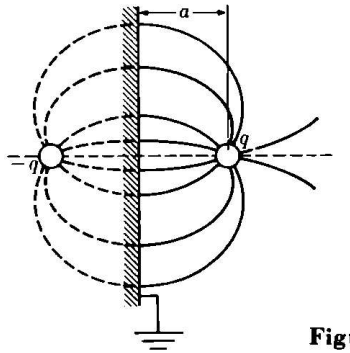


Figura 16–51

Figure 16–51

direction of . . . = direzione del campo elettrico applicato

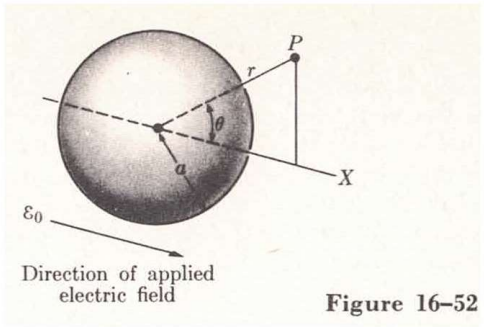


Figura 16–52

Figure 16–52

10^{-7} C e 2×10^{-7} C, rispettivamente. Esse sono poste a contatto e poi separate. Calcolare la carica su ciascuna sfera.

16.7 Una sfera metallica di raggio 1 m ha carica elettrica netta di 10^{-9} C. È collegata attraverso un filo conduttore a una sfera, inizialmente scarica, di raggio 0.30 m (molto lontana dalla sfera più grande) così che ambedue hanno lo stesso potenziale. (a) Quale sarà la carica di equilibrio su ciascuna sfera dopo che è stato effettuato il collegamento? (b) Qual'è l'energia della sfera carica prima del collegamento? (c) Qual'è l'energia del sistema dopo che le sfere sono state collegate? Se vi è una perdita spiegare dove è andata l'energia. (d) Mostrare che la carica è distribuita sulle sfere di raggi R_1 ed R_2 collegate elettricamente, in modo che $\sigma_1/\sigma_2 = R_1/R_2$, dove σ è la densità superficiale di carica elettrica. (e) Mostrare, quindi, che il campo elettrico sulla superficie di ciascuna sfera è tale che $\mathcal{E}_{1,\text{superficie}}/\mathcal{E}_{2,\text{superficie}} = R_2/R_1$. Nel risolvere questo problema, si trascuri l'effetto del filo.

16.8 Una carica q è posta a distanza a da un piano conduttore infinito mantenuto a potenziale zero. Si può dimostrare che il campo elettrico che si ha dinanzi al piano è lo stesso che si avrebbe se una carica negativa $-q$, a distanza $-a$, sostituisse il piano (vedi Fig. 16–51). Questa seconda carica è chiamata l'*immagine* della prima. (a) Mostrare che il potenziale sul piano è nullo e che il campo è ortogonale al piano. (b) Mostrare

10^{-7} C and 2×10^{-7} C, respectively. They are placed in contact and separated. Calculate the charge on each sphere.

16.7 A metal sphere of radius 1 m has net electric charge of 10^{-9} C. It is connected by a conducting wire to an initially uncharged sphere of radius 0.30 m (far away from the larger sphere) so that both have the same potential. (a) What will be the equilibrium charge on each sphere after the connection is made? (b) What is the energy of the charged sphere before connections are made? (c) What is the energy of the system after the spheres are joined? If there is any loss, explain where the energy has gone. (d) Show that charge is distributed on the electrically joined spheres of radius R_1 and R_2 such that $\sigma_1/\sigma_2 = R_1/R_2$, where σ is the surface density of electric charge. (e) Show, therefore, that the surface value of the electric field at each sphere is such that $\mathcal{E}_{1,\text{surface}}/\mathcal{E}_{2,\text{surface}} = R_2/R_1$. In solving this problem, ignore the effect of the wire.

16.8 A charge q is placed a distance a from an infinite plane conductor held at zero potential. It can be shown that the resultant electric field in front of the plane is the same as if a negative charge $-q$, at a distance $-a$, were to replace the plane (see Fig. 16–51). This second charge is called the *image* of the first. (a) Show that the potential at the plane is zero and that the field is normal to the plane. (b) Show

che la densità di carica sul piano è qa/r^3. (c) Verificare che la carica totale sul piano è uguale a $-q$.

16.9 Una sfera conduttrice di raggio a è posta in un campo elettrico uniforme $\mathcal{E}_0$ come mostrato nella Fig. 16–52. Poichè il potenziale della sfera deve essere costante, gli assegniamo il valore zero. Il campo elettrico agisce sulle cariche libere entro la sfera che si spostano sulla superficie sinchè il campo entro la sfera è nullo. La sfera si polarizza, distorcendo il campo elettrico attorno a sè, sebbene a grande distanza il campo rimanga essenzialmente uniforme. Si può mostrare che la soluzione per il potenziale elettrico dell'equazione di Laplace che soddisfa le condizioni di questo problema è $V = -\mathcal{E}_0 r \cos\theta\ (1 - a^3/r^3)$. (a) Verificare che il potenziale della sfera è zero. (b) Mostrare che a distanze molto grandi il potenziale corrisponde a quello di un campo uniforme. (c) Notare che il potenziale V è la somma del potenziale di un campo uniforme e quello di un dipolo elettrico. Calcolare il momento di dipolo elettrico della sfera. (d) Calcolare le componenti radiale e trasversa del campo elettrico. (e) Verificare che il campo elettrico sulla superficie del conduttore è ad essa perpendicolare. (f) Tracciare le linee di forza del campo elettrico risultante. (g) Trovare la densità di carica superficiale. Discutere il suo andamento sulla superficie della sfera. (h) Verificare che la carica totale sulla sfera è nulla. (i) Mostrare che il campo elettrico al centro della sfera

that the charge density on the plane is qa/r^3. (c) Verify that the total charge on the plane is equal to $-q$.

16.9 A conducting sphere of radius a is placed in a uniform electric field $\mathcal{E}_0$ as shown in Fig. 16–52. Since the sphere must be at a constant potential, we shall assign to it the value zero. The electric field acts on the free charges on the sphere that are moved to the surface until the electric field inside the sphere is zero. The sphere becomes polarized, distorting the electric field around it, although at large distances the field remains essentially uniform. It can be shown that the electric potential solution of Laplace's equation which satisfies the conditions of this problem is $V = -\mathcal{E}_0 r \cos\theta\ (1 - a^3/r^3)$. (a) Verify that the potential of the sphere is zero. (b) Show that at very large distances the potential corresponds to that of a uniform field. (c) Note that the potential V is the sum of a potential for a uniform field and a potential for an electric dipole. Obtain the electric dipole moment of the sphere. (d) Obtain the radial and transverse components of the electric field. (e) Verify that the electric field at the surface of the conductor is perpendicular to it. (f) Plot the lines of force of the resultant electric field. (g) Find the surface charge density. Discuss its variation over the surface of the sphere. (h) Verify that the total charge on the sphere is zero. (i) Show that the electric field at the center of the sphere

prodotto dalla carica superficiale è $-\mathcal{E}_0$. Lo stesso avviene per tutti i punti entro la sfera. Ciò era prevedibile?

16.10 Come conseguenza delle Equazioni (16.16) e (16.17), si può dimostrare che, sulla superficie di separazione di due dielettrici, la componente tangenziale del campo elettrico e la componente normale dello spostamento elettrico sono continue; cioè hanno lo stesso valore da ambo i lati della superficie. (La seconda affermazione vale solo se la superficie è scarica.) Mostrare allora che gli angoli che le linee di forza formano con la normale alla superficie soddisfano la relazione $\text{tg}\,\theta_1/\text{tg}\theta_2 = \epsilon_1/\epsilon_2$.

16.11 La permettività del diamante è 1.46×10^{-10} C^2 m^{-2} N^{-1}. (a) Qual'è la costante dielettrica del diamante? (b) Qual'è la suscettibilità del diamante?

16.12 Lo *statfarad* è l'unità di capacità definita come la capacità di un conduttore avente potenziale di uno statvolt quando è caricato con uno statcoulomb. Dimostrare che uno statfarad è uguale a 9×10^{11} F. [Altre unità utili sono il microfarad (μF), eguale a 10^{-6}F, e il picofarad (pF), eguale a 10^{-12}F.]

16.13 Mostrare che l'energia elettrica di un conduttore carico isolato e $\frac{1}{2}$C V^2. Mostrare anche che lo stesso risultato vale per un condensatore ad armature parallele e, in generale, per qualsiasi condensatore.

16.14 Un condensatore in aria consistente di due piastre parallele assai vicine ha una capacità di 1000 pF. La carica su ciascuna piastra è 1 C. (a) Qual'è la differenza di potenziale fra le piastre? (b) Supponendo di mantenere costante la carica, quale sarà la differenza di potenziale fra le piastre se la distanza viene raddoppiata? (c) Quanto lavoro deve essere speso per raddoppiare la distanza?

16.15 Un condensatore può essere ottenuto interponendo fra due fogli di stagnola un foglio di carta dello spessore di 0.004 cm. La carta ha una costante dielettrica relativa di 2.8 e conduce l'elettricità se si trova in un campo elettrico di intensità 5×10^7 V m^{-1} (o maggiore).

produced by the surface charge is $-\mathcal{E}_0$. The same occurs for any point inside the sphere. Was this to be expected?

16.10 As a result of Eqs. (16.16) and (16.17), it can be proved that, at the surface of separation of two dielectrics, the tangential component of the electric field and the normal component of the electric displacement are continuous; i.e., they have the same value on both sides of the surface. (The second statement holds only if the surface is uncharged.) Show then that the angles which the lines of force make with the normal to the surface satisfy the relation $\tan\theta_1/\tan\theta_2 = \epsilon_1/\epsilon_2$.

16.11 The permittivity of diamond is 1.46×10^{-10} C^2 m^{-2} N^{-1}. (a) What is the dielectric constant of diamond? (b) What is the susceptibility of diamond?

16.12 The *statfarad* is the unit of capacity defined as the capacity of a conductor having a potential of one statvolt when charged with one statcoulomb. Prove that one statfarad is equal to 9×10^{11} F. [Other useful units are the microfarad (μF), equal to 10^{-6} F, and the picofarad (pF), equal to 10^{-12} F.]

16.13 Show that the electric energy of an isolated charged conductor is $\frac{1}{2}$ C V^2. Also show that the same result holds for a parallel-plate capacitor and, in general, for any capacitor.

16.14 An air capacitor consisting of two closely spaced parallel plates has a capacitance of 1000 pF. The charge on each plate is 1 C. (a) What is the potential difference between the plates? (b) Assuming that the charge is kept constant, what will be the potential difference between the plates if the separation is doubled? (c) How much work is required to double the separation?

16.15 A capacitor can be made by sandwiching a sheet of paper 0.004 cm thick between sheets of tinfoil. The paper has a relative dielectric constant of 2.8 and will conduct electricity if it is in an electric field of strength 5×10^7 V m^{-1} (or greater).

Cioè, *la rigidità dielettrica* della carta è 50 MV m^{-1}. (a) Determinare l'area delle piastre necessaria per un condensatore di carta e stagnola di 0.3 μF. (b) Qual'è il massimo potenziale che può essere applicato se il campo elettrico nella carta non deve superare metà della rigidità dielettrica?

16.16 Si deve costruire un condensatore a piastre parallele usando gomma come dielettrico. Questa gomma ha una costante dielettrica di 3 e una rigidità dielettrica di 20 MV m^{-1}. Il condensatore deve avere una capacità di 0.15 μF e deve essere in grado di resistere ad una differenza di potenziale massima di 6000 V. Qual'è l'area minima che possono avere le piastre del condensatore?

16.17 La capacità di un condensatore variabile per radio può essere variata da 50 pF a 950 pF ruotando la manopola da 0° a 180°. Con la manopola a 180°, il condensatore è collegato ad una batteria da 400 V. Dopo essere stato caricato, il condensatore viene staccato dalla batteria e la manopola è portata a 0°. (a) Qual'è la carica sul condensatore? (b) Qual'è la differenza di potenziale ai capi del condensatore quando la manopola indica 0°? (c) Qual'è l'energia del condensatore in questa posizione? (d) Trascurando gli attriti, determinare la quantità di lavoro necessaria per girare la manopola.

16.18 Un condensatore di 20 μF è carico ad una differenza di potenziale di 1000 V. I terminali del condensatore carico vengono poi collegati a quelli di un condensatore scarico da 5 μF. Calcolare: (a) la carica iniziale del sistema, (b) la differenza di potenziale finale ai capi di ciascun condensatore, (c) l'energia finale del sistema, (d) la diminuzione in energia quando i condensatori vengono collegati.

16.19 (a) Mostrare che la capacità di un condensatore sferico di raggi a e b è $\epsilon_r ab/(a-b)$. (b) Mostrare che la capacità di un condensatore cilindrico di raggi a e b è $\epsilon_r/2 \ln(b/a)$.

16.20 Un certo condensatore è fatto di 25 sottili fogli metallici, ciascuno di area 600 cm^2, separati l'uno dall'altro da carta paraffinata

That is, the *dielectric strength* of the paper is 50 MV m^{-1}. (a) Determine the plate area needed for a 0.3 μF paper-and-foil capacitor. (b) What is the maximum potential that may be applied if the electric field in the paper is not to exceed one-half the dielectric strength?

16.16 A parallel-plate capacitor is to be constructed using rubber as a dielectric. This rubber has a dielectric constant of 3 and a dielectric strength of 20 MV m^{-1}. The capacitor is to have a capacitance of 0.15 μF and must be able to withstand a maximum potential difference of 6000 V. What is the minimum area the plates of the capacitor may have?

16.17 The capacitance of a variable radio capacitor can be changed from 50 pF to 950 pF by turning the dial from 0° to 180°. With the dial set at 180°, the capacitor is connected to a 400-V battery. After it has been charged, the capacitor is disconnected from the battery and the dial is turned to 0°. (a) What is the charge on the capacitor? (b) What is the potential difference across the capacitor when the dial reads 0°? (c) What is the energy of the capacitor in this position? (d) Neglecting friction, determine the amount of work required to turn the dial.

16.18 A 20-μF capacitor is charged to a potential difference of 1000 V. The terminals of the charged capacitor are then connected to those of an uncharged 5-μF capacitor. Compute (a) the original charge of the system, (b) the final potential difference across each capacitor, (c) the final energy of the system, (d) the decrease in energy when the capacitors are connected.

16.19 (a) Show that the capacity of a spherical capacitor of radii a and b is $\epsilon_r ab/(a-b)$. (b) Show that the capacity of a cylindrical capacitor of radii a and b is $\epsilon_r/2 \ln(b/a)$.

16.20 A certain capacitor is made of 25 thin metal sheets, each of area 600 cm^2, separated from each other by paraffin

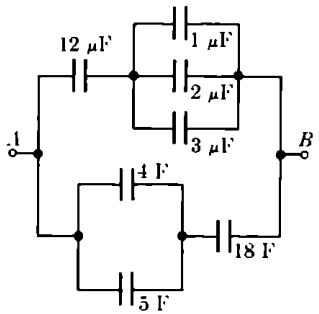


Figura 16–53

Figure 16–53

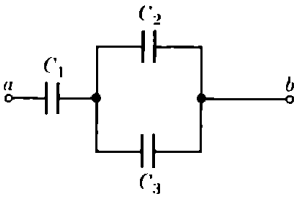


Figura 16–54

Figure 16–54

(permettività relativa uguale a 2.6). Trovare la capacità del sistema.

16.21 Tre condensatori da 1.5 μF, 2 μF, e 3 μF sono connessi in (1) serie, (2) parallelo, e viene applicata una differenza di potenziale di 20 V. Determinare in ambedue i casi (a) la capacità del sistema, (b) la carica e la differenza di potenziale di ciascun condensatore, (c) l'energia del sistema.

16.22 Determinare la capacità della combinazione di condensatori illustrata in Fig. 16–53. Se il potenziale applicato è 120 V, trovare la carica e la differenza di potenziale di ciascun condensatore come pure l'energia del sistema.

16.23 Nella combinazione di condensatori di Fig. 16–54, i condensatori sono $C_1 = 3$ μF, $C_2 = 2$ μF, $C_3 = 4$ μF. Il potenziale applicato fra i punti a e b è 300 V. Trovare (a) la carica e la differenza di potenziale di ciascun condensatore, (b) l'energia del sistema. Usare due diversi metodi per calcolare (b).

16.24 Data la combinazione di condensatori mostrata in Fig. 16–55, mostrare che la relazione tra C_1 e C_2 deve essere $C_2 = 0.618\ C_1$, affinchè la capacità del sistema sia uguale a C_2.

paper (relative permittivity equals 2.6). Find the capacity of the system.

16.21 Three capacitors of 1.5 μF, 2 μF, and 3 μF are connected in (1) series, (2) parallel, and a potential difference of 20 V is applied. Determine in each case (a) the capacity of the system, (b) the charge and potential difference on each capacitor, (c) the energy of the system.

16.22 Determine the capacity of the arrangement of capacitors illustrated in Fig. 16–53. If the applied voltage is 120 V, find the charge and potential difference on each capacitor as well as the energy of the system.

16.23 In the capacitor arrangement of Fig. 16–54, the capacitors are $C_1 = 3\,\mu$F, $C_2 = 2\,\mu$F, $C_3 = 4\,\mu$F. The voltage applied between points a and b is 300 V. Find (a) the charge and the potential difference on each capacitor, (b) the energy of the system. Use two different methods for computing (b).

16.24 Given the capacitor arrangement shown in Fig. 16–55, show that the relation between C_1 and C_2 must be $C_2 = 0.618C_1$ in order that the capacity of the system be equal to C_2.

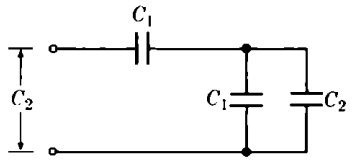


Figura 16–55

Figure 16–55

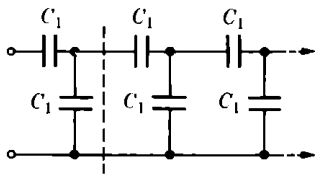


Figura 16–56

Figure 16–56

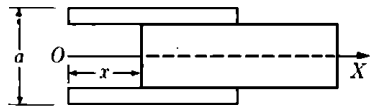


Figura 16–57

Figure 16–57

16.25 Utilizzando il risultato del problema precedente, mostrare che la capacità del sistema di Fig. 16–56 è 0.618 C_1. [*Suggerimento:* Notare che, se il sistema viene separato lungo la linea tratteggiata, la sezione a destra è ancora uguale al sistema originale poichè è composta di un numero infinito di condensatori.]

16.26 Una lastra di dielettrico è introdotta parzialmente fra le due piastre di un condensatore a piastre parallele, come mostrato in Fig. 16–57. Calcolare, in funzione di x, (a) la capacità del sistema, (b) l'energia del sistema e (c) la forza sulla lastra. Si supponga costante il potenziale applicato al condensatore. [*Suggerimento:* Notare che i sistemi si possono considerare come due condensatori in parallelo.]

16.27 Le piastre di un condensatore a piastre parallele nel vuoto portano cariche $+Q$ e $-Q$ la loro distanza è x. Le piastre vengono sconnesse dal

16.25 Using the result of the previous problem, show that the capacity of the system in Fig. 16–56 is $0.618C_1$. [*Hint:* Note that, if the system is cut along the dashed lines, the section to the right is still equal to the original system because it is composed of an infinite number of capacitors.]

16.26 A dielectric slab is partially introduced between the two plates of a parallel-plate capacitor, as shown in Fig. 16–57. Calculate, as a function of x, (a) the capacity of the system, (b) the energy of the system, and (c) the force on the slab. Assume that the potential applied to the capacitor is constant. [*Hint:* Note that the systems may be considered as two capacitors in parallel.]

16.27 The plates of a parallel-plate capacitor in a vacuum have charges $+Q$ and $-Q$, and the distance between the plates is x. The plates are disconnected from the

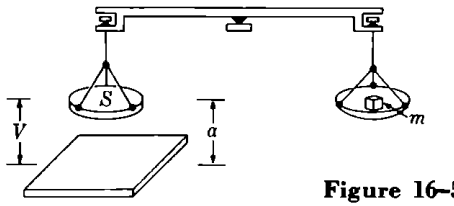


Figura 16–58

potenziale di carica ed allontanate di una piccola distanza dx. (a) Qual'è la variazione dC della capacità del condensatore? (b) Qual'è la variazione $dE_\mathcal{E}$ della sua energia? (c) Eguagliare il lavoro $F\,dx$ all'aumento in energia $dE_\mathcal{E}$ e trovare la forza di attrazione tra le piastre. (d) Spiegare perchè F non è uguale a $Q\mathcal{E}$, dove $\mathcal{E}$ è l'intensità del campo elettrico fra le piastre. Ripetere il problema nel caso in cui V è mantenuto costante.

16.28 Un *elettrometro*, schizzato in Fig. 16–58, è usato per misurare differenze di potenziale. Esso consiste di una bilancia il cui piatto sinistro è un disco di area S posto ad una distanza a da un piano orizzontale, in modo da formare un condensatore. Quando viene applicata una differenza di potenziale fra il disco e il piano, viene prodotta sul disco una forza diretta verso il basso. Per riportare la bilancia in equilibrio, viene posta una massa m sull'altro piatto. Mostrare che $V = a\sqrt{2mg/\epsilon_0 S}$. [*Nota:* Nello strumento reale, il disco è circondato da un anello tenuto allo stesso potenziale per assicurarsi che il campo sia uniforme su tutto il disco.]

Figure 16–58

charging voltage and pulled apart a short distance dx. (a) What is the change dC in the capacity of the capacitor? (b) What is the change $dE_\mathcal{E}$ in its energy? (c) Equate the work $F\,dx$ to the increase in energy $dE_\mathcal{E}$ and find the force of attraction F between the plates. (d) Explain why F is not equal to $Q\mathcal{E}$, where $\mathcal{E}$ is the electric field strength between the plates. Rework the problem for a case in which V is kept constant.

16.28 An *electrometer*, diagrammed in Fig. 16–58, is used to determine potential differences. It consists of a balance whose left pan is a disk of area S placed at a distance a from a horizontal plane, thus forming a capacitor. When a potential difference is applied between the disk and the plane, a downward force is produced on the disk. To restore the balance to equilibrium, a mass m is placed in the other pan. Show that $V = a\sqrt{2mg/\epsilon_0 S}$. [*Note:* In the actual instrument, the disk is surrounded by a ring kept at the same potential to assure that the field is uniform over all the disk.]

16.29 Quattro condensatori sono disposti come è mostrato in Fig. 16–59. Una differenza di potenziale V è applicata fra i terminali A e B e un elettrometro E è connesso fra C e D per determinare la loro differenza di potenziale. Mostrare che l'elettrometro segna zero se $C_1/C_2 = C_3/C_4$. Questa è la disposizione a ponte che può essere usata per determinare la capacità di un condensatore in base ad un condensatore standard e al rapporto fra due capacità.

Figura 16–59

16.30 In un mezzo ionizzato (come un gas o un elettrolita), vi sono sia ioni positivi sia ioni negativi. Mostrare che se ogni ione porta una carica $\pm ve$ la densità di corrente è $j = ve(n_+ v_+ - n_+ v_-)$, dove n_+ ed n_- sono il numero di ioni di ciascuna categoria per unità di volume.

16.31 È stato stimato che vi sono circa 10^{29} elettroni liberi per metro cubo nel rame. Usando il valore della conduttività del rame dato nella Tabella 16–2, stimare il tempo di rilassamento per un elettrone nel rame.

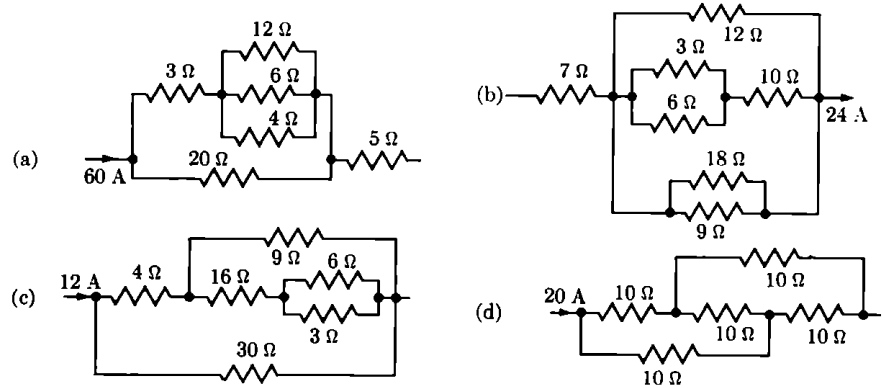


Figura 16–60

16.29 Four capacitors are arranged as shown in Fig. 16–59. A potential difference V is applied between the terminals A and B and an electrometer E is connected between C and D to determine their potential difference. Show that the electrometer reads zero if $C_1/C_2 = C_3/C_4$. This is a bridge arrangement which may be used to determine the capacity of a capacitor in terms of a standard capacitor and the ratio of two capacities.

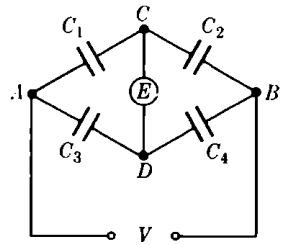


Figure 16–59

16.30 In an ionized medium (such as a gas or an electrolyte), there are both positive and negative ions. Show that if each ion carries a charge $\pm ve$ the current density is $j = ve(n_+ v_+ - n_- v_-)$, where the n_+ and n_- are the number of ions of each class per unit volume.

16.31 It has been estimated that there are about 10^{29} free electrons per cubic meter in copper. Using the value of copper's conductivity given in Table 16–2, estimate the relaxation time for an electron in copper.

Figure 16–60

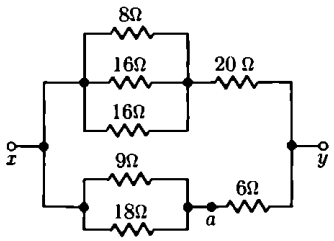


Figura 16–61 Figure 16–61

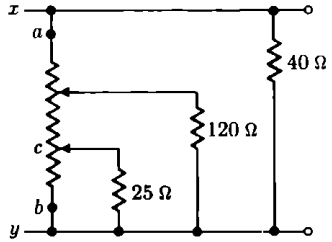


Figura 16–62 Figure 16–62

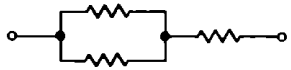


Figura 16–63 Figure 16–63

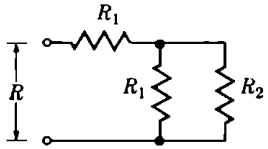


Figura 16–64 Figure 16–64

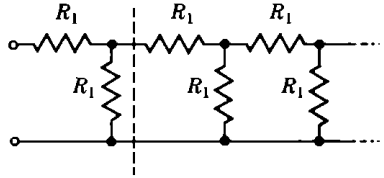


Figura 16–65 Figure 16–65

16.32 La corrente in un conduttore è data da $I = 4 + 2t^2$, dove I è in ampere e t in secondi. Trovare il valore medio e quadratico medio della corrente fra $t = 0$ e $t = 10$ s.

16.33 Determinare la resistenza totale in ciascuna delle disposizioni mostrate in Fig. 16–60. Determinare anche la corrente e la differenza di potenziale per ciascun resistore.

16.34 (a) Calcolare la resistenza equivalente fra x e y del circuito in Fig. 16–61. (b) Qual'è la differenza di potenziale fra x e a se la corrente nel resistore di 8 ohm è 0.5 amp?

16.35 (a) Il resistore lungo fra a e b in Fig. 16–62 ha una resistenza di 300 ohm ed i cursori sono posti ad un terzo della sua lunghezza. Qual'è la resistenza equivalente fra x e y? (b) La differenza di potenziale fra x e y è 320 volt. Qual'è la differenza di potenziale fra b e c?

16.36 Ciascuno dei tre resistori nella Fig. 16–63 ha una resistenza di 2 ohm e può dissipare al massimo 18 watt senza riscaldarsi troppo. Qual'è la massima potenza che può dissipare il circuito?

16.32 The current in a conductor is given by $I = 4 + 2t^2$, where I is in amperes and t in seconds. Find average and rms value of the current between $t = 0$ and $t = 10$ s.

16.33 Determine the total resistance in each of the arrangements shown in Fig. 16–60. Also determine the current in, and the potential difference across, each resistor.

16.34 (a) Calculate the equivalent resistance between x and y of the circuit in Fig. 16–61. (b) What is the potential difference between x and a if the current in the 8-ohm resistor is 0.5 amp?

16.35 (a) The long resistor between a and b in Fig. 16–62 has a resistance of 300 ohms and is tapped at the one-third point. What is the equivalent resistance between x and y? (b) The potential difference between x and y is 320 volts. What is the potential difference between b and c?

16.36 Each of the three resistors in Fig. 16–63 has a resistance of 2 ohms and can dissipate a maximum of 18 watts without becoming excessively heated. What is the maximum power the circuit can dissipate?

16.37 Tre resistori uguali sono collegati in serie. Quando viene applicata alla combinazione una certa differenza di potenziale, la potenza totale consumata è 10 watt. Quale potenza verrebbe consumata se i tre resistori venissero connessi in parallelo con ai capi la stessa differenza di potenziale?

16.38 Data la combinazione di resistori mostrata in Fig. 16–64, dimostrare che la relazione fra R_1 ed R_2 deve essere $R_2 = 1.618R_1$ affinchè la resistenza del sistema sia uguale a R_2.

16.39 Usando il risultato del problema precedente, mostrare che la resistenza del sistema mostrato in Fig. 16–65 è uguale a $1.618\ R_1$. [*Suggerimento:* Notare che, se il sistema è separato mediante la linea tratteggiata, la parte destra è ancora uguale al sistema originale poichè è composta di un numero infinito di resistori.]

16.40 La massima corrente ammissibile nella spira di uno strumento elettrico è 2.5 A. La sua resistenza è 20Ω. Cosa bisogna fare per inserirlo (a) in una linea elettrica che porta una corrente di 15 A, (b) fra due punti con una differenza di potenziale di 110 V?

16.37 Three equal resistors are connected in series. When a certain potential difference is applied across the combination, the total power consumed is 10 watts. What power would be consumed if the three resistors were connected in parallel across the same potential difference?

16.38 Given the resistor arrangement shown in Fig. 16–64, prove that the relation between R_1 and R_2 must be $R_2 = 1.618R_1$ in order that the resistance of the system be equal to R_2.

16.39 Using the result of the previous problem, show that the resistance of the system shown in Fig. 16–65 is equal to $1.618R_1$. [*Hint:* Note that, if the system is cut through the dashed lines, the section to the right is still equal to the original system because it is composed of an infinite number of resistors.]

16.40 The maximum permissible current in the coil of an electrical instrument is 2.5 A. Its resistance is 20Ω. What must be done to insert it (a) in an electric line carrying a current of 15 A, (b) between two points having a potential difference of 110 V?

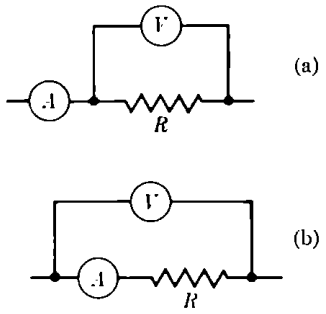


Figura 16–66

16.41 Come cambia la resistenza di un filo se (a) la sua lunghezza viene raddoppiata, (b) la sezione viene raddoppiata, (c) il raggio viene raddoppiato?

16.42 Discutere gli errori compiuti nel misurare una resistenza usando un voltmetro e un amperometro come mostrato in Fig. 16–66 quando le resistenza R_V ed R_A dello strumento non vengono considerate. Quale metodo dà l'errore più piccolo quando R è (a) grande (b) piccolo? Notare che, in generale R_V è molto grande ed R_A è molto piccola.

16.43 Le misure nella Tabella 16–5 sono relative alla corrente e alla differenza di potenziale ai capi di un filo di un certo materiale. (a) Tracciare un grafico di V in funzione di I. Il materiale segue la legge di Ohm? (b) Dal grafico stimare la resistenza del materiale quando la corrente è 1.5 A. Questa resistenza è definita come il rapporto $\Delta V/\Delta I$, quando le variazioni sono piccole ed è ottenuta tracciando una tangente alla curva nel punto considerato. (c) Confrontare il risultato con la resistenza media fra 1.0 A e 2.0 A.

Tabella 16–5

I, amp.	V, volt

Figure 16–66

16.41 How is the resistance of a wire changed if (a) the length is doubled, (b) the cross-sectional area is doubled, (c) the radius is doubled?

16.42 Discuss the errors made in the measurement of a resistance using a voltmeter and an ammeter as shown in Fig. 16–66 when the resistances R_V and R_A of the instruments are ignored. Which method has the smaller error when R is (a) large, (b) small? Note that, in general, R_V is very large and R_A is very small.

16.43 The measurements in Table 16–5 are for the current in and the potential differences between the ends of a wire of certain material. (a) Make a graph of V versus I. Does the material follow Ohm's law? (b) From your graph estimate the resistance of the material when the current is 1.5 A. This resistance is defined as the ratio $\Delta V/\Delta I$ when the changes are small, and is obtained by drawing a tangent to the curve at the given point. (c) Compare your result with the average resistance between 1.0 A and 2.0 A.

TABLE 16–5

I, amp	V, volts
0.5	4.75
1.0	5.81
2.0	7.05
4.0	8.56

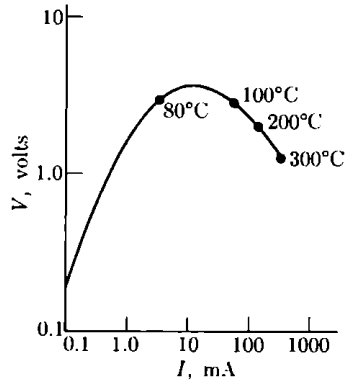


Figura 16–67

16.44 Il grafico nella Fig. 16–67 illustra l'andamento del potenziale in funzione della corrente (in un diagramma logaritmico), per diverse temperature di un semiconduttore. (a) Stimare la resistenza del semiconduttore alle temperature segnate e tracciarne il grafico in scala semilogaritmica in funzione della temperatura. (b) Supponendo che la variazione di resistenza sia dovuta a un cambiamento nel numero di portatori di carica per unità di volume, stimare il rapporto fra il loro numero a 300°C e a 100°C.

16.45 Il circuito di Fig. 16–68 è chiamato *ponte di Wheatstone*. Esso viene usato per misurare resistenze. Mostrare che quando la corrente attraverso il galvanometro G è nulla (in modo che i punti D e C si trovano allo stesso potenziale), $R_1/R_2 = R_3/R_4$. Perciò se conosciamo R_2 e il rapporto R_3/R_4, possiamo ottenere la resistenza R_1.

16.46 La Figura 16–69 mostra un *potenziometro* per misurare la fem V_x di una cella x; B

Figura 16–68

Figure 16–67

16.44 The graph in Fig. 16–67 illustrates voltage versus current (on a logarithmic plot), for different temperatures of a semiconductor. (a) Estimate the resistance of the semiconductor at the temperatures marked and plot it on a semilogarithmic scale against the temperature. (b) Assuming that the change in resistance is all due to a change in the number of charge carriers per unit volume, estimate the ratio of their number at 300°C to that at 100°C.

16.45 The circuit of Fig. 16–68 is called a *Wheatstone bridge*. It is used for measuring resistance. Show that when the current through the galvanometer G is zero (so that points D and C are at the same potential), then $R_1/R_2 = R_3/R_4$. Thus if we know R_2 and the ratio R_3/R_4, we can obtain the resistance R_1.

16.46 Figure 16–69 shows a *potentiometer* set up to measure the emf V_x of cell x; B

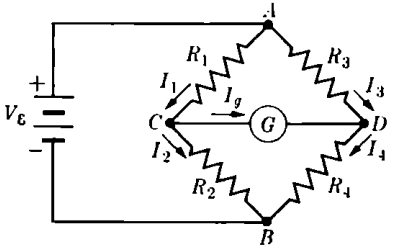


Figure 16–68

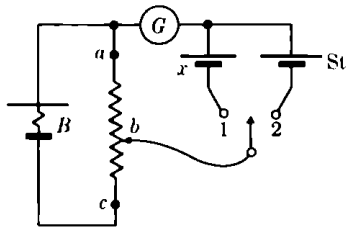


Figura 16–69

Figure 16–69

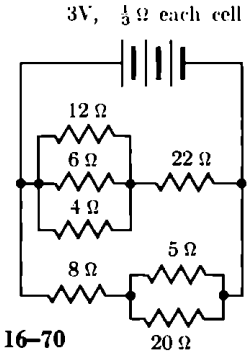


Figura 16–70

Figure 16–70

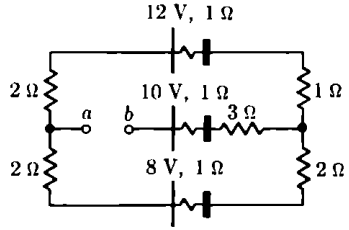


Figura 16–72

Figure 16–72

è una batteria e St è una cella standard di fem V_{St}. Quando l'interruttore è nella posizione 1 o 2, il cursore b viene spostato sino a che il galvanometro G segna zero. Mostrare che se l_1 ed l_2 sono le corrispondenti distanze da b ad a, $V_x = V_{St}(l_1/l_2)$.

16.47 Riferendoci ancora al potenziometro di Fig. 16–69, la fem di B è approssimativamente 3 V e la sua resistenza interna non è nota; St è una cella standard di fem 1.0183 V. L'interruttore è nella posizione 2, inserendo così la cella standard nel circuito del galvanometro. Quando il cursore b è nella posizione 0.36 della distanza da a a c, il galvanometro G segna zero. (a) Qual'è la differenza di potenziale su tutta la lunghezza del resistore ac?

is a battery and St is a standard cell of emf V_{St}. When the switch is set at either 1 or 2, the tap b is moved until the galvanometer G reads zero. Show that if l_1 and l_2 are the corresponding distances from b to a, then $V_x = V_{St}(l_1/l_2)$.

16.47 Again referring to the potentiometer of Fig. 16–69, the emf of B is approximately 3 V and its internal resistance is unknown; St is a standard cell of 1.0183 V emf. The switch is set at point 2, thus placing the standard cell in the galvanometer circuit. When the tap b is 0.36 of the distance from a to c, the galvanometer G reads zero. (a) What is the difference of potential across the entire length of resistor ac?

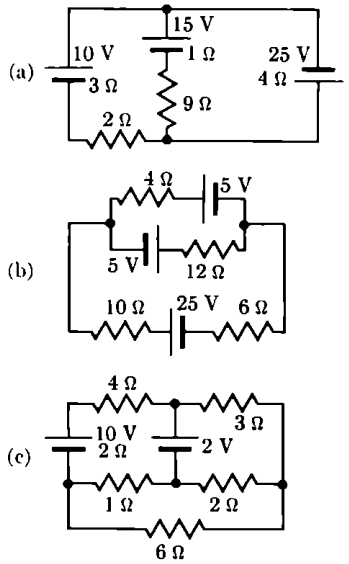


Figura 16–71

Figure 16–71

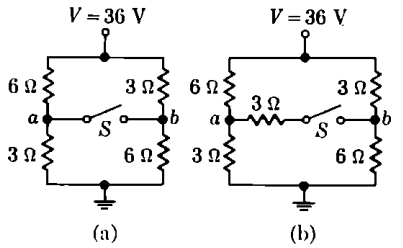


Figura 16–73

Figure 16–73

(b) L'interruttore è nella posizione 1, e si ottiene di nuovo indicazione nulla del galvanometro quando b è nella posizione 0.47 della distanza da a a c. Qual'è la fem della cella x?

16.48 La differenza di potenziale fra i terminali di una batteria è 8.5 V quando vi è una corrente di 3 A nella batteria dal terminale negativo a quello positivo. Quando la corrente è 2 A nella direzione opposta, la differenza di potenziale diviene 11 V. (a) Qual'è la resistenza interna della batteria? (b) Qual'è la sua fem?

16.49 Nel circuito della Fig. 16–70, determinare (a) la corrente nella batteria, (b) la differenza di potenziale fra i suoi terminali, e (c) la corrente in ciascun conduttore.

(b) The switch is set at point 1, and a new zero reading of the galvanometer is obtained when b is 0.47 of the distance from a to c. What is the emf of cell x?

16.48 The potential difference across the terminals of a battery is 8.5 V when there is a current of 3 A in the battery from the negative to the positive terminal. When the current is 2 A in the reverse direction, the potential difference becomes 11 V. (a) What is the internal resistance of the battery? (b) What is its emf?

16.49 In the circuit of Fig. 16–70, determine (a) the current in the battery, (b) the potential difference at its terminals, and (c) the current in each conductor.

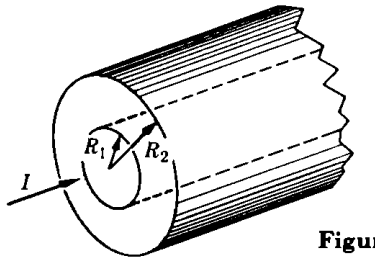


Figura 16–74

Figure 16–74

16.50 Determinare la corrente in ciascun conduttore nelle reti mostrate in Fig. 16—71.

16.51 (a) Determinare la differenza di potenziale fra i punti a e b in Fig. 16—72. (b) Supponendo di collegare fra loro a e b, calcolare la corrente nella cella da 12 V.

16.52 (a) Quanto vale, nella Fig. 16—73(a), la differenza di potenziale V_{ab} quando l'interruttore S è aperto? (b) Quanto vale la corrente attraverso l'interruttore S quando è chiuso? (c) Quanto vale, nella Fig. 16—73(b), la differenza di potenziale V_{ab} quando l'interruttore S è aperto? (d) Quanto vale la corrente attraverso l'interruttore S quando è chiuso? Quanto vale la resistenza equivalente del circuito in Fig. 16—73(b), (e) quando l'interruttore S è aperto? (f) quando è chiuso?

16.53 Un conduttore cilindrico cavo di lunghezza L ha raggi R_1 e R_2. Una differenza di potenziale è applicata fra i suoi due estremi in modo che una corrente I fluisce parallelamente al suo asse. Mostrare che, se σ è la conduttività del materiale, la resistenza è

16.54 Un conduttore cilindrico cavo di lunghezza L ha raggi R_1 ed R_2. Una differenza di potenziale è applicata fra le sue superficie interna ed esterna in modo che una corrente I fluisce in direzione radiale verso l'esterno. Mostrare che, se σ è la conduttività del materiale, la resistenza è $\ln (R_2/R_1)/2\pi\sigma L$.

16.55 L'ago di un galvanometro subisce una deviazione su tutta la scala (50 divisioni) quando la corrente è 0.1 mA. La resistenza del galvanometro è 5Ω. Cosa deve essere fatto per trasformarlo in (a) un amperometro con ogni divisione corrispondente a 0.2 A, (b) un voltmetro con ogni divisione corrispondente a 0.5 V?

16.50 Determine the current in each conductor in the networks shown in Fig. 16–71.

16.51 (a) Determine the potential difference between points a and b in Fig. 16–72. (b) Given that a and b are connected, calculate the current in the 12-V cell.

16.52 (a) In Fig. 16–73(a), what is the potential difference V_{ab} when switch S is open? (b) What is the current through switch S when it is closed? (c) In Fig. 16–73(b), what is the potential difference V_{ab} when switch S is open? (d) What is the current through switch S when it is closed? What is the equivalent resistance of the circuit in Fig. 16–73(b), (e) when switch S is open? (f) When it is closed?

16.53 A hollow cylindrical conductor of length L has radii R_1 and R_2. A potential difference is applied between its two ends so that a current I flows parallel to the axis. Show that, if σ is the conductivity of the material, the resistance is

$$L/\pi\sigma(R_2^2 - R_1^2).$$

16.54 A hollow cylindrical conductor of length L has radii R_1 and R_2. A potential difference is applied between the inner and outer surfaces so that a current I flows in the outward radial direction. Show that, if σ is the conductivity of the material, the resistance is $\ln (R_2/R_1)/2\pi\sigma L$.

16.55 The needle of a galvanometer suffers a full-scale (50 divisions) deviation when the current is 0.1 mA. The resistance of the galvanometer is 5Ω. What must be done to change it into (a) an ammeter with each division corresponding to 0.2 A, (b) a voltmeter with each division corresponding to 0.5 V?

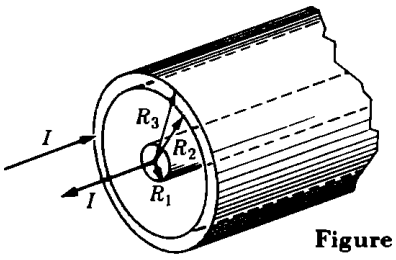


Figura 16–75

Figure 16–75

16.56 Lo *statampere* è un'unità di corrente elettrica corrispondente ad un stC al secondo. Ovviamente 1 A = 3×10^9 stA. Mostrare che quando il campo magnetico è espresso in gauss (vedi problema 15.53), la corrente in stA, la distanza in cm, e la densità di corrente in stA cm^{-2}, l'Eq. (16.67) diviene $\oint \mathfrak{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{1}{3} \times 10^{-10} I$ e l'Eq. (16.78) è $\text{rot}\ \mathfrak{B} = \frac{1}{3} \times 10^{-10} \boldsymbol{j}$.

16.57 Un'unità per il campo magnetizzante è l'*oersted*. È definita come il campo magnetizzante prodotto da una corrente rettilinea di 3×10^{10} stA in un punto a 2 cm dalla corrente. (a) Mostrare che 1 A m^{-1} è uguale a $4\pi \times 10^{-3}$ oersted. (b) Mostrare che il campo magnetizzante di una corrente rettilinea è $\mathfrak{C} = 2I/3 \times 10^{10} r$, se $\mathfrak{C}$ è misurato in oersted, I in stA, e r in cm. (c) Mostrare che, usando le stesse unità, l'Eq. (16.85) diviene $\oint \mathfrak{C} \cdot d\boldsymbol{l} = 4\pi I/3 \times 10^{10}$.

16.58 Il conduttore cilindrico cavo in Fig. 16—74, di raggi R_1 ed R_2, porta una corrente I distribuita uniformemente sulla sua sezione. Usando la legge di Ampère, mostrare che il campo magnetico per $r > R_2$ è $\mathfrak{B} = \mu_0 I/2\pi r$, che il campo per $R_1 < r < R_2$ è

e che vale zero per $r < R_1$.

16.59 Un cavo coassiale è costituito da un conduttore cilindrico pieno di raggio R_1 circondato da un involucro cilindrico conduttore di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3 (Fig. 16—75). Nella pratica una corrente I viene fatta passare nel filo interno e ritornare nell'involucro esterno. Usando la legge di Ampère, determinare il campo magnetico in tutti i punti attorno ed entro il

16.56 The *statampere* (stA) is a unit of electric current corresponding to one stC per second. Obviously 1 A = 3×10^9 stA. Show that when the magnetic field is expressed in gauss (see Problem 15.53), the current in stA, the distance in cm, and the current density in stA cm^{-2}, Eq. (16.67) becomes $\oint \mathfrak{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{1}{3} \times 10^{-10} I$ and Eq. (16.78) is $\text{curl}\ \mathfrak{B} = \frac{1}{3} \times 10^{-10} \boldsymbol{j}$.

16.57 A unit for the magnetizing field is the *oersted*. It is defined as the magnetizing field produced by a rectilinear current of 3×10^{10} stA on a point 2 cm from the current. (a) Show that 1 A m^{-1} is equal to $4\pi \times 10^{-3}$ oersted. (b) Show that the magnetizing field of a rectilinear current is $\mathfrak{C} = 2I/3 \times 10^{10} r$, when $\mathfrak{C}$ is measured in oersteds, I in stA, and r in cm. (c) Show that, in terms of the same units, Eq. (16.85) becomes $\oint \mathfrak{C} \cdot d\boldsymbol{l} = 4\pi I/3 \times 10^{10}$.

16.58 The hollow cylindrical conductor in Fig. 16–74, of radii R_1 and R_2, carries a current I uniformly distributed over its cross section. Using Ampère's law, show that the magnetic field at $r > R_2$ is $\mathfrak{B} = \mu_0 I/2\pi r$, that the field for $R_1 < r < R_2$ is

$$\mu_0 I(r^2 - R_1^2)/2\pi(R_2^2 - R_1^2)r,$$

and that it is zero for $r < R_1$.

16.59 A coaxial cable is formed by surrounding a solid cylindrical conductor of radius R_1 with a concentric conducting shell of inner radius R_2 and outer radius R_3 (Fig. 16–75). In usual practice a current I is sent down the inner wire and is returned via the outer shell. Using Ampère's law, determine the magnetic field for all points about and within the con-

conduttore. Mettere in grafico $\mathfrak{B}$ in funzione di r. Si consideri uniforme la densità di corrente.

16.60 La tabella dà valori sperimentali della suscettibilità magnetica dell'allume ferrico di ammonio. Tracciare un grafico di $1/\chi_m$ in funzione della temperatura assoluta e stabilire se vale la legge di Curie. Se sì, cosa vale la costante di Curie?

ductor. Plot $\mathfrak{B}$ as a function of r. Assume uniform current density.

16.60 Table 16–6 gives experimental measurements of the magnetic susceptibility of iron ammonium alum. Make a graph of $1/\chi_m$ against absolute temperature, and determine whether Curie's law holds. If so, what is the Curie constant?

TABLE 16–6

t, °C	χ_m
−258	75.4×10^{-4}
−173	11.3×10^{-4}
−73	5.65×10^{-4}
27	3.77×10^{-4}

16.61 Usando l'operatore $\nabla = \boldsymbol{u}_x(\partial/\partial x) + \boldsymbol{u}_y(\partial/\partial y) + \boldsymbol{u}_z(\partial/\partial z)$ definito nel Paragrafo 8.7, mostrare che valgono le seguenti identità: div $\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$, rot $\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

16.61 Using the operator $\nabla = \boldsymbol{u}_x(\partial/\partial x) + \boldsymbol{u}_y(\partial/\partial y) + \boldsymbol{u}_z(\partial/\partial z)$ defined in Section 8.7, show that the following identities hold: div $\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$, curl $\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.

16.62 Utilizzando l'operatore ∇, riscrivere le equazioni differenziali del campo elettromagnetico che compaiono nella tabella 16–4.

16.62 Using the operator ∇, rewrite the differential equations of the electromagnetic field that appear in Table 16–4.

16.63 Utilizzando il risultato del Problema 16.61, mostrare che rot grad $V = \nabla \times (\nabla V) = 0$ e div rot $\boldsymbol{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$. Due importanti conseguenze si possono trarre da queste identità. Una è che, poichè per un campo elettrico statico $\mathcal{E} = -$ grad V, rot $\mathcal{E} = \nabla \times \mathcal{E} = 0$; questo risultato è stato dato nell'Eq. (16.79). L'altra è che, poichè per il campo magnetico div $\mathfrak{B} = \nabla \cdot \mathfrak{B} = 0$, vi è un campo vettoriale $\mathfrak{A}$ tale che $\mathfrak{B} = \nabla \times \mathfrak{A}$. Il campo vettoriale $\mathfrak{A}$ si chiama il *potenziale vettore* del campo elettromagnetico.

16.63 Using the result of Problem 16.61, show that curl grad $V = \nabla \times (\nabla V) = 0$ and div curl $\boldsymbol{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$. Two important results derive from these identities. One is that since for a static electric field $\mathcal{E} = -$grad V, then curl $\mathcal{E} = \nabla \times \mathcal{E} = 0$; this result was stated in Eq. (16.79). The other is that since for the magnetic field div $\mathfrak{B} = \nabla \cdot \mathfrak{B} = 0$, then there is a vector field $\mathfrak{A}$ such that $\mathfrak{B} = \nabla \times \mathfrak{A}$. The vector field $\mathfrak{A}$ is called the *vector potential* of the electromagnetic field.

16.64 Mostrare che il potenziale vettore di un campo magnetico uniforme $\mathfrak{B}$ è $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\mathfrak{B} \times \boldsymbol{r}$. [*Suggerimento:* Si supponga $\mathfrak{B}$ diretto come l'asse Z, si calcolino le componenti ortogonali di $\mathfrak{A}$ e quindi si trovi $\nabla \times \mathfrak{A}$.]

16.64 Show that the vector potential of a uniform magnetic field $\mathfrak{B}$ is $\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\mathfrak{B} \times \boldsymbol{r}$. [*Hint:* Assume that $\mathfrak{B}$ is along the Z-axis, obtain the rectangular components of $\mathfrak{A}$ and then find $\nabla \times \mathfrak{A}$.]

16.65 Mostrare che in un mezzo in cui esiste una corrente elettrica uniforme di densità costante, il campo magnetico è $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{r}$. [*Suggerimento:* Verificare che la relazione rot $\mathfrak{B} = \nabla \times \mathfrak{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ è soddisfatta.]

16.65 Show that in a medium in which a uniform electric current of constant density exists, the magnetic field is $\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\mu_0 \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{r}$. [*Hint:* Verify that the relation curl $\mathfrak{B} = \nabla \times \mathfrak{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ holds.]

16.66 Scrivere l'operatore $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. Mostrare quindi che l'equazione di Laplace (16.7) e l'equazione di Poisson (16.6) possono essere scritte, rispettivamente, nella forma $\nabla^2 V = 0$ e $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$.

16.66 Write the operator $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$. Then show that Laplace's equation (16.7) and Poisson's equation (16.6) can be written, respectively, as $\nabla^2 V = 0$ and $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$.

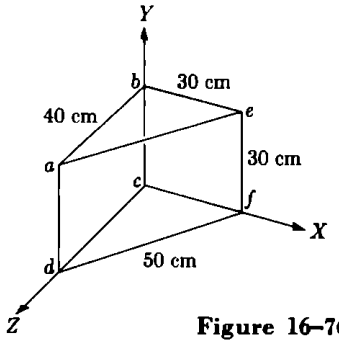


Figura 16–76 **Figure 16–76**

16.67 Il campo magnetico $\mathfrak{B}$ in una certa regione è 2 T e la sua direzione è quella positiva dell'asse X nella Fig. 16–76. (a) Quanto vale il flusso magnetico attraverso la superficie *abcd* della figura? (b) Quanto vale il flusso magnetico attraverso la superficie *befc*? (c) Quanto vale il flusso attraverso la superficie *aefd*?

16.67 The magnetic field $\mathfrak{B}$ in a certain region is 2 T and its direction is that of the positive X-axis in Fig. 16–76. (a) What is the magnetic flux across the surface *abcd* in the figure? (b) What is the magnetic flux across the surface *befc*? (c) What is the magnetic flux across the surface *aefd*?

16.68 Calcolare il flusso magnetico attraverso il circuito rettangolare di Fig. 16–77 quando fluisce una corrente I nel filo rettilineo.

16.68 Determine the magnetic flux through the rectangular circuit of Fig. 16–77 when a current I flows along the straight wire.

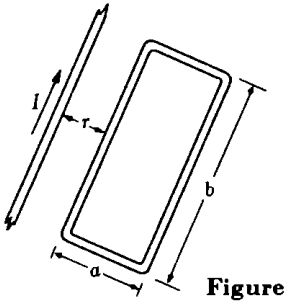


Figura 16–77 **Figure 16–77**

16.69 Introducendo nell'Eq. (16.78) il valore di $\mathfrak{K}$ dato dall'Eq. (16.83), mostrare che rot $\mathfrak{B} = \mu_0(j_{\text{lib}} + \text{rot } \mathfrak{M})$. Interpretare questo risultato come indicante che l'effetto della magnetizzazione di un mezzo è equivalente all'aggiunta di una densità di corrente di magnetizzazione, $j_{\mathfrak{M}} = \text{rot } \mathfrak{M}$, alla densità di corrente libera.

16.69 Introducing in Eq. (16.78) the value of $\mathfrak{K}$ given by Eq. (16.83), show that curl $\mathfrak{B} = \mu_0(j_{\text{free}} + \text{curl } \mathfrak{M})$. Interpret this result as indicating that the effect of the magnetization of a medium is equivalent to the addition of a magnetization current density, $j_{\mathfrak{M}} = \text{curl } \mathfrak{M}$, to the free current density.

17
CAMPI ELETTROMAGNETICI DIPENDENTI DAL TEMPO

17.1 Introduzione
17.2 La legge di Faraday-Henry
17.3 Il betatrone
17.4 L'induzione elettromagnetica dovuta al moto relativo di un conduttore e di un campo magnetico
17.5 L'induzione elettromagnetica ed il principio di relatività
17.6 Potenziale elettrico e induzione elettromagnetica
17.7 La legge di Faraday-Henry in forma differenziale
17.8 L'autoinduzione
17.9 L'energia del campo elettromagnetico
17.10 Oscillazioni elettriche
17.11 Circuiti accoppiati
17.12 Il principio di conservazione della carica
17.13 La legge di Ampère-Maxwell
17.14 La legge di Ampère-Maxwell in forma differenziale
17.15 Le equazioni di Maxwell

17
TIME-DEPENDENT ELECTROMAGNETIC FIELDS

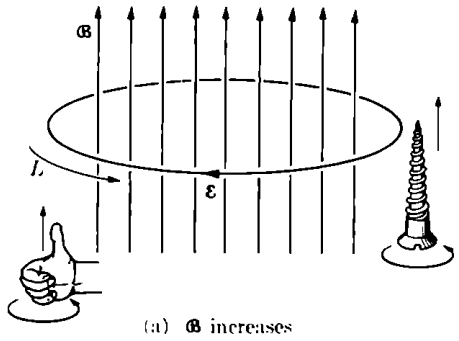
17.1 Introduction
17.2 The Faraday-Henry Law
17.3 The Betatron
17.4 Electromagnetic Induction Due to Relative Motion of Conductor and Magnetic Field
17.5 Electromagnetic Induction and the Principle of Relativity
17.6 Electric Potential and Electromagnetic Induction
17.7 The Faraday-Henry Law in Differential Form
17.8 Self Induction
17.9 Energy of the Magnetic Field
17.10 Electrical Oscillations
17.11 Coupled Circuits
17.12 The Principle of Conservation of Charge
17.13 The Ampère-Maxwell Law
17.14 The Ampère-Maxwell Law in Differential Form
17.15 Maxwell's Equations

17.1 *Introduzione*

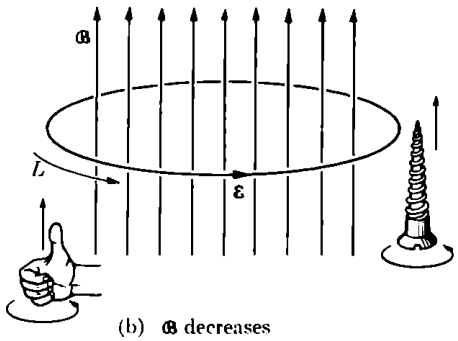
Nel capitolo precedente, abbiamo preso in considerazione i campi elettrici e magnetici non dipendenti dal tempo o, in altre parole, statici. In questo capitolo considereremo campi dipendenti dal tempo, cioè variabili nel tempo. È da attendersi che, in questo caso, valgano nuove relazioni. Nel Paragrafo 15.12 abbiamo visto la stretta connessione tra la parte elettrica e quella magnetica del campo elettromagnetico, soprattutto per ciò che riguarda le proprietà di trasformazione del campo elettromagnetico richieste dal principio di relatività. In questo capitolo vedremo che un campo magnetico variabile comporta l'esistenza di un campo elettrico e, viceversa, che un campo elettrico variabile comporta l'esistenza di un campo magnetico, e vedremo che anche questa circostanza è una conseguenza del principio di relatività. Le leggi che descrivono queste due situazioni sono chiamate *legge di Faraday-Henry* e *legge di Ampère-Maxwell.*

17.2 *La legge di Faraday-Henry*

Uno dei molti fenomeni elettromagnetici familiari allo studente è l'*induzione elettromagnetica*, che fu scoperta, quasi simultaneamente, all'incirca nel 1830, da Michael Faraday e da Joseph Henry, sebbene essi lavorassero indipendentemente. L'induzione elettromagnetica è il principio di funzionamento del generatore elettrico, del trasformatore e di molti altri apparecchi di uso quotidiano. Supponiamo che un conduttore elettrico formante un circuito chiuso sia posto in una regione nella quale esista un campo magnetico. Se il flusso magnetico $\Phi_{\mathcal{B}}$ concatenato con il circuito (N.T.) *varia con il tempo*, si può osservare una corrente nel circuito (mentre il flusso sta variando). La presenza di una corrente elettrica indica l'esistenza, o l'induzione, di una fem agente nel circuito. Misure di questa fem indotta mostrano che essa dipende dalla *rapidità* di variazione del flusso magnetico $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$. Per esempio, se un magnete è posto vicino ad un circuito conduttore chiuso, si osserva una fem nel circuito se esso (o il circuito) viene mosso in modo tale che il flusso magnetico concatenato cambi. L'entità della fem indotta dipende dal fatto che il magnete (o il circuito) venga mosso rapidamente o lentamente. La fem indotta è tanto maggiore, quanto maggiore è la derivata del flusso rispetto al tempo.



(a) $\mathcal{B}$ aumenta



(b) $\mathcal{B}$ diminuisce

Fig. 17–1. Campo elettrico prodotto da un campo magnetico dipendente dal tempo; (a) $d\Phi/dt$ positivo, $V_{\mathcal{E}}$ negativo, (b) $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$ negativo, $V_{\mathcal{E}}$ positivo.

17.1 *Introduction*

In the previous chapter, we considered electric and magnetic fields to be time independent, or in other words, static. In this chapter we shall consider fields which are time dependent; that is, they change with time. We may expect new relations to exist in this case. In Section 15.12 we saw the close relationship between the electric and magnetic parts of an electromagnetic field, especially as regards the transformation properties of the electromagnetic field which are required by the principle of relativity. In this chapter we shall see that a varying magnetic field requires the presence of an electric field, and conversely, that a varying electric field requires a magnetic field, and that this is also a requirement of the principle of relativity. The laws describing these two situations are called the *Faraday-Henry law* and the *Ampère-Maxwell law.*

17.2 *The Faraday-Henry Law*

One of the many electromagnetic phenomena familiar to the student is *electromagnetic induction*, which was discovered, almost simultaneously, around 1830 by Michael Faraday and Joseph Henry, even though they were working independently. Electromagnetic induction is the working principle of the electric generator, the transformer, and many other devices in daily use. Suppose that an electric conductor which forms a closed path is placed in a region in which a magnetic field exists. If the magnetic flux $\Phi_{\mathcal{B}}$ through the closed path *varies with time*, a current may be observed in the circuit (while the flux is varying). The presence of an electric current indicates the existence or induction of an emf acting on the circuit. Measurement of this induced emf shows that it depends on the *rate* of change of the magnetic flux $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$. For example, if a magnet is placed near a closed conductor, an emf appears in the circuit when the magnet (or the circuit) is moved in such a way that the magnetic flux through the circuit changes. The magnitude of the induced emf depends on whether the magnet (or circuit) is moved rapidly or slowly. The greater the rate of change of the flux, the larger the induced emf.

(a) $\mathcal{B}$ increases

(b) $\mathcal{B}$ decreases

Fig. 17–1. Electric field produced by a time-dependent magnetic field; (a) $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$ positive, $V_{\mathcal{E}}$ negative, (b) $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$ negative, $V_{\mathcal{E}}$ positive.

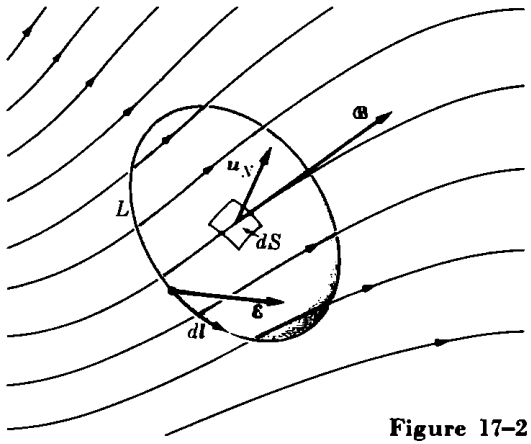


Figura 17–2

Figure 17–2

La direzione secondo la quale agisce la fem indotta dipende dal fatto che il campo magnetico sta aumentando o diminuendo.

Per essere più precisi, riferiamoci alla Fig. 17–1, nella quale la linea L è stata orientata secondo le regole date nel Paragrafo 3.10, cioè nel senso di una vite destra che avanza nella direzione del campo magnetico $\mathcal{B}$. Quando il flusso magnetico aumenta (cioè $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$ è positivo) la fem indotta $V_\mathcal{E}$ agisce nel senso negativo, mentre quando il flusso magnetico diminuisce (cioè $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$ è negativo), $V_\mathcal{E}$ agisce in senso positivo. Quindi il segno della fem indotta è sempre opposto a quello di $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$. Misure più minuziose mostrano che il valore della fem indotta, espresso in volt, è uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico espressa in Wb s^{-1}. Quindi possiamo scrivere

The direction in which the induced emf acts depends on whether the magnetic field is increasing or decreasing.

To be more precise, let us refer to Fig. 17–1, where the curve L has been oriented according to the rule of Section 3.10; that is, in the sense of a right-handed screw which advances in the direction of the magnetic field $\mathcal{B}$. When the magnetic flux increases (that is, $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$ is positive), the induced emf $V_\mathcal{E}$ acts in the negative sense; while when the magnetic flux decreases (that is, $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$ is negative), $V_\mathcal{E}$ acts in the positive sense. Thus the sign of the induced emf $V_\mathcal{E}$ is always opposite to that of $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$. More detailed measurement reveals that the value of the induced emf, when expressed in volts, is equal to the time rate of change of the magnetic flux when it is expressed in Wb s^{-1}. Therefore we may write

$$V_\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\mathcal{B}}}{dt}, \tag{17.1}$$

formula che esprime la *legge di Faraday-Henry* dell'induzione elettromagnetica. Possiamo esprimerla in parole in questo modo:

> *in un campo magnetico variabile, in ogni circuito chiuso viene indotta una fem uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico attraverso il circuito col segno cambiato.*

which expresses the *Faraday-Henry law* of electromagnetic induction. We may state this in words as:

> *in a varying magnetic field, an emf is induced in any closed circuit which is equal to the negative of the time rate of change of the magnetic flux through the circuit.*

È importante verificare che l'Eq. (17.1) è corretta dal punto di vista delle unità di misura. Sappiamo che $V_\mathcal{E}$ è espresso in V o in $m^2\,kg\,s^{-2}\,C^{-1}$. Ricordiamo dal paragrafo 16.14 che $\Phi_{\mathcal{B}}$ è espresso in Wb o in $m^2\,kg\,s^{-1}\,C^{-1}$ e che $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$ deve essere espresso in Wb s^{-1} o in $m^2\,kg\,s^{-2}\,C^{-1}$. Dunque entrambi i membri dell'Eq. (17.1) sono espressi nelle stesse unità.

Con riferimento alla Fig. 17–2, se dividiamo l'area limitata da L in elementi d'area infinitesimi, ciascuno orientato secondo le regole stabilite nel Paragrafo 3.10, il flusso magnetico attraverso L è dato da $\Phi_{\mathcal{B}} = \int_S \mathcal{B}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS$, in accordo con il Paragrafo 16.14. Inoltre, l'esistenza di una fem $V_\mathcal{E}$ implica quella di un campo elettrico $\mathcal{E}$ tale che $V_\mathcal{E} = \oint_L \mathcal{E}\cdot d\boldsymbol{l}$,

It is important to verify that Eq. (17.1) is consistent insofar as units are concerned. We know that $V_\mathcal{E}$ is expressed in V or $m^2\,kg\,s^{-2}\,C^{-1}$. We recall from Section 16.14 that $\Phi_{\mathcal{B}}$ is expressed in Wb or $m^2\,kg\,s^{-1}\,C^{-1}$ and $d\Phi_{\mathcal{B}}/dt$ must be expressed in Wb s^{-1} or $m^2\,kg\,s^{-2}\,C^{-1}$. Thus both sides of Eq. (17.1) are expressed in the same units.

Referring to Fig. 17–2, if we divide the area limited by L into infinitesimal area elements, each oriented according to the rule established in Section 3.10, the magnetic flux through L is $\Phi_{\mathcal{B}} = \int_S \mathcal{B}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS$, according to Section 16.14. Also the emf $V_\mathcal{E}$ implies the existence of an electric field $\mathcal{E}$ such that $V_\mathcal{E} = \oint_L \mathcal{E}\cdot d\boldsymbol{l}$,

in accordo con l'Eq. (16.60). Possiamo perciò scrivere l'Eq. (17.1) nella forma alternativa

Dimentichiamo ora il fatto che la linea L coincida con un conduttore elettrico, quale ad esempio un filo chiuso su se stesso, e consideriamo invece una regione dello spazio nella quale esiste un campo magnetico variabile nel tempo. Allora l'Eq. (17.2) equivale a dire che:

> *un campo magnetico dipendente dal tempo comporta l'esistenza di un campo elettrico, tale che la circuitazione del campo elettrico lungo un percorso chiuso arbitrario è eguale ed opposta alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico attraverso una superficie avente per contorno quel percorso.*

Questa è un'altra maniera di enunciare la legge di Faraday-Henry dell'induzione elettromagnetica. Essa ci fornisce una visione più approfondita del contenuto fisico del fenomeno dell'induzione elettromagnetica; ci mostra cioè il fatto che un campo elettrico deve esistere tutte le volte che un campo magnetico varia nel tempo e che i due campi sono in relazione tra loro, secondo l'Eq. (17.2). Il campo elettrico può essere determinato misurando la forza agente su una carica in quiete nella regione nella quale il campo magnetico sta variando. In questo modo è stata confermata sperimentalmente la nostra interpretazione dell'Eq. (17.2).

ESEMPIO 17.1. Un circuito piano composto da N spire, ciascuna di area S, è posto perpendicolarmente ad un campo magnetico alternato uniforme, variabile nel tempo. L'equazione del campo è $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \sin \omega t$. Calcolare la fem indotta nel circuito.

Soluzione: Il flusso attraverso una spira del circuito è $\Phi_{\mathcal{B}} = S\mathcal{B} = S\mathcal{B}_0 \sin \omega t$ ed il fluso totale attraverso N spire è

Quindi, applicando l'Eq. (17.1), otteniamo per la fem indotta

formula che indica che la fem è oscillante o alternata con la stessa frequenza del campo magnetico.

ESEMPIO 17.2. In una regione dello spazio esiste un campo magnetico parallelo all'asse Z ed avente simmetria assiale; cioè il suo valore in ogni punto dipende solo dalla distanza r dall'asse Z. Inoltre il valore del campo magnetico varia nel tempo. Determinare il valore del campo elettrico $\mathcal{E}$ in ogni punto dello spazio.

Soluzione: Supponiamo che il campo magnetico diminuisca al crescere della distanza dall'asse Z. La Fig. 17–3(a) mostra una vista laterale del campo e la Fig. 17–3(b) ne mostra una sezione.

La simmetria del problema suggerisce che il campo elettrico $\mathcal{E}$ dipenda solo dalla distanza r, e che in ogni punto esso sia perpendicolare al campo magnetico $\mathcal{B}$ ed al raggio r. In altre parole, le linee di forza del campo elettrico $\mathcal{E}$ sono circonferenze concentriche

according to Eq. (16.60). Thus we may write Eq. (17.1) in the alternative form

$$\oint_L \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathcal{B} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS. \tag{17.2}$$

Let us forget now that the path L coincides with an electric conductor such as a closed wire, and instead consider a region of space where a magnetic field, varying with time, exists. Then Eq. (17.2) is equivalent to saying:

> *a time-dependent magnetic field implies the existence of an electric field such that the circulation of the electric field along an arbitrarily closed path is equal to the negative of the time rate of change of the magnetic flux through a surface bounded by the path.*

This is another way of stating the Faraday-Henry law of electromagnetic induction. It gives us a deeper insight into the physical content of the phenomenon of electromagnetic induction; that is, the fact that an electric field must exist whenever a magnetic field is changing with time, the two fields being related by Eq. (17.2). The electric field can be determined by measuring the force on a charge at rest in the region where the magnetic field is varying. In this way our interpretation of Eq. (17.2) has been experimentally confirmed.

EXAMPLE 17.1. A plane circuit composed of N turns, each of area S, is placed perpendicular to an alternating uniform magnetic field that varies with time. The equation of the field is $\mathcal{B}$ sin ωt. Compute the emf induced in the circuit.

Solution: The flux through one turn of the circuit is $\Phi_{\mathcal{B}} = S\mathcal{B} = S\mathcal{B}_0 \sin \omega t$ and the total flux through is

$$\Phi_{\mathcal{B}} = N \quad t.$$

Therefore, applying Eq. (obtain for the induced emf

$$V_{\mathcal{E}} = -\frac{d\Phi_{\mathcal{B}}}{dt} \quad \mathcal{B}_0\omega \cos \omega t, \tag{17.3}$$

which indicates that the indu oscillatory or alternating with the same frequency as the magnetic field.

EXAMPLE 17.2. In a region o here is a magnetic field which is parallel to the Z-axis and which has axial symmetry; that is, its magnitude at each point depends on the distance r to the Z-axis only. The magnitude also varies with time. Determine the electric field $\mathcal{E}$ at each point of space.

Solution: Let us assume that the magnetic field decreases with the distance from the Z-axis. Figure 17-3(a) shows a side view of the field and Fig. 17-3(b) shows a cross section.

The symmetry of the problem suggests that the electric field $\mathcal{E}$ must depend on the distance r alone, and at each point be perpendicular to the magnetic field $\mathcal{B}$ and to the radius r. In other words, the lines of force of the electric field $\mathcal{E}$ are circles concentric

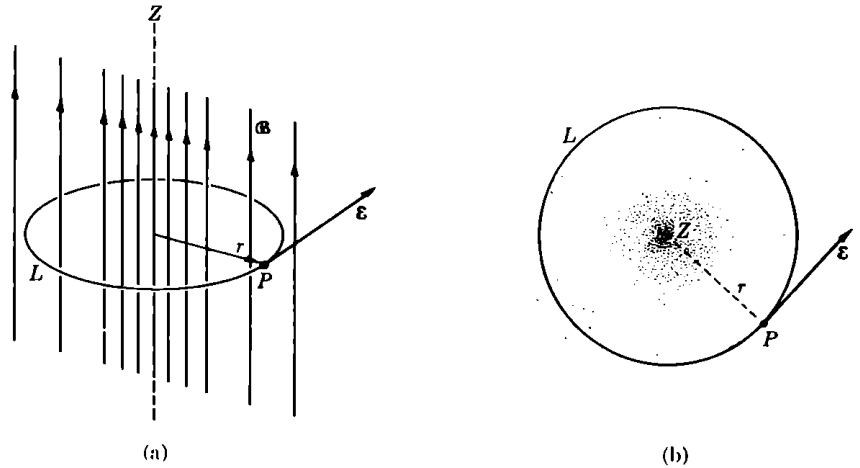


Fig. 17–3. Campo elettrico prodotto da un campo magnetico dipendente del tempo ed avente simmetria cilindrica; (a) vista laterale, (b) vista dall'alto.

con l'asse Z. Scegliendo il nostro percorso L, nell'Eq. (17.2), coincidente con una di queste circonferenze, abbiamo

Quindi, usando l'Eq. (17.1), otteniamo

Il campo magnetico *medio* $\mathcal{B}_{med}$ in una regione avente area S è definito come $\mathcal{B}_{med} = \Phi_{\mathcal{B}}/S$, oppure $\Phi_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{med}S$. Nel nostro caso, $S = \pi r^2$, cosicchè $\Phi_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{med}(\pi r^2)$. Quindi l'Eq. (17.4) fornisce il campo elettrico alla distanza r dall'asse come

ave = med

Se il campo magnetico è uniforme, $\mathcal{B}_{med} = \mathcal{B}$.

17.3 Il betatrone

I risultati dell'Esempio 17.2 sono stati impiegati per progettare un acceleratore di elettroni chiamato *betatrone*, inventato nel 1941 dal fisico americano D. Kerst. In linea di principio, l'idea è molto semplice. Se un elettrone (o qualsiasi altra particella carica) è iniettata in una regione nella quale esiste un campo magnetico variabile, ed il campo magnetico ha simmetria assiale, l'elettrone viene accelerato dal campo elettrico associato $\mathcal{E}$, dato dalla Eq. (17.2) e dalla Eq. (17.5). Mentre l'elettrone guadagna in velocità, la sua traiettoria viene incurvata dal campo magnetico $\mathcal{B}$. Se i campi elettrico e magnetico sono regolati in maniera opportuna l'orbita dell'elettrone è una circonferenza. In ogni rivoluzione, l'elettrone guadagna energia e quindi, dopo aver descritto diverse rivoluzioni,

Fig. 17–3. Electric field produced by a time-dependent magnetic field having cylindrical symmetry; (a) side view, (b) top view.

with the Z-axis. Choosing our path L in Eq. (17.2) as one of these circles, we have

$$V_{\mathcal{E}} = \oint_L \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\boldsymbol{l} = \mathcal{E}(2\pi r).$$

Therefore, using Eq. (17.1), we obtain

$$\mathcal{E}(2\pi r) = -\frac{d\Phi_{\mathcal{B}}}{dt}. \tag{17.4}$$

The *average* magnetic field $\mathcal{B}_{ave}$ in a region covering an area S is defined as $\mathcal{B}_{ave} = \Phi_{\mathcal{B}}/S$ or $\Phi_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{ave}S$. In our case $S = \pi r^2$, so that $\Phi_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}_{ave}(\pi r^2)$. Then Eq. (17.4) gives the electric field at a distance r from the axis as

$$\mathcal{E} = -\tfrac{1}{2} r\left(\frac{d\mathcal{B}_{ave}}{dt}\right). \tag{17.5}$$

If the magnetic field is uniform, $\mathcal{B}_{ave} = \mathcal{B}$.

17.3 The Betatron

The results of Example 17.2 were used to design an electron accelerator called a *betatron*, invented in 1941 by the American physicist D. Kerst. The idea is very simple in principle. If an electron (or any kind of charged particle) is injected into the region where a varying magnetic field exists, and the magnetic field has axial symmetry, the electron will be accelerated by the associated electric field $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ as given by Eq. (17.2) or Eq. (17.5). As the electron gains velocity, its path will be bent by the magnetic field $\mathcal{B}$. If the electric and magnetic fields are adjusted properly, the orbit of the electron is a circle. In each revolution the electron gains energy and therefore, when it has described several revolutions, it

viene accelerato ad un ben preciso valore dell'energia; tanto maggiore il numero delle rivoluzioni, tanto maggiore l'energia raggiunta.

Per studiare il problema in maggior dettaglio, prendiamo in considerazione un elettrone nel punto P (Fig. 17–3). Se le cose sono sistemate in modo tale che l'elettrone descriva una circonferenza di raggio r, il campo elettrico produrrà un moto tangenziale, che si può calcolare usando l'equazione $dp/dt = F_T$ (vedi Paragrafo 7.12) con una forza tangenziale $F_T = -e\mathcal{E}$ cosicchè

Fig. 17–4. Intervalli di tempo durante i quali ha luogo l'accelerazione in un betatrone.

$$\frac{dp}{dt} = -e\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}er\left(\frac{d\mathcal{B}_{\text{ave}}}{dt}\right). \qquad (17.6)$$

Per generare un moto circolare, il campo magnetico deve produrre la necessaria accelerazione centripeta. L'entità della forza centripeta è $F_N = -ev\mathcal{B}$, in accordo con l'Eq. (15.1). Usando l'espressione $pv/r = F_N$ (vedi Paragrafo 7.12), otteniamo

ossia

ed eseguendo la derivata rispetto al tempo, osservando che r è costante poichè il percorso è una circonferenza, abbiamo

Confrontando questa formula con l'Eq. (17.6), concludiamo che la condizione necessaria affinchè l'elettrone descriva un'orbita circolare sotto l'azione combinata dei campi elettrico e magnetico è tale che, ad ogni distanza r, il campo magnetico sia

ave = med

ove $\mathcal{B}_{\text{med}}$ è il valore medio di $\mathcal{B}$ nella regione tra Z ed L. Ciò impone alcune condizioni al modo nel quale il campo magnetico $\mathcal{B}$ può variare in funzione della distanza radiale r dall'asse. La dipendenza esatta di $\mathcal{B}$ da r è determinata dal fatto che si richiede una certa stabilità del moto orbitale. Cioè, assegnato il raggio dell'orbita desiderata, le forze agenti sull'elettrone devono essere tali che, se il moto dell'elettrone è perturbato lievemente (cioè, se esso è deviato da una parte o dall'altra rispetto alla sua orbita), le forze elettriche e magnetiche agenti su di esso tendono a riportarlo sull'orbita corretta.

In generale, il campo magnetico $\mathcal{B}$ è oscillante con una certa pulsazione ω. Secondo le Equazioni (17.6) e (17.7), l'elettrone è accelerato solo quando il campo magnetico è crescente. D'altra parte gli elettroni devono essere iniettati quando il campo magnetico è zero, poichè, in pratica, essi vengono iniettati con una quantità di moto molto piccola. Ciò significa che solo un quarto del periodo di oscillazione del campo magnetico è utile per accelerare gli elettroni. Gli intervalli di tempo utili per l'accelerazione sono stati indicati con aree tratteggiate in Fig. 17–4.

has been accelerated to a particular energy; the greater the number of revolutions, the greater the energy.

To see the problem in more detail, let us consider the electron at point P (Fig. 17–3). If things are so arranged that the electron will describe a circle of radius r, the electric field will produce a tangential motion, which is computed by using $dp/dt = F_T$ (see Section 7.12) with a tangential force $F_T = -e\mathcal{E}$, so that

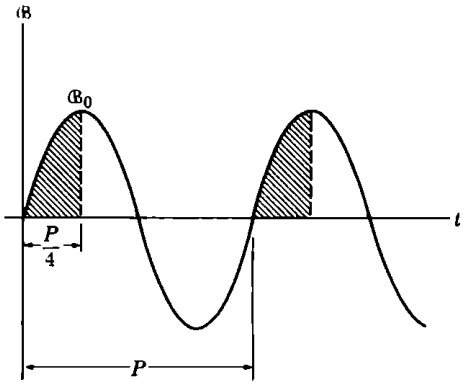


Fig. 17–4. Accelerating time in a betatron.

To generate a circular motion, the magnetic field must produce the necessary centripetal acceleration. The magnitude of the centripetal force, according to Eq. (15.1), is $F_N = ev\mathcal{B}$. Using $pv/r = F_N$ (see Section 7.12), we obtain

$$pv/r = ev\mathcal{B} \qquad \text{or} \qquad p = er\mathcal{B}, \qquad (17.7)$$

and taking the time derivative, observing that r is constant because the path is a circle, we have

$$\frac{dp}{dt} = er\frac{d\mathcal{B}}{dt}.$$

When we compare this with Eq. (17.6), we conclude that the necessary condition for the electron to describe a circular orbit under the combined action of the electric and magnetic fields is that, at any distance r, the magnetic field must be

$$\mathcal{B} = \tfrac{1}{2}\mathcal{B}_{\text{ave}}, \qquad (17.8)$$

where $\mathcal{B}_{\text{ave}}$ is the average value of $\mathcal{B}$ in the region between Z and L. This imposes certain requirements on the manner in which the magnetic field $\mathcal{B}$ may vary as a function of the radial distance r from the axis. The exact variation of $\mathcal{B}$ with r is determined by the fact that a certain stability of the orbital motion is required. That is, given the radius of the desired orbit, the forces on the electron must be such that if the motion of the electron is slightly disturbed (i.e., if it is pushed to one side or the other of the orbit), the electric and magnetic forces acting on the electron tend to place it back in the correct orbit.

In general, the magnetic field $\mathcal{B}$ is oscillatory with some angular frequency ω. Now, because of Eqs. (17.6) and (17.7), the electron is accelerated only while the magnetic field is increasing. On the other hand since, in practice, electrons are injected with very small momentum, they must be injected when the magnetic field is zero. That means that only one quarter of the period of variation of the magnetic field is good for accelerating the electrons. The accelerating times have been indicated by the shaded areas in Fig. 17–4.

Magnet = Magnete
Toroidal tube = Tubo toroidale

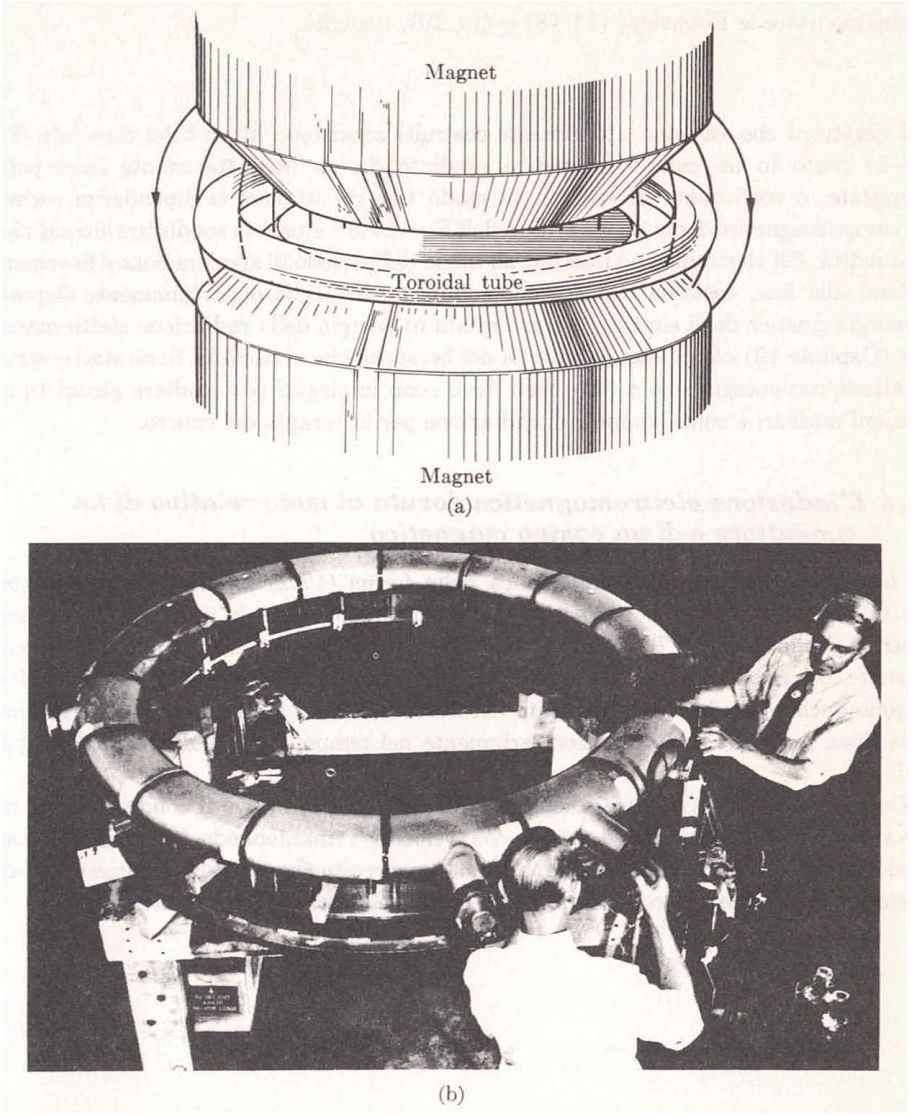


Fig. 17–5. (a) Vista del tubo di accelerazione e delle espansioni polari di un betatrone. (b) Operazioni di montaggio delle parti del tubo di accelerazione di un betatrone.

Fig. 17–5. (a) View of the accelerating tube and pole faces of a betatron. (b) Assembling the accelerating tube in a betatron.

Il valore massimo della quantità di moto raggiunta dagli elettroni è, in accordo con l'Eq. (17.7), $p_{max} = er\mathcal{B}_0$, e quindi l'energia cinetica massima degli elettroni accelerati è se essi non vengono accelerati ad energie confrontabili con l'energia di riposo $m_e c^2$. Quando invece l'energia è grande, cioè confrontabile con l'energia di riposo $m_e c^2$ o maggiore di questa,

The maximum momentum gained by the electron is, according to Eq. (17.7), $p_{\max} = er\mathcal{B}_0$, and therefore the maximum kinetic energy of the accelerated electrons is

$$E_{k,\max} = \frac{1}{2m_e} p_{\max}^2 = \frac{e^2 r^2 \mathcal{B}_0^2}{2m_e}$$

if they are not accelerated to very high energy compared with the rest energy $m_e c^2$. But when the energy is rather large, comparable to or larger than the rest

dobbiamo usare le Equazioni (11.18) e (11.20), cosicchè

I betatroni che vengono attualmente costruiti consistono in un tubo toroidale (Fig. 17—5) posto in un campo magnetico prodotto da un magnete avente facce polari progettate, o conformate in seguito, in modo tale da ottenere la dipendenza corretta del campo magnetico $\mathfrak{B}$ dal raggio r, data dall'Eq. (17.8), e tale da soddisfare le condizioni di stabilità. Gli elettroni sono iniettati all'inizio del periodo di accelerazione e lievemente deflessi alla fine, cosicchè essi possono colpire un bersaglio opportunamente disposto. L'energia cinetica degli elettroni è trasformata in energia della radiazione elettromagnetica (Capitolo 19) e/o in energia interna del bersaglio che si riscalda. Sono stati costruiti betatroni con energie sino a 350 Mev. Essi sono impiegati per studiare alcuni tipi di reazioni nucleari e come sorgenti di radiazione per la terapia del cancro.

17.4 *L'induzione elettromagnetica dovuta al moto relativo di un conduttore e di un campo magnetico*

La legge dell'induzione elettromagnetica nella forma (17.2) implica che tutte le volte che in un punto il campo magnetico varia nel tempo, esista in quel punto un campo elettrico. Nella forma (17.1), essa implica l'esistenza di una fem quando il flusso concatenato col circuito varia nel tempo. È importante stabilire se gli stessi risultati valgono anche quando il cambiamento del flusso è dovuto al moto o alla deformazione della linea L senza che $\mathfrak{B}$ vari necessariamente nel tempo. Considereremo due semplici casi.

Consideriamo dei conduttori disposti come in Fig. 17—6, ove il conduttore PQ può muoversi parallelamente a se stesso con velocità v mantenendosi in contatto con i conduttori RT e SU. Il sistema $PQRS$ forma un circuito chiuso. Supponiamo anche che esista un campo magnetico uniforme $\mathfrak{B}$ perpendicolare al piano del sistema.

energy $m_e c^2$ of the electron, we must use Eqs. (11.18) and (11.20), resulting in

$$E_{k,\max} = c\sqrt{m_e^2 c^2 + e^2 r^2 \mathfrak{B}_0^2} - m_e c^2.$$

Actual betatrons consist of a toroidal tube (Fig. 17–5) placed in the magnetic field produced by a magnet whose pole faces have been designed or shaped in such a way that the correct variation of the magnetic field $\mathfrak{B}$ with r according to Eq. (17.8) is produced and the stability conditions are fulfilled. The electrons are injected at the beginning of the accelerating period and slightly deflected at its end, so that they may hit a target properly located. The kinetic energy of the electrons is given off as electromagnetic radiation (Chapter 19) and/or as internal energy of the target that is heated up. Betatrons have been built with energies up to 350 Mev. They are used for studying certain types of nuclear reactions and as a source of radiation for the treatment of cancer.

17.4 Electromagnetic Induction Due to Relative Motion of Conductor and Magnetic Field

The law of electromagnetic induction, as expressed in Eq. (17.2), implies the existence of a local electric field whenever the magnetic field at that point is changing with time. As expressed in Eq. (17.1), it implies the existence of an emf when the magnetic flux through the circuit changes with time. It is important to discover whether the same results occur when the change in flux is due to a motion or deformation of the path L without $\mathfrak{B}$ necessarily changing with time. We shall consider two simple cases.

Let us consider the arrangement of conductors illustrated in Fig. 17–6, where the conductor PQ can move parallel to itself with velocity v while maintaining contact with conductors RT and SU. The system $PQRS$ forms a closed circuit. Suppose also that there is a uniform magnetic field $\mathfrak{B}$ perpendicular to the plane of the system.

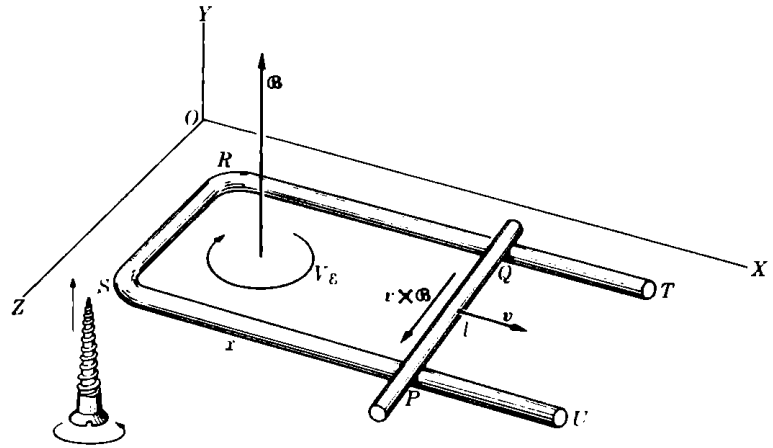


Fig. 17—6. Fem introdotta in un conduttore in moto in un campo magnetico.

Fig. 17–6. Emf induced in a conductor moving in a magnetic field.

Ciascuna carica q nel conduttore PQ in moto è soggetta ad una forza $q\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ agente lungo QP, secondo l'Eq. (15.1). Questa stessa forza agente su ciascuna carica si può supporre sia dovuta ad un campo elettrico "equivalente" $\mathfrak{E}_{eq}$ dato da

oppure da

Giacchè $\boldsymbol{v}$ e $\mathfrak{B}$ sono perpendicolari tra loro, la relazione tra i moduli diviene

Se $PQ = l$, esiste una differenza di potenziale tra P e Q data da $V = \mathfrak{E}_{eq} l = \mathfrak{B} vl$. Nessuna forza è esercitata sulle sezioni QR, RS, e SP, poichè esse sono ferme. Quindi la circuitazione di $\mathfrak{E}_{eq}$ (cioè la fem) lungo il circuito $PQRS$ è proprio $V_\mathcal{E} = V$ nella direzione di $\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$; cioè

D'altra parte, se indichiamo la lunghezza SP con x, l'area di $PQRS$ è lx ed il flusso del campo magnetico attraverso $PQRS$ è

La variazione del flusso nell'unità di tempo è allora

Ma $dx/dt = v$. Quindi

Fig. 17–7. Fem indotta in una spira ruotante in un campo magnetico.

In altre parole, otteniamo l'Eq. (17.1). Il segno meno non compare perchè si sono considerate solo le relazioni tra i moduli delle grandezze. Tuttavia la relazione (17.1) vale tuttora anche in segno; infatti il flusso $\Phi_\mathfrak{B}$ è crescente ed il segno di $V_\mathcal{E}$ è quello di $\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$, cosicchè si ha accordo con la Fig. 17–1.

Come secondo esempio, consideriamo un circuito rettangolare ruotante in un campo magnetico uniforme $\mathfrak{B}$ con pulsazione ω (Fig. 17–7). Quando la normale $\boldsymbol{u}_N$ al circuito è inclinata di un angolo $\theta = \omega t$ rispetto al campo magnetico $\mathfrak{B}$, tutti i punti di PQ si muovono con una velocità $\boldsymbol{v}$ tale che il campo elettrico "equivalente" $\mathfrak{E}_{eq} = \boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ è rivolto da Q a P ed ha modulo $\mathfrak{E}_{eq} = v\mathfrak{B} \sin\theta$. Similmente, per i punti di RS, la direzione di $\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ è quella da S a R ed il modulo di $\mathfrak{E}_{eq}$ è il medesimo. Per quanto concerne gli altri lati RQ e PS, vediamo che $\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ è perpendicolare ad essi e che non esiste alcuna differenza di potenziale tra S e P e tra R e Q. Quindi se $PQ =$

Each charge q in the moving conductor PQ is subject to a force $q\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ acting along QP, according to Eq. (15.1). Now the same force on the charge could be assumed to be due to an "equivalent" electric field $\mathfrak{E}_{eq}$ given by

$$q\mathfrak{E}_{eq} = q\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$$

or

$$\mathfrak{E}_{eq} = \boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}.$$

Since $\boldsymbol{v}$ and $\mathfrak{B}$ are perpendicular, the relation among the magnitudes is

$$\mathfrak{E}_{eq} = v\mathfrak{B}. \tag{17.9}$$

If $PQ = l$, there is a potential difference between P and Q given by $V = \mathfrak{E}_{eq} l = \mathfrak{B} vl$. No forces are exerted on the sections QR, RS, and SP, since they are stationary. Therefore the circulation of $\mathfrak{E}_{eq}$ (or the emf) along circuit $PQRS$ is just $V_\mathcal{E} = V$ in the direction of $\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$; that is,

$$V_\mathcal{E} = \mathfrak{B} vl.$$

On the other hand, if we designate the length SP by x, the area of $PQRS$ is lx and the magnetic flux through $PQRS$ is

$$\Phi_\mathfrak{B} = \int_{PQRS} \mathfrak{B} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS = \mathfrak{B} lx.$$

The change of flux per unit time is then

$$\frac{d\Phi_\mathfrak{B}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{B} lx) = \mathfrak{B} l \frac{dx}{dt}.$$

But $dx/dt = v$. Therefore

$$\frac{d\Phi_\mathfrak{B}}{dt} = \mathfrak{B} lv = V_\mathcal{E}.$$

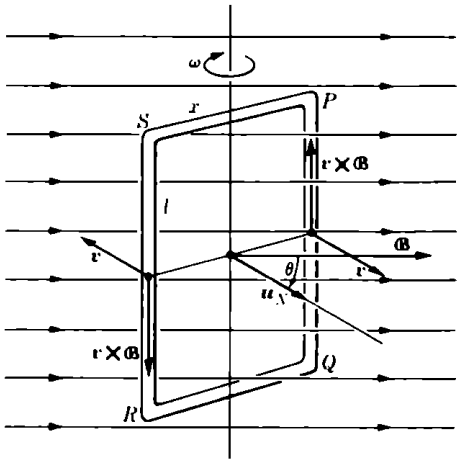


Fig. 17–7. Emf induced in a rotating coil placed in a magnetic field.

In other words, we obtain Eq. (17.1). The minus sign is not included because we are considering only the relation between the magnitudes. However, relation (17.1) still holds in sign, since the flux $\Phi_\mathfrak{B}$ is increasing and the sign of $V_\mathcal{E}$ is that of $\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$, so that it agrees with Fig. 17–1.

As a second example, let us consider a rectangular circuit rotating in a uniform magnetic field $\mathfrak{B}$ with angular frequency ω (Fig. 17–7). When the normal $\boldsymbol{u}_N$ to the circuit makes an angle $\theta = \omega t$ with the magnetic field $\mathfrak{B}$, all points of PQ are moving with a velocity $\boldsymbol{v}$ such that the "equivalent" electric field $\mathfrak{E}_{eq} = \boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ points from Q to P and has a magnitude $\mathfrak{E}_{eq} = v\mathfrak{B} \sin\theta$. Similarly, for points on RS, the direction of $\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ is from S to R and has the same magnitude. On the sides RQ and PS, we see that $\boldsymbol{v} \times \mathfrak{B}$ is perpendicular to them and no potential difference exists between S and P and between R and Q. Therefore if $PQ =$

$RS = l$, la circuitazione del campo elettrico equivalente $\mathcal{E}_{eq}$ su $PQRS$, cioè la fem applicata, vale

I lati PS e RQ non contribuiscono a $V_\mathcal{E}$ in quanto, su di essi, $\mathcal{E}_{eq}$ è perpendicolare a $d\boldsymbol{l}$, come si è detto prima. Se $x = SP$, il raggio delle circonferenze descritte dalle cariche in PQ e SR è $\frac{1}{2}x$, e quindi $v = \omega(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\omega x$. Poichè $S = lx$ è l'area del circuito, e $\theta = \omega t$, possiamo quindi scrivere la seguente espressione

per la fem indotta nel circuito a causa della rotazione nel campo magnetico. D'altra parte, il flusso magnetico attraverso il circuito è

Quindi

Pertanto verifichiamo nuovamente che la fem indotta, originata dal moto del conduttore, può essere calcolata usando le Equazioni (17.1) o (17.2) invece delle Equazioni (15.1) e (16.60).

Quantunque la nostra discussione sia stata condotta con riferimento solo a circuiti di forme particolari, una trattazione matematica più particolareggiata mostra che per ogni circuito

> *la legge dell'induzione elettromagnetica* $V_\mathcal{E} = -d\Phi_\mathcal{B}/dt$ *può essere impiegata quando la variazione del flusso magnetico* $\Phi_\mathcal{B}$ *è dovuta sia ad un cambiamento del campo magnetico* $\mathcal{B}$ *sia ad un moto o ad una deformazione del circuito lungo il quale è calcolata la fem, sia ad entrambi questi processi.*

La fem indotta nel secondo caso è talvolta chiamata fem *dovuta al flusso tagliato.*

17.5 *L'induzione elettromagnetica ed il principio di relatività*

Come si è accennato nel paragrafo precedente, nonostante il fatto che la legge dell'induzione elettromagnetica nelle Forme (17.1) e (17.2) sia valida indipendentemente dalla causa del cambiamento del flusso del campo magnetico, esiste una profonda differenza tra le situazioni fisiche nei due casi. Quando un osservatore constata che il cambiamento del flusso del campo magnetico concatenato con un circuito in quiete nel suo sistema di riferimento è dovuto ad una variazione del campo magnetico $\mathcal{B}$, egli misura contemporaneamente un campo elettrico $\mathcal{E}$ correlato a $\mathcal{B}$ secondo l'Eq. (17.2), e constata la presenza del campo elettrico misurando la forza su una carica *in quiete* nel suo sistema di riferimento. Ma quando l'osservatore constata che il cambiamento del flusso del campo magnetico è dovuto al moto del conduttore rispetto al suo sistema di riferimento, egli non osserva alcun campo elettrico ma attribuisce la fem misurata alla forza $q\boldsymbol{v} \times \mathcal{B}$

$RS = l$, the circulation of the equivalent electric field $\mathcal{E}_{eq}$ around $PQRS$, or the applied emf, is

$$V_\mathcal{E} = \oint_L \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \mathcal{E}_{eq}(PQ + SR) = 2lv\mathcal{B}\sin\theta.$$

Sides PS and RQ do not contribute to $V_\mathcal{E}$ because at them $\mathcal{E}_{eq}$ is perpendicular to $d\boldsymbol{l}$, as indicated before. If $x = SP$, the radius of the circle described by the charges in PQ and SR is $\frac{1}{2}x$, and therefore $v = \omega(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\omega x$. Then, since $S = lx$ is the area of the circuit and $\theta = \omega t$, we may write

$$V_\mathcal{E} = 2l(\tfrac{1}{2}\omega x)\mathcal{B}\sin\omega t = \omega\mathcal{B}(lx)\sin\omega t = \omega\mathcal{B}S\sin\omega t$$

for the emf induced in the circuit as a result of its rotation in the magnetic field. On the other hand, the magnetic flux through the circuit is

$$\Phi_\mathcal{B} = \mathcal{B}\cdot\boldsymbol{u}_N S = \mathcal{B}S\cos\theta = \mathcal{B}S\cos\omega t.$$

Then

$$-\frac{d\Phi_\mathcal{B}}{dt} = \omega\mathcal{B}S\sin\omega t = V_\mathcal{E}.$$

Therefore we again verify that the induced emf resulting from the motion of the conductor can also be calculated by applying Eqs. (17.1) or (17.2) instead of Eqs. (15.1) and (16.60).

Although our discussion has dealt only with circuits of special shapes, a more detailed mathematical calculation indicates that for any circuit

> *the law of electromagnetic induction* $V_\mathcal{E} = -d\Phi_\mathcal{B}/dt$ *can be applied when the change in magnetic flux* $\Phi_\mathcal{B}$ *is due either to a change in the magnetic field* $\mathcal{B}$ *or to a motion or a deformation of the circuit along which the emf is calculated, or both.*

The induced emf in the second case is sometimes called *motional emf.*

17.5 *Electromagnetic Induction and the Principle of Relativity*

As indicated in the preceding paragraph, in spite of the fact that the law of electromagnetic induction as expressed by Eqs. (17.1) and (17.2) is valid no matter what the origin of the change of magnetic flux, there is a profound difference in the physical situations in the two possibilities. When the observer recognizes that the change of magnetic flux through a circuit stationary in his own frame of reference is due to a change in the magnetic field $\mathcal{B}$, he measures an electric field $\mathcal{E}$ at the same time, related to $\mathcal{B}$ as indicated by Eq. (17.2), and he recognizes the presence of the electric field by measuring the force on a charge *at rest* in his frame of reference. But when the observer recognizes that the change of magnetic flux is due to a motion of the conductor relative to its frame of reference, he does not observe any electric field, but attributes the emf he measures to the force $q\boldsymbol{v} \times \mathcal{B}$

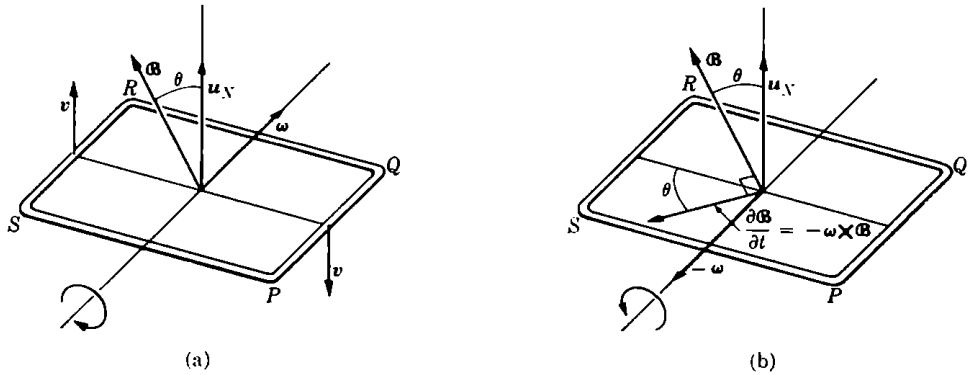


Figura 17–8

Figure 17–8

esercitata dal campo magnetico sulle cariche del conduttore in moto, in accordo con l'Eq. (15.1).

Come mai due situazioni diverse e apparentemente non correlate hanno una descrizione comune? Non si tratta di una coincidenza, ma di una rigorosa conseguenza del principio di relatività. Non possiamo qui inoltrarci in un'analisi matematica completa; guardiamo invece la situazione da un punto di vista intuitivo. Esaminiamo il caso del circuito rotante già discusso e illustrato in Fig. 17—7. In un sistema di riferimento nel quale il campo magnetico $\mathfrak{B}$ è stazionario (Fig. 17—8a) ed il circuito ruota, non si osserva alcun campo elettrico e le forze sugli elettroni nel circuito sono dovute alla legge espressa nell'Eq. (15.1). Invece un osservatore solidale con un sistema di riferimento che si muove con il circuito vede un conduttore stazionario ed un campo magnetico $\mathfrak{B}$ la cui direzione ruota nello spazio (Fig. 17—8b). Egli quindi pone in relazione le forze sugli elettroni nel circuito al campo elettrico $\mathcal{E}$ associato con un campo magnetico variabile, in accordo con la legge dell'induzione elettromagnetica espressa nella Eq. (17.2). (L'analisi matematica di questo caso è piuttosto complicata, in quanto comporta l'uso di un sistema di riferimento ruotante, e viene perciò omessa.)

Concludiamo quindi che la verifica sperimentale della legge dell'induzione elettromagnetica per i campi magnetici variabili è semplicemente una riconferma della validità generale del principio di relatività.

17.6 *Potenziale elettrico e induzione elettromagnetica*

Nei Capitoli 14 e 16 abbiamo mostrato che un campo elettrico statico $\mathcal{E}$ è associato con un potenziale elettrico V in modo tale che le componenti di $\mathcal{E}$ lungo gli assi X, Y, e Z sono date dalle derivate di V rispetto ad x, y, e z cambiate di segno. Cioè $\mathcal{E}_x = -\partial V/\partial x$, ecc., o, più semplicemente, il campo elettrico è uguale al gradiente del potenziale, cambiato di segno. Una conseguenza di questo fatto è che la circuitazione del campo elettrico statico lungo una qualsiasi linea chiusa è nulla, proprietà che è espressa matematicamente dalla legge (16.62) oppure da

exerted by the magnetic field on the charges of the moving conductor, in accordance with Eq. (15.1).

How does it happen that two different and apparently unrelated situations have a common description? This is not a matter of coincidence, but strictly a consequence of the principle of relativity. We cannot go into a full mathematical analysis here; instead, we shall look at the situation from an intuitive point of view. Let us examine the case of the rotating circuit discussed in connection with Fig. 17–7. In a frame of reference in which the magnetic field $\mathfrak{B}$ is constant (Fig. 17–8a) and the circuit is rotating, no electric field is observed and the forces on the electrons in the circuit are due to Eq. (15.1). But an observer attached to a frame moving with the circuit sees a stationary conductor and a magnetic field $\mathfrak{B}$ whose direction rotates in space (Fig. 17–8b). He then relates the forces on the electrons in the circuit to the electric field $\mathcal{E}$ associated with a changing magnetic field, in accordance with the law of electromagnetic induction, as expressed by Eq. (17.2). (The mathematical analysis of this case is somewhat complicated, because it involves a rotating frame of reference, and will therefore be omitted.)

We conclude then that the experimental verification of the law of electromagnetic induction for changing magnetic fields is simply a reaffirmation of the general validity of the principle of relativity.

17.6 *Electric Potential and Electromagnetic Induction*

In Chapters 14 and 16 we indicated that a static electric field $\mathcal{E}$ is associated with an electric potential V in such a way that the components of $\mathcal{E}$ along the X-, Y-, and Z-axes are the negatives of the derivatives of V relative to x, y, and z. That is, $\mathcal{E}_x = -\partial V/\partial x$, etc., or to state the matter simply, the electric field is the negative of the gradient of the electric potential. A consequence of this fact is that the circulation of the static electric field around any closed path is zero, a property that is expressed mathematically by the statement (16.62) or

$$\oint_L \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

Tuttavia, quando il campo elettromagnetico varia nel tempo, abbiamo visto che l'equazione precedente non è più valida; abbiamo invece l'Eq. (17.2),

However, when the electromagnetic field is time dependent, we have seen that the above equation is no longer valid; instead we have Eq. (17.2),

$$\oint_L \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathcal{B} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS.$$

Dunque possiamo concludere che in un campo elettromagnetico dipendente dal tempo la circuitazione del campo elettrico non è nulla, e quindi il campo elettrico non può essere espresso come il gradiente di un potenziale elettrico col segno cambiato. Ciò non significa che il concetto di potenziale sia completamente inapplicabile in questo caso, ma solo che esso deve essere usato in altro modo. In effetti si richiedono *due* potenziali. Uno è chiamato il *potenziale scalare*, simile a quello usato nel caso statico, e l'altro è il *potenziale vettore*. Non avremo occasione di usare questi potenziali in questo testo; li menzioniamo qui solo per far vedere allo studente che, passando dai campi statici a quelli dipendenti dal tempo, egli deve essere molto cauto nello stabilire quali concetti del caso statico possano ancora essere usati.

Thus we conclude that in a time-dependent electromagnetic field the circulation of the electric field is not zero, and therefore the electric field cannot be expressed as the negative of the gradient of the electric potential. This does not mean that the concept of potential is completely inapplicable in this case, but only that it must be used in a different form. In fact, *two* potentials are required. One is called the *scalar potential*, similar to the one used in the static case, and the other the *vector potential*. We shall not have occasion to use these potentials in this text; we mention them here only to point out to the student that, when he passes from the static to the time-dependent fields, he must be very careful about which of the static-field concepts he may continue to use.

17.7 *La legge di Faraday-Henry in forma differenziale*

17.7 *The Faraday-Henry Law in Differential Form*

La legge dell'induzione elettromagnetica come è data dall'Eq. (17.2) può essere applicata ad un percorso di forma qualsiasi. La applicheremo ora ad un percorso rettangolare $PQRS$, molto piccolo o infinitesimo, posto nel piano XY ed avente lati dx e dy (Fig. 17–9). Innanzitutto, dobbiamo valutare la circuitazione del campo elettrico $\mathcal{E}$. Il procedimento è del tutto simile a quello seguito nel Paragrafo 16.13 quando abbiamo discusso le legge di Ampère in forma differenziale; rinviamo lo studente a quel paragrafo per i dettagli. Per la superficie infinitesima $PQRS$ nel piano XY, possiamo scrivere

The law of electromagnetic induction as expressed by Eq. (17.2) can be applied to a path of any shape. We shall apply it now to a very small or infinitesimal rectangular path $PQRS$ placed in the XY-plane with sides dx and dy (Fig. 17–9). First we must evaluate the circulation of the electric field $\mathcal{E}$. The procedure is exactly similar to the one we followed in Section 16.13 when we were discussing Ampère's law in differential form; we refer the student to that section for the details. Then for the infinitesimal surface $PQRS$ in the XY-plane we may write

$$\oint_{PQRS} \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{PQ} + \int_{QR} + \int_{RS} + \int_{SP} \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l}.$$

Ora $\int_{QR} \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \mathcal{E}_y \, dy$ e $\int_{SP} \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\mathcal{E}'_y \, dy$, cosicchè

Now $\int_{QR} \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \mathcal{E}_y \, dy$ and $\int_{SP} \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\mathcal{E}'_y \, dy$, so that

$$\int_{QR} + \int_{SP} \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = (\mathcal{E}_y - \mathcal{E}'_y)\, dy = d\mathcal{E}_y \, dy = \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} \, dx \, dy.$$

Ciò segue dal fatto che $d\mathcal{E}_y = (\partial \mathcal{E}_y / \partial x)\, dx$, poichè $d\mathcal{E}_y$ corrisponde alla differenza di $\mathcal{E}_y$ tra due punti separati dalla distanza dx, ma aventi i medesimi valori di y e di z. Similmente, possiamo scrivere

This is so because $d\mathcal{E}_y = (\partial \mathcal{E}_y / \partial x)\, dx$, since $d\mathcal{E}_y$ corresponds to the difference in $\mathcal{E}_y$ for two points separated by the distance dx, but having the same y and z. Similarly, we may write

$$\int_{PQ} + \int_{RS} \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} \, dx \, dy.$$

Sommando i due risultati, otteniamo

Adding the two results, we get

$$\oint_{PQRS} \mathcal{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y}\right) dx \, dy. \tag{17.10}$$

Successivamente, dobbiamo calcolare il flusso del campo magnetico attraverso la superficie. Poichèla superficie $PQRS$ è nel piano XY, il suo versore normale $\boldsymbol{u}_N$ è proprio $\boldsymbol{u}_z$ e $\mathfrak{B} \cdot \boldsymbol{u}_N = \mathfrak{B} \cdot \boldsymbol{u}_z = \mathfrak{B}_z$. Quindi, il flusso del campo magnetico è

poichè $dx\,dy$ è l'area del rettangolo. Sostituendo le Eq. (17.10) e (17.11) nell'Eq. (17.2), e semplificando il fattore comune $dx\,dy$ nei due membri, otteniamo

Ponendo il nostro rettangolo nei piani YZ e ZX, otteniamo altre due espressioni:

e

Fig. 17–9. Circuito elementare usato per ottenere la legge di Faraday-Henry in forma differenziale.

Le espressioni (17.12), (17.13), e (17.14) nel loro insieme costituiscono la legge di Faraday-Henry espressa in forma differenziale. Esse possono essere sintetizzate in un'unica equazione vettoriale, come è stato fatto nel Paragrafo 16.13 per la legge di Ampère, scrivendo

$$\text{curl} = \text{rot}$$

L'Eq. (17.15), o i suoi equivalenti (17.12), (17.13), e (17.14), esprime le relazioni che devono esistere tra la derivata rispetto al tempo del campo magnetico in un punto ed il campo elettrico esistente nello *stesso* punto dello spazio. Essa illustra in maniera molto chiara la stretta relazione esistente tra le componenti elettriche e magnetiche del campo elettromagnetico.

17.8 L'autoinduzione

Consideriamo un circuito nel quale fluisce una corrente I (Fig. 17–10). Secondo la legge di Ampère la corrente produce un campo magnetico che, in ogni punto, è proporzionale ad I. Possiamo calcolare il flusso del campo magnetico attraverso il circuito dovuto al campo generato dal circuito stesso, flusso che chiameremo *flusso autoconcatenato*. Questo flusso, designato con Φ_I, è quindi proporzionale

Next we must compute the magnetic flux through the surface. Considering that the surface $PQRS$ is in the XY-plane, its normal unit vector $\boldsymbol{u}_N$ is just $\boldsymbol{u}_z$ and $\mathfrak{B} \cdot \boldsymbol{u}_N = \mathfrak{B} \cdot \boldsymbol{u}_z = \mathfrak{B}_z$. Therefore the magnetic flux is

$$\int_{PQRS} \mathfrak{B} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS = \mathfrak{B}_z \, dx \, dy, \tag{17.11}$$

since $dx\,dy$ is the area of the rectangle. Substituting Eqs. (17.10) and (17.11) into Eq. (17.2), and canceling the common factor $dx\,dy$ on both sides, we get

$$\frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} = -\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial t}. \tag{17.12}$$

By placing our rectangle in the YZ- and ZX-planes, we obtain two other expressions:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial z} = -\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial t} \tag{17.13}$$

and

$$\frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} = -\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial t}. \tag{17.14}$$

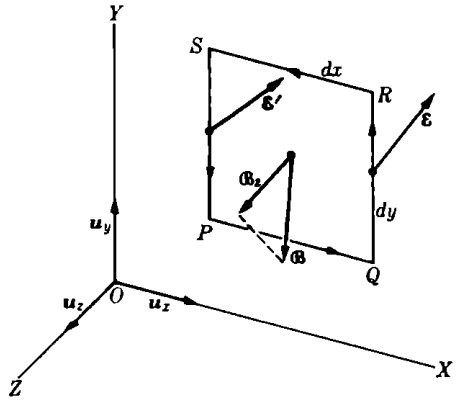


Fig. 17–9. Elementary circuit for deriving the Faraday-Henry law in differential form.

Expressions (17.12), (17.13), and (17.14) together constitute the Faraday-Henry law expressed in differential form. They can be combined into a single vector equation, as was done in Section 16.13 for Ampère's law, by writing

$$\text{curl}\ \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{17.15}$$

Equation (17.15), or its equivalents (17.12), (17.13), and (17.14), expresses the relations that must exist between the time rate of change of the magnetic field at a point and the electric field existing at the *same* point of space. It illustrates in a very obvious way the close interrelationship between the electric and magnetic components of an electromagnetic field.

17.8 Self Induction

Let us consider a circuit carrying a current I (Fig. 17–10). According to Ampère's law the current produces a magnetic field which, at each point, is proportional to I. We may compute the magnetic flux through the circuit due to its own magnetic field, and call it the *self flux*. This flux, designated by Φ_I, is then proportional

alla corrente I, e possiamo scrivere

Il coefficiente L dipende dalla forma del conduttore ed è chiamato *autoinduttanza* del circuito. Il coefficiente è espresso in Wb A^{-1}, unità chiamata *henry*, in omaggio a Joseph Henry, e abbreviata con H. Cioè, H = Wb A^{-1} = $m^2/kg\ C^{-2}$.

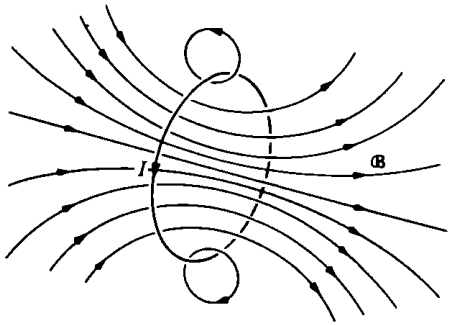


Fig. 17–10. Flusso magnetico autoconcatenato in un circuito.

Fig. 17–11. Verso della fem autoindotta in un circuito.

Se la corrente I cambia nel tempo, il flusso del campo magnetico Φ_I attraverso il circuito cambia e, secondo la legge dell'induzione elettromagnetica, nel circuito viene indotta una fem. Questo caso speciale di induzione elettromagnetica è chiamato *autoinduzione*. Combinando le Equazioni (17.1) e (17.16) abbiamo, per la fem autoindotta,

Il segno meno indica che V_L è opposta alla variazione di corrente. Così, se la corrente aumenta, dI/dt è positiva e V_L è opposta alla variazione di corrente (Fig. 17–11a). Se la corrente diminuisce, dI/dt è negativa e V_L agisce nella stessa direzione della variazione di corrente (Fig. 17–11b). Quindi V_L agisce sempre in modo da opporsi al *cambiamento* della corrente. Quando abbiamo scritto l'Eq. (17.17), abbiamo supposto il circuito rigido, e perciò, calcolando la derivata rispetto al tempo, abbiamo considerato L costante. Se la forma del circuito è variabile, L non è costante e dobbiamo scrivere, in luogo dell'Eq. (17.17),

Negli schemi elettrici per indicare che un conduttore ha un induttanza apprezzabile si usa il simbolo della Fig. 17–12. Tuttavia, dobbiamo notare che l'autoinduttanza di un circuito non è concentrata in un punto particolare, ma è una proprietà del circuito nel suo insieme.

Fig. 17–12. Rappresentanza di un'autoinduttanza.

to the current I, and we may write

$$\Phi_I = LI. \tag{17.16}$$

The coefficient L depends on the geometrical shape of the conductor and is called the *self-inductance* of the circuit. It is expressed in Wb A^{-1}, a unit called the *henry*, in honor of Joseph Henry, and abbreviated H. That is, H = Wb A^{-1} = $m^2\ kg\ C^{-2}$.

Fig. 17–10. Self magnetic flux in a circuit.

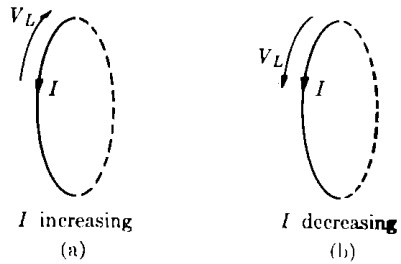


Fig. 17–11. Direction of the self-induced emf in a circuit.

If the current I changes with time, the magnetic flux Φ_I through the circuit also changes and, according to the law of electromagnetic induction, an emf is induced in the circuit. This special case of electromagnetic induction is called *self induction*. Combining Eqs. (17.1) and (17.16), we have, for the self-induced emf,

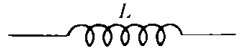
$$V_L = -\frac{d\Phi_I}{dt} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{17.17}$$

The minus sign indicates that V_L is opposed to the change in the current. So if the current increases, dI/dt is positive and V_L is opposed to the current (Fig. 17–11a). If the current decreases, dI/dt is negative and V_L acts in the same direction as the current (Fig. 17–11b). Therefore V_L always acts in a direction that opposes the *change* in the current. When we wrote Eq. (17.17), we assumed the circuit rigid and therefore we considered L constant when we computed the time derivative. If the shape of the circuit is variable, L is not constant, and instead of Eq. (17.17) we must write

$$V_L = -\frac{d}{dt}(LI). \tag{17.18}$$

In diagrams drawn to indicate that a conductor has an appreciable inductance, the symbol of Fig. 17–12 is used. However, we must note that the self-inductance of a circuit is not concentrated at a particular point, but is a property of the whole circuit.

Fig. 17–12. Representation of a self inductance.



ESEMPIO 17.3. Discutere il transitorio durante il quale si stabilisce una corrente in un circuito.

Soluzione: Quando una fem $V_\mathcal{E}$ viene applicata ad un circuito chiudendo un interruttore (Fig. 17–13), la corrente non raggiunge istantaneamente il valore $V_\mathcal{E}/R$ corrispondente alla legge di Ohm, ma sale gradualmente, avvicinandosi al valore dato dalla legge di Ohm. Questo processo è dovuto alla fem autoindotta V_L che si oppone alla variazione della corrente e agisce mentre la corrente aumenta da zero fino al suo valore finale costante. La fem totale applicata al circuito è dunque $V_\mathcal{E} + V_L = V_\mathcal{E} - L(dI/dt)$. La legge di Ohm è allora

ossia

Questa formula può essere scritta come $R(I - V_\mathcal{E}/R) = -L(dI/dt)$, oppure, separando le variabili I e t,

Integrando con la condizione che al tempo $t = 0$ la corrente è nulla ($I = 0$), abbiamo

oppure

Ricordando che $\ln e^x = x$, abbiamo quindi

Fig. 17–13. Circuito elettrico contenente una resistenza ed un'autoinduttanza.

Il secondo termine in parentesi decresce con il tempo e la corrente raggiunge asintoticamente il valore $V_\mathcal{E}/R$ dato dalla legge di Ohm (Fig. 17–14). Se R/L è grande, la corrente raggiunge questo valore molto rapidamente, ma se R/L è piccolo può passare anche molto tempo prima che la corrente si stabilizzi (N.T.). Lo studente può scorgere la similitudine matematica tra

$\frac{R}{L}$ small = $\frac{R}{L}$ piccolo

$\frac{R}{L}$ large = $\frac{R}{L}$ grande

Fig. 17–14. Transitorio durante il quale una corrente si stabilisce in un circuito.

EXAMPLE 17.3. Discuss the establishment of a current in a circuit.

Solution: When an emf $V_\mathcal{E}$ is applied to a circuit by closing a switch (Fig. 17–13), the current does not instantaneously attain the value $V_\mathcal{E}/R$ corresponding to Ohm's law, but increases gradually, steadily approaching the value given by Ohm's law. This process is due to the self-induced emf V_L which opposes the change in the current and is present while the current increases from zero up to its final constant value. The total emf applied to the circuit is then $V_\mathcal{E} + V_L = V_\mathcal{E} - L(dI/dt)$. Ohm's law is now

$$RI = V_\mathcal{E} + V_L \quad \text{or} \quad RI = V_\mathcal{E} - L(dI/dt). \tag{17.19}$$

This may be written as $R(I - V_\mathcal{E}/R) = -L(dI/dt)$ or, separating the variables I and t,

$$\frac{dI}{I - V_\mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L}dt.$$

Integrating, noting that at $t = 0$ the current is also zero ($I = 0$), we have

$$\int_0^I \frac{dI}{I - V_\mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

or

$$\ln (I - V_\mathcal{E}/R) - \ln (-V_\mathcal{E}/R) = -(R/L)t.$$

Remembering that $\ln e^x = x$, we have then

$$I = \frac{V_\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-Rt/L}).$$

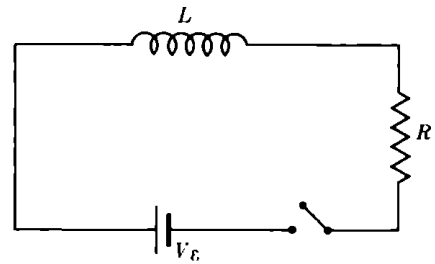


Fig. 17–13. Electric circuit containing a resistance and a self inductance.

The second term in the parentheses decreases with time and the current asymptotically approaches the value $V_\mathcal{E}/R$ which is given by Ohm's law (Fig. 17–14). If R/L is large, the current reaches this value very fast, but if R/L is small it may take a long time before the current stabilizes. The student may recognize the mathematical similarity between

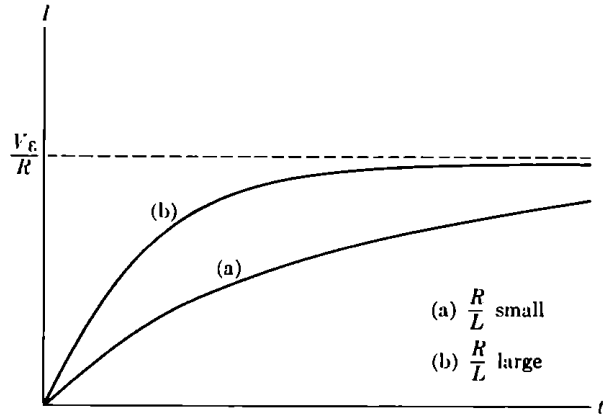


Fig. 17–14. Establishment of a current in a circuit.

l'espressione di I e quella della velocità di un corpo che cade in un fluido viscoso (Esempio 7.8) se si stabiliscono le seguenti corrispondenze: $V_\mathcal{E} \leftrightarrow F$, $L \leftrightarrow m$, e $R \leftrightarrow K\eta$.

ESEMPIO 17.4. Discutere il decadimento della corrente nel circuito di Fig. 17–15 quando l'interruttore viene portato dalla posizione 1 alla posizione 2.

Soluzione: Se l'interruttore è rimasto a lungo nella posizione 1, possiamo ritenere che la corrente nel circuito abbia raggiunto il valore limite (o stazionario) $V_\mathcal{E}/R$. Spostando l'interruttore nella posizione 2, noi togliamo la fem senza aprire il circuito. La sola fem che rimane è $V_L = -L\,dI/dt$, e la legge di Ohm diviene

ossia

Se iniziamo a misurare i tempi dall'istante nel quale $V_\mathcal{E}$ è rimosso dal circuito ($t = 0$), la corrente iniziale è $V_\mathcal{E}/R$. Integrando, abbiamo

o

Eliminando i logaritmi abbiamo

Fig. 17–15. Dispositivo per rimuovere la fem applicata ad un circuito senza alterare la resistenza.

La corrente diminuisce esponenzialmente come è mostrato in Fig. 17–16. Quanto più elevata è la resistenza R o piccola è l'induttanza L, tanto più rapida la decrescita della corrente. Il tempo necessario affinchè la corrente si riduca ad una frazione $1/e$ del valore iniziale, o approssimativamente al 63% del valore iniziale, è $\tau = L/R$. Questo tempo è chiamato *costante di tempo* del circuito.

ESEMPIO 17.5. Un circuito è composto di due guaine metalliche cilindriche coassiali di raggi a e b, ciascuna delle quali trasporta in senso opposto una corrente I. Calcolare l'autoinduttanza per unità di lunghezza del circuito (Fig. 17–17). La regione di spazio tra i cilindri è riempita con una sostanza la cui permeabilità è μ.

Fig. 17–16. Decadimento della corrente in un circuito dopo la rimozione della fem.

the expression for I and that for the velocity of a body falling through a viscous fluid (Example 7.8) when the following correspondences are established: $V_\mathcal{E} \leftrightarrow F$, $L \leftrightarrow m$, and $R \leftrightarrow K\eta$.

EXAMPLE 17.4. Discuss the decay of the current in the circuit of Fig. 17–15 when the switch is moved from position 1 to position 2.

Solution: If the switch has been in position 1 for a very long time, we may assume that the current in the circuit has achieved its limiting (or steady) value $V_\mathcal{E}/R$. By moving the switch over to position 2, we remove the applied emf without actually opening the circuit. The only emf that remains is $V_L = -L\,dI/dt$ and Ohm's law becomes

$$RI = -L\frac{dI}{dt} \quad \text{or} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt.$$

If we count time ($t = 0$) from the instant that $V_\mathcal{E}$ is removed from the circuit, the initial current is $V_\mathcal{E}/R$. Integrating, we have

$$\int_{V_\mathcal{E}/R}^{I} \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

or

$$\ln I - \ln (V_\mathcal{E}/R) = -(R/L)t.$$

Removing logarithms, we have

$$I = (V_\mathcal{E}/R)e^{-Rt/L}.$$

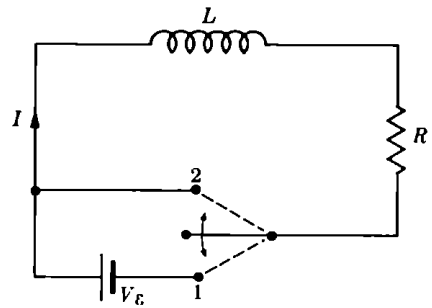


Fig. 17–15. Device for removing the emf applied to a circuit without changing the resistance.

The current decreases exponentially, as shown in Fig. 17–16. The larger the resistance R, or the smaller the inductance L, the faster is the drop in the current. The time required for the current to drop to $1/e$, or approximately 63% of its initial value, is $\tau = L/R$. This time is called *relaxation time.*

EXAMPLE 17.5. A circuit is composed of two coaxial cylindrical metallic sheets of radii a and b, each carrying a current I, but in the opposite direction. Compute the self-inductance per unit length of the circuit (Fig. 17–17). The space between the cylinders is filled with a substance whose permeability is μ.

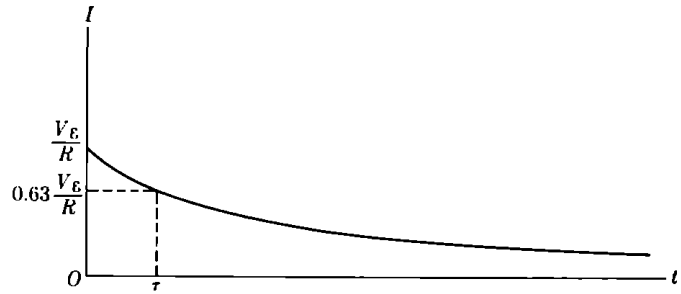


Fig. 17–16. Decay of the current in a circuit after the emf has been removed.

Soluzione: Nell'Esempio 16.18 è stato calcolato il campo magnetico generato da un sistema di correnti uguale a questo ottenendo $\mathcal{B} = \mu I/2\pi r$ nella regione tra i due cilindri, e zero altrove. Qui abbiamo sostituito μ_0, usato nell'Esempio 16.18, con μ, la permeabilità del mezzo che riempie la regione di spazio tra i due cilindri, in accordo con i risultati del Paragrafo 16.16. Per ottenere l'autoinduttanza dobbiamo calcolare il flusso del campo magnetico attraverso una generica sezione del conduttore, per esempio $PQRS$, avente lunghezze l. Se dividiamo questa sezione in strisce di lunghezza dr, l'area di ogni striscia è $l\,dr$. Il campo magnetico $\mathcal{B}$ è perpendicolare a $PQRS$. Quindi

Pertanto, l'autoinduttanza di una porzione avente lunghezza l è

e l'autoinduttanza per unità di lunghezza è $(\mu/2\pi)\ln b/a$.

Figura 17–17

Solution: In Example 16.18 the magnetic field for this current arrangement was computed as $\mathcal{B} = \mu I/2\pi r$ in the region within the two cylinders, and zero elsewhere. Here we have replaced μ_0 used in Example 16.18 by μ, the permeability of the medium filling the space within the two cylinders, in accordance with Section 16.16. To obtain the self-inductance, we must compute the magnetic flux through any section of the conductor, such as $PQRS$, having a length l. If we divide this section into strips of width dr, the area of each strip is $l\,dr$. The magnetic field $\mathcal{B}$ is perpendicular to $PQRS$. Therefore

$$\Phi_I = \int_{PQRS} \mathcal{B}\,dS = \int_a^b \left(\frac{\mu I}{2\pi r}\right)(l\,dr)$$

$$= \frac{\mu I l}{2\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu I l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Therefore the self-inductance of a portion of length l is

$$L = \frac{\Phi_I}{I} = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}, \tag{17.20}$$

and the self-inductance per unit length will be $(\mu/2\pi)\ln b/a$.

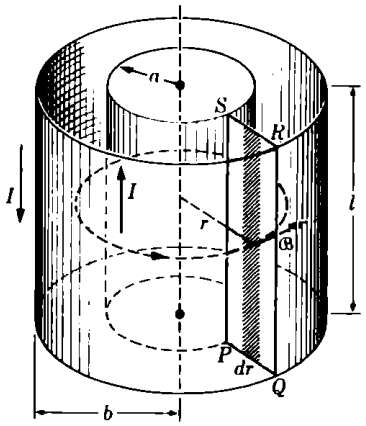


Figure 17–17

17.9 L'energia del campo magnetico

Abbiamo visto nel Paragrafo 16.10 che è necessario spendere energia per mantenere la corrente in un circuito. L'energia necessaria nell'unità di tempo (in altre parole, la potenza) è $V_\mathcal{E} I$. Ora possiamo scrivere l'Eq. (17.19) nella forma

Moltiplicando questa equazione per I, otteniamo

Secondo l'Eq. (16.53), il termine RI^2 rappresenta l'energia spesa per muovere gli elettroni attraverso il reticolo cristallino del conduttore e trasferita agli ioni costituenti il reticolo. Interpretiamo quindi l'ultimo termine nell'Eq. (17.21) come l'energia necessaria per unità di tempo per istituire la corrente e creare il campo magnetico associato. Quindi la rapidità di aumento dell'energia magnetica è

L'energia magnetica necessaria per incrementare la corrente da zero al valore I è pertanto

17.9 Energy of the Magnetic Field

We have seen in Section 16.10 that to maintain a current in a circuit, energy must be supplied. The energy required per unit time (in other words, the power) is $V_\mathcal{E} I$. Now we may write Eq. (17.19) in the form

$$V_\mathcal{E} = RI + L\frac{dI}{dt}.$$

Multiplying this equation by I, we have

$$V_\mathcal{E} I = RI^2 + LI\frac{dI}{dt}. \tag{17.21}$$

According to Eq. (16.53), the term RI^2 is the energy spent in moving the electrons through the crystal lattice of the conductor and is transferred to the ions that make up the lattice. We then interpret the last term in Eq. (17.21) as the energy required per unit time to build the current or to establish its associated magnetic field. Therefore the rate of increase of the magnetic energy is

$$\frac{dE_\mathcal{B}}{dt} = LI\frac{dI}{dt}.$$

The magnetic energy required to increase a current from zero to the value I is thus

$$E_\mathcal{B} = \int_0^{E_\mathcal{B}} dE_\mathcal{B} = \int_0^I LI\,dI = \tfrac{1}{2}LI^2. \tag{17.22}$$

Per esempio, nel circuito dell'Esempio 17.5, l'energia magnetica di una sezione avente lunghezza l risulta, usando l'Eq. (17.20),

For example, in the circuit of Example 17.5, the magnetic energy of a section of length l is, using Eq. (17.20),

$$E_{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\right) I^2 = \frac{\mu l I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}. \tag{17.23}$$

L'energia magnetica $E_{\mathfrak{B}}$ può anche essere calcolata usando l'espressione

The magnetic energy $E_{\mathfrak{B}}$ can also be calculated by using the expression

$$E_{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2\mu}\int \mathfrak{B}^2\, dv, \tag{17.24}$$

ove l'integrale è esteso a tutto il volume nel quale il campo magnetico è diverso da zero, e dv è l'elemento di volume. Per esempio, nel caso del circuito di Fig. 17—17, che è stato ridisegnato in Fig. 17—18, il campo magnetico è dato da $\mathfrak{B} = \mu I/2\pi r$. Prendendo come elemento infinitesimo di volume una corteccia cilindrica di raggio r e spessore dr, troviamo che il suo volume è $dv = (2\pi r)l\, dr$. Sostituendo nell'Eq. (17.24), e ricordando che il campo magnetico si estende da $r = a$ sino a $r = b$, troviamo che

where the integral extends throughout all the volume in which the magnetic field exists, and dv is a volume element. For example, in the case of the circuit of Fig. 17–17, which has been redrawn in Fig. 17–18, the magnetic field is given by $\mathfrak{B} = \mu I/2\pi r$. When we take as the volume element a cylindrical shell of radius r and thickness dr, we find that its volume is $dv = (2\pi r)l\, dr$. Substituting in Eq. (17.24), and remembering that the magnetic field extends only from $r = a$ to $r = b$, we find that

$$E_{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2\mu}\int_a^b \left(\frac{\mu I}{2\pi r}\right)^2 (2\pi l r\, dr) = \frac{\mu l I^2}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu l I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Otteniamo quindi il medesimo risultato dato nell'Eq. (17.23).

Possiamo interpretare l'espressione (17.24) dicendo che l'energia spesa per stabilire la corrente è stata *immagazzinata* nello spazio circostante cosicchè ad un volume dv, compete un'energia $(\mathfrak{B}^2/2\mu)\, dv$, e che l'energia per unità di volume, $E_{\mathfrak{B}}$, immagazzinata nel campo magnetico è

We obtain, therefore, the same result as in Eq. (17.23).

We may interpret expression (17.24) by saying that the energy spent in establishing the current has been *stored* in the surrounding space so that there corresponds, to a volume dv, an energy $(\mathfrak{B}^2/2\mu)\, dv$, and the energy per unit volume $\mathfrak{E}_{\mathfrak{B}}$ stored in the magnetic field is

$$\mathfrak{E}_{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2\mu}\mathfrak{B}^2. \tag{17.25}$$

Quantunque abbiamo giustificato l'espressione (17.25) per la densità di energia magnetica usando un circuito avente una simmetria molto particolare, un'analisi più approfondita, che qui non sarà data, mostra che il risultato è del tutto generale. Quando sono presenti sia il campo elettrico che quello magnetico, dobbiamo tener conto anche della densità di energia elettrica data dall'Eq. (16.40), cosicchè l'energia totale per unità di volume del campo elettromagnetico è

Although we have justified expression (17.25) for the magnetic energy density by using a circuit of very special symmetry, a more detailed analysis, which will not be given here, would indicate that the result is completely general. When both electric and magnetic fields are present, we must also consider the electric energy density given by Eq. (16.40), and thus the total energy per unit volume in the electromagnetic field is

$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}\epsilon\mathcal{E}^2 + \frac{1}{2\mu}\mathfrak{B}^2. \tag{17.26}$$

ESEMPIO 17.6. Calcolare l'energia associata al campo magnetico di un elettrone che si muove lentamente ed analizzare il risultato.

Soluzione: Dal Paragrafo 15.11 sappiamo che una carica che si muove lentamente produce un campo magnetico le cui linee di forza sono circonferenze perpendicolari alla direzione del moto ed il cui valore è dato dall'Eq. (15.53) come

EXAMPLE 17.6. Obtain the energy of the magnetic field of a slowly moving electron and analyze the result.

Solution: From Section 15.11 we know that a slowly moving charge produces a magnetic field whose lines of force are circles perpendicular to the direction of motion and whose magnitude is obtained from Eq. (15.53) as

$$\mathfrak{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{v\sin\theta}{r^2},$$

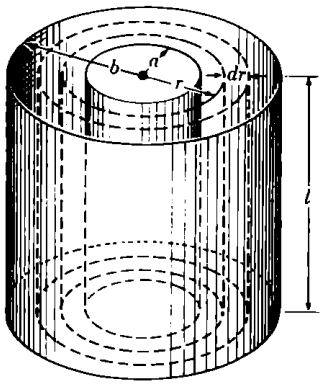


Figura 17–18

Figure 17–18

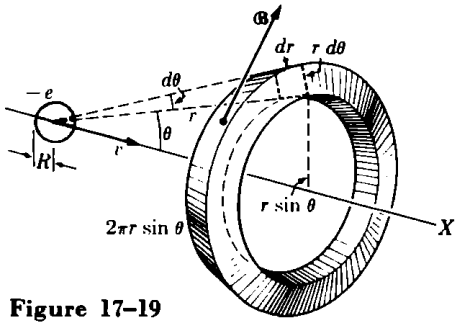


Figura 17–19

Figure 17–19

ove, per un elettrone, $q = -e$. Supponiamo di usare il rozzo modello di elettrone introdotto nell'Esempio 16.14, nel quale R è il "raggio" dell'elettrone. L'energia del campo magnetico *esterno* alla carica si ottiene usando l'Eq. (17.24), ove l'integrale è esteso a tutto lo spazio all'*infuori* della carica. Prenderemo come elemento infinitesimo di volume l'anello illustrato in Fig. 17–19. Questo ha lunghezza uguale a $2\pi r \sin\theta$, e la sua sezione trasversale ha lati dr e $r\,d\theta$, e quindi area $r\,dr\,d\theta$. Il volume dell'elemento infinitesimo è

$$dv = \text{lunghezza} \times \text{area sezione trasversale} = 2\pi r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta.$$

Quindi, l'Eq. (17.24) fornisce

Questo risultato non rappresenta l'energia magnetica totale, perchè dobbiamo aggiungere il contributo dovuto al campo magnetico *entro* la particella carica, per la qual cosa è necessario conoscere la distribuzione di carica entro la particella. In ogni caso, il risultato precedente fornisce una stima dell'ordine di grandezza. La caratteristica più interessante di $E_{\mathcal{B}}$ è il fatto che essa dipende da v^2, e quindi assomiglia all'energia cinetica di una particella la cui massa è

Nel caso di un elettrone $q = -e$ e $m = m_e$, cosicchè

ove abbiamo usato l'Eq. (15.55) per eliminare μ_0. Risolvendo rispetto ad R, otteniamo

with $q = -e$ for an electron. Suppose that we use our crude model of the electron introduced in Example 16.14, in which R is the "radius" of the electron. The energy of the magnetic field *exterior* to the charge is obtained by using Eq. (17.24), with the integral extended over all space *outside* the charge. We shall take as our volume element the ring illustrated in Fig. 17–19. It has a perimeter equal to $2\pi r \sin\theta$, and its cross section has sides dr and $r\,d\theta$, and therefore an area $r\,dr\,d\theta$. The volume is

$$dv = \text{perimeter} \times \text{cross section} = 2\pi r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta.$$

Therefore Eq. (17.24) gives

$$E_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2\mu_0}\int_R^\infty \int_0^\pi \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin\theta}{r^2}\right)^2 2\pi r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{\mu_0}{16\pi} q^2 v^2 \int_R^\infty \frac{dr}{r^2}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2q^2}{3R}\right)v^2.$$

This result does not give the total magnetic energy because we have to add the contribution due to the magnetic field *inside* the charged particle, which in turn requires that we know the charge distribution inside the particle. In any case the above result gives an estimate of the order of magnitude. The most interesting feature of $E_{\mathcal{B}}$ is that it depends on v^2, and therefore it resembles the kinetic energy of a particle whose mass is

$$m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2q^2}{3R}.$$

In the case of the electron, $q = -e$ and $m = m_e$, so that

$$m_e = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2e^2}{3R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2e^2}{3Rc^2},$$

where we have used Eq. (15.55) to eliminate μ_0. Solving for R, we obtain

$$R = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}\right) = \tfrac{2}{3}r_e,$$

dove r_e è il raggio dell'elettrone definito nell'Eq. (16.45). Il fatto che il nostro calcolo alquanto rozzo dia un risultato dello stesso ordine di grandezza di quello calcolato nell'Esempio 16.14, dove si è ottenuto $R = \frac{3}{5}r_e$, è una prova della coerenza interna della nostra teoria, giacchè è possibile stimare solo l'ordine di grandezza. Combinando questo risultato con quello dell'Esempio 16.14, sembra plausibile pensare che l'energia di riposo di una particella carica sia associata con l'energia del suo campo elettrico mentre l'energia cinetica corrisponda all'energia del campo magnetico. Tuttavia è logico pensare che contribuiscano all'energia di riposo ed a quella cinetica di una particella anche i campi associati con le altre interazioni esistenti in natura. Tuttavia la nostra conoscenza incompleta di quelle interazioni rende impossibile dare una risposta precisa in questo momento. In effetti, il problema trattato qui e nell'Esempio 16.14 costituisce ciò che è chiamato la determinazione della *autoenergia* dell'elettrone. Lo scopo della nostra discussione è stato solo quello di prospettare il problema allo studente. Se volessimo trattarlo adeguatamente dovremmo, tuttavia, far uso delle tecniche della meccanica quantistica ad un livello più elevato di quello di questo libro.

17.10 Oscillazioni elettriche

Abbiamo visto in varie occasioni che esistono tre parametri che caratterizzano il flusso di elettricità in un circuito elettrico: la capacità C, la resistenza R, e l'autoinduttanza L. Analizzeremo ora le modalità secondo le quali questi tre parametri determinano congiuntamente la corrente prodotta da una fem assegnata. Supponendo che nel circuito di Fig. 17–20(a) fluisca una corrente I nella direzione indicata, sulle armature del condensatore C appaiono le cariche q e $-q$ in modo tale che

Queste cariche producono una fem $V_C = -q/C$. Compare il segno meno giacchè la fem si oppone alla corrente I in seguito alla tendenza del condensatore a scaricarsi attraverso il circuito. Ai capi dell'induttanza L esiste un'altra fem eguale a $V_L = -L(dI/dt)$ secondo quanto espresso dall'Eq. (17.17). Inoltre, può esistere nel circuito qualche altra fem quale $V_\mathcal{E}$, mostrata in Fig. 17–20(b).

(a) ***Oscillazioni libere.*** Studieremo inizialmente la situazione nella quale agiscono solo le fem V_L e V_C. La corrente in questo caso viene iniziata caricando il condensatore o generando una variazione di flusso del campo magnetico attraverso l'induttanza o inserendo,

Figura 17–20

where r_e is the radius of the electron as defined in Eq. (16.45). The fact that our rough calculation gives a result of the same order of magnitude as in Example 16.14, where we obtained $R = \frac{3}{5}r_e$, is a proof of the consistency of our theory, since only the order of magnitude can be estimated. When we combine our present result with that of Example 16.14, it seems plausible to think that the rest energy of a charged particle is associated with the energy of its electric field, while the kinetic energy corresponds to the energy of the magnetic field. However, it is logical to think that the fields associated with the other interactions existing in nature also contribute to the rest and kinetic energies of a particle. However, our incomplete knowledge of those interactions makes it impossible to give a definite answer at this moment. In fact, the problem we have considered, both in Example 16.14 and here, is what is called the determination of the *self energy* of the electron. The purpose of our discussion of this problem has been to bring it to the attention of the student. If we wished to handle it properly, however, we would have to employ the techniques of quantum mechanics at a level which is beyond that of this book.

17.10 Electrical Oscillations

We have seen on separate occasions that there are three parameters which characterize the flow of electricity through an electric circuit: the capacitance C, the resistance R, and the self-inductance L. We shall now analyze the way in which the three together determine the current produced by a given emf. Assuming that the current I in the circuit of Fig. 17–20(a) is in the direction indicated, charges q and $-q$ appear on the plates of the capacitor C such that

$$I = dq/dt. \tag{17.27}$$

These charges produce an emf $V_C = -q/C$. The minus sign appears because the emf opposes the current I as a result of the tendency of the capacitor to discharge through the circuit. At the inductance L there is another emf equal to $V_L = -L(dI/dt)$ according to Eq. (17.17). In addition there may be some other emf applied to the circuit, such as $V_\mathcal{E}$, shown in Fig. 17-20(b).

(a) ***Free oscillations.*** We shall first consider the situation in which only the two emf's V_L and V_C are present. The current in this case is started by charging the capacitor or varying a magnetic flux through the inductance or by inserting,

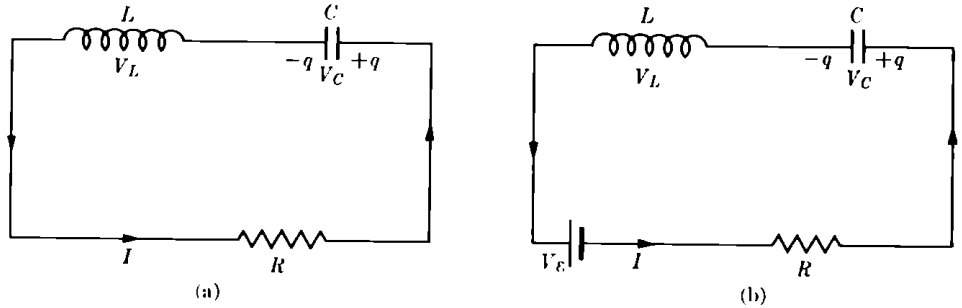


Figure 17–20

e poi togliendo (come in Fig. 17.15), una fem esterna. Quindi, applicando la legge di Ohm, cioè l'Eq. (16.64), abbiamo

Derivando tutta l'equazione rispetto al tempo t, abbiamo

Usando l'Eq. (17.27), e scrivendo tutti i termini alla sinistra del segno di eguaglianza, abbiamo

Questa è un'equazione differenziale la cui soluzione esprime la corrente I in funzione del tempo t. I parametri L, R, e C caratterizzano il circuito.

Questa equazione risulta formalmente identica all'Eq. (12.51), che corrisponde alle oscillazioni smorzate di una particella, se si stabiliscono le seguenti corrispondenze: $L \leftrightarrow m$, $R \leftrightarrow \lambda$, $1/C \leftrightarrow k$. Quindi, tutte le espressioni fornite in quella trattazione possono essere applicate a questo caso. Le quantità γ e ω definite nell'Eq. (12.51), nel caso $R^2 < 4L/C$, divengono ora

e la corrente è data in funzione del tempo dalla stessa espressione (12.53), che ora scriviamo nella forma

come lo studente può verificare mediante sostituzione diretta nell'Eq. (17.29). Il grafico della corrente in funzione del tempo è dato in Fig. 17–21(a). Vediamo che

and later on removing (as in Fig. 17–15), an external emf. Therefore, applying Ohm's law, Eq. (16.64), we have

$$RI = V_L + V_C \qquad \text{or} \qquad RI = -L\frac{dI}{dt} - \frac{q}{C}. \tag{17.28}$$

Taking the derivative of the whole equation with respect to t, we have

$$R\frac{dI}{dt} = -L\frac{d^2I}{dt^2} - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt}.$$

Using Eq. (17.27), and writing all terms on the left-hand side of the equation, we get

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0. \tag{17.29}$$

This is a differential equation whose solution gives the current I as a function of t. The parameters L, R, and C characterize the circuit.

Now this equation is formally identical to Eq. (12.51), corresponding to the damped oscillations of a particle, if we establish the following correspondences: $L \leftrightarrow m$, $R \leftrightarrow \lambda$, $1/C \leftrightarrow k$. Therefore all expressions given there can be applied in this case. The quantities γ and ω defined in Eq. (12.51), when $R^2 < 4L/C$, are now

$$\gamma = R/2L, \qquad \omega = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}, \tag{17.30}$$

and the current is given as a function of time by the same expression (12.53), which we now write as

$$I = I_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha), \tag{17.31}$$

which the student may verify by direct substitution into Eq. (17.29). The graph of the current versus time has been given in Fig. 17–21(a). We see that an oscil-

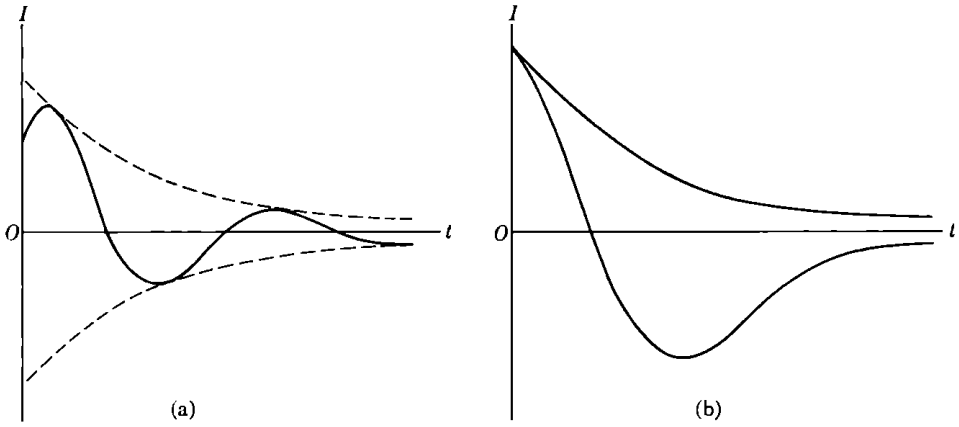


Fig. 17–21. Variazione della corrente di scarica di un condensatore in funzione del tempo; (a) se $R^2 < 4L/C$, (b) se $R^2 > 4L/C$.

Fig. 17–21. Variation of the current of a discharging capacitor as a function of time; (a) when $R^2 < 4L/C$, (b) when $R^2 > 4L/C$.

si è stabilita una corrente oscillante o alternata la cui ampiezza decresce con il tempo. Se il rapporto R/L è molto piccolo, possiamo trascurare sia γ che l'ultimo termine nell'espressione di ω, ottenendo $I = I_0 \sin(\omega t + \alpha)$, cosicchè le oscillazioni elettriche non sono smorzate e la pulsazione risulta

Questa è chiamata *pulsazione caratteristica* di un circuito LC, ed è equivalente alla pulsazione $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ di un oscillatore non smorzato. Si noti che lo smorzamento in un circuito elettrico è dovuto alla dissipazione di energia nella resistenza R.

Se la resistenza è sufficientemente grande talchè $R^2/4L^2 > 1/LC$ oppure $R^2 > 4L/C$, la pulsazione ω diviene immaginaria. In tal caso, la corrente diminuisce gradualmente senza oscillare, come è mostrato in Fig. 17–21b. Le oscillazioni che abbiamo discusso, nelle quali non è applicata alcuna fem esterna, sono le oscillazioni *libere* del circuito.

(b) ***Oscillazioni forzate***. Oscillazioni elettriche forzate sono prodotte se, al circuito di Fig. 17–20, aggiungiamo una fem alternata della forma $V_\varepsilon = V_0 \sin \omega_f t$, come è mostrato in Fig. 17–22. Quindi, l'Eq. (17.28) ha ora la forma

Ripetendo il procedimento impiegato per ottenere l'Eq. (17.29), deriviamo rispetto al tempo e riordiniamo i termini così:

Figura 17–22

Questa equazione è molto simile all'Eq. (12.56) per le oscillazioni forzate di una particella, però con questa importante differenza: la pulsazione ω_f compare come fattore moltiplicativo nel secondo membro dell'Eq. (17.33). La ragione di questo fatto è che la corrente in un circuito elettrico corrisponde alla velocità $v = dx/dt$ del moto di una particella, e ciò a causa della relazione $I = dq/dt$. Possiamo ora applicare le formule del Paragrafo 12.13, con le opportune corrispondenze per le grandezze mostrate in Tabella 17–1. Otteniamo quindi la corrente

dove, usando l'Eq. (12.62) per l'ampiezza v_0 delle oscillazioni della velocità, con le appropriate corrispondenze, troviamo che l'ampiezza della corrente è

latory or alternating current is established whose amplitude decreases with time. When the resistance R is very small compared with the inductance L, we can neglect both γ and the last term in the expression for ω, which results in $I = I_0 \sin(\omega t + \alpha)$, so that the electric oscillations are undamped, and with a frequency

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC}. \tag{17.32}$$

This is called the *characteristic frequency* of an LC circuit, and is equivalent to the frequency $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ for an undamped oscillator. Note that the damping in an electric circuit results from the dissipation of energy in the resistance R.

If the resistance is large enough so that $R^2/4L^2 > 1/LC$ or $R^2 > 4L/C$, the frequency ω becomes imaginary. In this case the current decreases gradually without oscillating, as shown in Fig. 17–21b. The oscillations we have discussed, in which no external emf is applied, are the *free* oscillations of the circuit.

(b) ***Forced oscillations.*** Forced electric oscillations are produced when, to the circuit depicted in Fig. 17–20, we add an alternating emf of the form $V_\varepsilon = V_{\varepsilon 0} \sin \omega_f t$, as shown in Fig. 17–22. Therefore Eq. (17.28) now has the form

$$RI = V_L + V_C + V_{\varepsilon 0} \sin \omega_f t.$$

Repeating the procedure used to obtain Eq. (17.29), we differentiate with respect to time and arrange the terms as

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \omega_f V_{\varepsilon 0} \cos \omega_f t. \tag{17.33}$$

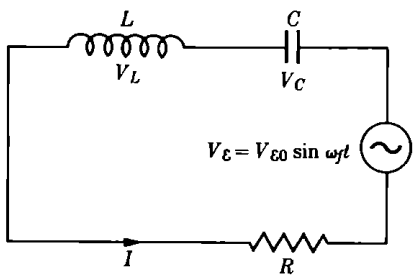


Figure 17–22

This equation is very similar to Eq. (12.56) for forced oscillations of a particle, with this important difference: the frequency ω_f appears as a factor in the right-hand side of Eq. (17.33). The reason for this is that, due to the relation $I = dq/dt$, the current in an electric circuit corresponds to the velocity $v = dx/dt$ in the motion of a particle. We may now apply the formulas of Section 12.13, with the proper correspondence for the quantities as shown in Table 17–1. We then have the current given by

$$I = I_0 \sin(\omega_f t - \alpha) \tag{17.34}$$

where, if we use Eq. (12.62) for the velocity amplitude v_0, with the proper correspondence, we find that the current amplitude is

$$I_0 = \frac{V_{\varepsilon 0}}{\sqrt{R^2 + (\omega_f L - 1/\omega_f C)^2}}. \tag{17.35}$$

TABELLA 17–1 Corrispondenza tra un oscillatore smorzato ed un circuito elettrico

Oscillatore	Circuito Elettrico
Massa, m	Induttanza, L
Smorzamento, λ	Resistenza, R
Costante elastica, k	Reciproco della capacità, $1/C$
Spostamento, x	Carica, q
Velocità, $v = dx/dt$	Corrente, $I = dq/dt$
Forza applicata, F_0	Fem applicata, $V_{\varepsilon 0}$

Usando le espressioni ottenute nel Paragrafo 12.14, possiamo esprimere l'impedenza del circuito elettrico come

La reattanza del circuito è

cosicchè

e la differenza di fase α tra la corrente e la fem applicata si ottiene da

Le quantità Z, R, X, e α sono collegate come mostrato nella Fig. 17–23, che riproduce la Fig. 12–39. Si noti che sia la reattanza che l'impedenza sono espresse in Ohm. Per esempio, l'unità di misura per il termine ωL espressa in termini delle unità fondamentali risulta $s^{-1}\ H = m^2\ kg\ s^{-1}\ C^{-2}$. Cioè, si ha la stessa espressione ottenuta nel Paragrafo 16.10 per l'Ohm. Lo studente può eseguire la medesima verifica per il termine $1/\omega C$. Se R e X sono espresse in Ohm, anche Z deve perciò essere espressa in Ohm, secondo la definizione (17.38).

TABLE 17–1 Correspondence Between a Damped Oscillator and an Electric Circuit

Oscillator	Electric circuit
Mass, m	Inductance, L
Damping, λ	Resistance, R
Elastic constant, k	Inverse capacitance, $1/C$
Displacement, x	Charge, q
Velocity, $v = dx/dt$	Current, $I = dq/dt$
Applied force, F_0	Applied emf, $V_{\varepsilon 0}$

Using the expressions derived in Section 12.14, we can express the impedance of the electric circuit as

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega_f L - 1/\omega_f C)^2}. \tag{17.36}$$

The reactance of the circuit is

$$X = \omega_f L - 1/\omega_f C, \tag{17.37}$$

so that

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{17.38}$$

and the phase difference α between the current and the applied emf is obtained from

$$\tan \alpha = \frac{X}{R} = \frac{\omega_f L - 1/\omega_f C}{R}. \tag{17.39}$$

The quantities Z, R, X, and α are related as shown in Fig. 17–23, which is a reproduction of Fig. 12–39. Note that both the reactance and impedance are expressed in ohms. For example, the term ωL expressed in terms of the fundamental units gives $s^{-1}\ H = m^2\ kg\ s^{-1}\ C^{-2}$. That is the same expression obtained in Section 16.10 for the ohm. The student can make the same verification for the term $1/\omega C$. If R and X are expressed in ohms, then Z, in view of its definition (17.38), must also be expressed in ohms.

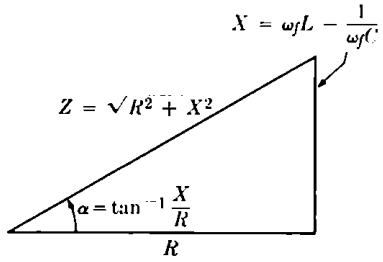


Fig. 17–23. Relazione tra resistenza, reattanza, e impedenza.

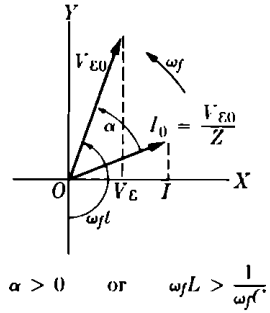


Fig. 17–24. Vettori ruotanti rappresentativi della corrente e della fem in un circuito in regime alternato.

Fig. 17–23. Relation between resistance, reactance, and impedance.

Fig. 17–24. Rotating vectors of the current and the emf in an ac circuit.

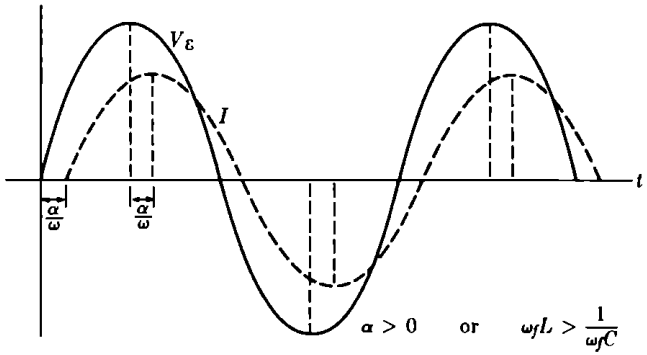


Fig. 17–25. Variazione in funzione del tempo della corrente e della fem in un circuito in corrente alternata.

La fem V_ε e la corrente I possono essere rappresentate con vettori ruotanti, come è illustrato in Fig. 17–24. Le componenti dei vettori lungo l'asse X dànno i valori istantanei di V_ε e di I. La corrente I è in ritardo o in anticipo rispetto alla fem a seconda che α sia positivo o negativo, cioè che $\omega_f L$ sia maggiore di $1/\omega_f C$. La Fig. 17–25 fornisce un diagramma di V_ε e di I in funzione del tempo. La potenza media necessaria per mantenere la corrente si ottiene dall'Eq. (12.70) con le corrispondenze opportune. Essa vale

$$\text{ave} = \text{med}$$

La risonanza in questo caso equivale alla *risonanza di energia*, discussa nel Paragrafo 12.13. Questa si ottiene quando P_{med} è massima, il che avviene quando $\alpha = 0$, cioè quando $\omega_f L = 1/\omega_f C$, in corrispondenza cioè ad una pulsazione $\omega_f = \sqrt{1/LC}$, eguale a quella dell'Eq. (17.32). In condizioni di risonanza, la corrente ha ampiezza massima ed è in fase con la fem, fatto che comporta il valore massimo per la potenza media. I vettori ruotanti V_ε e I sono in fase o sovrapposti e la corrente e la fem variano come è indicato in Fig. 17–26.

Come nel caso delle oscillazioni forzate di una particella, la soluzione generale dell'Eq. (17.33) è la somma dell'Eq. (17.34) e di una corrente di transitorio data dall'Eq. (17.31). Tuttavia, a causa dello smorzamento, il termine corrispondente all'Eq. (17.31)

Fig. 17–26. Relazione tra la fem e la corrente quando la differenza di fase è nulla (risonanza).

Fig. 17–25. Variation of current and emf as a function of time in an ac circuit.

The emf V_ε and the current I can be represented by rotating vectors, as illustrated in Fig. 17–24. The components of the vectors along the X-axis give the instantaneous values of V_ε and I. The current I lags or leads the emf according to whether α is positive or negative, or $\omega_f L$ is larger or smaller than $1/\omega_f C$. Figure 17–25 gives the plot of V_ε and I versus time. The average power required to maintain the current is obtained from Eq. (12.70) with the proper correspondence. That is,

$$P_{\text{ave}} = \tfrac{1}{2} V_{\varepsilon 0} I_0 \cos\alpha = \tfrac{1}{2} R I_0^2. \tag{17.40}$$

Resonance in this case is equivalent to *energy resonance*, as discussed in Section 12.13. It is obtained when P_{ave} is maximum, which occurs when $\alpha = 0$ or when $\omega_f L = 1/\omega_f C$, corresponding to a frequency $\omega_f = \sqrt{1/LC}$, equal to Eq. (17.32). At resonance the current has maximum amplitude and is in phase with the emf, which results in maximum average power. The rotating vectors V_ε and I are in phase or superposed and the current and emf vary, as shown in Fig. 17–26.

As in the case of the forced oscillations of a particle, the general solution of Eq. (17.33) is the sum of Eq. (17.34) and a transient current given by Eq. (17.31). However, because of the damping, the term corresponding to Eq. (17.31) quickly

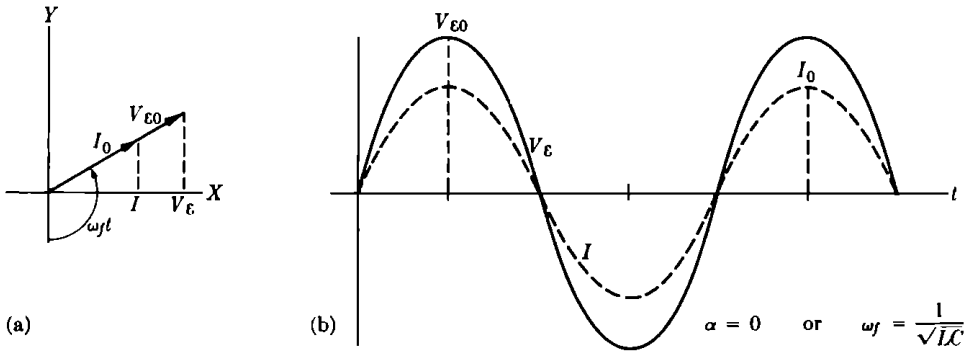


Fig. 17–26. Relation between emf and current when the phase difference is zero (resonance).

diviene rapidamente trascurabile e si può prendere in considerazione solo l'Eq. (17.34). Non di meno, quando si verificano alcune alterazioni nel circuito, come una variazione di L, C, o R, il transitorio si verifica per un breve intervallo di tempo finchè il circuito non è stabilizzato nelle nuove condizioni.

ESEMPIO 17.7. Un circuito ha una resistenza di 40Ω, una autoinduttanza di 0.1 H ed una capacità di 10^{-5} F. La fem applicata ha una frequenza di 60 Hz. Trovare la reattanza, l'impedenza, lo sfasamento della corrente e la frequenza di risonanza del circuito.

Soluzione: La pulsazione è $\omega_f = 2\pi\nu$, e siccome $\nu = 60$ Hz, abbiamo che $\omega_f = 376.8\ \text{s}^{-1}$. Quindi, usando l'Eq. (17.37), otteniamo

L'impedenza è perciò

Lo sfasamento è, secondo l'Eq. (17.39),

ossia

Quindi, la corrente anticipa la fem. Per la frequenza di risonanza troviamo, usando l'Eq. (17.32), che

ossia

ESEMPIO 17.8. Usando la tecnica dei vettori ruotanti, discutere un circuito in corrente alternata.

Soluzione: I risultati ottenuti nel Paragrafo 17.10 possono essere ottenuti molto facilmente mediante la tecnica dei vettori ruotanti. Si noti che l'equazione del circuito può essere scritta nella forma

Come si è detto che RI è la differenza di potenziale ai capi della resistenza R, possiamo dire che $L(dI/dt)$ e q/C sono le differenze di potenziale (o cadute di tensione) rispettivamente ai capi dell'induttanza e del condensatore.

becomes negligible and it is necessary only to take Eq. (17.34) into account. Nevertheless, when some modification occurs in the circuit, such as a variation in L, C, or R, the transient term does appear for a short time until the circuit adjusts to the new conditions.

EXAMPLE 17.7. A circuit has a resistance of 40Ω, a self inductance of 0.1 H and a capacity of 10^{-5} F. The applied emf has a frequency of 60 Hz. Find the reactance, the impedance, the phase shift of the current, and the resonant frequency of the circuit.

Solution: The angular frequency is $\omega_f = 2\pi\nu$, and since $\nu = 60$ Hz, we have that $\omega_f = 376.8\ \text{s}^{-1}$. Therefore, using Eq. (17.37), we obtain

$$X = \omega_f L - 1/\omega_f C = -227.57\Omega.$$

The impedance is then

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 231.2\Omega.$$

The phase shift, according to Eq. (17.39), is

$$\tan\alpha = X/R = -5.680 \qquad \text{or} \qquad \alpha = -80°21'.$$

Therefore the current is leading the emf. For the resonant frequency, we find, using Eq. (17.32), that

$$\omega_0 = \sqrt{1/LC} = 10^3\ \text{s}^{-1} \qquad \text{or} \qquad \nu = \omega/2\pi = 159\ \text{Hz}.$$

EXAMPLE 17.8. Using the rotating vector technique, discuss an alternating-current circuit.

Solution: The results stated in Section 17.10 can be derived very easily by means of the technique of rotating vectors. Note that the equation of the circuit can be written in the form

$$V_{\mathcal{E}0}\sin\omega_f t = RI - V_L - V_C = RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C}.$$

In the same way that we say that RI is the potential difference across the resistance R, we may say that $L(dI/dt)$ and q/C are the respective potential differences (or voltage drops) across the inductance and the capacitance.

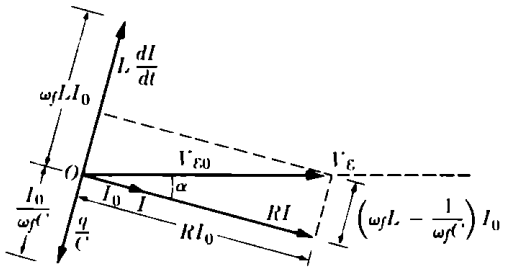


Fig. 17–27. Diagramma vettoriale del circuito mostrato in Fig. 17–22.

Fig. 17–27. Rotating vector diagram for the circuit shown in Fig. 17–22.

Se assumiamo $I = I_0 \sin(\omega_f t - \alpha)$, il vettore ruotante che rappresenta la corrente, è in ritardo rispetto a quello della fem di un angolo α (Fig. 17–27). Ora possiamo tener conto del fatto che il vettore ruotante che rappresenta la tensione è la somma dei vettori ruotanti corrispondenti ai tre termini alla destra nell'equazione precedente. Notiamo che $dI/dt = \omega_f I_0 \cos(\omega_f t - \alpha)$ e $q = \int I\,dt = -(1/\omega_f) I_0 \cos(\omega_f t - \alpha)$. Quindi possiamo scrivere

Differenza di potenziale ai capi della resistenza

, in fase con I.

Differenza di potenziale ai capi dell'induttanza

, in anticipo di $\frac{1}{2}\pi$ rispetto a I.

Differenza di potenziale ai capi del condensatore

, in ritardo di $\frac{1}{2}\pi$ rispetto a I.

I tre vettori ruotanti sono illustrati in Fig. (17–27), dove la linea di riferimento è data dal vettore ruotante che corrisponde a V_ε. Le ampiezze sono RI_0, $\omega_f L I_0$, e $I_0/\omega_f C$. Il loro risultato deve essere $V_{\varepsilon 0}$, poichè la somma delle tre cadute di potenziale è eguale alla fem applicata. Quindi

oppure

Risolvendo questa equazione rispetto ad I_0, si ottiene un risultato identico a quello dato nell'Eq. (17.35). Dalla figura, possiamo calcolare l'angolo di fase α, il cui valore è in accordo con quello dell'Eq. (17.39). La tecnica dei vettori ruotanti è usata ampiamente nei lavori di ingegneria sui circuiti in corrente alternata.

17.11 Circuiti accoppiati

Consideriamo due circuiti come quelli (1) e (2) della Fig. 17–28. Quando nel circuito (1) fluisce una corrente I_1, nell'intorno si stabilisce un campo magnetico proporzionale a I_2, il cui flusso Φ_2 attraverso il circuito (2) è anch'esso proporzionale a I_1. Possiamo scrivere

dove M è un coefficiente di proporzionalità che rappresenta il flusso del campo magnetico attraverso il circuito (2) per unità di corrente nel circuito (1). Analogamente, se una corrente I_2 fluisce nel circuito (2), viene generato un campo magnetico che a sua volta produce un flusso Φ_1 attraverso il circuito (1) che è proporzionale a I_2. Quindi possiamo scrivere

Notiamo che nell'Eq. (17.42), abbiamo usato il medesimo coefficiente M dell'Eq. (17.41). Ciò significa che constatiamo che il flusso del campo magnetico attraverso il circuito (1) e dovuto all'unità di corrente nel circuito (2) è il medesimo del caso precedente. Questo coefficiente comune è

If we assume that $I = I_0 \sin(\omega_f t - \alpha)$, the rotating vector of the current lags that of the emf by the angle α (Fig. 17–27). Now we may consider that the rotating vector of the emf is the sum of the rotating vectors corresponding to the three terms on the right in the above equation. We note that $dI/dt = \omega_f I_0 \cos(\omega_f t - \alpha)$ and $q = \int I\,dt = -(1/\omega_f) I_0 \cos(\omega_f t - \alpha)$. Therefore we may write

Potential drop across the resistance:

$$RI = RI_0 \sin(\omega_f t - \alpha), \text{ in phase with } I.$$

Potential drop across the inductance:

$$L(dI/dt) = \omega_f L I_0 \sin(\omega_f t - \alpha + \tfrac{1}{2}\pi), \text{ leading } I \text{ by } \tfrac{1}{2}\pi.$$

Potential drop across the capacitor:

$$q/C = (1/\omega_f C) I_0 \sin(\omega_f t - \alpha - \tfrac{1}{2}\pi), \text{ lagging } I \text{ by } \tfrac{1}{2}\pi.$$

The three rotating vectors are shown in Fig. 17–27, where the reference line is given by the rotating vector corresponding to V_ε. Their amplitudes are RI_0, $\omega_f L I_0$, and $I_0/\omega_f C$. Their resultant must be $V_{\varepsilon 0}$, since the three potential drops add to the applied emf. Therefore

$$V_{\varepsilon 0}^2 = R^2 I_0^2 + \left(\omega_f L - \frac{1}{\omega_f C}\right)^2 I_0^2$$

or

$$V_{\varepsilon 0} = \sqrt{R^2 + (\omega_f L - 1/\omega_f C)^2}\, I_0.$$

If we solve this equation for I_0, the result is identical to Eq. (17.35). From the figure we can compute the phase angle α, its value agreeing with Eq. (17.39). The rotating-vector technique is widely used in the engineering analysis of alternating-current circuits.

17.11 Coupled Circuits

Let us consider two circuits such as (1) and (2) in Fig. 17–28. When a current I_1 circulates in circuit (1), a magnetic field proportional to I_2 is established around it, and through circuit (2) there is a magnetic flux Φ_2 which is also proportional to I_1. We may then write

$$\Phi_2 = M I_1, \tag{17.41}$$

where M is a coefficient of proportionality, and represents the magnetic flux through circuit (2) per unit current in circuit (1). Similarly, if a current I_2 circulates in circuit (2), a magnetic field is produced, and it in turn produces a magnetic flux Φ_1 through circuit (1) which is proportional to I_2. Hence we may write

$$\Phi_1 = M I_2. \tag{17.42}$$

Note that in Eq. (17.42) we have written the same coefficient M as in Eq. (17.41). This means that we recognize that the magnetic flux through circuit (1) due to the unit current in circuit (2) is the same as before. This common coefficient is

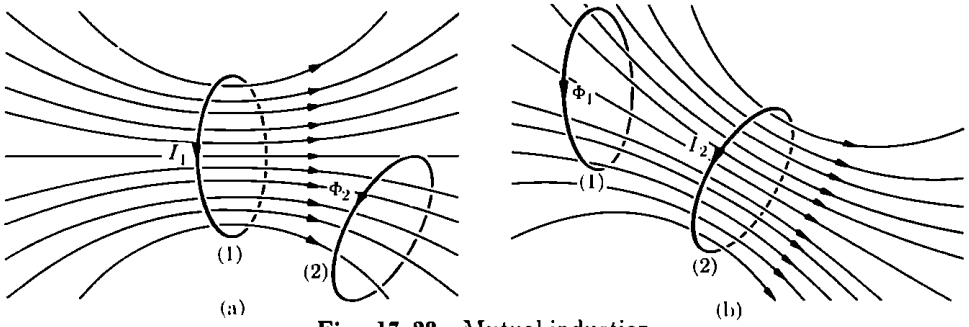


Fig. 17–28. La mutua induzione.

Fig. 17–28. Mutual induction.

chiamato *mutua induttanza* dei due circuiti, e si può dimostrare che deve essere il medesimo nei due casi, come si è detto. In altre parole, la mutua induttanza è simmetrica. Il coefficiente M dipende dalla forma dei circuiti e dal loro mutuo orientamento. Anche M è misurato in henry, giacchè la sua unità corrisponde al Wb A^{-1}.

Se la corrente I_1 è variabile, il flusso Φ_2 attraverso il circuito (2) cambia, e nel circuito viene indotta una fem V_{M2}. Questa fem è data da

called the *mutual inductance* of the two circuits, and it can be proved that it must be the same in both cases, as we have indicated. In other words, mutual induction is symmetrical. The coefficient M depends on the shapes of the circuits and their relative orientation. It is also measured in henrys, since it corresponds to Wb A^{-1}.

If the current I_1 is variable, the flux Φ_2 through circuit (2) changes and an emf V_{M2} is induced in this circuit. This emf is given by

$$V_{M2} = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

Scrivendo questa equazione, supponiamo che i circuiti siano rigidi e fissati nello spazio cosicchè M risulti costante. Analogamente, se la corrente I_2 varia, nel circuito (1) è indotta una fem V_{M1}, il cui valore è dato da

In writing this equation, we assume that the circuits are rigid and fixed in space, so that M is constant. Similarly, if the current I_2 is variable, an emf V_{M1} is induced in circuit (1), given by

$$V_{M1} = -M \frac{dI_2}{dt}. \tag{17.43}$$

Questa è la ragione per la quale M è chiamato "mutua induttanza," giacchè descrive l'effetto mutuo o l'influenza mutua tra i due circuiti. Inoltre, se i due circuiti sono posti in moto relativo, avviene una variazione di M e vengono indotte in essi delle fem.

Possiamo ottenere le equazioni che pongono in relazione la corrente nel circuito (1) con i parametri del sistema, usando la legge di Ohm. Tutto ciò che dobbiamo fare è di aggiungere all'Equazione (17.28) la fem V_{M1} data dall'Eq. (17.43). Cioè,

This is why M is called "mutual inductance," since it describes the mutual effect or influence between the two circuits. In addition, if the circuits are moved relative to each other, resulting in a change in M, emf's are also induced in them.

We can obtain the equation relating the current in circuit (1) with the parameters of the system by using Ohm's law. All we have to do is to add to Eq. (17.28) the emf V_{M1} given by Eq. (17.43). That is,

$$RI_1 = V_{L1} + V_{C1} + V_{M1},$$

dove $V_{L1} = -L_1\, dI_1/dt$ e $V_{C1} = -q_1/C_1$. Quindi, se deriviamo rispetto al tempo l'equazione precedente e notiamo che $I_1 = dq_1/dt$, otteniamo in luogo dell'Eq. (17.29)

where $V_{L1} = -L_1\, dI_1/dt$ and $V_{C1} = -q_1/C_1$. Therefore, if we take the time derivative of the preceding equation and note that $I_1 = dq_1/dt$, instead of Eq. (17.29) we get

$$L_1 \frac{d^2I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} I_1 = -M \frac{d^2I_2}{dt^2}. \tag{17.44}$$

Analogamente, per il circuito (2), otteniamo l'equazione

Similarly, for circuit (2), we get the equation

$$L_2 \frac{d^2I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} I_2 = -M \frac{d^2I_1}{dt^2}. \tag{17.45}$$

Le Equazioni (17.44) e (17.45) costituiscono un insieme di equazioni differenziali accoppiate simile all'Eq. (12.36) per due oscillatori accoppiati. La costante di accoppiamento è M. Non studieremo la soluzione generale ma, sulla base della nostra discussione degli oscillatori accoppiati meccanicamente del Paragrafo 12.10, concludiamo che si verifica uno scambio di energia tra i circuiti. Applicazioni pratiche comuni di questo processo sono i *trasformatori* ed i *generatori ad induzione*. Un'altra applicazione dell'induzione mutua, in senso lato, è costituita dalla trasmissione di un segnale da un luogo ad un altro effettuata producendo una corrente variabile in un circuito chiamato *trasmettitore*. Questo circuito a sua volta agisce su un altro circuito accoppiato, chiamato *ricevitore*. È questo il caso del telegrafo, della radio, della televisione, del radar, ecc. La discussione di questi dispositivi tuttavia richiede una tecnica diversa che sarà in parte illustrata nel Capitolo 19.

L'aspetto più importante e fondamentale della mutua induzione è il fatto che *l'energia può essere scambiata tra due circuiti mediante il campo elettromagnetico*. Possiamo dire che il campo elettromagnetico prodotto dalle correnti nei circuiti agisce come un veicolo per il trasferimento dell'energia, trasportandola nello spazio da un circuito all'altro.

L'induzione mutua tra due circuiti è un fenomeno macroscopico che è originato dalle interazioni elementari tra le cariche in moto che costituiscono le rispettive correnti. Quindi dal fenomeno della mutua induzione, possiamo dedurre che l'interazione elettromagnetica tra due particelle cariche può essere descritta come uno scambio di energia tramite il loro campo elettromagnetico.

Quando due particelle cariche sono soggette all'interazione elettromagnetica, il principio di conservazione dell'energia deve essere espresso in una nuova forma per includere l'energia del campo. [Si ricordi che noi dobbiamo esprimere in una forma nuova anche il principio di conservazione della quantità di moto dato nell'Eq. (15.68) per tenere conto anche della quantità di moto del campo.] Quindi, possiamo scrivere l'energia totale del sistema di due particelle cariche interagenti come

field = campo

$$E = E_1 + E_2 + E_{\text{campo}}$$

dove E_1 e E_2 sono le energie di ciascuna particella date dalla somma delle loro energie cinetiche e potenziali che sono originate da tutte le forze agenti su queste, mentre E_{campo} è l'energia associata con il loro campo elettromagnetico.

Si può dimostrare che in condizioni statiche (o in condizioni che variano molto lentamente nel campo), E_{campo} corrisponde esattamente all'energia potenziale

$$E_p = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r_{12}$$

dovuta all'interazione coulombiana tra le due cariche.

È la somma dei tre termini nell'Eq. (17.46) che rimane costante durante il moto di due particelle se queste non sono soggette ad altre forze.

ESEMPIO 17.9. Una bobina consistente di N spire è avvolta attorno alla parte centrale di un solenoide toroidale che ha n spire per unità di lunghezza ed una sezione trasversale di area S. Calcolare l'induttanza mutua del sistema (Fig. 17–29).

Equations (17.44) and (17.45) form a set of simultaneous differential equations similar to Eq. (12.36) for two coupled oscillators. The coupling constant is M. We shall not consider the general solutions, but from our discussion of mechanically coupled oscillators in Section 12.10, we conclude that there will be an exchange of energy between the circuits. Common and practical applications of this process are the *transformer* and the *induction generator*. Another application of mutual induction, in a broader sense, is the transmittal of a signal from one place to another by producing a variable current in one circuit, called the *transmitter*. This circuit in turn acts on another circuit coupled to it, called the *receiver*. This is the case for telegraph, radio, television, radar, etc. The discussion of these devices, however, requires a different technique, which will be covered partially in Chapter 19.

The most important and fundamental aspect of mutual induction is that *energy can be exchanged between two circuits via the electromagnetic field.* We may say that the electromagnetic field produced by the currents in the circuits acts as a carrier of energy, transporting the energy through space from one circuit to the other.

But mutual induction between two circuits is a macroscopic phenomenon, resulting from elementary interactions between the moving charges which constitute their respective currents. Thus we may conclude from the phenomenon of mutual induction that the electromagnetic interaction between two charged particles can be described as an exchange of energy via their mutual electromagnetic field.

When two charged particles are subject to electromagnetic interaction, the principle of conservation of energy must be restated to include the energy of the field. [Recall that we also had to restate the principle of conservation of momentum in Eq. (15.68) to take the momentum of the field into account.] Thus we must write the total energy of a system of two interacting charged particles as

$$E = E_1 + E_2 + E_{\text{field}}, \tag{17.46}$$

where E_1 and E_2 are the energies of each particle, being the sum of their kinetic and potential energies resulting from any force acting on them, and E_{field} is the energy associated with their electromagnetic field.

It can be proved that under static conditions (or conditions which vary very slowly with time), E_{field} corresponds exactly to the potential energy

$$E_p = q_1 q_2 / 4\pi\epsilon_0 r_{12}$$

due to the Coulomb interaction between the two charges.

It is the sum of the three terms in Eq. (17.46) that remains constant during the motion of two particles if they are subject to no other forces.

EXAMPLE 17.9. A coil containing N turns is wrapped around the central portion of a toroidal solenoid having n turns per unit length and a cross section of area S. Calculate the mutual inductance of the system (Fig. 17-29).

Soluzione: Possiamo risolvere il problema o trovando il flusso del campo magnetico attraverso il solenoide quando una corrente percorre la bobina o, viceversa, trovando il flusso del campo magnetico attraverso la bobina quando la corrente percorre il solenoide. Seguiamo il secondo procedimento che è il più agevole. Possiamo ricordare dall'Esempio 16.19 che, nel caso di un solenoide toroidale, il campo magnetico è confinato nel suo interno ed ha il valore, dato dall'Eq. (16.71), $\mathcal{B} = \mu_0 nI$. Il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi sezione del solenoide è

dove S è l'area di una sezione trasversale del solenoide. Esso è pari al flusso attraverso ciascuna spira della bobina, anche se la sua sezione trasversale è maggiore. Quindi il flusso del campo magnetico attraverso la bobina è

coil = bobina

Un confronto con l'Eq. (17.41) fornisce la seguente espressione per la mutua induttanza del sistema,

Questa disposizione geometrica è largamente usata quando si richiede una mutua induttanza campione.

Coil = Bobina
Solenoid = Solenoide

Fig. 17–29.

Fig. 17–30. Corrente attraverso una superficie chiusa che racchiude la carica q.

17.12 Il principio di conservazione della carica

Nel Paragrafo 14.2 abbiamo discusso della conservazione della carica. In altre parole, in tutti i processi che hanno luogo nell'universo, l'ammontare netto della carica deve sempre rimanere il medesimo. Questa affermazione può essere espressa in una maniera quantitativa che risulta molto utile. Consideriamo una superficie chiusa S (Fig. 17–30), e indichiamo con q la carica netta all'intorno della superficie ad un istante assegnato. Siccome il nostro problema è dinamico e non statico, avviene che cariche libere (per esempio, gli elettroni in un metallo o gli ioni in un plasma) si muovono attraverso il mezzo, attraversando la superficie S. In certi istanti, può accadere che escano più cariche di quante non ne entrino, il che comporta una diminuzione della carica netta q entro la superficie S. In altri istanti, la situazione può essere capovolta e le cariche entranti possono superare quelle uscenti con un conseguente aumento della carica netta q. Naturalmente se il flusso di carica uscente ed entrante attraverso S è il medesimo

Solution: We may solve the problem either by finding the magnetic flux through the solenoid when a current flows along the coil, or conversely, by finding the magnetic flux through the coil when a current flows along the solenoid. Let us follow the second procedure, which is the easier of the two. We may recall from Example 16.19 that, in the case of a toroidal solenoid, the magnetic field is confined to its interior and has a value given by Eq. (16.71), $\mathcal{B} = \mu_0 nI$. The magnetic flux through any cross section of the solenoid is

$$\Phi_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}S = \mu_0 nSI,$$

where S is the cross-sectional area of the solenoid. This is the same as the flux through any turn of the coil, even if its cross section is larger. Therefore the magnetic flux through the coil is

$$\Phi_{\text{coil}} = N\Phi_{\mathcal{B}} = \mu_0 nNSI.$$

Comparison with Eq. (17.41) gives, for the mutual inductance of the system,

$$M = \mu_0 nNS.$$

This arrangement is widely used in the laboratory when a standard mutual inductance is required.

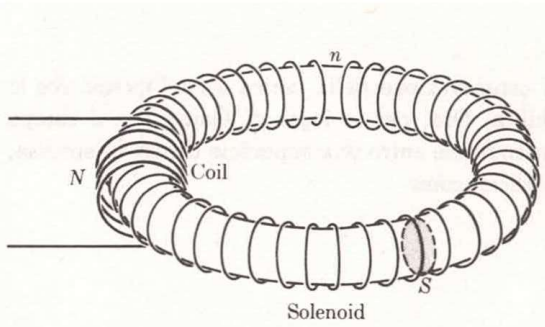


Figure 17–29

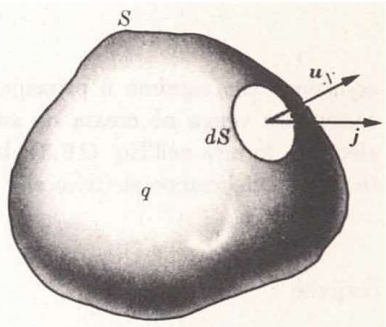


Fig. 17–30. Current across a closed surface enclosing a charge q.

17.12 The Principle of Conservation of Charge

In Section 14.2 we discussed the fact that electric charge is conserved. In other words, in all processes that occur in the universe, the net amount of charge must always remain the same. This statement may be expressed in a quantitative way which is very useful. Let us consider a closed surface S (Fig. 17–30), and designate by q the net charge inside it at a given time. Since our problem is dynamic and not static, free charges (such as electrons in metals or ions in a plasma) are moving through the medium, crossing the surface S. At some times there may be more outgoing charges than entering ones, resulting in a decrease in the net charge q within the surface S. At other times the situation may be reversed, and the incoming charges may exceed those leaving, resulting in an increase in the net charge q. Of course, if the outgoing and incoming charge fluxes through S are the same,

la carica netta q rimane la stessa. Il principio di conservazione della carica comporta ovviamente che

Diminuzione di carica = flusso di carica uscente − flusso di carica entrante
= flusso netto di carica uscente.

Allora il flusso netto di carica nell'unità di tempo, ossia la corrente, attraverso la superficie S, come si è visto nell'Esempio 16.1, è espresso da $I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS$, ove $\boldsymbol{j}$ è la densità di corrente. Nel nostro caso, la superficie S è chiusa, cosicchè l'integrale

fornisce la carica netta uscente nell'unità di tempo attraverso la superficie, cioè la differenza tra il flusso di carica uscente e quello entrante. D'altra parte, la diminuzione di carica nell'unità di tempo entro S vale $-dq/dt$. Quindi, in termini matematici l'Eq. (17.47) diviene $-dq/dt = I$, ossia

equazione che esprime il principio di conservazione della carica sotto l'ipotesi che la carica non venga nè creata nè annichilita. Ora, per la legge di Gauss per il campo elettrico, fornita nell'Eq. (16.3), la carica totale entro una superficie chiusa è espressa, in termini del campo elettrico alla superficie, come

cosicchè

Sostituendo questo risultato nell'Eq. (17.49), otteniamo allora

relazione che esprime il principio di conservazione della carica, tenendo conto della legge di Gauss. Se i campi sono statici, l'integrale $\oint_S \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS$ non dipende dal tempo. La sua derivata rispetto al tempo è quindi nulla, cosicchè si ottiene

, per i campi statici.

Ciò significa che, per i campi statici, non si verifica alcuna accumulazione o diminuzione di carica in qualsiasi regione dello spazio e che la corrente netta attraverso una superficie chiusa è nulla. (Questo è in sostanza il contenuto della prima legge di Kirchhoff sull'analisi delle reti, introdotta nell'Esempio 16.17.)

the net charge q remains the same. The principle of conservation of charge obviously requires that

Loss of charge = outgoing charge flux − incoming charge flux
= net outgoing charge flux. (17.47)

Now the net charge flux per unit time, or current, through a surface S was found in Example 16.1 to be $I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS$, where $\boldsymbol{j}$ is the current density. In our present case the surface S is closed, so that

$$I = \oint_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS \tag{17.48}$$

gives the net charge passing out through the surface per unit time; that is, the difference between the outgoing and the incoming charge flux per unit time. On the other hand, the loss of charge per unit time within S is $-dq/dt$. Therefore, in mathematical terms, Eq. (17.47) becomes $-dq/dt = I$ or

$$-\frac{dq}{dt} = \oint_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS, \tag{17.49}$$

an equation which expresses the principle of conservation of charge under the assumption that charge is neither created nor annihilated. Now, according to Gauss' law for the electric field as given by Eq. (16.3), the total charge within a closed surface is expressed in terms of the electric field at the surface by

$$q = \epsilon_0 \oint_S \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS,$$

so that

$$\frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS.$$

Substituting this result in Eq. (17.49), we then get

$$\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS = 0 \tag{17.50}$$

for the expression of the principle of conservation of charge, in a way that incorporates Gauss' law. When the fields are static, the integral $\oint_S \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS$ does not depend on time. Its time derivative is therefore zero, resulting then in

$$\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS = 0, \quad \text{for static fields.} \tag{17.51}$$

This means that for static fields there is no accumulation or loss of charge in any region of space, and the net current across a closed surface is zero. (This is essentially the content of Kirchhoff's first law for network analysis, introduced in Example 16.17.)

17.13 La legge di Ampère-Maxwell

La legge di Faraday-Henry, nella forma (17.2) o (17.15), stabilisce una relazione tra il campo magnetico ed il campo elettrico in una medesima regione dello spazio. La stretta connessione che esiste tra i campi elettrico e magnetico suggerisce che una relazione analoga debba esistere tra la rapidità di variazione di un campo elettrico ed un campo magnetico nello stesso luogo. L'Eq. (17.2), cioè,

correla la circuitazione del campo elettrico alla rapidità di variazione nel tempo del flusso del campo magnetico. Potremmo attenderci che un'espressione simile correli la circuitazione del campo magnetico con la rapidità di variazione del flusso del campo elettrico. Sinora abbiamo trovato che la circuitazione del campo magnetico è espressa dalla legge di Ampère, data dall'Eq. (16.68), come

ma questa espressione non contiene alcuna variazione nel tempo del flusso del campo elettrico. Questo non è sorprendente poichè l'equazione era stata ricavata in condizioni statiche. Tuttavia, possiamo sospettare che la legge di Ampère debba essere rivista quando viene applicata a campi dipendenti dal tempo.

Ora, la legge di Ampère nella forma (17.52) si applica alla superficie S il cui contorno è la linea L. La superficie S è arbitraria, col solo vincolo di essere delimitata dalla linea L. Se la linea L si restringe, il valore di $\oint_L \mathfrak{B} \cdot d\boldsymbol{l}$ diminuisce (Fig. 17–31). Alla fine, questo valore diviene nullo quando L si riduce ad un punto e la superficie S diviene una superficie *chiusa*. La legge di Ampère, espressa dall'Eq. (17.52), dunque richiede che

Quest'espressione è in accordo con l'Eq. (17.51) per la conservazione della carica, fintantochè il campo è

17.13 The Ampère-Maxwell Law

The Faraday-Henry law, as expressed in Eqs. (17.2) or (17.15), establishes a relation between the magnetic field and the electric field in the same region of space. The close relationship that exists between the electric and magnetic fields suggests that an analogous relation should exist between the time rate of change of an electric field and a magnetic field at the same place. Now Eq. (17.2), that is,

$$\oint_L \mathfrak{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathfrak{B} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS,$$

relates the circulation of the electric field to the time rate of change of the flux of the magnetic field. We might expect that a similar expression must relate the circulation of the magnetic field to the time rate of change of the flux of the electric field. So far we have found that the circulation of the magnetic field is expressed in Ampère's law, given by Eq. (16.68) as

$$\oint_L \mathfrak{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS, \tag{17.52}$$

but this expression does not contain any time rate of change of the flux of the electric field. This is not surprising, since it was derived under static conditions. However, we may suspect that Ampère's law may need revising when it is applied to time-dependent fields.

Now Ampère's law in its form (17.52) applies to a surface S bounded by line L. The surface S is arbitrary so long as it is bounded by the line L. If the line L shrinks, the value of $\oint_L \mathfrak{B} \cdot d\boldsymbol{l}$ decreases (Fig. 17–31). It eventually becomes zero when L shrinks to a point, and the surface S becomes a *closed* surface. Ampère's law, as expressed by Eq. (17.52), then requires that

$$\oint_S \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS = 0.$$

This agrees with Eq. (17.51) for the conservation of charge, so long as the field is

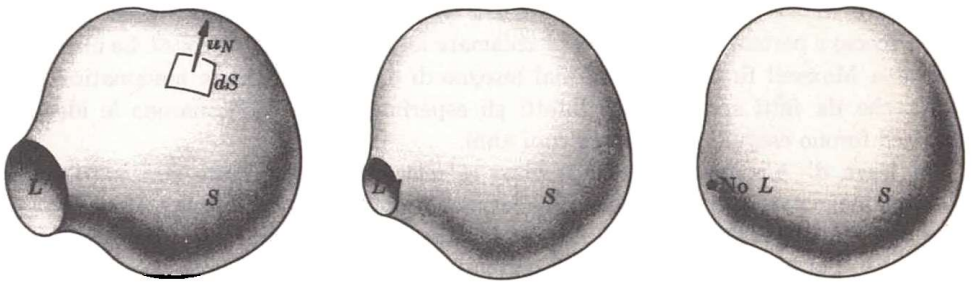


Fig. 17–31. Superficie limitata dalla linea L. Se la linea L si riduce ad un punto, la superficie diviene chiusa.

Fig. 17–31. Surface bounded by line L. When line L shrinks to a point, the surface becomes closed.

statico. Tuttavia, sappiamo che se il campo non è statico, ma dipende dal tempo, l'Eq. (17.51) non è più corretta. Questo conferma il nostro sospetto che la legge di Ampère debba essere modificata dovendosi trattare campi dipendenti dal tempo. La modifica sembra ovvia. Dobbiamo sostituire $\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS$ nell'Eq. (17.52) con

in accordo con l'Eq. (17.50). Ciò comporta

Ricordando che $\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS$ è la corrente I attraverso la superficie S, dobbiamo anche scrivere l'Eq. (17.53) come

Questa equazione deve essere confrontata con l'Eq. (16.67) esprimente la legge di Ampère. L'equazione (17.54) si riduce alla legge di Ampère per campi statici, giacchè in tal caso l'ultimo termine è nullo, e l'equazione diviene uguale all'Eq. (17.50) quando la linea L si riduce ad un punto e la superficie S diviene chiusa. Quindi, vediamo che questa equazione soddisfa tutte le condizioni fisiche trovate in precedenza.

Sinora abbiamo svolto una trattazione puramente matematica al fine di rendere la legge di Ampère compatibile con la legge di conservazione della carica. Un necessario passo successivo è costituito dalla verifica sperimentale della correttezza dell'Eq. (17.53) e del fatto che questa descrive la situazione reale che si riscontra in natura. Possiamo anticipare che le cose stanno proprio così. La miglior prova di questo fatto è costituita dall'esistenza delle onde elettromagnetiche, argomento questo che sarà trattato nel Capitolo 19.

Il ricercatore che per primo suggerì di modificare la legge di Ampère nella maniera suddetta è stato il fisico inglese James Clerk Maxwell (1831—1879) verso la fine del secolo scorso e pertanto l'Eq. (17.53) è chiamata *legge di Ampère-Maxwell*. La modifica dovuta a Maxwell fu originata più dal bisogno di dare una coerenza matematica alla teoria che da fatti sperimentali. Infatti gli esperimenti che confermarono le idee di Maxwell furono eseguiti solo dopo alcuni anni.

La legge di Ampère (Eq. 17.52) pone in relazione una corrente stazionaria con il campo magnetico che essa produce. La legge di Ampère-Maxwell (Eq. 17.53) si spinge oltre e mostra che anche un campo elettrico $\mathfrak{E}$ dipendente dal tempo contribuisce al campo magnetico. Per esempio, in assenza di correnti, abbiamo

che mostra più chiaramente la relazione tra un campo elettrico dipendente dal tempo

static. However, we know that when the field is not static but time dependent, Eq. (17.51) is no longer correct. Instead it is Eq. (17.50), which incorporates Gauss' law, that is correct. This confirms our suspicion that Ampère's law must be modified when dealing with time-dependent fields. The modification seems obvious. We must replace $\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS$ in Eq. (17.52) by

$$\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS + \epsilon_0\frac{d}{dt}\int_S \mathfrak{E}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS,$$

in accordance with Eq. (17.50). This results in

$$\oint_L \mathfrak{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS + \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_S \mathfrak{E}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS. \tag{17.53}$$

Remembering that $\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS$ is the current I through the surface S, we may also write Eq. (17.53) as

$$\oint_L \mathfrak{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_S \mathfrak{E}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS. \tag{17.54}$$

This should be compared with Eq. (16.67) for Ampère's law. Equation (17.54) reduces to Ampère's law for static fields, since then the last term is zero, and becomes Eq. (17.50) when the line L shrinks to a point and the surface S becomes closed. Therefore we see that this equation satisfies all the physical conditions previously found.

So far we have merely played with mathematics in an attempt to make Ampère's law compatible with the law of conservation of charge. One necessary further step is to verify experimentally that Eq. (17.53) is correct, and that it describes the actual situation found in nature. We may say in advance that it is so. The best proof of it is the existence of electromagnetic waves, a subject which will be discussed in Chapter 19.

The person who first suggested the modification of Ampère's law in the way we have indicated was the British physicist James Clerk Maxwell (1831–1879) toward the end of the last century, and therefore Eq. (17.53) is called the *Ampère-Maxwell law*. Maxwell's modification came about more because of the urge for mathematical consistency than because of experimentation. In fact, the experiments substantiating Maxwell's ideas came only some years later.

Ampère's law (Eq. 17.52) relates a steady current to the magnetic field it produces. The Ampère-Maxwell law (Eq. 17.53) goes a step further and indicates that a time-dependent electric field $\mathfrak{E}$ also contributes to the magnetic field. For example, in the absence of currents, we have

$$\oint_L \mathfrak{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \epsilon_0\mu_0\frac{d}{dt}\int_S \mathfrak{E}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS, \tag{17.55}$$

which shows more clearly the relation between a time-dependent electric field

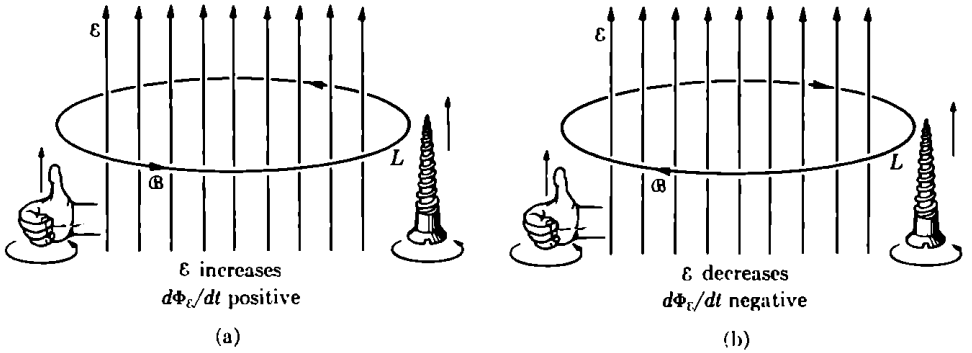


Fig. 17–32. Magnetic field produced by a time-dependent electric field.

and its associated magnetic field. In other words,

a time-dependent electric field implies the existence of a magnetic field at the same place.

If we call the circulation of the magnetic field the *magnetomotive force* applied to the closed line L and designate it by $\Lambda_{\mathcal{B}}$, and designate the electric flux across the surface S bounded by the line L by Φ_E, we may write Eq. (17.55) in the form

$$\Lambda_{\mathcal{B}} = \epsilon_0\mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

which the student should compare with Eq. (17.1) for the law of electromagnetic induction. The relative orientation of the electric and magnetic fields is shown in Fig. 17–32, corresponding to a time-dependent uniform electric field. If the electric field increases (decreases), the orientation of the magnetic lines of force is the same (opposite) as the sense of rotation of a right-handed screw which advances in the direction of the electric field. The student should compare this result with Fig. 17–1.

The Ampère-Maxwell law, as expressed by Eq. (17.54), differs from the Faraday-Henry law, as expressed by Eq. (17.2), in several respects. In the first place, in Eq. (17.53) we have a term corresponding to an *electric* current, while in Eq. (17.2) there is no term corresponding to a *magnetic* current. This is simply due to the fact that apparently there are no free magnetic poles in nature. In the second place, the time rate of change of the electric flux appears with a positive sign in Eq. (17.53), while the magnetic flux appears with a negative sign in Eq. (17.2). The student may also verify that the factor $\epsilon_0\mu_0$ is consistent with the units.

Although we have amended Ampère's law, using the principle of conservation of charge as our guide, we could have equally well used the principle of relativity and found that when the electric and magnetic fields are related in two inertial frames of reference, as in Eqs. (15.58) and (15.60), and the Faraday-Henry law is correct, then Eq. (17.53) must also be satisfied. This procedure is a little more difficult, but in a sense it is more fundamental.

ℰ aumenta
$d\Phi_E/dt$ positiva
(a)

ℰ diminuisce
$d\Phi_E/dt$ negativa
(b)

Fig. 17–32. Campo magnetico prodotto da un campo elettrico dipendente dal tempo.

ed il campo magnetico associato. In altre parole,

un campo elettrico dipendente dal tempo comporta l'esistenza, nel medesimo luogo, di un campo magnetico.

Chiamando la circuitazione del campo magnetico *forza magnetomotrice* applicata alla linea chiusa L, che indicheremo con $\Lambda_{\mathcal{B}}$, e denotando con Φ_E il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S limitata dalla linea L, possiamo scrivere l'Eq. (17.55) nella forma

che lo studente è bene confronti con l'Eq. (17.1) esprimente la legge dell'induzione elettromagnetica. L'orientamento relativo dei campi elettrico e magnetico è mostrato nella Fig. 17–32, in corrispondenza ad un campo elettrico uniforme dipendente dal tempo. Se il campo elettrico aumenta (o diminuisce) l'orientamento delle linee di forza del campo magnetico è il medesimo (od opposto) del senso di rotazione di una vite destra che avanza nella direzione del campo elettrico. Si lascia allo studente il compito di confrontare questo risultato con la Fig. 17–1.

La legge di Ampère Maxwell, nella forma data dall'Eq. (17.54), differisce per molti aspetti dalla legge di Faraday-Henry nella forma (17.2). In primo luogo nell'Eq. (17.53) abbiamo un termine corrispondente ad una corrente *elettrica*, mentre nell'Eq. (17.2) non esiste un termine corrispondente ad una corrente *magnetica*. Ciò è dovuto semplicemente al fatto che, palesemente, non esistono in natura poli magnetici liberi. In secondo luogo, la derivata rispetto al tempo del flusso del campo elettrico compare con il segno positivo nell'Eq. (17.53), mentre il flusso del campo magnetico compare con il segno negativo nell'Eq. (17.2). Lo studente può anche verificare che il fattore $\epsilon_0\mu_0$ è corretto dal punto di vista delle unità di misura.

Sebbene abbiamo modificato la legge di Ampère usando il principio di conservazione della carica come filo conduttore, avremmo potuto ugualmente bene servirci del principio di relatività, trovando che, se i campi elettrici e magnetici in due sistemi di riferimento inerziali sono legati nella maniera espressa dalle Equazioni (15.58) e (15.60), e la legge di Faraday-Henry è valida, allora deve essere soddisfatta anche l'Eq. (17.53). Questo procedimento è un po' più difficile, ma in un certo senso è più fondamentale.

17.14 La Legge di Ampère-Maxwell in forma differenziale

Giacchè l'Eq. (17.53) esprimente la legge di Ampère-Maxwell è molto simile all'Eq. (17.2) per la legge di Faraday-Henry, possiamo applicare nuovamente la tecnica usata nel Paragrafo 17.7 per ottenere la legge di Ampère-Maxwell in forma differenziale. La Fig. 17—9 è ora sostituita con la Fig. 17—33. Ometteremo i particolari ma, in analogia con l'Eq. (17.10), otterremo la circuitazione del campo magnetico lungo il rettangolo $PQRS$, i cui lati sono dx e dy,

Mentre ricavavamo la legge di Ampère in forma differenziale, abbiamo ottenuto nell'Eq. (16.74) il flusso della corrente elettrica attraverso la superficie limitata da $PQRS$; tale flusso vale

Infine, il flusso del campo elettrico attraverso la superficie limitata da $PQRS$ è, in analogia con l'Eq. (17.57),

e quindi

Sostituendo le Equazioni (17.56), (17.57), e (17.58) nell'Eq. (17.53), e semplificando il fattore comune $dx\,dy$ in entrambi i membri, si ottiene

Ponendo il nostro rettangolo nei piani YZ e ZX, otteniamo due altre espressioni

e

Le espressioni (17.59), (17.60), e (17.61) nel loro insieme costituiscono la legge di Ampère-Maxwell in forma differenziale. Possiamo riassumere queste espressioni in un'unica equazione vettoriale, come si è fatto in precedenza per la legge di Ampère e per la legge di Faraday-Henry, scrivendo

$$\text{curl} = \text{rot}$$

equazione che esprime una relazione tra la corrente elettrica in un punto dello spazio ed i campi elettrici e magnetici nel medesimo punto. Nel vuoto, ove non esistono

17.14 The Ampère-Maxwell Law in Differential Form

Since Eq. (17.53) for the Ampère-Maxwell law is very similar to Eq. (17.2) for the Faraday-Henry law, we may again apply the technique used in Section 17.7 for obtaining the Ampère-Maxwell law in differential form. Figure 17–9 is now replaced by Fig. 17–33. We shall omit the details but, in analogy with Eq. (17.10), we obtain the circulation of the magnetic field along the rectangular path $PQRS$ whose sides are dx and dy as

$$\oint_{PQRS} \mathfrak{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \left(\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y}\right) dx\,dy. \tag{17.56}$$

We obtained the flux of the electric current through the surface bounded by $PQRS$ in Eq. (16.74), when we were deriving Ampère's law in differential form, as

$$\int_{PQRS} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{u}_N\, dS = j_z\, dx\, dy. \tag{17.57}$$

Finally, the flux of the electric field through the surface bounded by $PQRS$, in analogy with Eq. (17.57), is

$$\int_{PQRS} \mathfrak{E} \cdot \boldsymbol{u}_N\, dS = \mathcal{E}_z\, dx\, dy,$$

and therefore

$$\frac{d}{dt}\int_{PQRS} \mathfrak{E} \cdot \boldsymbol{u}_N\, dS = \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t}\, dx\, dy. \tag{17.58}$$

Substituting Eqs. (17.56), (17.57), and (17.58) in Eq. (17.53) and canceling the common factor $dx\,dy$ on both sides yields

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} = \mu_0 j_z + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \tag{17.59}$$

By placing our rectangle in the YZ- and ZX-planes, we obtain two other expressions:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial z} = \mu_0 j_x + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \tag{17.60}$$

and

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} = \mu_0 j_y + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial t}. \tag{17.61}$$

Expressions (17.59), (17.60), and (17.61) together constitute the Ampère-Maxwell law in differential form. We can combine these into a single vector equation, as we did before for Ampère's law and Faraday-Henry's law, by writing

$$\text{curl}\ \mathfrak{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right), \tag{17.62}$$

which expresses a relation between the electric current at a point in space and the electric and magnetic fields at the same point. In empty space, where there are

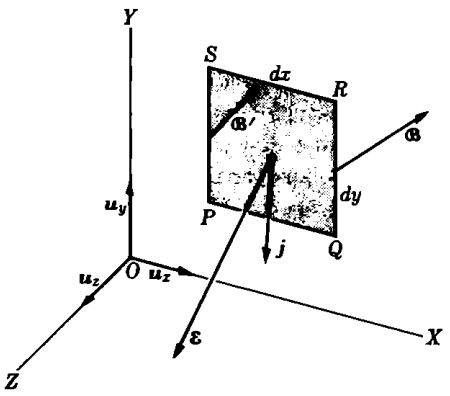


Fig. 17–33. Circuito elementare usato per ottenere la legge di Ampère-Maxwell in forma differenziale.

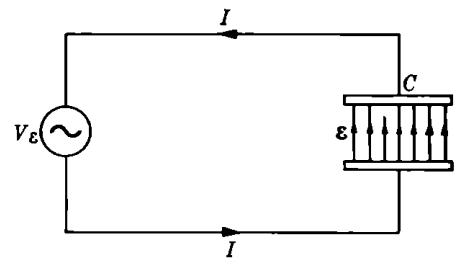


Fig. 17–34. Corrente di spostamento di Maxwell in un condensatore.

Fig. 17–33. Elementary circuit for deriving the Ampère-Maxwell law in differential form.

Fig. 17–34. Maxwell's electric displacement current in a capacitor.

correnti, $\boldsymbol{j} = 0$, e l'Eq. (17.62) diviene

$$\text{curl} = \text{rot}$$

che è equivalente all'Eq. (17.55) in forma differenziale. Essa è simile all'Eq. (17.15) per la legge di Faraday-Henry, e mostra chiaramente la relazione intercorrente tra il campo magnetico e la variazione nel tempo del campo elettrico nel medesimo punto.

Possiamo osservare che nell'Eq. (17.62) l'effetto di un campo elettrico dipendente dal tempo è quello di aggiungere alla densità di corrente un termine $\epsilon_0\, \partial\mathcal{E}/\partial t$. Maxwell interpretò questo termine come una corrente addizionale e la chiamò *corrente di spostamento*. Il ragionamento di Maxwell è stato il seguente. In un circuito contenente un condensatore C (Fig. 17–34), la corrente I è interrotta dal condensatore. Per "chiudere" il circuito, deve esistere una corrente da un'armatura all'altra e questa corrente è proprio $(\epsilon_0\, \partial\mathcal{E}/\partial t)S$, ove $\mathcal{E}$ è il campo elettrico entro il condensatore ed S è l'area delle armature. Tuttavia il nome "corrente di spostamento" può trarre in inganno e la "descrizione" dovuta a Maxwell non è necessaria, giacchè non esiste una corrente siffatta tra le placche del condensatore, e l'Eq. (17.63) esprime nient'altro che una relazione tra $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, e $\boldsymbol{j}$ valida nel medesimo punto dello spazio.

17.15 Le equazioni di Maxwell

Giunti a questo punto, ricapitoliamo i risultati della nostra discussione sul campo elettromagnetico. Abbiamo visto che un tipo importante di interazione tra le particelle fondamentali costituenti la materia è quella chiamata *interazione elettromagnetica*. Questa è associata con una proprietà caratteristica di ogni particella chiamata *carica elettrica*. Per descrivere l'interazione elettromagnetica, abbiamo introdotto la nozione di *campo elettromagnetico*, caratterizzato da due vettori, il *campo elettrico* $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ ed il *campo magnetico* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, cosicchè la forza agente su una carica elettrica è data da

no currents, $\boldsymbol{j} = 0$, and Eq. (17.62) becomes

$$\text{curl}\ \boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}, \tag{17.63}$$

which is the equivalent to Eq. (17.55) in differential form. It is similar to Eq. (17.15) for the Faraday-Henry law, and clearly shows the relationship between the magnetic field and the time rate of change of the electric field at the same point.

We may observe in Eq. (17.62) that the effect of a time-dependent electric field is to add to the current density a term $\epsilon_0\, \partial\mathcal{E}/\partial t$. Maxwell interpreted this as an additional current and called it the *displacement current*. Maxwell's reasoning was the following. In a circuit containing a capacitor C (Fig. 17–34), the current I is interrupted by the capacitor. In order to "close" the circuit, there must be a current from one plate to the other, and this current is just $(\epsilon_0\, \partial\mathcal{E}/\partial t)S$, where $\mathcal{E}$ is the electric field within the capacitor and S its surface area. However, the term "displacement current" is misleading and Maxwell's "picture" unnecessary, since there is no such current between the plates of the capacitor, and Eq. (17.63) simply expresses a correlation between $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, and $\boldsymbol{j}$ at the same point in space.

17.15 Maxwell's Equations

At this point let us recapitulate our discussion of the electromagnetic field. We have seen that an important kind of interaction among the fundamental particles composing matter is the one called *electromagnetic interaction*. It is associated with a characteristic property of each particle called its *electric charge*. To describe the electromagnetic interaction, we have introduced the notion of *electromagnetic field*, characterized by two vectors, the *electric field* $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ and the *magnetic field* $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, such that the force on an electric charge is given by

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}). \tag{17.64}$$

I campi elettrico e magnetico $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sono a loro volta determinati dalle posizioni delle cariche e dal loro moto (ossia dalle correnti). La sconposizione del campo elettromagnetico nei suoi costituenti, campi elettrico e magnetico, dipende dal moto relativo dell'osservatore e delle cariche che producono il campo. Inoltre i campi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sono legati direttamente l'uno all'altro dalle leggi di Ampère-Maxwell e di Faraday-Henry. Tutte queste relazioni sono espresse da quattro leggi che abbiamo analizzato nei capitoli precedenti e che possono essere scritte sia in forma integrale che differenziale, come si è fatto nella Tabella 17–2.

La teoria del campo elettromagnetico è sintetizzata in queste quattro leggi. Esse sono chiamate *equazioni di Maxwell* poichè fu Maxwell che, oltre a formulare la quarta legge, comprese che esse, insieme all'Eq. (17.64), costituiscono il fondamento essenziale della teoria delle interazioni elettromagnetiche. La carica elettrica q e la corrente I sono chiamate le *sorgenti* del campo elettromagnetico poichè, assegnati q e I, le equazioni di Maxwell consentono di calcolare $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$.

È necessario osservare che le leggi di Gauss per i campi elettrici e magnetici cioè le (16.3) e (16.81) erano state ottenute nel Capitolo 16 nel caso di campi stazionari. Tuttavia, stiamo ora inserendo queste leggi in una teoria che comporta campi dipendenti dal tempo. Lo studente può chiedersi se per caso si debbano rivedere queste leggi in modo analogo a quanto fatto per la legge di Ampère per renderla applicabile a situazioni dipendenti dal tempo. La risposta è no. Si è trovato che l'insieme di leggi prima esposte è in accordo con l'esperienza e si è visto che le conseguenze fino ad ora derivate da esse sono in accordo con i risultati sperimentali. Quindi le due leggi di Gauss rimangono inalterate quando sono applicate a campi elettrici e magnetici dipendenti dal tempo.

The electric and magnetic fields $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ are in turn determined by the positions of the charges themselves and by their motions (or currents). The separation of the electromagnetic field into its electric and magnetic components depends on the relative motion of the observer and the charges producing the field. Also the fields $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ are directly correlated with each other by the Ampère-Maxwell and Faraday-Henry laws. All these relations are expressed by four laws, which we have analyzed in the previous chapters, and which may be written down, both in their integral and differential forms, as in Table 17–2.

The theory of the electromagnetic field is condensed into these four laws. They are called *Maxwell's equations*, since it was Maxwell who, in addition to formulating the fourth law, recognized that they, together with Eq. (17.64), constituted the basic framework of the theory of electromagnetic interactions. The electric charge q and the current I are called the *sources* of the electromagnetic field since, given q and I, Maxwell's equations allow us to compute $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$.

We must note that Gauss' laws for the electric and magnetic fields, Eqs. (16.3) and (16.81), were derived in Chapter 16 for static fields. However, we are now incorporating them into a theory involving time-dependent fields. The student may wonder if we will perhaps have to revise them in the same way that we had to modify Ampère's law to make it applicable to a time-dependent situation. The answer is no. It has been found that the above set of laws are in agreement with experiment, and the consequences derived from them have so far been found to agree with experimental results. Therefore, the two Gauss laws stay the same when applied to time-dependent electric and magnetic fields.

TABELLA 17–2 Le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico

Legge	Forma integrale	Forma differenziale
I. Legge di Gauss per il campo elettrico [(16.3) e (16.5)]		
II. Legge di Gauss per il campo magnetico [(16.81) e (16.82)]		
III. Legge di Faraday-Henry [(17.2) e (17.15)]		
IV. Legge di Ampère-Maxwell [(17.54) e (17.62)]		

TABLE 17–2 Maxwell's Equations for the Electromagnetic Field

Law	Integral form	Differential form
I. Gauss' law for the electric field [(16.3) and (16.5)]	$\oint_S \mathcal{E} \cdot u_N \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \mathcal{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
II. Gauss' law for the magnetic field [(16.81) and (16.82)]	$\oint \mathcal{B} \cdot u_N \, dS = 0$	$\operatorname{div} \mathcal{B} = 0$
III. Faraday-Henry law [(17.2) and (17.15)]	$\oint_L \mathcal{E} \cdot dl = -\frac{d}{dt} \oint_S \mathcal{B} \cdot u_N \, dS$	$\operatorname{curl} \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$
IV. Ampère-Maxwell law [(17.54) and (17.62)]	$\oint_L \mathcal{B} \cdot dl = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \mathcal{E} \cdot u_N \, dS$	$\operatorname{curl} \mathcal{B} = \mu_0 j + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$

Le equazioni di Maxwell costituiscono un sistema di equazioni mutuamente coerenti. Da un lato le Equazioni (16.3) e (17.54), che comportano il calcolo di integrali di superficie del campo elettrico sono coerenti tra loro giacchè questo era stato l'obbiettivo principale della revisione della legge di Ampère. Anche le Equazioni (16.81) e (17.2) che comportano il calcolo di integrali di superficie del campo magnetico sono tra loro compatibili. Per esempio, applicando l'Eq. (17.2) alla superficie di Fig. 17–31, abbiamo che la circuitazione di $\mathscr{E}$ è nulla, se la linea L si riduce fino a che la superficie risulta chiusa. Abbiamo quindi

relazione coincidente con l'Eq. (16.81) assumendo il valore zero per la costante di integrazione.

Nel vuoto, ove non esistono cariche ($\rho = 0$) nè correnti ($\boldsymbol{j} = 0$), le equazioni di Maxwell sono un po' più semplici e, in forma differenziale, divengono

$$\text{curl} = \text{rot}$$

che mostrano una certa simmetria. Suggeriamo allo studente di scrivere queste equazioni per esteso in termini delle componenti cartesiane.

Lo studente dovrebbe confrontare le equazioni di Maxwell, o in forma integrale o in forma differenziale, con le equazioni di Tabella 16–4 per campi statici notando le principali differenze introdotte. In particolare, lo studente dovrebbe osservare che le leggi di Faraday-Henry e di Ampère-Maxwell forniscono il collegamento tra i campi elettrico e magnetico, collegamento che non compariva nelle equazioni per i campi statici.

Le equazioni di Maxwell vengono usate in forma integrale o differenziale secondo la natura del problema da risolvere. Nel Capitolo 19, ad esempio, illustreremo la loro applicazione al problema delle onde elettromagnetiche. Può sembrare a prima vista che il ricordare tutte queste equazioni sia un compito molto difficile. Tuttavia, non è così. In primo luogo, esse hanno una certa simmetria che (una volta ben compresa) aiuta nell'organizzarle nella propria mente e, usandole di continuo, ci si abitua progressivamente ad esse. Ma in secondo luogo, ben più importante che ricordarle in dettaglio è comprendere il loro significato fisico.

Le equazioni di Maxwell sono compatibili con il principio di relatività nel senso che sono invarianti rispetto ad una trasformazione di Lorentz. Cioè, la loro forma non cambia se le coordinate x, y, z ed il tempo t subiscono una trasformazione di Lorentz (6.33) ed i campi $\mathscr{E}$ e $\mathscr{B}$ vengono trasformati secondo le Equazioni (15.59) e (15.61). La prova matematica di questo fatto è destinata ad un corso successivo cosicchè la ometteremo sebbene essa non sia difficile nella sostanza.

La sintesi delle interazioni elettromagnetiche espressa dalle equazioni di Maxwell è una delle più grandi conquiste della fisica e questa è la ragione che pone queste interazioni in una posizione unica. Queste sono le interazioni meglio comprese e le uniche, sinora, che possano essere espresse in una forma matematica, chiusa e autocompatibile. Si tratta di una vera fortuna per il genere umano,

Maxwell's equations also form a consistent set. On one side, Eqs. (16.3) and (17.54), which involve a surface integral of the electric field, are consistent, since this was our basic requirement in revising Ampère's law. Also Eqs. (16.81) and (17.2), which involve a surface integral of the magnetic field, are consistent. For example, applying Eq. (17.2) to the surface of Fig. 17–31, we have that when the curve L shrinks until the surface is closed, the circulation of $\mathscr{E}$ is zero. Therefore we have that

$$\frac{d}{dt}\oint_S \mathscr{B}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS = 0 \qquad \text{or} \qquad \oint_S \mathscr{B}\cdot\boldsymbol{u}_N\,dS = \text{const},$$

which coincides with Eq. (16.81) if we make the constant of integration zero.

In free or empty space, where there are no charges ($\rho = 0$) nor currents ($\boldsymbol{j} = 0$), Maxwell's equations are slightly simpler and become, in the differential form,

$$\begin{aligned} &\text{div}\,\mathscr{E} = 0, && \text{div}\,\mathscr{B} = 0,\\ &\text{curl}\,\mathscr{E} = -\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t}, && \text{curl}\,\mathscr{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}, \end{aligned} \tag{17.65}$$

which exhibit a certain symmetry. We suggest that the student write them in full in terms of the rectangular components.

The student should compare Maxwell's equations, either in the integral or the differential form, with the equations listed in Table 16–4 for the static field, and note the main differences introduced. In particular, he should observe that the Faraday-Henry and Ampère-Maxwell laws provide the connection between the electric and magnetic fields that was absent in the equations for the static fields.

Maxwell's equations are used in integral or in differential form, depending on the problem to be solved. In Chapter 19, for example, we shall illustrate how they are used for discussing electromagnetic waves. It may seem at first sight that it is a formidable task to remember all these equations. However, that is not so. In the first place they have a certain symmetry that (once it is recognized) helps to organize them in one's mind and, by continuous application, one becomes gradually acquainted with them. But in the second place, more important than remembering them in detail is understanding the physical message they convey.

Maxwell's equations are compatible with the principle of relativity in the sense that they remain invariant under a Lorentz transformation. That is, their form does not change when the coordinates x, y, z and the time t are transformed according to the Lorentz transformation (6.33) and the fields $\mathscr{E}$ and $\mathscr{B}$ are transformed according to Eqs. (15.59) and (15.61). The mathematical proof of this belongs in a more advanced course, and so we shall omit it here, although it is not essentially difficult.

The synthesis of electromagnetic interactions as expressed by Maxwell's equations is one of the greatest achievements in physics, and that is what places these interactions in a unique position. They are the best understood of all interactions and the only ones, so far, that can be expressed in a closed, consistent, mathematical

poichè gran parte della civiltà moderna è stata possibile grazie alla nostra comprensione delle interazioni elettromagnetiche, che sono alla base di molti fenomeni naturali e artificiali che influenzano la nostra vita quotidiana.

Dobbiamo tuttavia riconoscere che le equazioni di Maxwell, così come sono state presentate, hanno alcune limitazioni. Esse vanno molto bene per le interazioni elettromagnetiche tra grossi aggregati di cariche, quali le antenne irraggianti i circuiti elettrici ed anche i fasci di atomi ionizzati o di molecole. Si è invece trovato che le interazioni elettromagnetiche tra le particelle fondamentali (specie nel caso delle alte energie) devono essere trattate mediante una tecnica alquanto diversa, in accordo con le leggi della meccanica quantistica: l'*elettrodinamica quantistica*. Quest'ultimo argomento non verrà trattato in questo testo. Anche dando per scontate queste limitazioni, i risultati ottenuti dalle equazioni di Maxwell nella forma data in questo capitolo sono un'approssimazione eccellente per descrivere le interazioni elettromagnetiche tra le particelle elementari. Questo metodo è chiamato *elettrodinamica classica*. In questo libro, per discutere le onde elettromagnetiche e la struttura della materia, useremo questa tecnica approssimata.

Bibliografia

form. This has been rather fortunate for mankind, since much of our modern civilization has been made possible because of our understanding of electromagnetic interactions, because they are responsible for most of the processes, natural and man-made, that affect our daily life.

We must recognize, however, that Maxwell's equations, as they have been presented, have their limitations. They work very well when dealing with electromagnetic interactions between large aggregates of charges, such as radiating antennas, electric circuits, and even beams of ionized atoms or molecules. But it has been found that the electromagnetic interactions between fundamental particles (especially at high energies) must be treated in a somewhat different way, and according to the laws of quantum mechanics, constituting a technique called *quantum electrodynamics*. This subject will not be considered any further in this book. Even granted these limitations, the results derived from the form of Maxwell's equations given in this chapter are an excellent approximation for describing electromagnetic interactions between elementary particles. This method is called *classical electrodynamics*. It is this approximate technique which will be used in this book when we discuss electromagnetic waves and the structure of matter.

References

1. "From Faraday to the Dynamo," H. Sharlin, *Sci. Am.*, May 1961, page 107
2. "Joseph Henry," C. Andrews, *The Physics Teacher* **3**, 13 (1965)
3. "Michael Faraday," L. Williams, *The Physics Teacher* **3**, 64 (1965)
4. "Displacement Currents and Magnetic Fields," A. French and J. Tessman, *Am. J. Phys.* **31**, 201 (1963)
5. "Forces and Fields in Special Relativity," W. Ganley, *Am. J. Phys.* **31**, 510 (1963)
6. "Interpretation of the Displacement Current," W. Rosser, *Am. J. Phys.* **31**, 807 (1963)
7. "Maxwell, Displacement Current, and Symmetry," A. Bork, *Am. J. Phys.* **31**, 854 (1963)
8. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1959, Chapter 10 (Faraday); Chapter 11 (Lenz); Appendix 1 (Maxwell)
9. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. Reitz and F. Milford. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960, Section 7–2; Chapter 9; Sections 12–2, 13–1 through 13–6, and 15–1 through 15–3
10. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume II, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 16, 17, 18, 22, and 28
11. *Source Book in Physics*, W. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 472 (Faraday); page 511 (Lenz); page 513 (Henry); page 528 (Maxwell); page 583 (Rowland)
12. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Sections 28.8, 28.9, and 28.10

Problemi

17.1 Una bobina di 200 spire avente un raggio di 0.10 m è posta perpendicolarmente ad un campo magnetico uniforme di 0.2 T. Trovare la fem indotta nella bobina se, in 0.1 s, (a) il campo viene raddoppiato, (b) il campo viene ridotto a zero, (c) viene cambiato il verso del campo, (d) la bobina è ruotata di 90°, (e) la bobina è ruotata di 180°. In ciascun caso fare uno schizzo per mostrare il verso della fem.

17.2 Con riferimento al Problema 16.68, se la corrente varia secondo la legge $I = I_0 \sin \omega t$, determinare la fem indotta nel circuito.

Iron core = nucleo di ferro

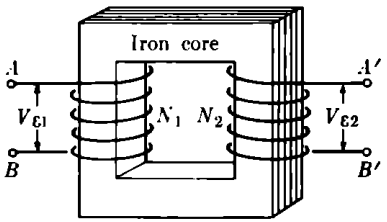


Figura 17–35.

17.3 Dimostrare che, se $V_{\mathcal{E}1}$ è una fem oscillante applicata ai terminali AB, la fem $V_{\mathcal{E}2}$ esistente ai terminali $A'B'$ dovuta alla mutua induzione tra i due avvolgimenti è $V_{\mathcal{E}2} = (N_2/N_1)\, V_{\mathcal{E}1}$ (vedi Fig. 17–35). Questo è il principio del trasformatore; la formula è corretta fintantochè il flusso magnetico è il medesimo attraverso entrambi gli avvolgimenti e fintantochè la resistenza è trascurabile.

17.4 Se il campo magnetico è espresso in gauss e l'area in cm^2, il flusso magnetico è misurato in *maxwell*. (a) Definire il maxwell. (b) Mostrare che un weber è eguale a 10^8 maxwell. (c) Inserire nell'Eq. (17.1) il fattore numerico opportuno perchè $V_{\mathcal{E}}$ sia misurato in volt e $\Phi_{\mathcal{B}}$ in maxwell.

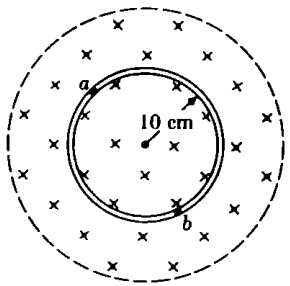


Figura 17–36

17.5 Il campo magnetico $\mathcal{B}$ in tutti i punti interni alla circonferenza trattegiata di Fig. 17–36 è eguale a 0.5 T. È diretto verso il piano del foglio e decresce alla velocità di 0.1 T s^{-1}. (a) Qual'è la forma delle linee di forza del campo elettrico indotto in Fig. 17–36, entro la circonferenza tratteggiata? (b) Quali sono il valore, la direzione ed il verso di questo campo in ogni punto dell'anello conduttore circolare, e qual'è la fem nell'anello? (c) Qual'è la corrente nell'anello se la sua resistenza è 2 ohm? (d) Qual'è la differenza di potenziale tra due punti qualsivoglia dell'anello? (e) Come si conciliano le risposte ai quesiti (c) e (d)? (f) Se l'anello viene tagliato in un punto generico ed i terminali lievemente separati, qual'è la differenza di potenziale tra i terminali?

17.6 Una spira di filo quadrata attraversa a velocità costante v un campo magnetico uniforme confinato in una regione quadrata i cui lati hanno lunghezza doppia di quella dei lati della spira (vedi Fig. 17–37). Schizzare un grafico della fem indotta nella spira in funzione di x, da $x = -2l$ a $x = +2l$, disegnando le fem aventi il senso delle lancette dell'orologio nella parte superiore del diagramma e quelle con verso opposto nella parte inferiore.

17.7 Una spira rettangolare viene mossa in una regione dello spazio nella quale il campo magnetico è dato

Figura 17–37

Problems

17.1 A coil consisting of 200 turns and having a radius of 0.10 m is placed perpendicular to a uniform magnetic field of 0.2 T. Find the emf induced in the coil if, in 0.1 s, (a) the field is doubled, (b) the field is reduced to zero, (c) the field is reversed in direction, (d) the coil is rotated 90°, (e) the coil is rotated 180°. Make, in each case, a diagram showing the direction of the emf.

17.2 Referring to Problem 16.68, if the current varies according to $I = I_0 \sin \omega t$, determine the emf induced in the circuit.

Figure 17–35

17.3 Show that if $V_{\mathcal{E}1}$ is an oscillating emf applied to terminals AB, the emf $V_{\mathcal{E}2}$ at terminals $A'B'$ as a result of the mutual induction between the two coils is $V_{\mathcal{E}2} = (N_2/N_1)V_{\mathcal{E}1}$ (see Fig. 17–35). This is the principle of the transformer; the formula is correct so long as the magnetic flux is the same through both coils, and so long as the resistance is negligible.

17.4 When the magnetic field is expressed in gauss and the area in cm^2, the magnetic flux is measured in *maxwells*. (a) Define the maxwell. (b) Show that one weber is equal to 10^8 maxwells. (c) Insert in Eq. (17.1) the proper numerical factor so that $V_{\mathcal{E}}$ is measured in volts and $\Phi_{\mathcal{B}}$ in maxwells.

Figure 17–36

17.5 The magnetic field $\mathcal{B}$ at all points within the dashed circle of Fig. 17–36 equals 0.5 T. It is directed into the plane of the paper and is decreasing at the rate of 0.1 T s^{-1}. (a) What is the shape of the lines of force of the induced electric field in Fig. 17–36, within the dashed circle? (b) What are the magnitude and direction of this field at any point of the circular conducting ring, and what is the emf in the ring? (c) What is the current in the ring if its resistance is 2 ohms? (d) What is the potential difference between any two points of the ring? (e) How do you reconcile your answers to (c) and (d)? (f) If the ring is cut at some point and the ends separated slightly, what will be the potential difference between the ends?

17.6 A square loop of wire is moved at constant velocity v across a uniform magnetic field confined to a square region whose sides are twice the length of those of the square loop (see Fig. 17–37). Sketch a graph of the induced emf in the loop as a function of x, from $x = -2l$ to $x = +2l$, plotting clockwise emf's upward and counterclockwise emf's downward.

17.7 A rectangular loop is moved through a region in which the magnetic field is given

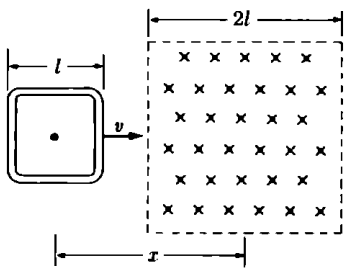


Figure 17–37

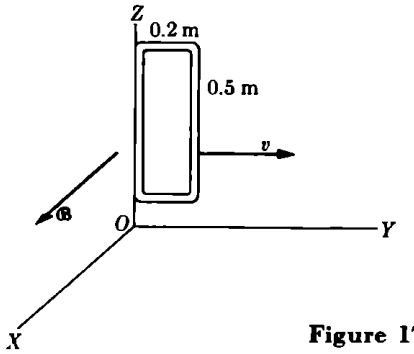


Figura 17–38

Figure 17–38

da $\mathfrak{B}_y = \mathfrak{B}_z = 0, \mathfrak{B}_x = (6 - y)$ T (vedi Fig. 17–38). Trovare la fem nell'anello in funzione del tempo, posto $t = 0$ all'istante nel quale la spira si trova nella posizione mostrata in figura: (a) se $v = 2$ m s^{-1}, (b) se l'anello parte da fermo ed ha un'accelerazione di 2 m s^{-2}. (c) Ripetere il problema per un moto parallelo a OZ invece che a OY. (d) Calcolare i valori della corrente se $R_{\text{spira}} = 2$ ohm.

17.8 Si supponga che la spira del Problema 17.7 venga posta in rotazione attorno all'asse OZ. (a) Qual'è la fem media durante i primi 90° di rotazione se il periodo di rotazione è 0.2 s? (b) Calcolare la fem istantanea e le correnti in funzione del tempo.

17.9 In Fig. 17–39, sia $l = 1.5$ m, $\mathfrak{B} = 0.5$ T, e $v = 4$ m s^{-1}. Qual'è la differenza di potenziale tra i capi del conduttore? Quale terminale è a potenziale maggiore?

17.10 Il cubo di Fig. 17–40, avente lato di un metro, è situato in un campo magnetico uniforme di intensità 0.2 T diretto lungo l'asse Y. I conduttori A, C, e

by $\mathfrak{B}_y = \mathfrak{B}_z = 0$, $\mathfrak{B}_x = (6 - y)$ T (see Fig. 17–38). Find the emf in the loop as a function of time, with $t = 0$ when the loop is in the position shown in the figure: (a) if $v = 2$ m s^{-1}, (b) if the loop starts at rest and has an acceleration of 2 m s^{-2}. (c) Repeat for motion parallel to OZ in place of OY. (d) Find the currents if $R_{\text{loop}} = 2$ ohms.

17.8 Suppose that the loop in Problem 17.7 is pivoted about the OZ-axis. (a) What is the average emf during the first 90° of rotation if the period of rotation is 0.2 s? (b) Calculate the instantaneous emf and current as functions of time.

17.9 In Fig. 17–39, let $l = 1.5$ m, $\mathfrak{B} = 0.5$ T, and $v = 4$ m s^{-1}. What is the potential difference between the ends of the conductor? Which end is at the higher potential?

17.10 The cube in Fig. 17–40, one meter on a side, is in a uniform magnetic field of 0.2 T directed along the Y-axis. Wires A, C, and

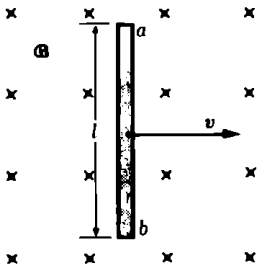


Figura 17–39

Figure 17–39

D si muovono nelle direzioni indicate ciascuno con velocità 0.5 m s^{-1}. Qual'è la differenza di potenziale tra i terminali di ciascun conduttore?

17.11 Un disco metallico di raggio a ruota con velocità angolare ω in presenza di un campo magnetico uniforme parallelo all'asse di rotazione (vedi Fig. 17–41). Mostrare che la differenza di potenziale tra il centro ed il bordo è $\frac{1}{2}\omega a^2\mathfrak{B}$.

17.12 Un solenoide ha una lunghezza di 0.30 m ed una sezione trasversale di 1.2×10^{-3} m^2. Attorno alla sua sezione centrale è avvolta una bobina di 300 spire. Determinare (a) la loro mutua induttanza, (b) la fem nell'avvolgimento se la corrente iniziale di 2 A nel solenoide viene invertita in 0.2 s.

17.13 Gli avvolgimenti A e B hanno rispettivamente 200 e 800 spire. Una corrente di 2 A in A produce un flusso magnetico di 1.8×10^{-4} Wb in ogni spira di B. Calcolare (a) il coefficiente di mutua induzione, (b) il flusso del campo magnetico attraverso A quando in B fluisce una corrente di 4 A, (c) la fem indotta in B quando la corrente in A cambia da 3 A a 1 A in 0.3 s.

17.14 Due avvolgimenti sono disposti coassialmente, come è mostrato in Fig. 17–42. L'avvolgimento 1 è connesso ad una sorgente esterna di fem indicata con $V_\mathcal{E}$. Si supponga che la disposizione geometrica sia tale che un quinto del flusso del campo magnetico prodotto dall'avvolgimento 1 passi attraverso l'avvolgimento 2, e viceversa. Le resistenze degli avvolgimenti sono R_1 ed R_2, e l'avvolgimento 2 è collegato ad una resistenza esterna R, come è mostrato in figura. I numeri di spire dei due avvolgimenti sono N_1 ed N_2. Il

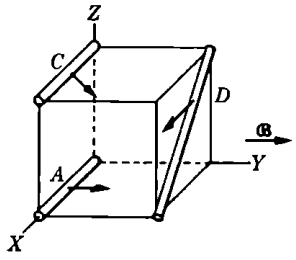


Figura 17–40

Figure 17–40

D move in the directions indicated, each with a velocity of 0.5 m s^{-1}. What is the potential difference between the ends of each wire?

17.11 A metallic disk of radius a rotates with angular velocity ω in a plane where there is a uniform magnetic field parallel to the disk axis (see Fig. 17–41). Show that the potential difference between the center and the rim is $\frac{1}{2}\omega a^2\mathfrak{B}$.

17.12 A solenoid has a length of 0.30 m and a cross section of 1.2×10^{-3} m^2. Around its central section a coil of 300 turns is wound. Determine (a) their mutual inductance, (b) the emf in the coil if the initial current of 2 A in the solenoid is reversed in 0.2 s.

17.13 Coils A and B have respectively 200 and 800 turns. A current of 2 A in A produces a magnetic flux of 1.8×10^{-4} Wb in each turn of B. Compute (a) the coefficient of mutual inductance, (b) the magnetic flux through A when there is a current of 4 A in B, (c) the emf induced in B when the current in A changes from 3 A to 1 A in 0.3 s.

17.14 Two coils are placed coaxially, as shown in Fig. 17–42. Coil 1 is connected to an external source of emf labeled $V_\mathcal{E}$. Assume that the geometry is such that one-fifth of the magnetic flux produced by coil 1 pass through coil 2, and vice versa. The resistances of the coils are R_1 and R_2, and coil 2 is connected to an external resistance R, as shown. The numbers of turns in the coils are N_1 and N_2. The

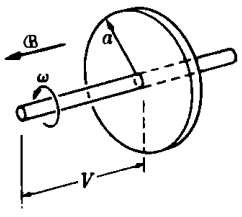


Figura 17–41

Figure 17–41

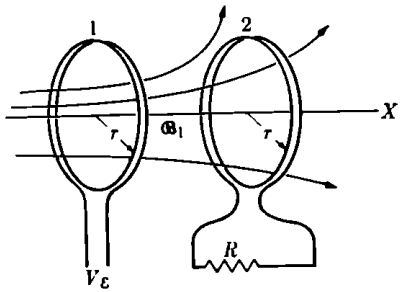


Figura 17–42

Figure 17–42

flusso totale prodotto dall'avvolgimento 1 è dato da $\Phi_B = (L_1/N_1)I_1$, ove L_1 è l'autoinduttanza dell'avvolgimento 1. (a) Trovare la fem indotta nell'avvolgimento 2 se I_1 aumenta uniformemente da 0 a I_0 in t secondi. (b) Trovare la fem indotta nell'avvolgimento 2 se $I_1 = I_0 \sin \omega t$. (c) Quanta energia si spende nel circuito 1 a causa dell'induzione nel circuito 2?

17.15 Un avvolgimento avente N spire è posto attorno ad un solenoide molto lungo di sezione trasversale S avente n spire per unità di lunghezza (vedi Fig. 17.43). Mostrare che la mutua induttanza del sistema è $\mu_0 nNS$.

17.16 Nel centro di un avvolgimento circolare di raggio a avente N_1 spire, si trova un avvolgimento molto piccolo di area S avente N_2 spire, come è mostrato in Fig. 17–44. Mostrare che l'induttanza mutua è $\frac{1}{2}\mu_0 N_1 N_2 S \cos \theta/a$, ove θ è l'angolo tra le normali ai due avvolgimenti.

17.17 Il flusso del campo magnetico attraverso un circuito avente resistenza R è Φ_B. In un tempo assegnato il flusso cambia di una quantità $\Delta\Phi_B$. Mostrare che la quantità di carica che passa attraverso ogni sezione del circuito è $Q = \Delta\Phi_B/R$, indipendentemente dal fatto che la variazione del flusso sia rapida o lenta.

Galvanometer = Galvanometro

Figura 17–45

total flux produced by coil 1 is given by $\Phi_B = (L_1/N_1)I_1$, where L_1 is the self inductance of coil 1. (a) Find the emf induced in coil 2 when I_1 increases uniformly from 0 to I_0 in t s. (b) Find the induced emf in coil 2 when $I_1 = I_0 \sin \omega t$. (c) How much energy is required from circuit 1 as a result of the induction in coil 2?

17.15 A coil having N turns is placed around a very long solenoid of cross section S which has n turns per unit length (see Fig. 17–43). Show that the mutual inductance of the system is $\mu_0 nNS$.

17.16 In the center of a circular coil of radius a which has N_1 turns, there is a very small coil of area S having N_2 turns, as shown in Fig. 17–44. Show that the mutual inductance is $\frac{1}{2}\mu_0 N_1 N_2 S \cos \theta/a$, where θ is the angle between the normals to the two coils.

17.17 The magnetic flux through a circuit of resistance R is Φ_B. In a certain time the flux changes by the amount $\Delta\Phi_B$. Show that the amount of charge that passes through any section of the circuit is $Q = \Delta\Phi_B/R$, irrespective of whether the change in flux is fast or slow.

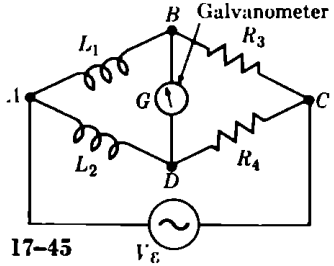


Figure 17–45

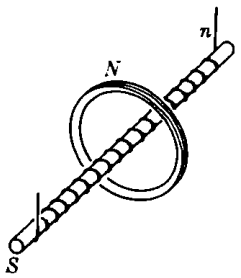


Figura 17–43

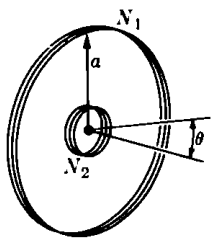


Figura 17–44

Figure 17–43

Figure 17–44

17.18 Un avvolgimento, avente 1000 spire ed una resistenza di 100Ω, circonda un solenoide molo lungo avente 10^4 spire per metro ed una sezione trasversale di 2×10^{-3} m^2. La corrente nel solenoide è 10 A. In breve tempo la corrente nel solenoide viene (a) raddoppiata, (b) ridotta a zero, (c) invertita. Trovare la quantità di carica che circola nell'avvolgimento in ciascun caso.

17.19 Trovare l'autoinduttanza di un solenoide toroidale avente N spire. Supporre che il raggio dell'avvolgimento sia molto piccolo in confronto al raggio del toro.

17.20 Il flusso del campo magnetico attraverso un circuito percorso da una corrente di 2 A e 0.8 Wb. Trovare la sua autoinduttanza. Calcolare la fem indotta sul circuito se, in 0.2 s, la corrente viene (a) raddoppiata, (b) ridotta a zero, (c) invertita.

17.21 Il ponte illustrato in Fig. 17–45 può essere usato per confrontare due induttanze L_1 ed L_2. Il ponte viene bilanciato, facendo in modo che la corrente da B a D sia sempre nulla mentre è applicata la fem alternata V_ε. Mostrare che $L_1/L_2 = R_3/R_4$.

Figura 17–46

17.18 A coil having 1000 turns and a resistance of 100 Ω is wound around a very long solenoid having 10^4 turns per meter and a cross section of 2×10^{-3} m^2. The current in the solenoid is 10 A. In a short time the current in the solenoid is (a) doubled, (b) reduced to zero, (c) reversed. Find the amount of charge that circulates through the coil for each case.

17.19 Find the self inductance of a toroidal solenoid of N turns. Assume that the radius of the coils is very small compared with the radius of the torus.

17.20 The magnetic flux through a circuit carrying a current of 2 A is 0.8 Wb. Find its self inductance. Compute the emf induced in the circuit if, in 0.2 s, the current is (a) doubled, (b) reduced to zero, (c) reversed.

17.21 The bridge illustrated in Fig. 17–45 can be used to compare the two inductances L_1 and L_2. The bridge is balanced so that the current from B to D is zero at all times when the alternating emf V_ε is applied. Show that $L_1/L_2 = R_3/R_4$.

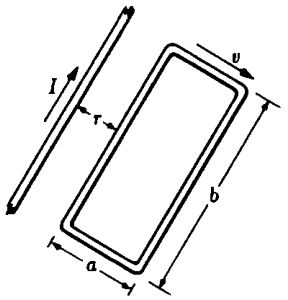


Figure 17–46

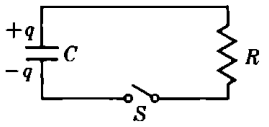


Figura 17–47

Figure 17–47

17.22 Nel Problema 17.21 era stata trascurata la resistenza associata alle induttanze. Se i valori di queste resistenze sono R_1 ed R_2, il procedimento è il seguente: inizialmente, il ponte viene bilanciato rendendo nulla la corrente tra B e D in presenza di una fem *costante*. Poi la corrente viene bilanciata come nel Problema 17.21, senza cambiare la resistenza. Mostrare che vale ancora la medesima relazione.

17.23 Se il circuito rettangolare di Fig. 17–46 si allontana con velocità v dal conduttore rettilineo, in cui fluisce corrente, trovare la fem indotta. Usare due metodi. [*Suggerimento:* Ricordare il Problema 16.68 e notare che $v = dr/dt$.]

17.24 Con riferimento alle situazione discusse nei Paragrafi 17.2 e 17.4, calcolare il campo elettrico nel sistema di riferimento connesso al conduttore in moto e determinare la differenza di potenziale tra i suoi terminali.

17.25 Applicare la discussione del Paragrafo 12.10 all'analisi di due circuiti elettrici identici accoppiati.

17.26 Un condensatore C che possiede una carica iniziale q_0 è collegato ad un resistore R. Se l'interruttore S di Fig. 17–47 viene chiuso, il condensatore si scarica attraverso la resistenza. Mostrare che (a) la corrente nel circuito è $I = -dq/dt$, (b) l'equazione del circuito è $q/C = RI$, (c) la carica sul condensatore al tempo t vale $q = q_0 e^{-t/RC}$, (d) l'energia dissipata nella resistenza per effetto Joule è eguale all'energia iniziale del condensatore. [*Suggerimento:* Per (c), combinare i risultati di (a) e di (b); per (d), calcolare l'integrale $\int_0^\infty RI^2\,dt$.]

17.27 Un condensatore C_1 ha una carica iniziale q_0. Quando l'interruttore S viene chiuso (Fig. 17–48), il condensatore viene collegato in serie con un resistore R e con un condensatore scarico C_2. (a) Mostrare che l'equazione del circuito è $q/C_1 + (q_0 - q)/C_2 = RI$. (b) Trovare q e I in funzione del tempo.

17.22 In Problem 17.21 the resistance of the inductances was neglected. If their resistances are R_1 and R_2, the procedure is as follows: First the bridge is balanced until there is no current between B and D when a *constant* emf is applied. Next the current is balanced as in Problem 17.21, without changing the resistance. Show that the same relation still holds.

17.23 If the rectangular circuit of Fig. 17–46 is moving away from the rectilinear current with velocity v, find the induced emf. Use two methods. [*Hint:* Remember Problem 16.68 and note that $v = dr/dt$.]

17.24 Referring to the situation discussed in Sections 17.2 and 17.4, compute the electric field in the frame of reference attached to the moving conductor and determine the potential difference between its end points.

17.25 Apply the discussion of Section 12.10 to the analysis of two identical coupled electric circuits.

17.26 A capacitor C which has an initial charge q_0 is connected to a resistor R. If the switch S of Fig. 17–47 is closed, the capacitor discharges through the resistor. Show that (a) the current in the circuit is $I = -dq/dt$, (b) the equation of the circuit is $q/C = RI$, (c) the charge of the capacitor at time t is $q = q_0 e^{-t/RC}$, (d) the energy dissipated in the resistance by the Joule effect is equal to the initial energy of the capacitor. [*Hint:* For (c), combine (a) and (b); for (d), compute the integral $\int_0^\infty RI^2\,dt$.]

17.27 A capacitor C_1 has an initial charge q_0. When the switch S is closed (Fig. 17–48), the capacitor is connected in series with a resistor R and an uncharged capacitor C_2. (a) Show that the equation of the circuit is $q/C_1 + (q_0 - q)/C_2 = RI$. (b) Find q and I as functions of time.

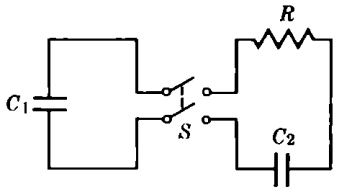


Figura 17–48

Figure 17–48

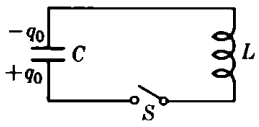


Figura 17–49

Figure 17–49

17.28 Un condensatore C avente una carica iniziale q_0 è collegato ad un'autoinduttanza L avente resistenza trascurabile (Fig. 17–49). Quando l'interruttore S viene chiuso, il condensatore si scarica attraverso l'induttanza. Mostrare che (a) la corrente nel circuito vale $I = -dq/dt$, (b) l'equazione del circuito è $q/C - L\,dI/dt = 0$, (c) la carica sul condensatore al tempo t è $q = q_0 \cos \omega t$ ove $\omega = 1/\sqrt{LC}$, ossia che si instaurano delle oscillazioni elettriche. Questo dispositivo è usato per ottenere oscillazioni ad alta-frequenza.

17.29 Una batteria avente fem V e resistenza interna trascurabile è collegata in serie con una resistenza R e con un condensatore scarico C (Fig. 17–50). Dopo che l'interruttore S viene chiuso, mostrare che (a) la corrente nel circuito è $I = +dq/dt$, ove q è la carica accumulata sul condensatore, (b) l'equazione del circuito è $V - q/C = RI$, (c) la carica in funzione del tempo è $q = V_\mathcal{E} C(1 - e^{-t/RC})$. (d) la corrente in funzione del tempo è $I = (V_\mathcal{E}/R)e^{-t/RC}$. Fare un diagramma di q e I in funzione del tempo.

17.30 Un circuito è composto da una resistenza alla quale è applicata una fem alternata $V_\mathcal{E} = V_0 \sin \omega t$. Mostrare che la corrente è data da $I = (V_0/R) \sin \omega t$, disegnare i vettori ruotanti rappresentati la fem e la corrente, e mostrare che essi sono in fase. Qual'è l'impedenza del circuito?

17.31 Un circuito è formato da un generatore di fem alternata di ampiezza $V_{\mathcal{E}0}$ avente pulsazione ω e da un condensatore C. (a)

17.28 A capacitor C having an initial charge q_0 is connected to a self inductance L of negligible resistance (Fig. 17–49). If the switch S is closed, the capacitor discharges through the inductance. Show that (a) the current in the circuit is $I = -dq/dt$, (b) the equation of the circuit is $q/C - L\,dI/dt = 0$, (c) the charge on the capacitor at time t is $q = q_0 \cos \omega t$, where $\omega = 1/\sqrt{LC}$, so that electric oscillations are set up. This arrangement is used to obtain high-frequency oscillations.

17.29 A battery of emf $V_\mathcal{E}$ and negligible internal resistance is connected in series with a resistance R and an uncharged capacitor C (Fig. 17–50). After the switch S is closed, show that (a) the current in the circuit is $I = +dq/dt$, where q is the charge accumulated in the capacitor, (b) the equation of the circuit is $V_\mathcal{E} - q/C = RI$, (c) the charge as a function of time is $q = V_\mathcal{E} C(1 - e^{-t/RC})$, (d) the current as a function of time is $I = (V_\mathcal{E}/R)e^{-t/RC}$. Plot q and I as functions of time.

17.30 A circuit is composed of a resistance to which an alternating emf $V_\mathcal{E} = V_0 \sin \omega t$ is applied. Show that the current is given by $I = (V_0/R) \sin \omega t$, plot the rotating vector of the emf and the current, and show that they are in phase. What is the impedance of the circuit?

17.31 A circuit is composed of an alternating emf of amplitude $V_{\mathcal{E}0}$ and angular frequency ω connected to a capacitor C. (a)

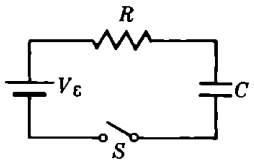


Figura 17–50

Trovare la corrente. (b) Disegnare i vettori ruotanti rappresentanti la fem applicata e la corrente. (c) Disegnare il grafico della corrente in funzione di ω e di C.

17.32 Un condensatore da 1 μF è collegato ai capi di un generatore di tensione alternata, di ampiezza costante pari a 50 V, avente frequenza variabile. Trovare l'ampiezza della corrente quando la pulsazione è (a) 100 s^{-1}, (b) 1000 s^{-1}, (c) 10,000 s^{-1}. (d) Tracciare un diagramma del logaritmo dell'ampiezza della corrente in funzione del logaritmo della frequenza.

17.33 L'ampiezza della tensione di una sorgente a corrente alternata è uguale a 50V e la sua pulsazione è 1000 s^{-1}. Trovare l'ampiezza della corrente se la capacità del condensatore collegato ai capi della sorgente è (a) 0.01 μF, (b) 1.0 μF, (c) 100 μF. (d) Tracciare un diagramma del logaritmo dell'ampiezza della corrente in funzione del logaritmo della capacità.

17.34 Un circuito è formato da un generatore di fem alternata avente ampiezza $V_{\mathcal{E}0}$ e pulsazione ω collegato ad una autoinduttanza L. (a) Trovare la corrente. (b) Disegnare i vettori ruotanti rappresentanti la fem applicata, la caduta di potenziale ai capi dell'autoinduzione e la corrente. (c) Tracciare un diagramma della corrente in funzione di ω e di L.

17.35 Un induttore di autoinduttanza 10 H e di resistenza trascurabile è collegato al generatore del Problema 17.32. Trovare l'ampiezza della corrente quando la pulsazione è (a) 100 s^{-1}, (b) 1000 s^{-1}, (c) 10,000 s^{-1}. (d) Tracciare un diagramma del logaritmo dell'ampiezza della corrente in funzione del logaritmo della frequenza.

17.36 Trovare l'ampiezza della corrente se l'autoinduttanza di un induttore privo di resistenza collegato al generatore del Problema 17.33 vale (a) 0.01 H, (b) 1.0 H, (c) 100 H.

Figure 17–50

Find the current. (b) Draw the rotating vectors corresponding to the applied emf and to the current. (c) Plot the current as a function of ω and of C.

17.32 A 1-μF capacitor is connected across an a-c source whose voltage amplitude is kept constant at 50 V, but whose frequency can be varied. Find the current amplitude when the angular frequency is (a) 100 s^{-1}, (b) 1000 s^{-1}, (c) 10,000 s^{-1}. (d) Construct a log-log plot of current amplitude versus frequency.

17.33 The voltage amplitude of an a-c source is 50 V and its angular frequency is 1000 s^{-1}. Find the current amplitude if the capacitance of a capacitor connected across the source is (a) 0.01 μF, (b) 1.0 μF, (c) 100 μF. (d) Construct a log-log plot of current amplitude versus capacitance.

17.34 A circuit is composed of an alternating emf of amplitude $V_{\mathcal{E}0}$ and angular frequency ω connected to a self inductance L. (a) Find the current. (b) Draw the rotating vectors corresponding to the applied emf, the potential drop across the self inductance and the current. (c) Plot the current as a function of ω and of L.

17.35 An inductor of self inductance 10 H and of negligible resistance is connected across the source of Problem 17.32. Find the current amplitude when the angular frequency is (a) 100 s^{-1}, (b) 1000 s^{-1}, (c) 10,000 s^{-1}. (d) Construct a log-log plot of current amplitude versus frequency.

17.36 Find the current amplitude if the self-inductance of a resistanceless inductor connected across the source of Problem 17.33 is (a) 0.01 H, (b) 1.0 H, (c) 100 H.

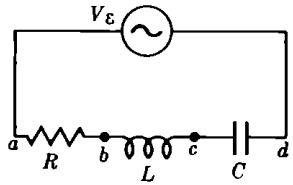


Figura 17–51

(d) Tracciare un diagramma del logaritmo dell'ampiezza della corrente in funzione del logaritmo dell'autoinduttanza.

17.37 Un circuito è formato da una resistenza e da una induttanza in serie alle quali è applicata una fem alternata $V_\mathcal{E} = V_{\mathcal{E}0} \sin \omega_f t$. Mostrare che l'impedenza del circuito è $\sqrt{R^2 + (\omega_f L)^2}$, e che la corrente ritarda rispetto alla fem di un angolo $\tan^{-1}(\omega_f L/R)$. [*Suggerimento*: Disegnare il vettore ruotante della corrente. Poi, usando i risultati del Problema 17.34, disegnare i vettori ruotanti corrispondenti alla differenza di potenziale o fem ai capi della resistenza e dell'induttanza. Trovare i loro moduli e confrontarli con $V_{\mathcal{E}0}$ per ottenere l'impedenza. L'angolo tra i vettori ruotanti della fem risultante e della corrente fornisce la differenza di fase.]

17.38 Ripetere il problema precedente per un circuito formato da (a) una resistenza ed un condensatore, (b) un'induttanza ed un condensatore.

17.39 Un avvolgimento avente 20 spire ed un'area di 0.04 m^2 ruota a 10 giri al secondo in un campo magnetico il cui valore è 0.02 T. La resistenza dell'avvolgimento è 2Ω e la sua autoinduzione è 10^{-3} H. Trovare l'espressione (a) della fem indotta, (b) della corrente.

17.40 Nel circuito della Fig. 17-51 $V_\mathcal{E} = V_{\mathcal{E}0} \sin \omega t$ è una fem alternata. Trovare l'ampiezza e la fase rispetto alla fem delle differenze di potenziale V_{ab}, V_{bc}, V_{cd}, V_{ac}, V_{bd}. [*Suggerimento:* Disegnare i corrispondenti vettori ruotanti come mostrato prima in Fig. 17–27.]

17.41 Una fem alternata avente un valore massimo di 100 V ed una pulsazione uguale a 120π s^{-1} è collegata in serie

(d) Construct a log-log plot of current amplitude versus self inductance.

17.37 A circuit is composed of a resistance and an inductance in series to which an alternating emf $V_\mathcal{E} = V_{\mathcal{E}0} \sin \omega_f t$ is applied. Show that the impedance of the circuit is $\sqrt{R^2 + (\omega_f L)^2}$, and that the current lags the emf by an angle $\tan^{-1}(\omega_f L/R)$. [*Hint:* Plot the rotating vector of the current. Then, using the results of Problem 17.34, draw the rotating vectors corresponding to the potential difference or emf across the resistance and the inductance. Find their magnitude and compare with $V_{\mathcal{E}0}$ to obtain the impedance. The angle between the resultant rotating vector of the emf and the rotating vector of the current gives the phase difference.]

17.38 Repeat the preceding problem for a circuit composed of (a) a resistance and a capacitor, (b) an inductance and a capacitor.

17.39 A coil having 20 turns and an area of 0.04 m^2 rotates at 10 rev s^{-1} in a magnetic field of 0.02 T. The resistance of the coil is 2Ω and its self inductance is 10^{-3} H. Find the expression of (a) the induced emf, (b) the current.

17.40 In the circuit of Fig. 17-51 $V_\mathcal{E} = V_{\mathcal{E}0} \sin \omega t$ is an alternating emf. Find the amplitude and phase relative to the emf of the potential difference V_{ab}, V_{bc}, V_{cd}, V_{ac}, V_{bd}. [*Hint:* Draw the corresponding rotating vectors, as indicated before in Fig. 17–27.]

17.41 An alternating emf having a maximum value of 100 V and an angular frequency of 120π s^{-1} is connected in series

con una resistenza da 1Ω, un'autoinduttanza da 3×10^{-3} H, ed un condensatore da 2×10^{-3} F. Determinare (a) l'ampiezza e la fase della corrente, (b) la differenza di potenziale ai capi della resistenza dell'induttanza e del condensatore. (c) Eseguire un diagramma che mostri i vettori ruotanti corrispondenti alla fem applicata, alla corrente ed alle tre differenze di potenziale. (d) Verificare che i vettori delle tre differenze di potenziale abbiamo per somma il vettore della fem.

17.42 Se in un circuito a corrente alternata I_{rms} e $\mathcal{E}_{rms}$ sono i valori quadratici medi della corrente e della fem in un ciclo, mostrare che $I_{rms} = I_0/\sqrt{2}$, $\mathcal{E}_{rms} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}$, e $P_{med} = I_{rms}\mathcal{E}_{rms} \cos\alpha$, ove α è l'angolo di sfasamento tra la corrente e la fem.

17.43 Un circuito consiste in un generatore di fem alternata avente valore massimo 100 *V*, di una resistenza da 2Ω, di un'autoinduttanza da 10^{-3} H e di un condensatore da 10^{-3} F, tutti collegati in serie. Trovare il valore massimo della corrente per i seguenti valori della pulsazione della fem: (a) 0, (b) $10\ s^{-1}$, (c) $10^2\ s^{-1}$, (d) risonanza, (e) $10^4\ s^{-1}$, (f) $10^5\ s^{-1}$. Eseguire il grafico della corrente in funzione del logaritmo della frequenza.

with a resistance of 1Ω, a self inductance of 3×10^{-3} H, and a capacitor of 2×10^{-3} F. Determine (a) the amplitude and phase of the current, (b) the potential difference across the resistance, the inductance, and the capacitor. (c) Make a diagram showing the rotating vectors corresponding to the applied emf, the current, and the three potential differences. (d) Verify that the three potential difference vectors add to the emf vector.

17.42 If I_{rms} and $\mathcal{E}_{rms}$ in an a-c circuit are the root-mean-square values of the current and the emf over one cycle, show that $I_{rms} = I_0/\sqrt{2}$, $\mathcal{E}_{rms} = \mathcal{E}_0/\sqrt{2}$, and $P_{ave} = I_{rms}\mathcal{E}_{rms} \cos\alpha$, where α is the phase angle between the current and the emf.

17.43 A circuit consists of an alternating emf having a maximum value of 100 *V*, a resistance of 2Ω, a self inductance of 10^{-3} H and a capacitance of 10^{-3} F, all connected in series. Find the maximum value of the current for the following values of the angular frequency of the emf: (a) 0, (b) $10\ s^{-1}$, (c) $10^2\ s^{-1}$, (d) resonance, (e) $10^4\ s^{-1}$, (f) $10^5\ s^{-1}$. Plot the current against the logarithm of the frequency.

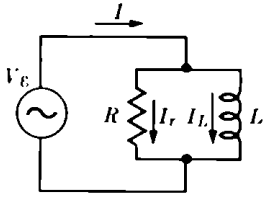


Figura 17–52

Figure 17–52

17.44 Un circuito è formato da una resistenza e da un'induttanza in parallelo come è mostrato in Fig. 17–52. Mostrare che l'impedenza risultante del circuito è data da $1/Z = \sqrt{1/R^2 + 1/\omega_f^2 L^2}$, e che la fase è data da $\tan^{-1}(R/\omega_f L)$. [*Suggerimento:* Disegnare il vettore ruotante rappresentate la fem applicata. Quindi, usando i risultati dei Problemi 17.34 e 17.37, disegnare i vettori ruotanti corrispondenti alla corrente nella resistenza e nell'induttanza. Il loro risultato fornisce la corrente totale e così è possibile desumere l'impedenza e la differenza di fase.]

17.44 A circuit is composed of a resistance and an inductance in parallel, as shown in Fig. 17–52. Show that the resultant impedance of the circuit is given by $1/Z = \sqrt{1/R^2 + 1/\omega_f^2 L^2}$ and the phase by $\tan^{-1}(R/\omega_f L)$. [*Hint:* Plot the rotating vector of the applied emf. Then, using the results of Problems 17–34 and 17–37, draw the rotating vectors corresponding to the current in the resistance and the inductance. Their resultant gives the total current from which the impedance and the phase difference are obtained.]

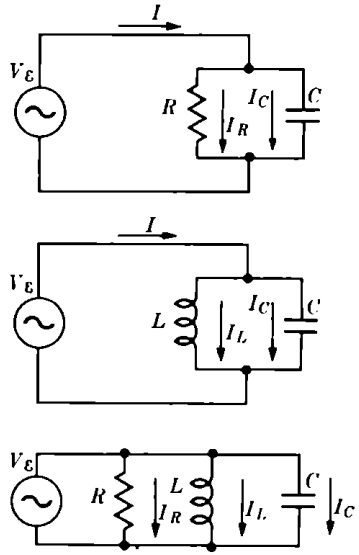


Figura 17–53

Figure 17–53

17.45 Ripetere il problema precedente con riferimento ai tre circuiti illustrati di Fig. 17–53.

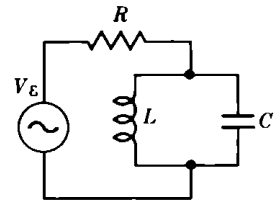
17.46 Un avvolgimento avente una resistenza di 1Ω ed un'autoinduttanza di 10^{-3} H è collegato in parallelo con un secondo avvolgimento avente una resistenza di 1Ω ed un'autoinduttanza di 3×10^{-3} H. Un generatore di fem alternata avente ampiezza pari a 10 V e pulsazione pari a $120\pi s^{-1}$ è collegato con il sistema. Calcolare (a) la corrente in ciascun avvolgimento, (b) la corrente totale. (c) Eseguire un diagramma che mostri i vettori ruotanti della fem, della corrente in ciascun conduttore e della corrente totale. (d) Verificare che il vettore della corrente totale è eguale alla somma dei vettori rappresentanti ciascuna corrente.

17.47 Un circuito è composto da un'induttanza e da un condensatore in parallelo, collegato in serie con una resistenza *R* come è mostrato nella Fig. 17–54. (a) Disegnare i vettori ruotanti corrispondenti a $V_\mathcal{E}$, I_L, I_C, RI, V_L, e V_C. (b) Mostrare che l'impedenza del circuito è $[R^2 + \omega^2 L^2/(1 - \omega^2 LC)^2]^{1/2}$. (c) Qual'è il valore dell'impedenze $\omega = 1/\sqrt{LC}$? (In questo caso si dice che si verifica *l'antirisonanza.*) (d) Eseguire uno schizzo

17–45 Repeat the preceding problem for the three circuits illustrated in Fig. 17–53.

17.46 A coil having a resistance of 1Ω and a self inductance of 10^{-3} H is connected in parallel with a second coil having a resistance of 1Ω and a self inductance of 3×10^{-3} H. An alternating emf having an amplitude of 10 V and an angular frequency of $120\pi\ s^{-1}$ is connected to the system. Calculate (a) the current across each coil, (b) the total current. (c) Make a plot showing the rotating vector for the emf, the current in each conductor, and the total current. (d) Verify that the vector of the total current is equal to the sum of the vectors of each current.

17.47 A circuit is composed of an inductance and a capacitor in parallel, connected in series with a resistance *R* as shown in Fig. 17–54. (a) Draw the rotating vectors corresponding to $V_\mathcal{E}$, I_L, I_C, RI, V_L, and V_C. (b) Show that the impedance of the circuit is $[R^2 + \omega^2 L^2/(1 - \omega^2 LC)^2]^{1/2}$. (c) What is the value of the impedance when $\omega = 1/\sqrt{LC}$? (In this case there is said to be *antiresonance.*) (d) Make a rough



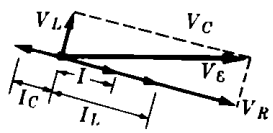


Figura 17–54

Figure 17–54

approssimato della corrente in funzione della frequenza. [*Suggerimento:* Si noti che i vettori ruotanti delle correnti attraverso L e C debbono avere per somma la corrente attraverso R, mentre quelli corrispondenti alla differenza di potenziale debbono essere identici. Per aiutare lo studente è stato mostrato anche il diagramma vettoriale.]

17.48 Un avvolgimento circolare di raggio a, resistenza R, e autoinduttanza L ruota con velocità angolare costante attorno ad un diametro perpendicolare ed un campo magnetico uniforme (vedi Fig. 17–55). Trovare (a) la fem indotta e la corrente nell'avvolgimento, (b) i valori medi delle componenti lungo gli assi x e y del campo magnetico prodotto dall'avvolgimento in O, (c) l'angolo formato con l'asse X da un ago magnetico posto in O.

sketch of the current versus the frequency. [*Hint:* Note that the rotating vectors of the currents through L and C must add to the current through R, but those corresponding to the potential difference must be identical. To assist the student, the rotating vector diagram has also been shown.]

17.48 A circular coil of radius a, resistance R, and self inductance L rotates with a constant angular velocity around a diameter perpendicular to a uniform magnetic field (see Fig. 17–55). Find (a) the emf induced and the current in the coil, (b) the average values of the x- and y-components of the magnetic field produced by the coil at O, (c) the angle with the X-axis made by a magnetic needle placed at O.

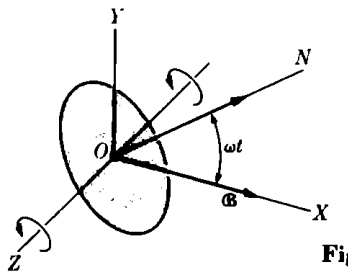


Figura 17–55

Figure 17–55

17.49 Mostrare che l'Eq. (17.8) è soddisfatta se $\mathcal{B} = C/r$. [*Suggerimento:* Calcolare $\mathcal{B}_{med}$ per un valore arbitrario di r, inserire il valore nell'Eq. (17.8), e calcolare la derivata rispetto ad r.]

17.50 Una particella avente carica q e massa m si muove lungo un'orbita circolare avente raggio ρ per effetto della forza centripeta F. In un intervallo di tempo assegnato

17.49 Show that Eq. (17.8) is satisfied if $\mathcal{B} = C/r$. [*Hint:* Compute $\mathcal{B}_{ave}$ for an arbitrary r, insert the value in Eq. (17.8), and compute the derivative with respect to r.]

17.50 A charge q, of mass m, is moving in a circular orbit of radius ρ under a centripetal force F. In a certain time interval, a

viene prodotto un campo magnetico uniforme nella direzione perpendicolare al piano dell'orbita. Usando la legge dell'induzione elettromagnetica, mostrare che la variazione del modulo della velocità è $\Delta v = -\rho\mathcal{B}/2m$, e che il corrispondente cambiamento del momento magnetico è $\Delta \boldsymbol{m} = -(q^2\rho^2/4m)\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Confrontare con l'Esempio 16.21. [*Suggerimento:* Per ottenere l'accelerazione tangenziale mentre il campo magnetico sta variando, usare l'Eq. (17.6), che è stata ottenuta durante la discussione sul betatrone.]

17.51 Con riferimento alla situazione descritta nel Paragrafo 17.5, (a) mostrare che in un sistema di riferimento nel quale il circuito è in quiete ed il campo magnetico ruota con velocità angolare $-\boldsymbol{\omega}$, $\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}/\partial t = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}$. (b) Scrivere l'Eq. (17.15) con questo valore di $\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}/\partial t$ e, usando il risultato del Problema 16.64, mostrare che il campo elettrico osservato in questo riferimento è $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) \times \mathbf{r}$. (c) Mostrare che la fem prodotta da questo campo elettrico è la stessa di quella misurata da un osservatore fisso con il campo magnetico. [*Suggerimento:* Notare che $\frac{1}{2}\mathbf{r} \times d\boldsymbol{l}$ è l'area del triangolo definito dai due vettori e che $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$.]

17.52 In una regione dello spazio nella quale esiste un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, il modulo del campo aumenta costantemente nel tempo, cioè $\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}/\partial t = \boldsymbol{b}$ è un vettore costante parallelo a $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. (a) Mostrare che, in accordo con l'Eq. (17.15), il campo elettrico in ogni punto vale $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b} \times \mathbf{r}$. (b) Ponendo l'asse Z parallelo al campo magnetico, ottenere le componenti cartesiane di $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. (c) Disegnare le linee di forza dei campi elettrico e magnetico.

17.53 Trovare il flusso del campo elettrico attraverso una sfera concentrica con una carica che si muove con grande velocità. [*Suggerimento:* Usare l'Eq. (15.64) che esprime la legge di Gauss.]

17.54 Usando l'operatore ∇, scrivere le equazioni di Maxwell in forma differenziale (Tabella 17–2).

17.55 Mostrare che l'equazione di continuità (17.51) espressa in forma differenziale è $\partial\rho/\partial t = -\text{div}\, \boldsymbol{j}$.

uniform magnetic field is set up in a direction perpendicular to the plane of the orbit. Using the law of electromagnetic induction, show that the change in the magnitude of the velocity of the ion is $\Delta v = -q\rho\mathcal{B}/2m$, and that the corresponding change in magnetic moment is $\Delta \boldsymbol{m} = -(q^2\rho^2/4m)\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Compare with Example 16.21. [*Hint:* To obtain the tangential acceleration while the magnetic field is changing, use Eq. (17.6), derived in discussing the betatron.]

17.51 Referring to the situation described in Section 17.5, (a) show that in the frame of reference in which the circuit is at rest and the magnetic field rotates with angular velocity $-\boldsymbol{\omega}$, $\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}/\partial t = -\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}$. (b) Write Eq. (17.15) with this value of $\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}/\partial t$ and, using the result of Problem 16.64, show that the electric field observed in this frame of reference is $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mathcal{B}}) \times \boldsymbol{r}$. (c) Show that the emf produced by this electric field is the same as the emf measured by the observer attached to the magnetic field. [*Hint:* Note that $\frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{l}$ is the area of the triangle determined by both vectors, and that $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$.]

17.52 In a region where a uniform magnetic field $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ exists, the magnitude of the field is increasing at a constant rate, that is, $\partial\boldsymbol{\mathcal{B}}/\partial t = \boldsymbol{b}$, where $\boldsymbol{b}$ is a constant vector parallel to $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. (a) Show that, according to Eq. (17.15), the electric field at each point is $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{r}$. (b) Placing the Z-axis parallel to the magnetic field, obtain the rectangular components of $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. (c) Plot the lines of force of the magnetic and electric fields.

17.53 Find the electric flux through a sphere concentric with a charge moving with a high velocity. [*Hint:* Use Eq. (15.64) of Gauss' law.]

17.54 By using the operator ∇, write the Maxwell equations in differential form (Table 17–2).

17.55 Show that the equation of continuity (17.51) expressed in differential form is $\partial\rho/\partial t = -\text{div}\, \boldsymbol{j}$.

17.56 Mostrare che, affinchè l'equazione di continuità, nella forma data nel Problema 17.55, rimanga invariante rispetto ad una trasformazione di Lorentz, per tutti gli osservatori inerziali, è necessario che la corrente e la densità di carica si trasformino secondo le leggi

$$j'_x = \frac{j_x - \rho v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad j'_y = j_y,$$

$$j'_z = j_z, \qquad \rho' = \frac{\rho - j_x v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Scrivere il limite non relativistico di queste espressioni e discuterne la plausibilità. [*Suggerimento:* Ricordare che $\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$ è la densità di corrente per un sistema di cariche in moto con velocità $\boldsymbol{v}$.]

17.57 Verificare, per sostituzione diretta, che l'Eq. (17.34) è una soluzione dell'Eq. (17.33) se I_0 e α sono dati rispettivamente dalle Equazioni (17.35) e (17.39). [*Suggerimento:* Dapprima sviluppare sin $(\omega_f t - \alpha)$ e sostituire sin α e cos α con i corrispondenti valori ottenuti dall'Eq. (17.39).]

17.56 Show that in order for the equation of continuity as written in Problem 17.55 to remain invariant for all inertial observers under a Lorentz transformation, it is necessary that the current and charge density transform according to the law

$$j'_x = \frac{j_x - \rho v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad j'_y = j_y,$$

$$j'_z = j_z, \qquad \rho' = \frac{\rho - j_x v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Write the nonrelativistic limit of these expressions and discuss their plausibility. [*Hint:* Recall that $\boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$ is the current density for charges moving with velocity $\boldsymbol{v}$.]

17.57 Verify by direct substitution that Eq. (17.34) is a solution of Eq. (17.33) if I_0 and α are given by Eqs. (17.35) and (17.39), respectively. [*Hint:* First expand sin $(\omega_f t - \alpha)$ and replace sin α and cos α by their corresponding values, as derived from Eq. (17.39).]

PARTE 3
ONDE

18 Propagazione per onde
19 Onde elettromagnetiche
20 Riflessione, rifrazione, polarizzazione
21 Geometria della propagazione per onde
22 Interferenza
23 Diffrazione
24 Fenomeni di trasporto

PART 3
WAVES

18 Wave Motion
19 Electromagnetic Waves
20 Reflection, Refraction, Polarization
21 Wave Geometry
22 Interference
23 Diffraction
24 Transport Phenomena

Di tutti i concetti impiegati in fisica, due sono nella possibilità di comprensione intuitiva di ogni individuo, qualunque sia il suo livello culturale. Sono questi i concetti di *particella* e di *onda*. Per il profano, una particella è una piccola porzione di materia, dove "piccola" va inteso relativamente all'ambiente che sta intorno alla particella, che è usualmente valutato in termini di una scala antropomorfica. Analogamente, il profano si fa una immagine intuitiva di onde dalle onde che osserva sulla superficie dell'acqua, su di una corda, o su di una molla.

Ma, come lo studente ha senza dubbio compreso dalla lettura dei capitoli precedenti, il fisico usa il concetto di particella con un significato in qualche modo più astratto e fondamentale che lo pone in grado di analizzare adeguatamente una grande varietà di stati fisici. Il concetto di onde subisce un' analoga trasformazione: il fisico ne ha esteso il concetto e lo ha applicato ad un grande numero di fenomeni che non assomigliano alla descrizione intuitiva dell'onda sulla superficie dell'acqua, ma che hanno la medesima descrizione matematica. La parte 3 di questo testo è dedicata ad una discussione generale dei fenomeni ondulatori intesi in senso così esteso.

Una parola di avvertimento: in ogni caso lo studente deve impegnarsi a comprendere lo stato fisico descritto e lo schema matematico adottato e deve trattenersi dalla inevitabile tentazione di immaginare semplicemente tutte le onde come egli le vede alla superficie di un liquido. Noi analizzeremo parecchi tipi di onde, essenzialmente onde elastiche ed elettromagnetiche, con un particolare risalto sulle seconde. Gli aspetti più importanti delle onde sono la velocità della loro propagazione e le modificazioni che subiscono quando cambiano le proprietà fisiche del mezzo (riflessione, rifrazione, polarizzazione), quando differenti tipi di ostacoli sono posti sul loro cammino (diffrazione, diffusione) o quando parecchie onde coincidono nella medesima regione dello spazio (interferenza). Questi quindi saranno gli argomenti particolari che verranno trattati nei prossimi capitoli. Ma lo scopo principale di questi capitoli è di porre lo studente in grado di acquisire le nozioni fondamentali della descrizione ondulatoria dei fenomeni fisici, come la propagazione di uno stato fisico descritto da un campo funzione del tempo. Per questa ragione, nel capitolo 24, noi discuteremo un gruppo particolare di processi fisici che andranno sotto il titolo generale di *fenomeni di trasporto*. Essi sono descritti in una forma matematica in certo modo diversa di quella adottata per le onde elastiche ed elettromagnetiche e per quanto anch'essi corrispondono alla propagazione di certi stati fisici, la descrizione fisica è diversa da quella di altri tipi di fenomeni ondulatori. Da un accurato confronto tra i fenomeni di trasporto e le onde descritte nei capitoli precedenti, acquisteremo una approfondita visione della descrizione ondulatoria dei fenomeni fisici.

Of all concepts used in physics, two are within the possibility of intuitive understanding by any individual, no matter what his cultural level. These are the concepts of *particle* and of *wave*. To the layman, a particle is a small portion of matter, where "small" means small relative to the environment of the particle, which normally is decided in terms of an anthropomorphic scale. Similarly, the layman has an objective picture of waves in terms of the waves he observes on the surface of water, on a string, or on a spring.

But, as the student has undoubtedly realized after reading the preceding chapters, the physicist uses the concept of particle in a somewhat more abstract and fundamental sense which enables him to adequately treat a great variety of physical situations. The concept of wave has a similar transformation; the physicist has extended the concept and applied it to a large number of phenomena which do not resemble the objective picture of a wave on the surface of water, but which have the same mathematical description. Part 3 of this text is dedicated to the general discussion of wave phenomena in this broad sense.

A word of warning: In each case the student must concentrate on understanding the physical situation described and the mathematical framework used, and must refrain from the inevitable temptation to merely picture all waves as he sees them on the surface of a liquid. We shall analyze several types of waves, primarily elastic and electromagnetic waves, with special emphasis on the latter. The most important aspects of waves are the velocity of their propagation and the modifications they suffer when the physical properties of the medium change (reflection, refraction, polarization), when different kinds of obstacles are interposed in their paths (diffraction, scattering), or when several waves coincide in the same region of space (interference). These, therefore, will be the specific topics to be covered in the forthcoming chapters. But the primary purpose of these chapters is to enable the student to attain a fundamental understanding of the wave description of physical phenomena, such as the propagation of a physical situation described by a time-dependent field. For that reason, in Chapter 24 we shall discuss a selected group of processes under the general title of *transport phenomena*. They are described in a somewhat different mathematical form from that corresponding to elastic and electromagnetic waves and, although they also correspond to a propagation of some physical condition, the physical picture is different from that of other types of wave phenomena. By carefully contrasting transport phenomena with the other waves described in the preceding chapters, we can gain a deeper insight into the wave description of physical phenomena.

18
PROPAGAZIONE PER ONDE

18.1 Introduzione
18.2 Descrizione matematica della propagazione
18.3 Analisi di Fourier del moto d'onda
18.4 Equazione differenziale del moto di un'onda
18.5 Onde elastiche in una sbarra solida
18.6 Onde di pressione in una colonna di gas
18.7 Onde trasversali in una corda
18.8 Onde di superficie in un liquido
18.9 Che cosa si propaga in un moto d'onda?
18.10 Onde in due o tre dimensioni
18.11 Onde sferiche in un fluido
18.12 Velocità di gruppo
18.13 Effetto Doppler
18.14 Suono; Acustica

18
WAVE MOTION

18.1 Introduction
18.2 Mathematical Description of Propagation
18.3 Fourier Analysis of Wave Motion
18.4 Differential Equation of Wave Motion
18.5 Elastic Waves in a Solid Rod
18.6 Pressure Waves in a Gas Column
18.7 Transverse Waves in a String
18.8 Surface Waves in a Liquid
18.9 What Propagates in a Wave Motion?
18.10 Waves in Two and Three Dimensions
18.11 Spherical Waves in a Fluid
18.12 Group Velocity
18.13 The Doppler Effect
18.14 Sound; Acoustics

18.1 Introduzione

Quando suoniamo una campana o accendiamo una radio, il suono può essere udito in punti lontani. Il suono viene trasmesso attraverso l'aria circostante. Se siamo su di una spiaggia ed un motoscafo passa distante dalla riva, la scia che esso produce può giungere fino a noi. Quando si accende una lampadina, la stanza si riempie di luce. Nel Paragrafo 17.11 abbiamo visto come, in conseguenza delle relazioni fisiche tra campo magnetico ed elettrico, è possibile trasmettere una segnale elettrico da un punto ad un altro. Per quanto il meccanismo fisico sia diverso in tutti i processi sopra citati, essi hanno una caratteristica comune. Sono stati fisici che sono prodotti in un punto dello spazio, si propagano attraverso di esso, e sono avvertiti in un altro punto dopo un certo tempo. Questi tipi di processi sono tutti esempi di *propagazione per onde*.

Per definire la questione in modo più generale, si supponga di avere una proprietà fisica rappresentata da un certo campo. Questo campo può essere un campo elettromagnetico, la deformazione in una molla, la pressione in un gas, la tensione in un solido, lo spostamento trasversale di una corda, forse anche il campo gravitazionale. Supponiamo che le condizioni in un punto diventino funzioni del tempo o dinamiche, in modo che ci sia una perturbazione dello stato fisico in quel punto. Le proprietà fisiche del sistema descritte dalle equazioni del campo funzioni del tempo (ad esempio, le equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico) dànno origine alla *propagazione* di questa perturbazione attraverso lo spazio. Ciò altera le condizioni statiche in altri punti. Quindi parliamo di un'onda associata con il particolare campo considerato.

Si consideri ad esempio la superficie libera di un liquido. Il campo in questo caso è lo spostamento di ciascun punto della superficie rispetto alla posizione di equilibrio.

18.1 Introduction

When we strike a bell or turn on the radio, sound is heard at distant points. The sound is transmitted through the surrounding air. If we are at a beach and a speeding boat passes at a distance from the shore, we eventually are affected by the wake it has produced. When a light bulb is turned on, the room is filled with light. In Section 17.11 we saw that, as a result of the physical relations between the electric and magnetic fields, it is possible to transmit an electric signal from one place to another. Although the physical mechanism may be different for each of the processes mentioned above, they all have a common feature. They are physical situations which are produced at one point of space, propagated through space, and felt later on at another point. These kinds of processes are all examples of *wave motion*.

To state the matter more generally, suppose that we have a physical property described by a certain field. This field may be an electromagnetic field, the deformation in a spring, the pressure in a gas, the strain in a solid, the transverse displacement of a string, perhaps even the gravitational field. Suppose that the conditions at one place become time dependent or dynamic, so that there is a perturbation of the physical state at that place. The physical properties of the system, described by the time-dependent equations of the field (such as Maxwell's equations for the electromagnetic field), result in the *propagation* of this perturbation through space. This disturbs the static conditions at other places. Therefore we speak of a wave associated with the particular field considered.

For example, let us consider the free surface of a liquid. The field in this case is the displacement of each point of the surface relative to the equilibrium shape.

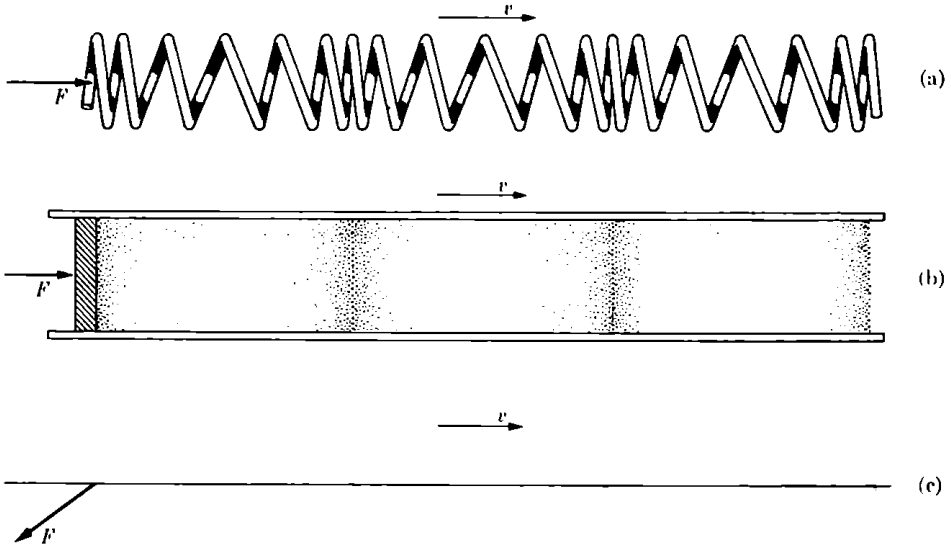


Fig. 18–1. Onde elastiche in (a) una molla, (b) un gas, e (c) una corda.

Fig. 18–1. Elastic waves in (a) a spring, (b) a gas, and (c) a string.

In condizioni di equilibrio o statiche la superficie libera di un liquido è piana ed orizzontale. Ma se si alterano le condizioni di equilibrio in un punto della superficie gettandovi una pietra, noi sappiamo che questa perturbazione si propaga in tutte le direzioni lungo la superficie del liquido. Per determinare il meccanismo della propagazione e la sua velocità, dobbiamo analizzare come lo spostamento di un punto sulla superficie del liquido influenza gli altri punti della superficie. Da questa analisi, noi ricaviamo le equazioni dinamiche del nostro processo. Queste equazioni ci permettono quindi di ottenere informazioni quantitative sulla variazione nello spazio e nel tempo della perturbazione.

In questo capitolo, considereremo inizialmente le caratteristiche generali della propagazione per onde, quindi considereremo alcuni tipi speciali di onde. La massima parte degli esempi riguardano onde elastiche in una sostanza. I diversi e ben noti tipi di onde illustrati in Fig. 18–1 sono essenzialmente onde elastiche. In questi casi, ignoreremo la struttura molecolare della materia e penseremo al mezzo continuo. Tale ipotesi è valida fino a che la fluttuazione nello spazio dell'onda (definita dalla lunghezza d'onda) è grande rispetto alla distanza intermolecolare.

18.2 *Descrizione matematica della propagazione*

Si consideri una funzione $\xi = f(x)$, rappresentata graficamente dalla curva continua in Fig. 18–2. Se noi sostituiamo ora x con $x - a$, otteniamo la funzione $\xi = f(x - a)$. Ovviamente, la forma della curva non è stata cambiata; gli stessi valori di ξ si ottengono per valori di x incrementati della quantità a. In altre parole, assumendo a positivo, si vede che la curva si è spostata verso destra di una quantità a, senza deformazione. Analogamente, si ha che $\xi = f(x + a)$ corrisponde ad uno spostamento rigido verso sinistra della curva della quantità a.

Fig. 18–2. Spostamento senza distorsioni della funzione $\xi(x)$.

Ora se è $a = vt$, dove t è il tempo, otteniamo una curva "che si muove", cioè $\xi = f(x - vt)$ rappresenta una curva che si muove verso destra con una velocità v detta *velocità di fase* (Fig. 18–3a). Analogamente, $\xi = f(x + vt)$ rappresenta una curva che si muove verso sinistra con velocità v (Fig. 18–3b). Concludiamo quindi che una espressione matematica del tipo

è in grado di descrivere uno stato fisico "che si muove" o "si propaga" senza deformazione lungo l'asse X nel verso positivo o in quello negativo; ciò viene chiamato *propagazione per onde*. La quantità $\xi(x, t)$ può rappresentare una grande varietà di grandezze fisiche,

Under equilibrium or static conditions the free surface of a liquid is plane and horizontal. But if at one point the conditions at the surface are disturbed by dropping a stone, we know that this disturbance propagates in all directions along the surface of the liquid. To determine the mechanism of propagation and its velocity, we must analyze how the displacement of a point at the surface of the liquid affects the rest of the surface. From this analysis, we set up the dynamical equations for our process. These equations then allow us to obtain quantitative information about the variation in space and time of the disturbance.

In this chapter we shall first discuss the general characteristics of wave motion, and then consider some special kinds of waves. Most of the examples will correspond to elastic waves in a substance. The various well-known kinds of waves illustrated in Fig. 18–1 are basically elastic waves. In such cases we shall ignore the molecular structure of matter and assume a continuous medium. This assumption is valid so long as the space fluctuation of the wave (determined by the wavelength) is large compared with the intermolecular separation.

18.2 *Mathematical Description of Propagation*

Let us consider a function $\xi = f(x)$, represented graphically by the solid curve in Fig. 18–2. If we now replace x by $x - a$, we get the function $\xi = f(x - a)$. Obviously the shape of the curve has not been changed; the same values of ξ occur for values of x increased by the amount a. In other words, assuming that a is positive, we see that the curve has been displaced to the right an amount a, without deformation. Similarly we have that $\xi = f(x + a)$ corresponds to a rigid displacement of the curve to the left by the amount a.

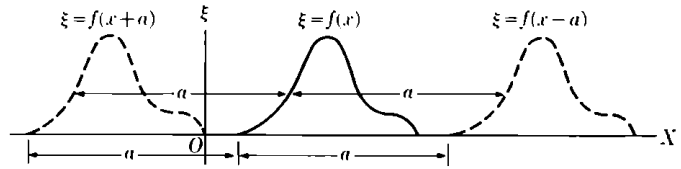


Fig. 18–2. Undistorted translation of the function $\xi(x)$.

Now if $a = vt$, where t is the time, we get a "traveling" curve; that is, $\xi = f(x - vt)$ represents a curve moving to the right with a velocity v called the *phase velocity* (Fig. 18–3a). Similarly $\xi = f(x + vt)$ represents a curve moving to the left with velocity v (Fig. 18–3b). Therefore we conclude that a mathematical expression of the form

$$\xi(x, t) = f(x \pm vt) \tag{18.1}$$

is adequate for describing a physical situation that "travels" or "propagates" without deformation along the positive or negative X-axis; this is called a *wave motion*. The quantity $\xi(x, t)$ may represent a great diversity of physical quantities,

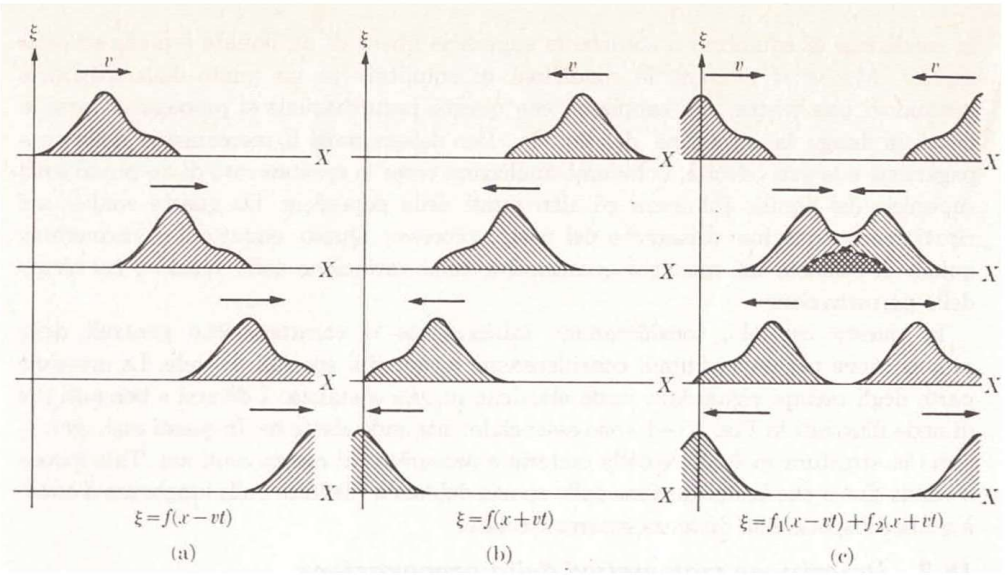


Fig. 18–3. Propagazione di un'onda senza distorsioni (a) verso destra, e (b) verso sinistra. (c) Onde che si propagano in direzione opposta dànno luogo a effetti additivi dove esse interferiscono.

Fig. 18–3. Undistorted propagation of a wave (a) to the right and (b) to the left. (c) Waves which propagate in opposite directions produce additive results where they interfere.

come la deformazione in un solido, la pressione in un gas, il campo magnetico od elettrico, ecc.

Un caso particolarmente interessante è quello in cui $\xi(x, t)$ è funzione sinusoidale o armonica, cioè:

such as the deformation in a solid, the pressure in a gas, an electric or magnetic field, etc.

An especially interesting case is that in which $\xi(x, t)$ is a sinusoidal or harmonic function such as

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt). \tag{18.2}$$

La grandezza k ha un significato particolare. Sostituendo ad x il valore $x + 2\pi/k$, noi otteniamo per $\xi(x, t)$ lo stesso valore; cioè

The quantity k has a special meaning. Replacing the value of x by $x + 2\pi/k$, we get for $\xi(x, t)$ the same value; that is,

$$\xi\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) = \xi_0 \sin k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right)$$
$$= \xi_0 \sin [k(x - vt) + 2\pi] = \xi(x - vt).$$

Quindi

Then

$$\lambda = 2\pi/k \tag{18.3}$$

è la "periodicità nello spazio" della curva in Fig. 18–4; cioè, la curva ripete se stessa ogni lunghezza λ. La grandezza λ è detta *lunghezza d'onda*. Quindi la grandezza $k = 2\pi/\lambda$ rappresenta il numero di lunghezze d'onda contenute nella distanza 2π volte l'unità di lunghezze ed è detta il *numero d'onda*, per quanto talvolta tale nome sia attribuito a $1/\lambda$ o $k/2\pi$ che corrisponde al numero di lunghezze d'onda contenute nella unità di lunghezza. Quindi

is the "space period" of the curve in Fig. 18–4; that is, the curve repeats itself every length λ. The quantity λ is called the *wavelength*. Then the quantity $k = 2\pi/\lambda$ represents the number of wavelengths in the distance 2π and is called the *wave number*, although sometimes this name is reserved for $1/\lambda$ or $k/2\pi$, which corresponds to the number of wavelengths in one unit of length. Therefore

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt) = \xi_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \tag{18.4}$$

rappresenta un'onda sinusoidale o armonica di lunghezza d'onda λ che si propaga verso destra lungo l'asse X con velocità v. L'Eq. (18.4) può anche essere scritta nella forma

dove

Fig. 18–4. Onda armonica.

dà la pulsazione dell'onda. Poichè, in base all'Eq. (12.2), $\omega = 2\pi\nu$, dove ν è la frequenza con cui lo stato fisico varia in ciascun punto x, si ottiene l'importante relazione

tra la lunghezza d'onda, la frequenza, e la velocità di propagazione. Ovviamente, se P è il periodo di oscillazione in ogni punto, dato da $P = 2\pi/\omega = 1/\nu$, per la (12.2), possiamo anche scrivere l'Eq. (18.4) nella forma

Analogamente,

rappresenta un'onda sinusoidale o armonica che si muove nella direzione $-X$. È istruttivo analizzare la distribuzione spaziale di $\xi(x, t)$ in diversi istanti successivi. La funzione $\xi(x, t)$ è stata rappresentata in Fig. 18–5 negli istanti t_0, $t_0 + P/4$, $t_0 + P/2$, $t_0 + 3P/4$, e $t_0 + P$. Conviene notare che lo stato fisico, propagandosi verso destra, si ripete nello *spazio* dopo un periodo. La ragione di ciò è data dalla Eq. (18.7),

che indica come si possa anche definire la lunghezza d'onda come la distanza percorsa dall'onda in un periodo. Perciò in un moto ondulatorio sinusoidale, abbiamo due periodicità: una nel tempo, data dal periodo P, ed una nello spazio, data dalla lunghezza d'onda λ, essendo le due poste in relazione dalla $\lambda = vP$.

Lo studente può facilmente verificare che l'espressione generale (18.1) di un'onda in moto può essere scritta anche nella forma

dove, come sopra, il segno positivo corrisponde a propagazione nella direzione $-X$

represents a sinusoidal or harmonic wave of wavelength λ propagating to the right along the X-axis with velocity v. Equation (18.4) can also be written in the form

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin (kx - \omega t), \tag{18.5}$$

where

$$\omega = kv = \frac{2\pi v}{\lambda} \tag{18.6}$$

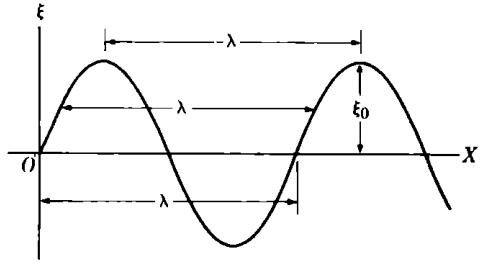


Fig. 18–4. Harmonic wave.

gives the angular frequency of the wave. Since, according to Eq. (12.2), $\omega = 2\pi\nu$, where ν is the frequency with which the physical situation varies at every point x, we have the important relation

$$\lambda\nu = v \tag{18.7}$$

between the wavelength, the frequency, and the velocity of the propagation. Obviously if P is the period of oscillation at each point, given by $P = 2\pi/\omega = 1/\nu$, according to Eq. (12.2), we may also write Eq. (18.4) in the form

$$\xi = \xi_0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P}\right). \tag{18.8}$$

Similarly,

$$\xi = \xi_0 \sin k(x + vt) = \xi_0 \sin (kx + \omega t)$$
$$= \xi_0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{P}\right) \tag{18.9}$$

represents a sinusoidal or harmonic wave moving in the $-X$-direction. It is instructive to look at the space distribution of $\xi(x, t)$ at different successive time intervals. The function $\xi(x, t)$ has been represented in Fig. 18–5 at times t_0, $t_0 + P/4$, $t_0 + P/2$, $t_0 + 3P/4$, and $t_0 + P$. We may note that while the physical situation propagates to the right, it repeates itself in *space* after one period. The reason for this is that, from Eq. (18.7),

$$\lambda = v/\nu = vP,$$

which shows that we may also define the wavelength as the distance advanced by the wave motion in one period. Therefore in sinusoidal wave motion we have two periodicities: one in time, given by the period P, and one in space, given by the wavelength λ, with the two related by $\lambda = vP$.

The student may easily verify that the general expression (18.1) for a traveling wave can be written in the alternative form

$$\xi(x, t) = F(t \pm x/v)$$

where, as before, the positive sign corresponds to propagation in the $-X$-direction

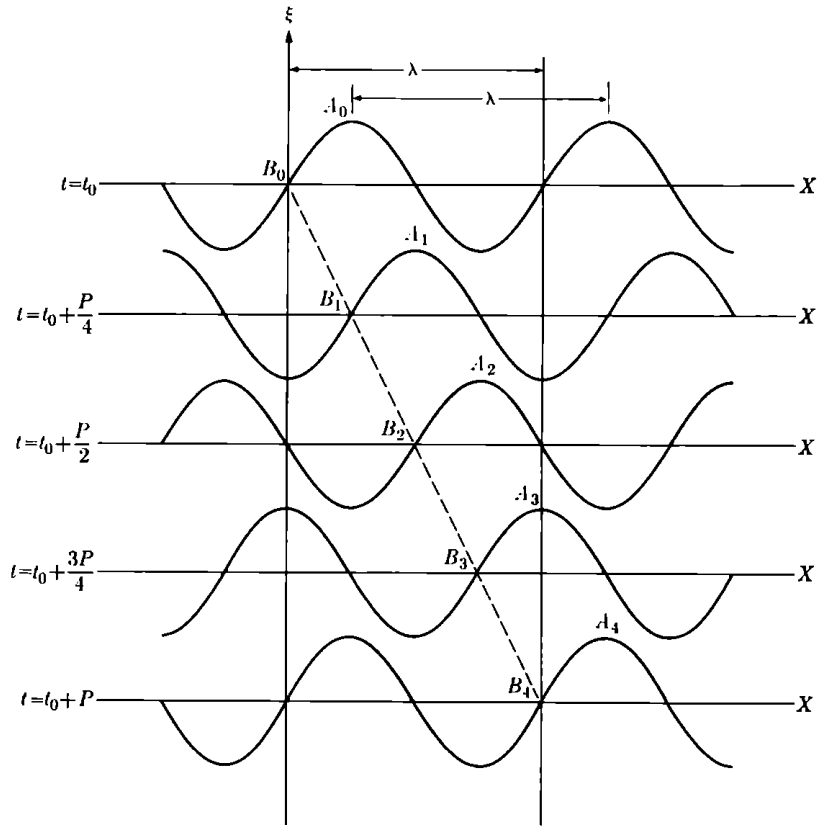


Fig. 18–5. Onda armonica che si propaga verso destra. Essa avanza della distanza λ nel tempo P.

Fig. 18–5. Harmonic wave propagating to the right. It advances the distance λ in the time P.

e il segno negativo a propagazione nella direzione $+X$. Così, per un'onda armonica, invece delle Equazioni (18.5) e (18.9), si può scrivere

and the negative sign to propagation in the $+X$-direction. So for a harmonic wave we may write, instead of Eqs. (18.5) and (18.9),

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin \omega(t \pm x/v) = \xi_0 \sin (\omega t \pm kx). \tag{18.10}$$

ESEMPIO 18.1. Un diapason vibra con frequenza di 440 Hz. Se la velocità del suono nell'aria è 340 m s^{-1}, trovare la lunghezza d'onda del suono.

Soluzione: Dalla Eq. (18.7), si ha

EXAMPLE 18.1. A tuning fork oscillates with a frequency of 440 Hz. If the velocity of sound in air is 340 m s^{-1}, find the wavelength of the sound.

Solution: Using Eq. (18.7), we have

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{440 \text{ Hz}} = 0.772 \text{ m}.$$

ESEMPIO 18.2. La luce si propaga nel vuoto con una velocità di 3×10^8 m s^{-1}. Trovare la lunghezza d'onda che corrisponde a una frequenza di 5×10^{14} Hz, che è quella della luce nella regione del rosso nello spettro visibile.

EXAMPLE 18.2. Light propagates in vacuum with a velocity of 3×10^8 m s^{-1}. Find the wavelength corresponding to a frequency of 5×10^{14} Hz, which is that of light in the red region of the visible spectrum.

Soluzione: Usando ancora l'Eq. (18.7), otteniamo

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{5 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 6 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Il confronto tra questi due esempi dovrebbe dare allo studente la sensazione della differenza degli ordini di grandezza che intervengono nelle onde sonore e nelle onde luminose.

18.3 Analisi di Fourier del moto di un'onda

Abbiamo visto, nel Paragrafo 12.15 che, per il teorema di Fourier, qualsiasi moto periodico può essere espresso come risultante della somma di moti armonici di frequenze ω, $2\omega, \ldots, n\omega, \ldots$ o periodi P, $P/2, \ldots, P/n, \ldots$. Il medesimo risultato si applica anche al moto di un'onda periodica.

Fig. 18–6. Onda periodica non armonica in un dato punto.

Sia $\xi = f(x - vt)$ il moto di un'onda periodica, cioè un moto che (in un dato punto) si ripete negli istanti $P, 2P, \ldots, nP, \ldots$ (Fig. 18–6). In altre parole,

Fig. 18–7. Onda periodica non armonica in un dato istante.

Ciò significa che in un dato istante ξ assume gli stessi valori quando x aumenta o diminuisce di $vP, 2vP, \ldots, nvP, \ldots$. Perciò se, invece di cambiare t, noi cambiamo x della quantità $\lambda = vP$, l'onda ripete se stessa nello spazio (Fig. 18–7). Quindi, un moto ondulatorio periodico nel tempo è anche periodico nello spazio. Abbiamo già trovato che questo vale per il moto di un'onda sinusoidale (o armonica).

Supponiamo ora che $\xi = f(x)$ sia una funzione periodica nello spazio con periodo λ; cioè $f(x) = f(x + \lambda)$. Quindi, usando il teorema di Fourier illustrato nel Paragrafo 12.15, possiamo scrivere

Solution: Again using Eq. (18.7), we obtain

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}}{5 \times 10^{14} \text{ Hz}} = 6 \times 10^{-7} \text{ m}.$$

Comparing these two examples must give the student a feeling of the difference in the orders of magnitude involved in sound and in light waves.

18.3 Fourier Analysis of Wave Motion

In Section 12.15 we saw that, according to Fourier's theorem, any periodic motion can be expressed as a superposition of simple harmonic motions of frequencies ω, $2\omega, \ldots, n\omega, \ldots$ or periods $P, P/2, \ldots, P/n, \ldots$. The same result applies to a periodic wave motion.

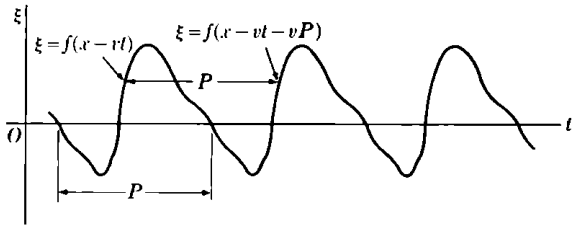


Fig. 18–6. Nonharmonic periodic wave at a given point.

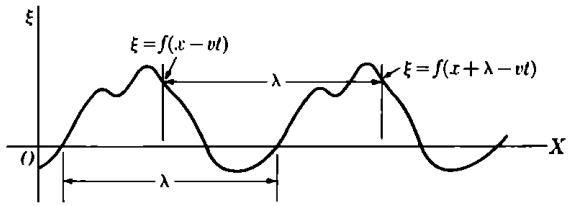


Fig. 18–7. Nonharmonic periodic wave at a given time.

Let $\xi = f(x - vt)$ be a periodic wave motion; that is, one that at a given point repeats at times $P, 2P, \ldots, nP, \ldots$ (Fig. 18–6). In other words,

$$\xi = f(x - vt) = f[x - v(t \pm P)] = f(x - vt \mp vP).$$

This means that at a given time ξ repeats itself when x increases or decreases by $vP, 2vP, \ldots, nvP, \ldots$. Therefore if, instead of changing t, we change x by the amount $\lambda = vP$, the wave repeats itself in space (Fig. 18–7). Thus a wave motion periodic in time is also periodic in space. We have already found that this holds for the sinusoidal (or harmonic) wave motion.

Suppose now that $\xi = f(x)$ is a function periodic in space with period λ; that is, $f(x) = f(x + \lambda)$. Then, using Fourier's theorem as explained in Section 12.15, we may write

$$\xi = f(x) = a_0 + a_1 \cos kx + a_2 \cos 2kx + \cdots + a_n \cos nkx + \cdots + b_1 \sin kx + b_2 \sin 2kx + \cdots + b_n \sin nkx + \cdots,$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ ha la stessa funzione di ω nella Eq. (12.74). I coefficienti a_n e b_n sono ottenuti in modo analogo alle Equazioni (12.74), dove x sta al posto di t. Quindi, il moto dell'onda descritta da $\xi = f(x - vt)$ può essere espresso come

where $k = 2\pi/\lambda$ plays the same role as ω in Eq. (12.74). The coefficients a_n and b_n are obtained in a form similar to Eqs. (12.74), with t replaced by x. Then the wave motion described by $\xi = f(x - vt)$ can be expressed as

$$\begin{aligned}\xi = f(x - vt) = {} & a_0 + a_1 \cos k(x - vt) + a_2 \cos 2k(x - vt) \\ & + \cdots + a_n \cos nk(x - vt) + \cdots \\ & + b_1 \sin k(x - vt) + b_2 \sin 2k(x - vt) \\ & + \cdots + b_n \sin nk(x - vt) + \cdots\end{aligned}$$

o, essendo $\omega = kv$,

or, since $\omega = kv$,

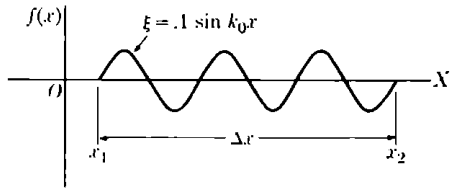
$$\begin{aligned}\xi = f(x - vt) = {} & a_0 + a_1 \cos (kx - \omega t) + a_2 \cos 2(kx - \omega t) \\ & + \cdots + a_n \cos n(kx - \omega t) + \cdots \\ & + b_1 \sin (kx - \omega t) + b_2 \sin 2(kx - \omega t) \\ & + \cdots + b_n \sin n(kx - \omega t) + \cdots,\end{aligned}$$

che illustra come qualsiasi moto di onda periodica possa essere espresso come risultante di moti di onde armoniche di frequenza ω, 2ω, $3\omega, \ldots, n\omega, \ldots$ e lunghezza d'onda λ, $\lambda/2$, $\lambda/3, \ldots, \lambda/n, \ldots$. Per questo, per poter comprendere il moto di una qualsiasi onda, è importante capire il moto di un'onda armonica.

which indicates that any periodic wave motion can be expressed as a superposition of harmonic wave motions of frequencies ω, 2ω, $3\omega, \ldots, n\omega, \ldots$ and wavelengths λ, $\lambda/2$, $\lambda/3, \ldots, \lambda/n \ldots$. Because of this result, it is important that we understand harmonic wave motion in order to understand wave motion in general.

Fig. 18–8. Impulso armonico.

Fig. 18–8. Harmonic pulse.



ESEMPIO 18.3. Un'onda è descritta all'istante $t = 0$ dalla funzione $f(x)$ indicata in Fig. 18–8; essa è espressa da $\xi = A \sin k_0 x$ nell'intervallo $\Delta x = x_2 - x_1$ ed è nulla al di fuori di tale intervallo. Questa forma d'onda è detta *impulso* o *pacchetto d'onda*. Fare l'analisi di Fourier di tale onda.

EXAMPLE 18.3. A wave is described at time $t = 0$ by the function $f(x)$ shown in Fig. 18–8; it is expressed by $\xi = A \sin k_0 x$ in the interval $\Delta x = x_2 - x_1$ and zero outside that interval. This type of wave is called a *pulse* or a *wave packet*. Make the Fourier analysis of this wave.

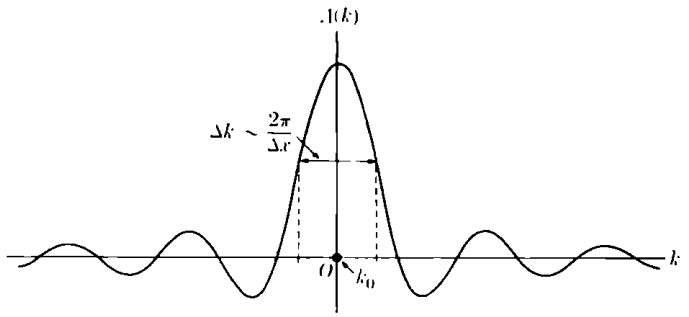


Fig. 18–9. Trasformata di Fourier dell'impulso indicato in Fig. 18–8.

Fig. 18–9. Fourier transform of the pulse shown in Fig. 18-8.

Soluzione: Questo problema è molto simile a quello discusso nel Paragrafo 12.15 per la curva rappresentata in Fig. 12–45. È solo necessario sostituire t con x e ω_0 con k_0. Ciò significa che, per ottenere un'onda del tipo illustrato in Fig. 18–8, noi dobbiamo sovrapporre molte onde aventi numero d'onda k compreso tra $-\infty$ e $+\infty$, ciascuna avente ampiezza $A(k)$ simile a quella della Fig. 12–46 e illustrata anche in Fig. 18–9. L'ampiezza $A(k)$ ha valore diverso da zero solo per valori di k compresi nell'intervallo Δk intorno a k_0 dato da

ossia

in analogia con l'Eq. (12.76). Questa relazione indica come più piccola è la regione di spazio in cui è localizzato il pacchetto d'onda, più grande è l'intervallo di lunghezze d'onda necessario per rappresentare il pacchetto d'onda.

18.4 Equazione differenziale del moto di un'onda

Analizziamo, come sviluppo successivo, in che modo determinare quando un dato campo dipendente dal tempo si propaga come un'onda che non subisce distorsione. Poichè i campi associati a ciascun processo fisico sono governati da leggi dinamiche (caratteristiche di ciascun processo) che possono essere espresse sotto forma di equazioni differenziali, come abbiamo mostrato nel caso del campo elettromagnetico, possiamo pensare alla possibilità di trovare un'equazione differenziale, che è applicabile a *tutti* i tipi di moti di onde. Quindi, ogni qualvolta constatiamo che un campo particolare, come risultato delle sue proprietà fisiche, soddisfa ad una tale equazione, possiamo essere sicuri che il campo si propaga attraverso lo spazio con una velocità definita e senza distorsioni*. D'altro canto, se osserviamo come risultato dell'esperienza che un campo si propaga nello spazio con una velocità definita e senza distorsione, noi siamo in grado di descrivere il campo con un insieme di equazioni compatibili con l'equazione dell'onda.

L'equazione che descrive il moto di un'onda che si propaga con velocità definita v e senza distorsione lungo la direzione $+X$ o $-X$, e che incontreremo parecchie volte, è

Questa è detta *equazione differenziale del moto di un'onda*. La soluzione generale dell'Eq. (18.11) è del tipo della Eq. (18.1). Cioè

Quindi, la soluzione generale della Eq. (18.11) può essere espressa come composizione dei moti di due onde propagantisi ciascuna in direzioni opposte. Naturalmente, per un'onda che si propaga in una sola direzione si richiede solo una delle due funzioni che appaiono nella Eq. (18.12). Tuttavia, quando (ad esempio) si abbia un'onda che avanza nella

*Noi abbiamo già seguito un analogo procedimento, al Capitolo 12, dove abbiamo osservato come un moto oscillatorio obbedisca ad una equazione del tipo $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$, ed abbiamo perciò usata questa equazione per identificare vari tipi di moto armonico semplice una volta comprese le leggi fisiche del moto.

Solution: This problem is very similar to that discussed in Section 12.15 for the curve represented in Fig. 12–45. It is only necessary to replace t by x and ω_0 by k_0. That means that, to obtain a wave of the type illustrated in Fig. 18–8, we must superpose many waves with wave numbers k ranging from $-\infty$ to $+\infty$, each one associated with an amplitude $A(k)$ similar to that in Fig. 12–46 and also shown in Fig. 18–9. The amplitude $A(k)$ is appreciable only for values of k in an interval Δk around k_0 equal to

$$\Delta k \sim 2\pi/\Delta x \qquad \text{or} \qquad \Delta x\, \Delta k \sim 2\pi,$$

in analogy with Eq. (12.76). This relation indicates that the smaller the region of space in which the wave packet is localized, the larger the range of wavelengths required to represent the wave packet.

18.4 Differential Equation of Wave Motion

Let us, as a next step, investigate how to determine when a given time-dependent field propagates as a wave without distortion. Since the fields associated with each physical process are governed by dynamical laws (characteristic of each process) that can be expressed in the form of differential equations, as we showed in the case of the electromagnetic field, we may look into the possibility of finding a differential equation which is applicable to *all* kinds of wave motion. Then, every time we recognize that a particular field, as a result of its physical properties, satisfies such an equation, we may be sure that the field propagates through space with a definite velocity and without distortion.* Conversely, if we observe as a result of experiment that a field propagates in space with a definite velocity and without distortion, we are prepared to describe the field by a set of equations compatible with the wave equation.

The equation we shall encounter many times, which describes a wave motion propagated with a definite velocity v and without distortion along either the $+X$- or $-X$-direction, is

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{18.11}$$

This is called the *differential equation of wave motion*. The general solution of Eq. (18.11) is of the form of Eq. (18.1). That is,

$$\xi(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \tag{18.12}$$

Thus the general solution of Eq. (18.11) can be expressed as the superposition of two wave motions propagating in opposite directions. Of course, for a wave propagating in one direction, only one of the two functions appearing in Eq. (18.12) is required. However, when (for example) we have an incoming wave, along the

* We followed this technique before, in Chapter 12, where we recognized that an oscillatory motion follows an equation of the type $d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$, and therefore used this equation to identify several types of simple harmonic motion, once we understood the physical laws of the motion.

direzione + X, ed un'onda riflessa nella direzione $-X$, si deve usare la formula generale della Eq. (18.12).

Per provare che una espressione della forma dell'Eq. (18.12) è una soluzione dell'equazione d'onda (18.11), dobbiamo prima ricordare alcuni risultati matematici. Se si ha una funzione $y = f(u)$ in cui u sia a sua volta una funzione di x, cioè, $u(x)$, allora

È questa la *regola di derivazione di una funzione di funzione**. Per esempio, se $y = \sin(3x^2)$, noi abbiamo $y = \sin u$, $u = 3x^2$; $dy/du = \cos u$; e $du/dx = 6x$, cosicchè

Applichiamo ora questa regola alla $\xi = f(x \pm vt)$. Poniamo in questo caso $u = x \pm vt$, in modo che $\xi = f(u)$ e notando come ci siano due variabili x e t, introduciamo le derivate parziali $\partial u/\partial x = 1$, $\partial u/\partial t = \pm v$. Allora

Ora, calcolando le derivate, otteniamo:

Combinando questi risultati per eliminare $d^2\xi/du^2$, noi otteniamo l'Eq. (18.11), provando così che $\xi = f(x \pm vt)$ *é* una soluzione dell'equazione dell'onda, indipendente dalla forma della funzione f. Poichè l'equazione dell'onda è lineare, la soluzione generale è del tipo indicato dall'Eq. (18.12).

Possiamo verificare, come esempio concreto, che l'equazione d'onda (18.11) è soddisfatta da un'onda sinusoidale, $\xi = \xi_0 \sin k(x - vt)$. Calcolando le derivate parziali rispetto al tempo ed allo spazio, si ottiene

È perciò $\partial^2\xi/\partial t^2 = v^2\,\partial^2\xi/\partial x^2$, in accordo con l'Eq. (18.11).

In questo capitolo, per meglio comprendere le idee fondamentali del moto di un'onda, discuteremo alcuni tipi di onde che sono più o meno familiari allo studente. Lo studente deve notare che nelle onde discusse nei paragrafi

*Vedi "*Calculus and Analytic Geometry*", 3 ed. di G. B. Thomas. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962, § 2–5.

+X-direction, and a reflected wave, along the $-X$-direction, the general form of Eq. (18.12) must be used.

To prove that an expression of the form of Eq. (18.12) is a solution of the wave equation (18.11), we must first recall some mathematical results. If we have a function $y = f(u)$, where u in turn is a function of x, that is, $u(x)$, then

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

This is called the *chain rule* for derivatives.* For example, if $y = \sin(3x^2)$, we have $y = \sin u$, $u = 3x^2$, $dy/du = \cos u$, and $du/dx = 6x$, so that

$$dy/dx = (\cos u)(6x) = 6x \cos 3x^2.$$

Now we may apply the chain rule to $\xi = f(x \pm vt)$. In this case we make $u = x \pm vt$, so that $\xi = f(u)$, and noting that there are two variables, x and t, we have to use partial derivatives, $\partial u/\partial x = 1$, $\partial u/\partial t = \pm v$. Then

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{d\xi}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\xi}{du}, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{d\xi}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v\frac{d\xi}{du}.$$

Now, taking second derivatives, we obtain

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d^2\xi}{du^2},$$
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{d}{du}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \pm v\frac{d^2\xi}{du^2}(\pm v) = v^2\frac{d^2\xi}{du^2}.$$

Combining both results to eliminate $d^2\xi/du^2$, we obtain Eq. (18.11), proving that $\xi = f(x \pm vt)$ is a solution of the wave equation, independent of the form of the function f. Since the wave equation is linear, the general solution is of the type indicated in Eq. (18.12).

We may verify, as a concrete example, that the wave equation (18.11) is satisfied by a sinusoidal wave, $\xi = \xi_0 \sin k(x - vt)$. We take the partial space and time derivatives, giving

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = k\xi_0 \cos k(x - vt), \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -k^2\xi_0 \sin k(x - vt);$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -kv\xi_0 \cos k(x - vt), \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -k^2v^2\xi_0 \sin k(x - vt).$$

Therefore $\partial^2\xi/\partial t^2 = v^2\,\partial^2\xi/\partial x^2$, in agreement with Eq. (18.11).

In order to better understand the fundamental ideas of wave motion, in this chapter we shall discuss certain kinds of waves that are more or less familiar to the student. The student must note that, in the waves to be discussed in the succeed-

* See *Calculus and Analytic Geometry*, third edition, by G. B. Thomas. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962, Section 2–5.

successivi, l'Eq. (18.11) deriva dalle leggi dinamiche del processo, nell'ambito di alcune approssimazioni quali la piccola ampiezza o la grande lunghezza d'onda, ecc. Per questo la teoria che si basa sull'Eq. (18.11) si può applicare solo nell'ambito di queste approssimazioni.

18.5 *Onde elastiche in una sbarra solida*

Se creiamo una perturbazione ad un estremo di una sbarra solida, colpendo questa per esempio con un martello, la perturbazione si propaga lungo la sbarra e può essere avvertita all'altro estremo. Si dirà allora che un'onda elastica si è propagata lungo la sbarra. È nostro scopo in questo paragrafo discutere più in dettaglio tale onda elastica e vedere come la sua velocità di propagazione dipenda dalle caratteristiche fisiche della sbarra. Consideriamo una sbarra di sezione normale uniforme A soggetta ad una tensione lungo il suo asse dovuta ad una forza F. La forza F non è necessariamente la stessa in tutte le sezioni e può variare lungo l'asse della sbarra. In ogni sezione normale (come mostrato in Fig. 18—10) vi sono due forze eguali ed opposte. Una è la trazione sulla parte di sinistra della sbarra dovuta alla parte di destra, e l'altra è la trazione sulla parte destra della sbarra dovuta alla parte sinistra. La *tensione normale* S in una sezione della sbarra è definita come la forza ad unità di area che agisce perpendicolarmente alla sezione normale, nell'una o nell'altra direzione. Quindi

$$S = F/A. \tag{18.13}$$

La tensione è espressa in N m^{-2}.

Force on the left-hand side due to the right-hand side = Forza sul lato di sinistra dovuta al lato di destra

Force on the right-hand side due to the left-hand side = Forza sul lato di destra dovuta al lato di sinistra

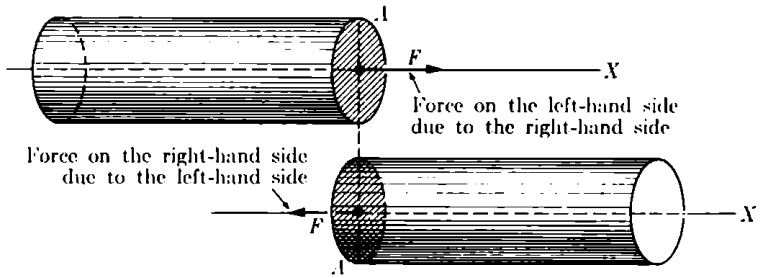


Fig. 18—10. Le forze in ogni sezione di una sbarra sotto tensione sono eguali ed opposte.

Sotto l'azione di tali forze, ogni sezione della sbarra subisce uno spostamento ξ, parallelo all'asse. Se lo spostamento è lo stesso per tutti i punti della sbarra, non si ha alcuna deformazione ma semplicemente uno spostamento rigido della sbarra lungo il suo asse. Noi siamo interessati al caso in cui vi sia una deformazione tale che ξ varii lungo la sbarra; cioè, che ξ risulti essere funzione di x. Consideriamo due sezioni A e A', separate, in condizioni non perturbate, da una distanza dx (Fig. 18—11). Quando le forze sono applicate, la sezione A viene spostata di una distanza ξ e la sezione A' di una distanza ξ'. La distanza tra A e A', quando si ha deformazione, vale quindi

ing sections, Eq. (18.11) results from the dynamical laws of the process, considered together with certain approximations such as small amplitude or long wavelength, etc. Therefore the theory related to Eq. (18.11) is applicable only under the stated approximations.

18.5 *Elastic Waves in a Solid Rod*

If we produce a disturbance at one end of a solid rod, say by hitting it with a hammer, the disturbance propagates along the rod and eventually is felt at the other end. We say that an elastic wave has propagated along the rod. It is our purpose in this section to discuss this elastic wave in more detail and see how its velocity of propagation is related to the physical properties of the rod. Let us consider a rod of uniform cross section A subject to a stress along its axis indicated by the force F. The force F is not necessarily the same at all sections, and may vary along the axis of the rod. At each cross section (as shown in Fig. 18–10) there are two equal and opposite forces. One is the pull on the left part of the rod due to the right part and the other is the pull on the right part of the rod due to the left part. The *normal stress* S at a section of the rod is defined as the force per unit area acting perpendicular to the cross section in either direction. Then

The stress is expressed in N m^{-2}.

Fig. 18–10. The forces on any section of a rod under stress are equal and opposite.

Under the action of such forces each section of the rod suffers a displacement ξ parallel to the axis. If the displacement is the same at all points of the rod, there is no deformation, but simply a rigid displacement of the rod along its axis. We are interested in the case in which there is deformation, so that ξ varies along the rod; that is, ξ is a function of x. Consider two sections A and A' separated a distance dx in the undisturbed situation (Fig. 18–11). When the forces are applied, the section A is displaced a distance ξ and the section A' a distance ξ'. The separation between A and A' in the deformed state is then

$$dx + (\xi' - \xi) = dx + d\xi,$$

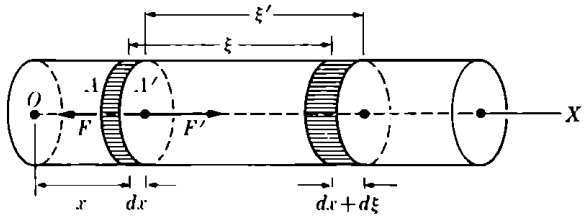


Fig. 18–11. Onde longitudinali in una sbarra

dove $d\xi = \xi' - \xi$. La deformazione della sbarra in questa zona risulta essere quindi $d\xi$. La *dilatazione normale* ϵ nella sbarra è definita come la deformazione lungo l'asse riferita all'unità di lunghezza. Poichè la deformazione $d\xi$ corrisponde ad una lunghezza dx, si ha che la dilatazione nella sbarra vale

Si noti che quando non vi è alcuna deformazione, ξ è costante e $\epsilon = 0$. Cioè, non vi è dilatazione normale. La dilatazione, essendo il quoziente di due lunghezze, è un numero puro o una grandezza adimensionata.

Tra le tensioni normali $\mathcal{S}$ e le dilatazioni normali ϵ della sbarra esiste una relazione detta *legge di Hooke*, che stabilisce come

> *entro i limiti di elasticità del materiale, la dilatazione normale è proporzionale alla tensione normale*

ossia

dove la costante di proporzionalità Y è detta *modulo di elasticità di Young*. Esso si misura in N m^{-2}, poichè ϵ è un fattore adimensionato. La legge di Hooke rappresenta, con buona approssimazione, il comportamento elastico di una sostanza fintantochè le deformazioni sono piccole. Per grandi tensioni e deformazioni, l'Eq. (18.15) non vale più, la descrizione del fenomeno fisico diventa molto più complessa.

La Tabella 18–1 dà le costanti elastiche relative ad alcuni materiali. Vi sono il modulo di Young Y, il modulo di contrazione κ definito nella Eq. (18.22), e il modulo di rigidità o modulo tangenziale G, definito nella Eq. (18.31).

TABELLA 18–1 Costanti elastiche (10^{11} N m^{-2})

Materiale
Alluminio
Rame
Ferro
Piombo
Nichel
Acciaio

Fig. 18–11. Longitudinal wave in a rod.

where $d\xi = \xi' - \xi$. The deformation of the rod in that region has therefore been $d\xi$. The *normal strain* ϵ in the rod is defined as the deformation along the axis per unit length. Since the deformation $d\xi$ corresponds to a length dx, we see that the strain in the rod is

$$\epsilon = \partial\xi/\partial x. \tag{18.14}$$

Note that when there is no deformation, ξ is constant and $\epsilon = 0$. That is, there is no normal strain. The strain, being the quotient of two lengths, is a pure number or dimensionless quantity.

Between the normal stress $\mathcal{S}$ and the normal strain ϵ of the rod there exists a relation called *Hooke's law*, which states that

> *within the elastic limit of the material, the normal stress is proportional to the normal strain*

or

$$\mathcal{S} = Y\epsilon, \tag{18.15}$$

where the proportionality constant Y is called *Young's modulus of elasticity*. It is expressed in N m^{-2}, since ϵ is a dimensionless factor. Hooke's law is a good approximation of the elastic behavior of a substance so long as the deformations are small. For large stresses and deformations, Eq. (18.15) no longer holds, and the description of the physical situation becomes much more complicated.

Table 18–1 gives the elastic constants for certain materials. They are Young's modulus Y, the bulk modulus κ defined in Eq. (18.22), and the modulus of rigidity or shear modulus G, defined in Eq. (18.31).

TABLE 18–1 Elastic Constants (10^{11} N m^{-2})

Material	Y	κ	G
Aluminum	0.70	0.61	0.24
Copper	1.25	1.31	0.46
Iron	2.06	1.13	0.82
Lead	0.16	0.33	0.054
Nickel	2.1	1.64	0.72
Steel	2.0	1.13	0.80

Introducendo le Equazioni (18.13) e (18.14) nella Eq. (18.15), e risolvendo rispetto a F, otteniamo

Introducing Eqs. (18.13) and (18.14) into Eq. (18.15) and solving for F, we get

$$F = YA\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{18.16}$$

Nel caso di una sbarra o un filo in equilibrio con un estremo fisso nel punto O (Fig. 18—12) e sottoposto all'altro estremo A alla forza F, si ottiene che la forza in ogni sezione deve essere la stessa, ed essere eguale ad F. Possiamo quindi integrare l'Eq. (18.16) con F costante, ed ottenere la deformazione di ciascuna sezione,

For the case of a rod or wire in equilibrium with one end fixed at point O (Fig. 18–12) and subject at the other end A to a force F, we have that the force at each section must be the same, and equal to F. Then we may integrate Eq. (18.16), with F constant, to obtain the deformation at each section,

$$\int_0^{\xi} d\xi = \frac{F}{YA}\int_0^{x} dx \qquad \text{or} \qquad \xi = \frac{F}{YA}x.$$

In particolare, si può ottenere la deformazione l all'estremo libero A ponendo $x = L$, in modo che $l = FL/YA$. Questa relazione fornisce la base per la determinazione sperimentale del modulo di Young.

In particular, the deformation l at the free end A is obtained by making $x = L$, so that $l = FL/YA$. This relation provides the basis for the experimental measurement of Young's modulus.

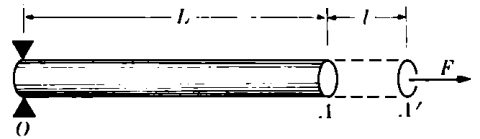


Figura 18—12 **Figure 18–12**

Quando la sbarra non è in equilibrio, la forza non è la stessa lungo la sbarra stessa. Ne deriva quindi, che un elemento dx della sbarra di spessore infinitesimo dx è soggetto ad una forza risultante non nulla. Per esempio, in Fig. 18—11, il lato A' dell'elemento di spessore dx è soggetto alla forza F' verso destra, dovuto alla trazione della parte di destra della sbarra, mentre il lato A è soggetto alla forza F diretta verso sinistra dovuta alla trazione della parte sinistra della sbarra. La forza risultante sulla parte destra della sezione è $F' - F = dF = (\partial F/\partial x)dx$. Supponendo che ρ sia la densità del materiale della sbarra, la massa dell'elemento vale $dm = \rho\, dV = \rho A\, dx$, dove $A\, dx$ è il volume dell'elemento. L'accelerazione di questa massa è $\partial^2\xi/\partial t^2$. Quindi, applicando la relazione della dinamica forza = massa × accelerazione, possiamo scrivere l'equazione del moto della sezione come

When the rod is not in equilibrium, the force is not the same along the rod. As a result, a section of the rod of thickness dx is subject to a net or resultant force. For example, in Fig. 18–11, the side A' of the section of thickness dx is subject to a force F' toward the right, due to the pull of the right part of the rod, while the side A is subject to a force F pointing to the left, due to the pull of the left part of the rod. The net force to the right on the section is $F' - F = dF = (\partial F/\partial x)\, dx$. Given that ρ is the density of the material of the rod, the mass of the section is $dm = \rho\, dV = \rho A\, dx$, where $A\, dx$ is the volume of the section. The acceleration of this mass is $\partial^2\xi/\partial t^2$. Therefore, applying the dynamical relation force = mass × acceleration, we may write the equation of motion of the section as

ossia

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx = (\rho A\, dx)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \text{or} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \rho A\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{18.17}$$

In questo problema abbiamo *due* campi: uno è lo spostamento ξ di ciascuna sezione della sbarra, dove ξ è una funzione della posizione e del tempo, e l'altro è la forza F in ciascuna sezione, dove anche F è funzione della posizione e del tempo. Questi due campi sono posti in relazione dalle Equazioni (18.16) e (18.17) che possono essere dette le equazioni differenziali del *campo elastico* di una sbarra deformata, e che descrivono le caratteristiche fisiche del problema. Esse sono l'equivalente per il nostro problema meccanico delle equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico. Porremo ora in relazione le Equazioni (18.16) e (18.17). Derivando l'Eq. (18.16) rispetto a x, abbiamo

In this problem we have *two* fields; one is the displacement ξ of each section of the rod, where ξ is a function of position and time, and the other is the force F at each section, where F is also a function of position and time. These two fields are related by Eqs. (18.16) and (18.17), which may be called the differential equations of the *elastic field* of a deformed rod, and which describe the physical conditions of the problem. They are the mathematical equivalent of Maxwell's equations for the electromagnetic field. Now we shall combine Eqs. (18.16) and (18.17). Taking the derivative of Eq. (18.16) with respect to x, we have

$$\frac{\partial F}{\partial x} = YA\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Sostituendo questo risultato nella Eq. (18.17), ed eliminando il fattore comune A, si ottiene

Questa equazione è analoga alla Eq. (18.11) e possiamo quindi concludere che il campo della deformazione ξ si propaga lungo la sbarra con una velocità

risultato che è confermato sperimentalmente dalle misure indipendenti delle tre quantità. Si può notare come l'Eq. (18.19) sia corretta dimensionalmente poichè Y è espresso in N m^{-2} e ρ in kg m^{-3}. Il loro rapporto vale quindi: (N m^{-2})(kg m^{-3})$^{-1}$ = m^2 s^{-2}, che è il quadrato di una velocità. In base alla relazione (18.16), lo studente può verificare che il campo di forza F soddisfa ad una equazione simile,

che indica come il campo di forza si propaghi lungo la sbarra con la medesima velocità del campo dello spostamento.

È importante notare che l'onda descritta dalle Equazioni (18.18) e (18.20) rappresenta grandezze fisiche, deformazione ξ e forza F, orientate lungo la direzione di propagazione dell'onda, cioè, l'asse X. Questo tipo di onda progressiva è detta *longitudinale*.

Si deve osservare che le equazioni dell'onda (18.18) e (18.20) sono contenute implicitamente nelle equazioni di campo (18.16) e (18.17), ma non è vero il contrario, poichè altre equazioni di campo possono contenere implicitamente anche una equazione d'onda. Perciò le equazioni di campo fondamentali del nostro problema sono la (18.16) e la (18.17), le Equazioni (18.18) e (18.20) essendo solo una conseguenza delle equazioni di campo.

ESEMPIO 18.4. Valutare la velocità di propagazione delle onde elastiche longitudinali in una sbarra di acciaio.

Soluzione: Tenendo conto dei valori della Tabella 18–1 e ricordando che la densità dell'acciaio vale 7,8 × 10^3 kg m^{-3} dalla Eq. (18.19), si ha che

Il valore sperimentale è 5.10 × 10^3 m s^{-1} a 0°C. Si confronti tale valore con quello della velocità del suono nell'aria che è di circa 340 m s^{-1}.

ESEMPIO 18.5. Discutere le onde longitudinali in una molla.

Soluzione: Quando una perturbazione è prodotta in una molla tesa, e ξ è lo spostamento subito da una sezione della molla, la forza in quella sezione vale $F = K(\partial\xi/\partial x)$, dove K è il modulo elastico della molla. Questa equazione è l'equivalente dell'Eq. (18.16) per una sbarra. Il coefficiente K non va confuso con la costante elastica k introdotta nella Eq. (12.5). Per ottenere la relazione tra K e k, notiamo che se la molla, di lunghezza

Substituting this result in Eq. (18.17), and canceling the common factor A, we get

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \tag{18.18}$$

This is an equation similar to Eq. (18.11), and therefore we may conclude that the deformation field ξ propagates along the rod with a velocity

$$v = \sqrt{Y/\rho}, \tag{18.19}$$

a result confirmed experimentally by independently measuring the three quantities. We may note that Eq. (18.19) checks dimensionally since Y is expressed in N m^{-2} and ρ in kg m^{-3}. Therefore their ratio is (N m^{-2})(kg m^{-3})$^{-1}$ = m^2 s^{-2}, which is the square of a velocity. In view of relation (18.16), the student may verify that the force field F satisfies a similar equation,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{18.20}$$

indicating that the force field propagates along the rod with the same velocity as the displacement field.

It is important to note that the wave described by Eqs. (18.18) and (18.20) corresponds to physical properties, deformation ξ and force F, oriented along the direction of propagation of the wave, i.e., the X-axis. This kind of wave motion is called *longitudinal*.

We must observe that the field equations (18.16) and (18.17) imply the wave equations (18.18) and (18.20), but the reverse is not true, since other field equations may also imply a wave equation. Therefore the fundamental field equations of our problem are (18.16) and (18.17), the wave equations (18.18) and (18.20) being only a consequence of the field equations.

EXAMPLE 18.4. Estimate the velocity of propagation of longitudinal elastic waves in a steel bar.

Solution: Using the values of Table 18–1 and a value of 7.8 × 10^3 kg m^{-3} for the density of steel, we have from Eq. (18.19) that

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.0 \times 10^{11}\ \text{N m}^{-2}}{7.8 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}}} = 5.06 \times 10^3\ \text{m s}^{-1}.$$

The experimental value is 5.10 × 10^3 m s^{-1} at 0°C. This value should be compared with the velocity of sound in air, which is about 340 m s^{-1}.

EXAMPLE 18.5. Discuss longitudinal waves in a spring.

Solution: When a disturbance is produced in a stretched spring and ξ is the displacement suffered by a section of the spring, the force at that section is $F = K(\partial\xi/\partial x)$, where K is the elastic modulus of the spring. This equation is the equivalent of Eq. (18.16) for a bar. The coefficient K must not be confused with the elastic constant k introduced in Eq. (12.5). To obtain the relation between K and k, we note that if the spring, of length

L, viene tesa lentamente in modo che la sua lunghezza sia aumentata di l, la forza F deve essere la stessa in tutti i punti della molla in equilibrio. Quindi $\partial\xi/\partial x = l/L$ e $F = (K/L)l$. La quantità l è ciò che abbiamo chiamato x nella Eq. (12.5), $F = kx$, e quindi $k = K/L$ o $K = kL$. Consideriamo ora un elemento di una molla di lunghezza dx, dove m è la massa ad unità di lunghezza della molla e $m\,dx$ è la massa di tale elemento. Con lo stesso ragionamento usato per ottenere l'Eq. (18.17), possiamo scrivere

ossia

che ha la forma della equazione d'onda (18.11). Quindi, la velocità di propagazione dell'onda longitudinale lungo la molla vale

18.6 *Onde di pressione in una colonna di gas*

Considereremo ora le onde elastiche in un gas che risultino dalle variazioni di pressione nel gas stesso. Il suono è l'esempio più importante di questo tipo di onde. Per semplicità, considereremo soltanto onde che si propagano in un gas entro un condotto cilindrico o tubo.

Vi è una importante differenza tra le onde elastiche in un gas e le onde elastiche in una sbarra di materiale solido. I gas sono molto compressibili e quando si verificano in un gas fluttuazioni della pressione, la densità del gas subirà lo stesso tipo di fluttuazione cui è soggetta la pressione.

Fig. 18–13. Onde di compressione in una colonna di gas.

Indichiamo con p_0 e ρ_0 la pressione e la densità nel gas in condizioni di equilibrio. In condizioni di equilibrio, p_0 e ρ_0 sono le stesse in tutto il volume del gas; cioè, esse non dipendono da x. Se la pressione del gas viene alterata, un elemento di volume come $A\,dx$ in Fig. 18–13 è posto in moto, poichè le pressioni p e p' sui due lati sono differenti, dando così origine ad una forza risultante. In conseguenza di ciò, la sezione A si sposta dalla quantità ξ e la sezione A' dalla quantità ξ', in modo tale che lo spessore dell'elemento di volume dopo la deformazione è $dx + (\xi' - \xi) = dx + d\xi$. Fino a questo punto, tutto è uguale al caso della sbarra di materiale solido. Tuttavia, a causa della variazione di volume, vi è ora anche una variazione nella densità dovuta alla maggiore compressibilità del gas. La massa contenuta nell'elemento di volume non perturbato vale $\rho_0 A\,dx$. Se ρ è la densità del gas in condizione perturbata, la massa dell'elemento di volume perturbato vale $\rho A(dx + d\xi)$. Il principio di conservazione delle masse richiede che queste due masse siano uguali; cioè

ossia

L, is stretched slowly until its length increases by l, the force F must be the same at all points of the spring in equilibrium. Thus $\partial\xi/\partial x = l/L$ and $F = (K/L)l$. The quantity l is what we called x in Eq. (12.5), $F = kx$, and therefore $k = K/L$ or $K = kL$. Let us now consider a section of the spring of length dx, where m is the mass per unit length of the spring and $m\,dx$ is the mass of the section. By the same logic used to obtain Eq. (18.17), we may write

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial F}{\partial x} = K\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{K}{m}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2},$$

which has the form of the wave equation (18.11). Therefore the velocity of propagation of the longitudinal wave along the spring is

$$v = \sqrt{K/m} = \sqrt{kL/m}.$$

18.6 *Pressure Waves in a Gas Column*

Next we shall consider elastic waves in a gas resulting from pressure variations in the gas. Sound is the most important example of this type of wave. For simplicity, we shall consider only waves propagated in a gas within a cylindrical pipe or tube.

There is an important difference between elastic waves in a gas and elastic waves in a solid rod. Gases are very compressible, and when pressure fluctuations are set up in a gas, the density of the gas will suffer the same kind of fluctuations as the pressure.

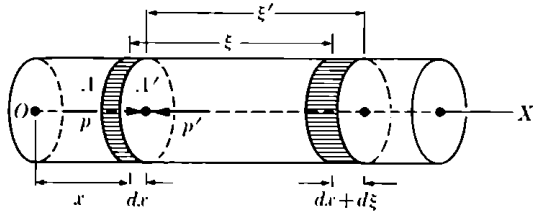


Fig. 18–13. Compressional wave in a gas column.

Let us call p_0 and ρ_0 the equilibrium pressure and density in the gas. Under equilibrium conditions, p_0 and ρ_0 are the same throughout the volume of the gas; that is, they are independent of x. If the pressure of the gas is disturbed, a volume element such as $A\,dx$ in Fig. 18–13 is set in motion because the pressures p and p' on one side and the other are different, giving rise to a net force. As a result, section A is displaced the amount ξ and section A' the amount ξ', so that the thickness of the volume element after the deformation is $dx + (\xi' - \xi) = dx + d\xi$. So far, all seems identical to the case of the solid rod. However, because of the change in volume, now there is also a change in density due to the greater compressibility of the gas. The mass within the undisturbed volume element is $\rho_0 A\,dx$. If ρ is the density of the disturbed gas, the mass of the disturbed volume element is $\rho A(dx + d\xi)$. The conservation of matter requires that both masses be equal; that is,

$$\rho A(dx + d\xi) = \rho_0 A\,dx \quad \text{or} \quad \rho\left(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) = \rho_0.$$

Risolvendo rispetto a ρ, si trova

Solving for ρ, we find

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \partial\xi/\partial x}.$$

Poichè, in generale $\partial\xi/\partial x$ è piccolo, si può sostituire $(1 + \partial\xi/\partial x)^{-1}$ con $1 - \partial\xi/\partial x$ usando lo sviluppo binomiale (M.28), ottenendo così

Since in general $\partial\xi/\partial x$ is small, we may replace $(1 + \partial\xi/\partial x)^{-1}$ by $1 - \partial\xi/\partial x$, using the binomial expansion (M.28), resulting in

$$\rho = \rho_0(1 - \partial\xi/\partial x) \quad \text{or} \quad \rho - \rho_0 = -\rho_0(\partial\xi/\partial x). \tag{18.21}$$

La pressione p è legata alla densità del gas ρ dall'equazione di stato che possiamo scrivere $p = f(\rho)$. Possiamo applicare lo sviluppo di Taylor (M.31) a questa funzione scrivendo:

The pressure p is related to the gas density ρ by the equation of state and we may write $p = f(\rho)$. We may apply Taylor's expansion (M.31) to this function by writing

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 + \tfrac{1}{2}(\rho - \rho_0)^2\left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_0 + \cdots$$

Per variazioni di densità relativamente piccole, possiamo considerare solo i primi due termini, e scrivere [si ricordi l'Eq. (M.32)]

For relatively small changes in density, we keep only the first two terms and write [remember Eq. (M.32)]

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0)\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0.$$

La quantità

The quantity

$$\kappa = \rho_0\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \tag{18.22}$$

è detta *modulo di contrazione*. Esso è espresso in N m^{-2}, le medesime unità con cui si esprime la pressione. Possiamo quindi scrivere

is called the *bulk modulus of elasticity*. It is expressed in N m^{-2}, the same units we use to express pressure. Then we may write

$$p = p_0 + \kappa\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right). \tag{18.23}$$

Questa espressione è l'analogo per i fluidi della legge di Hooke. Usando l'Eq. (18.21) per eliminare $\rho - \rho_0$, abbiamo

This expression corresponds to Hooke's law for fluids. Using Eq. (18.21) to eliminate $\rho - \rho_0$, we have

$$p = p_0 - \kappa\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{18.24}$$

Questa espressione pone in relazione in ciascun punto del gas la pressione con la deformazione nello stesso punto. [Per una sbarra elastica, essa equivale all'Eq. (18.16).]

This expression relates the pressure at any point in the gas to the deformation at the same point. [For an elastic rod, it is equivalent to Eq. (18.16).]

Ci occorre ora l'equazione del moto dell'elemento di volume. La massa dell'elemento di volume è $\rho_0 A\,dx$, e la sua accelerazione è $\partial^2\xi/\partial t^2$. Il gas alla sinistra dell'elemento di volume in esame preme verso destra con una forza pA, ed il gas alla destra preme verso sinistra con una forza $p'A$. Quindi, la forza risultante nella direzione $+X$ è $(p - p')A = -A\,dp$, poichè $dp = p' - p$. Quindi, l'equazione del moto è

Next we need the equation of motion of the volume element. The mass of the volume element is $\rho_0 A\,dx$ and its acceleration is $\partial^2\xi/\partial t^2$. The gas at the left of our volume element pushes to the right with a force pA and the gas at the right pushes to the left with a force $p'A$. Therefore the resultant force in the $+X$-direction is $(p - p')A = -A\,dp$, since $dp = p' - p$. Then the equation of motion is

ossia

$$-A\,dp = (\rho_0 A\,dx)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \quad \text{or} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}. \tag{18.25}$$

Anche in questo problema abbiamo due campi, il campo dello spostamento ξ e il campo della pressione p. Le espressioni (18.24) e (18.25) sono le equazioni che pongono in relazione entrambi

Again in this problem we have two fields, the displacement field ξ and the pressure field p. Expressions (18.24) and (18.25) are the equations relating both

i campi. Esse possono essere combinate nel modo seguente. Deriviamo l'Eq. (18.24) rispetto a x, e teniamo presente che p_0 è costante in tutto il gas. Allora

fields. They can be combined in the following way. We take the derivative of Eq. (18.24) with respect to x and remember that p_0 is constant throughout the gas. Then

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\kappa \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

che, confrontata con l'Eq. (18.25), fornisce la

which, when we compare it with Eq. (18.25), indicates that

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{18.26}$$

Ancora una volta, otteniamo una equazione simile alla Eq. (18.11) e concludiamo che lo spostamento dovuto alla perturbazione della pressione in un gas si propaga con una velocità

Once more we obtain an equation similar to Eq. (18.11) and we conclude that the displacement due to a pressure disturbance in a gas propagates with a velocity

$$v = \sqrt{\kappa/\rho_0}. \tag{18.27}$$

Lo studente dovrebbe verificare la coerenza delle unità in questa equazione. Anche la pressione obbedisce ad una equazione analoga alla Eq. (18.26), come lo studente può verificare esso stesso combinando l'Eq. (18.24) con l'Eq. (18.25), e si può scrivere

The student should check the consistency of the units in this equation. The pressure also obeys an equation like Eq. (18.26), as the student may verify by himself by combining Eq. (18.24) with Eq. (18.25), and we may write

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Questo è il motivo per cui le onde elastiche in un gas sono chiamate *onde di pressione*. Il suono è semplicemente un'onda di pressione nell'aria. Una esplosione, che è un aumento localizzato ed improvviso di pressione, produce una onda di pressione; ma, in questo caso, le fluttuazioni nella densità possono essere così grandi da rendere non più valide le approssimazioni fatte nella nostra teoria e ne risulta un'equazione più complessa.

Analogamente, lo studente [combinando l'Eq. (18.21) con l'Eq. (18.26)] può verificare che la densità del gas obbedisce ad una equazione della stessa forma; cioè

This is why we call the elastic waves in a gas *pressure waves*. Sound is simply a pressure wave in air. An explosion, which is a sudden local increase in pressure, sets up a blast pressure wave, but in this case the fluctuations in density may be so large that the approximations made in our theory are no longer valid, and a more complex equation results.

Similarly the student [combining Eq. (18.21) with Eq. (18.26)] may verify that the gas density obeys an equation of the same form; that is,

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\kappa}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

Perciò, riferendoci ad un gas, noi possiamo parlare di un'onda di spostamento, di un'onda di pressione, e di un'onda di densità. Le onde di spostamento assomigliano all'immagine che ci siamo fatti delle onde sulla superficie di un liquido (cioè, movimento di materia). Le onde di pressione e di densità tuttavia, anche se esse non corrispondono a tale immagine fisica, descrivono anch'esse una situazione fisica che si propaga in un gas.

Un moto di un'onda nei gas è generalmente un processo *adiabatico*, un termine che significa essenzialmente che non esiste scambio di energia sotto forma di calore tra gli elementi di volume del gas. In condizioni adiabatiche $p = C\rho^\gamma$, dove γ è una quantità caratteristica di ciascun gas. Per la maggior parte dei gas biatomici, il suo valore è molto prossimo a 1.4. Allora $dp/d\rho = \gamma C\rho^{\gamma-1}$, e $K = \rho_0(dp/d\rho)_0 = \gamma C\rho_0^\gamma = \gamma p_0$. Quindi (eliminando l'indice 0) e sostituendo nell'Eq. (18.27), si trova che la velocità del suono in un gas vale

Wave motion in gases is generally an *adiabatic* process, a term that essentially means that no energy is exchanged in the form of heat by a volume element of the gas. Under adiabatic conditions $p = C\rho^\gamma$, where γ is a quantity characteristic of each gas. For most diatomic gases, its value is very close to 1.4. Then $dp/d\rho = \gamma C\rho^{\gamma-1}$, and $K = \rho_0(dp/d\rho)_0 = \gamma C\rho_0^\gamma = \gamma p_0$. Then (dropping the subscript 0) by substituting into Eq. (18.27), we find that the velocity of sound in a gas is

$$v = \sqrt{\gamma p/\rho}. \tag{18.28}$$

L'onda associata con il campo ξ è ancora un'onda longitudinale, poichè lo spostamento è parallelo alla direzione di propagazione. La pressione p, tuttavia, non è un vettore e nessuna direzione è associata ad essa. La *forza* prodotta dalla differenza di pressione ha una direzione ad essa associata che è normale alla superficie. Quindi il moto di una onda corrispondente al campo di pressione è un'onda *scalare*. Anche l'onda corrispondente alla densità ρ è scalare.

ESEMPIO 18.6. Si ottenga una relazione tra la velocità di un'onda di pressione in un gas e la temperatura del gas.

Soluzione: Come abbiamo verificato nel Problema 9.46, la relazione tra pressione e volume in un gas è $pV = \text{N}RT$. Ma poichè è $\rho = m/V$ si ha che $p/\rho = \text{N}RT/m = RT/M$ dove $M = m/\text{N}$ è la massa di una mole di gas, espressa in kg. Perciò il rapporto p/ρ è proporzionale alla radice quadrata della temperatura, e noi possiamo scrivere.

dove $\alpha = \sqrt{\gamma R/M}$. Noi sappiamo, da misure sperimentali, che per $T = 273.15°\text{K}$ (o 0°C), la velocità del suono nell'aria è 331.45 m s^{-1}. Quindi il coefficiente α ha il valore 20.055, e la velocità del suono in aria ad una qualsiasi temperatura (misurata in °K) è $v = 20.055\sqrt{T}$ m s^{-1}, risultato che si accorda con i risultati sperimentali per un intervallo abbastanza grande di temperature.

ESEMPIO 18.7. Si ricavi la relazione tra le ampiezze delle onde di spostamento e le onde di pressione in una colonna di gas.

Soluzione: Supponiamo che le onde di spostamento siano armoniche, ed espresse da $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$. Sostituendo questo risultato nella Eq. (18.24), si trova che

Quindi, l'onda di pressione oscilla intorno al suo valore medio con una ampiezza $\mathcal{P}_0$ data da $\mathcal{P}_0 = \kappa k \xi_0$. Usando l'Eq. (18.27) per eliminare κ, possiamo scrivere

Si può ottenere una espressione alternativa usando la relazione data nella Eq. (18.16), precisamente $k = \omega/v$. Quindi

Queste relazioni sono estremamente utili nei calcoli relativi all'acustica. Per esempio, alla frequenza di 400 Hz, il suono più debole che può essere udito corrisponde ad una ampiezza di pressione di circa 8×10^{-5} N m^{-2}. La corrispondente ampiezza di spostamento, supponendo una densità dell'aria di 1.29 kg m^{-3} ed una velocità del suono di 345 m s^{-1}, è

Questa ampiezza è dello stesso ordine di grandezza delle dimensioni molecolari.

The wave associated with the ξ field is again a longitudinal wave, since the displacement is parallel to the direction of propagation. The pressure p, however, is not a vector and no direction is associated with it. The associated direction is that of the *force* produced by the pressure difference, and it is normal to the surface. Therefore the wave motion corresponding to the pressure field is a *scalar* wave. The wave corresponding to the density ρ is also scalar.

EXAMPLE 18.6. Obtain a relation between the velocity of a pressure wave in a gas and the temperature of the gas.

Solution: As we proved in Problem 9.46, the relation between pressure and volume in a gas is $pV = \text{N}RT$. But since $\rho = m/V$, we have that $p/\rho = \text{N}RT/m = RT/M$, where $M = m/\text{N}$ is the mass of one mole of the gas, expressed in kg. Therefore the ratio p/ρ is proportional to the square root of the temperature, and we may write

$$v = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma RT/M} = \alpha\sqrt{T},$$

where $\alpha = \sqrt{\gamma R/M}$. We know from experimental measurements that at $T = 273.15°\text{K}$ (or 0°C), the velocity of sound in air is 331.45 m s^{-1}. Therefore the coefficient α has the value 20.055, and the velocity of sound in air at any temperature (measured in °K) is $v = 20.055\sqrt{T}$ m s^{-1}, a result that agrees with experiment over a fairly large temperature range.

EXAMPLE 18.7. Obtain the relation between the amplitudes of the displacement waves and the pressure waves in a gas column.

Solution: Let us suppose that the displacement waves are harmonic, expressed by $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$. Substituting this result in Eq. (18.24), we find that

$$p - p_0 = -\kappa \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\kappa k \xi_0 \cos(kx - \omega t).$$

Thus the pressure wave oscillates about its average value with an amplitude $\mathcal{P}_0$ given by $\mathcal{P}_0 = \kappa k \xi_0$. Using Eq. (18.27) to eliminate κ, we may write

$$\mathcal{P}_0 = v^2 \rho_0 k \xi_0.$$

We can obtain an alternative expression by using the relation given in Eq. (18.6), namely $k = \omega/v$. Then

$$\mathcal{P}_0 = v\rho_0\omega\xi_0 = 2\pi v \rho_0 \nu \xi_0.$$

These relations are extremely useful in acoustical calculations. For example, at a frequency of 400 Hz, the faintest sound that can be heard corresponds to a pressure amplitude of about 8×10^{-5} N m^{-2}. The corresponding displacement amplitude, assuming an air density of 1.29 kg m^{-3} and a velocity of sound of 345 m s^{-1}, is

$$\xi_0 = \frac{\mathcal{P}_0}{2\pi v \rho_0 \nu} = 7.15 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

This amplitude is of the order of molecular dimensions.

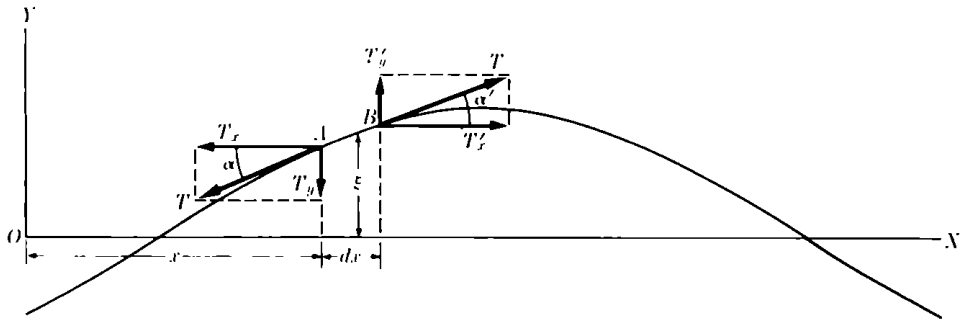


Fig. 18–14. Forze in un elemento di una corda spostata lateralmente.

Fig. 18–14. Forces on a section of a transversely displaced string.

18.7 *Onde trasversali in una corda*

Come problema successivo, considereremo il caso di una corda soggetta a una forza T. In condizioni di equilibrio, la corda è diritta. Si supponga ora di spostare la corda di una piccola quantità lateralmente o perpendicolarmente alla sua lunghezza, come mostrato in Fig. 18–14. Si consideri l'elemento AB della corda di lunghezza dx, che è stato spostato alla distanza ξ dalla posizione di equilibrio. Su ciascun estremo agisce una forza T tangenziale, una in B prodotta dalla trazione della corda verso destra ed un'altra in A dovuta alla trazione della corda verso sinistra. A causa della curvatura della corda, le due forze non hanno la stessa direzione. La componente verso l'alto di ciascuna di queste forze è $T'_y = T \sin \alpha'$, $T_y = -T \sin \alpha$. La forza risultante diretta verso l'alto applicata all'elemento AB di corda vale

Se la curvatura della corda non è molto grande, gli angoli α e α' sono piccoli, e possono essere sostituiti dalle loro tangenti. Così la forza diretta verso l'alto vale

avendo usato derivate parziali poichè tan α dipende sia dalla posizione x che dal tempo t. Ma tan α è la pendenza della curva secondo la quale si è disposta la corda, che è eguale a $\partial\xi/\partial x$. Quindi

Questa forza deve essere uguale alla massa dell'elemento AB moltiplicata per la sua accelerazione verso l'alto $\partial^2\xi/\partial t^2$. Se m è la *densità lineare* della corda, o massa ad unità di lunghezza, espressa in kg m^{-1}, la massa dell'elemento AB è $m\,dx$; e possiamo scrivere l'equazione del moto di questo elemento di corda (usando la relazione, forza = massa × accelerazione)

18.7 *Transverse Waves in a String*

As our next problem we shall consider the case of a string subject to a tension T. Under equilibrium conditions the string is straight. Suppose now that we displace the string, sidewise or perpendicular to its length, by a small amount, as shown in Fig. 18–14. Consider a section AB of the string, of length dx, which has been displaced a distance ξ from the equilibrium position. On each end a tangential force T is acting, the one at B produced by the pull of the string on the right and the one at A due to the pull of the string on the left. Due to the curvature of the string, the two forces are not directly opposed. The upward component of each force is $T'_y = T \sin \alpha'$, $T_y = -T \sin \alpha$. The resultant upward force on the section AB of the string is

$$F_y = T(\sin \alpha' - \sin \alpha).$$

If the curvature of the string is not very large, the angles α and α' are small, and can be replaced by their tangents. So the upward force is

$$F_y = T(\tan \alpha' - \tan \alpha) = T\,d(\tan \alpha) = T\frac{\partial}{\partial x}(\tan \alpha)\,dx,$$

where the partial derivative is used because tan α depends both on the position x and the time t. But tan α is the slope of the curve adopted by the string, which is equal to $\partial\xi/\partial x$. Then

$$F_y = T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)dx = T\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,dx.$$

This force must be equal to the mass of the section AB times its upward acceleration $\partial^2\xi/\partial t^2$. Given that m is the *linear density* of the string, or mass per unit length, expressed in kg m^{-1}, the mass of the section AB is $m\,dx$, and we may write for the equation of motion of this section of the string (using the relation force = mass × acceleration)

$$(m\,dx)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\,dx \qquad \text{or} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{18.29}$$

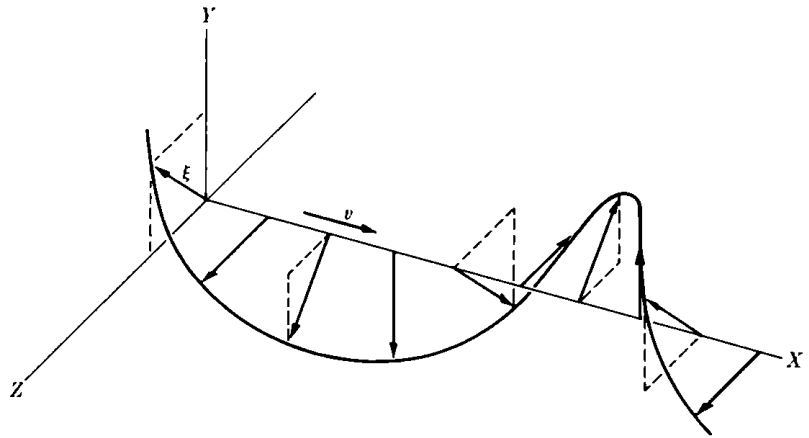


Fig. 18–15. Onde trasversali non polarizzate in una corda.

Fig. 18–15. Nonpolarized transverse wave in a string.

Ancora una volta otteniamo l'Eq. (18.11), verificando che una perturbazione trasversale in una corda si propaga lungo la corda stessa con una velocità

purchè l'ampiezza sia piccola. Lo studente può verificare la coerenza delle unità in questa equazione.

Questo esempio si differenzia dai precedenti sotto due importanti aspetti. Il primo è che si ha a che fare soltanto con un campo, lo spostamento ξ, e l'equazione d'onda (18.29) è un risultato diretto dell'equazione del moto. Il secondo, e più importante, è che il moto dell'onda è *trasversale*. Cioè, la proprietà fisica, lo spostamento ξ, è perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda, che è quella dell'asse X. Ci sono però molte direzioni di spostamento perpendicolari all'asse X. Se scegliamo due direzioni mutuamente perpendicolari, Y e Z, come riferimento, possiamo esprimere lo spostamento trasversale ξ, che dobbiamo considerare come un vettore come nei casi precedenti, attraverso le sue componenti lungo gli assi Y e Z. Mentre la perturbazione si propaga, la direzione di ξ può cambiare da punto a punto, dando origine ad un contorcimento della corda (Fig. 18–15). Tuttavia, se tutti gli spostamenti avvengono nella medesima direzione, per esempio, lungo l'asse Y, la corda giace sempre nel piano XY e diciamo che il moto d'onda è *polarizzato rettilineamente*, (Fig. 18–16). È ovvio che un'onda trasversale può sempre essere considerata come composizione di due onde polarizzate rettilineamente in direzioni perpendicolari. Se ξ ha lunghezza costante ma cambia direzione in modo che la corda giace sopra una superficie cilindrica circolare (Fig. 18–17), l'onda è *polarizzata circolarmente*. In questo caso, ogni elemento della corda si muove circolarmente intorno all'asse X. La polarizzazione delle onde trasversali è argomento molto importante che sarà discusso più in dettaglio nel Capitolo 20.

Si noti che nello scrivere l'Eq. (18.29), si è tenuto conto solo dei moti trasversali della corda. Tuttavia, possiamo facilmente verificare che non è stato trascurato alcun movimento lungo la corda. La forza risultante parallela all'asse X è

Once more we obtain Eq. (18.11), verifying that a transverse disturbance in a string propagates along the string with a velocity

$$v = \sqrt{T/m} \tag{18.30}$$

provided that the amplitude is small. The student may check the consistency of the units in this equation.

This example differs from the previous one in two important respects. One is that we have only one field, the displacement ξ, and the wave equation (18.29) is a direct result of the equation of motion. The second, and more important, is that the wave motion is *transverse*. That is, the physical property, the displacement ξ, is perpendicular to the direction of propagation of the wave, which is along the X-axis. But there are many directions of displacement perpendicular to the X-axis. If we choose two mutually perpendicular directions Y and Z as references, we can express the transverse displacement ξ, which we must consider a vector as in previous cases, in terms of its components along the Y- and Z-axes. While the disturbance propagates, the direction of ξ may change from point to point, resulting in a twisting of the string (Fig. 18–15). However, if all the displacements are in the same direction, let us say along the Y-axis, the string is always in the XY-plane, and we say that the wave motion is *linearly polarized* (Fig. 18–16). It is obvious that a transverse wave can always be considered as the combination of two linearly polarized waves in perpendicular directions. If ξ has a constant length but changes in direction, so that the string lies over a circular cylindrical surface (Fig. 18–17), the wave is *circularly polarized*. In this case, each portion of the string moves in a circle around the X-axis. The polarization of transverse waves is a very important subject, which we shall discuss in more detail in Chapter 20.

Note that in writing Eq. (18.29) we have taken into account only the transverse motion of the string. However, we may easily verify that no motion along the string has been ignored. The resultant force parallel to the X-axis is

$$F_x = T\cos\alpha' - T\cos\alpha = T(\cos\alpha' - \cos\alpha).$$

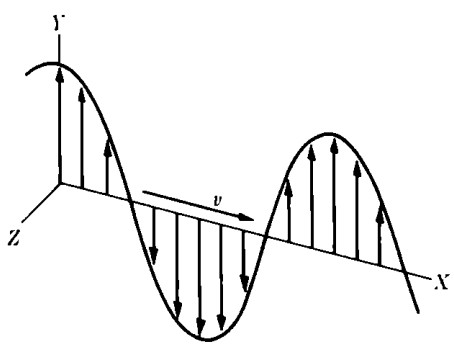


Fig. 18–16. Onde trasversali polarizzate rettilineamente in una corda.

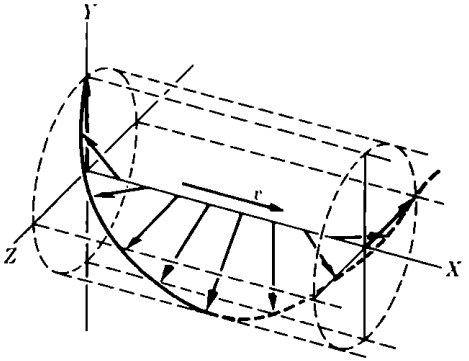


Fig. 18–17. Onde trasversali polarizzate circolarmente in una corda.

Fig. 18–16. Linearly polarized transverse wave in a string.

Fig. 18–17. Circularly polarized transverse wave in a string.

Ma quando l'angolo è molto piccolo, il coseno vale circa 1. Perciò, in prima approssimazione, cos $\alpha' \approx \cos \alpha$ e $F_x = 0$, in modo che non vi è forza risultante parallela all'asse X.

But when the angle is very small the cosine is essentially one. Therefore, to the first order of approximation, cos $\alpha' \approx \cos \alpha$ and $F_x = 0$, so that there is no net force parallel to the X-axis.

ESEMPIO 18.8. Discutere le onde trasversali elastiche in una sbarra.

Soluzione: Nel Paragrafo 18.5 abbiamo discusso le onde elastiche longitudinali in una sbarra solida. Ora analizzeremo le onde elastiche trasversali. Si consideri una sbarra che nella sua posizione non distorta è rappresentata dalle linee orizzontali trattegiate in Fig. 18–18. Se poniamo la sbarra in vibrazione colpendola trasversalmente, in un certo istante essa assume la forma rappresentata dalle linee curve, e possiamo fare l'ipotesi che ciascuna sezione della sbarra si muova su e giù senza alcun movimento orizzontale. Indichiamo con ξ lo spostamento trasversale di un elemento dx in un certo istante. Questo spostamento deve essere anche funzione della posizione, poichè, se fosse costante, esso corrisponderebbe ad uno spostamento parallelo della sbarra. La quantità $\gamma = \partial \xi / \partial x$, che è la variazione dello spostamento trasversale riferita alla unità di lunghezza lungo la sbarra, è detta *dilatazione tangenziale.*

EXAMPLE 18.8. Discuss transverse elastic waves in a bar.

Solution: In Section 18.5 we discussed longitudinal elastic waves in a solid bar. Now we shall analyze transverse elastic waves. Let us consider a bar that in its undistorted state is represented by the dashed horizontal lines in Fig. 18–18. If we start the bar vibrating by hitting it transversely, at a particular instant it adopts the shape of the curved lines, and we may assume that each section of the bar moves up and down, with no horizontal motion. Let us call ξ the transverse displacement of a section dx at a particular time. This displacement must also be a function of position because, if it were constant, it would correspond to a parallel displacement of the bar. The quantity $\gamma = \partial \xi / \partial x$, which is the change of transverse displacement per unit length along the bar, is called the *shearing strain.*

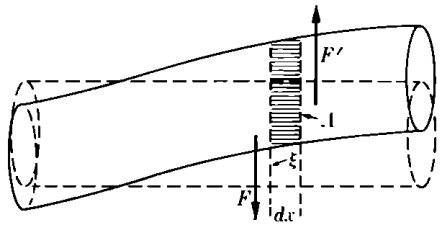


Fig. 18–18. Onde trasverse o tangenziali in una sbarra.

Fig. 18–18. Transverse or shear wave in a rod.

Come conseguenza della deformazione, ciascun elemento di spessore dx è soggetto alle forze di verso opposto F e F', che sono tangenti alle superficie (si confronti con la situazione in Fig. 18–11) e sono dovute a quelle parti della sbarra sui due lati dell'elemento. La forza tangenziale ad unità di superficie $S = F/A$, è detta *tensione tangenziale.*

Anche in questo caso, come nell'Eq. (18.15) per la relazione tra dilatazione normale e tensione normale, esiste una relazione simile alla legge di Hooke tra tensione tangenziale e dilatazione tangenziale;

As a result of the deformation, each section of thickness dx is subject to the opposed forces F and F', which are tangent to the surface (compare with the situation in Fig. 18–11) and are produced by those portions of the bar on each side of the section. The tangential force per unit area, $S = F/A$, is called the *shearing stress.*

Again, as in Eq. (18.15) for the relationship between normal stress and normal strain, between the shearing stress and the shearing strain there is a relation similar to Hooke's

cioè, $S = G\gamma$, dove G è un coefficiente caratteristica del materiale ed è detto *modulo tangenziale*[N.T.]. Quindi

La forza risultante sull'elemento vale $F' - F = dF = (\partial F/\partial x)\,dx$. D'altra parte, se ρ è la densità della sostanza, la massa dell'elemento è $\rho A\,dx$, e la sua equazione del moto nella direzione trasversale vale

Ma dalla Eq. (18.31), derivando rispetto a x, abbiamo

che, sostituita nella Eq. (18.32), (dopo avere eliminato il fattore comune A), dà

Si è ancora ottenuta l'equazione differenziale del moto di un'onda (18.11), che indica come la deformazione trasversale si propaga lungo la sbarra con velocità data da

Più propriamente, l'onda dovrebbe essere detta *onda tangenziale*. Un altro esempio di onda tangenziale è l'*onda torsionale*. Si supponga che all'estremo libero di una sbarra che ha l'altro estremo fisso, sia applicata una coppia variabile. Questa produce una rotazione della sbarra. (Fig. 18–19). Se il momento della coppia dipende dal tempo, l'angolo di rotazione, detto torsione, varia col tempo, dando origine ad un'onda torsionale che si propaga lungo la sbarra. L'analisi matematica del problema mostra che, indipendentemente dalla forma della sezione normale della sbarra, la velocità di propagazione dell'onda torsionale è data ancora dall'Eq. (18.34). Non deve sorprendere che le onde trasversali e quelle torsionali si propaghino in una sbarra con la medesima velocità, dal momento che entrambi i processi sono dovuti essenzialmente al medesimo fenomeno interno nel materiale della sbarra. Un altro aspetto interessante delle onde torsionali è che esse non corrispondono a spostamenti paralleli o trasversali all'asse della sbarra, ma a rotazioni intorno a tale asse senza modificazioni di forma. Ciò aiuterà lo studente a comprendere la grande varietà dei fenomeni di onde elastiche, tutti con diverse dinamiche interne che, nell'ambito delle approssimazioni da noi adottate, sono descritti matematicamente dallo stesso tipo di equazione: cioè l'Eq. (18.11).

Fig. 18–19. Onda torsionale in una sbarra.

N.T. I tre termini dilatazione tangenziale, tensione tangenziale e modulo tangenziale, vengono spesso chiamati, nella letteratura tecnica, rispettivamente: scorrimento, sforzo di taglio, e modulo di scorrimento.

law; that is, $S = G\gamma$, where G is a coefficient characteristic of the material, and is called the *shear modulus*. Therefore

$$F = AG\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{18.31}$$

The resultant force on the section is $F' - F = dF = (\partial F/\partial x)\,dx$. On the other hand, if ρ is the density of the material, the mass of the section is $\rho A\,dx$, and its equation of motion in the transverse direction is

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx = (\rho A\,dx)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{or} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \rho A\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{18.32}$$

But from Eq. (18.31), by taking the derivative with respect to x, we have

$$\frac{\partial F}{\partial x} = AG\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

which, substituted in Eq. (18.32), gives (after canceling the common factor A)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \tag{18.33}$$

Again we obtain the differential equation of wave motion (18.11), indicating that the transverse deformation propagates along the bar with a velocity given by

$$v = \sqrt{G/\rho}. \tag{18.34}$$

More properly, the wave should be called a *shear wave*. Another example of a shear wave is a *torsional wave*. Suppose that, at the free end of a rod clamped at one end, a variable torque is applied. This produces a twisting of the rod (Fig. 18–19). If the torque is time dependent, the angle of twist, which is called torsion, changes with time, resulting in a torsional wave propagated along the rod. A mathematical analysis of the problem shows that, irrespective of the shape of the cross section of the rod, the velocity of propagation of the torsional wave is also given by Eq. (18.34). It is not surprising that the transverse and the torsional waves in a bar propagate with the same velocity, since both processes are essentially due to the same internal phenomenon in the material of the rod. Another interesting aspect of torsional waves is that they do not correspond to displacements parallel to or transverse to the axis of the rod, but to rotations around the axis without change in shape. This will help the student to understand the great variety of elastic wave phenomena, all with different internal dynamics, which, under the approximations we have used, are described mathematically by the same type of equation; that is, Eq. (18.11).

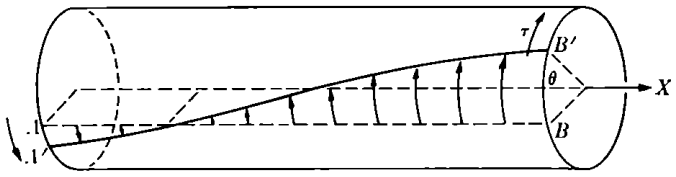


Fig. 18–19. Torsional wave in a rod.

Disturbed liquid surface = Superficie perturbata del liquido
Undisturbed liquid surface = Superficie del liquido non perturbata

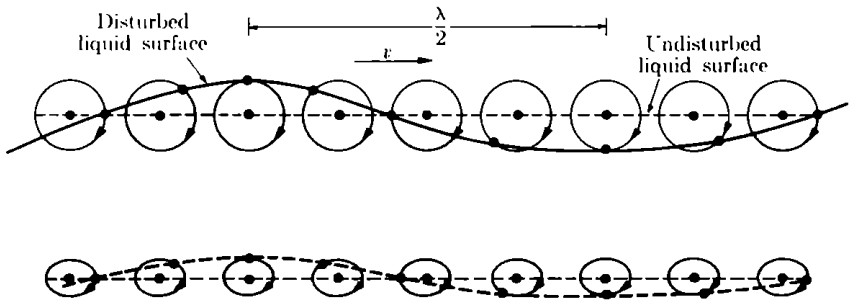


Fig. 18–20. Spostamento delle molecole come conseguenza di un'onda di superficie in un liquido.

Fig. 18–20. Displacement of molecules resulting from a surface wave in a liquid.

18.8 Onde di superficie in un liquido

Come ultimo esempio del moto di onde in una direzione, considereremo ora le onde sulla superficie di un liquido. Questi sono i tipi di onde più comuni; esse sono le onde che osserviamo sull'oceano e sui laghi o semplicemente quando gettiamo un sasso in uno stagno. L'aspetto matematico è tuttavia più complesso di quanto fosse negli esempi precedenti e non sarà riportato. Presenteremo invece in questo paragrafo una discussione descrittiva, rimandando all'Esempio 18.10 per una discussione matematica semplificata.

La superficie non perturbata di un liquido è piana ed orizzontale. Una perturbazione della superficie produce uno spostamento di tutte le molecole che sono immediatamente sotto la superficie (Fig. 18–20). Ciascun elemento di volume del liquido descrive una traiettoria chiusa. L'ampiezza degli spostamenti orizzontale e verticale di un elemento di volume del fluido varia, in generale, con la profondità. Naturalmente, le molecole che si trovano sul fondo non subiscono alcuno spostamento verticale, poichè esse non possono separarsi dal fondo stesso. Alla superficie del liquido entrano in gioco certe forze oltre quelle dovute alla pressione atmosferica. Una forza è dovuta alla tensione superficiale del liquido che dà origine ad una forza diretta verso l'alto applicata ad un elemento della superficie analoga a quella trovata nel caso di una corda. Un'altra forza è il peso del liquido sopra il livello di quiete. L'equazione risultante per lo spostamento della superficie non è esattamente del tipo (18.11), ma lievemente più complicata. Tuttavia, essa è soddisfatta da onde armoniche di lunghezza d'onda λ, e la velocità di propagazione delle onde di superficie è data da

essendo ρ la densità del liquido, $\mathcal{T}$ la tensione superficiale, e g l'accelerazione di gravità. Questa espressione vale solo quando la profondità è molto maggiore della lunghezza d'onda λ. In caso diverso, si ottiene un'espressione differente (vedi Esempio 18.9).

L'aspetto più interessante della Eq. (18.35) è che *la velocità di propagazione dipende dalla lunghezza d'onda*, caso questo che non è stato fino ad ora mai incontrato. Poichè la frequenza è legata alla lunghezza d'onda e alla velocità di propagazione dalla $\nu = v/\lambda$,

18.8 Surface Waves in a Liquid

As a last example of wave motion in one direction we shall now consider the waves on the surface of a liquid. These are the most familiar kinds of waves; they are the waves we observe on the oceans and lakes, or simply when we drop a stone in a pond. The mathematical aspect, however, is more complicated than that in the previous examples, and will be omitted. Instead we shall present a descriptive discussion in this section, with a simplified mathematical discussion deferred until Example 18.10.

The undisturbed surface of a liquid is plane and horizontal. A disturbance of the surface produces a displacement of all molecules directly underneath the surface (Fig. 18–20). Each volume element of the liquid describes a closed path. The amplitude of the horizontal and the vertical displacements of a volume element of a fluid varies, in general, with the depth. Of course, the molecules at the bottom do not suffer any vertical displacement, since they cannot separate from the bottom. At the surface of the liquid certain forces enter into play in addition to that due to the atmospheric pressure. One force is due to the surface tension of the liquid, which gives an upward force on an element of the surface similar to that found in the case of a string. Another force is the weight of the liquid above the undisturbed level. The resulting equation for the surface displacement is not exactly of type (18.11), but slightly more complicated. However, it is satisfied by harmonic waves of wavelength λ, and the velocity of propagation of the surface wave is given by

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\mathcal{T}}{\rho\lambda}}, \tag{18.35}$$

where ρ is the density of the liquid, $\mathcal{T}$ is the surface tension, and g is the acceleration due to gravity. This expression is valid only when the depth is very great compared with the wavelength λ. Otherwise a different expression results (see Example 18.9).

The most interesting aspect of Eq. (18.35) is that *the velocity of propagation depends on the wavelength*, a situation not encountered previously. Since the frequency is related to the frequency and the velocity of propagation through $\nu = v/\lambda$,

concludiamo che *la velocità di propagazione dipende dalla frequenza*. Si supponga per esempio che λ sia sufficientemente grande da poter trascurare il secondo termine nella Eq. (18.35). Abbiamo quindi

In questo caso, le onde sono dette *onde di gravità*. In questa approssimazione, la velocità di propagazione è indipendente dalla natura del liquido, poichè nessun fattore concernente il liquido (come la sua densità o la sua tensione superficiale) appare nella Eq. (18.36). Vediamo come in questo caso la velocità di propagazione sia proporzionale alla radice quadrata della lunghezza d'onda, in modo che più grande è la lunghezza d'onda più veloce è la propagazione. È per questo che un vento forte e costante produce onde di lunghezza d'onda più lunga di un vento leggero e incostante.

Quando la lunghezza d'onda è molto piccola, il termine prevalente nella Eq. (18.35) è il secondo, che fornisce una velocità di propagazione

Queste onde sono dette *increspature* o *onde capillari*. Esse sono le onde che si osservano quando soffia un vento molto lieve, o quando un recipiente è soggetto a vibrazioni di alta frequenza e piccola ampiezza. In questo caso, più lunga è la lunghezza d'onda, più lenta è la propagazione.

Quando la velocità di propagazione dell'onda dipende dalla lunghezza d'onda o dalla frequenza, diciamo che vi è *dispersione*. Se un moto ondoso risultante dalla sovrapposizione di parecchie onde armoniche di diversa frequenza incide su di un mezzo *dispersivo*, l'onda è distorta, poichè ciascuna delle sue onde componenti si propaga con velocità differente. La dispersione è un fenomeno molto importante, presente in diversi tipi di propagazione di onde. Appare in particolare nel caso delle onde elettromagnetiche che si propagano nella materia, come vedremo nel prossimo capitolo.

ESEMPIO 18.9. L'espressione generale della velocità di propagazione di onde di superficie in un liquido vale

dove h è la profondità del liquido. Trovare i valori limiti di questa espressione quando h è molto grande o molto piccolo in confronto a λ.

Soluzione: Quando la profondità h è molto grande in confronto alla lunghezza d'onda (cioè, la quantità $2\pi h/\lambda$ è grande rispetto all'unità), il valore della tangente iperbolica è molto prossimo a 1, e quindi l'ultimo fattore della Eq. (18.38) può essere sostituito da 1 senza grande errore. Nell'ambito di questa approssimazione l'Eq. (18.38) diventa l'Eq. (18.35).

D'altra parte, quando la profondità h è molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda λ, la quantità $2\pi h/\lambda$ è molto piccola rispetto all'unità, e usando l'approssimazione $\tanh x \sim x$, che è accettabile quando x è molto piccolo, possiamo sostituire l'ultimo fattore nella

we conclude that *the velocity of propagation depends on the frequency*. Suppose, for example, that λ is large enough so that the second term in Eq. (18.35) can be neglected. Then we have

$$v = \sqrt{g\lambda/2\pi}. \tag{18.36}$$

The waves in this case are called *gravity waves*. In this approximation the velocity of propagation is independent of the nature of the liquid, since no factor pertaining to the liquid (such as its density or its surface tension) appears in Eq. (18.36). We see that in this case the velocity of propagation is proportional to the square root of the wavelength, and that the longer the wavelength, the faster the propagation. It is for this reason that a strong steady wind produces waves of longer wavelength than a swift, gusty wind.

When the wavelength is very small, the dominant term is the second in Eq. (18.35), which gives for the velocity of propagation

$$v = \sqrt{2\pi T/\rho\lambda}. \tag{18.37}$$

These waves are called *ripples* or *capillary waves*. They are the waves observed when a very gentle wind blows, or when a container is subject to vibrations of high frequency and small amplitude. In this case, the longer the wavelength the slower the propagation.

When the velocity of propagation of a wave motion depends on the wavelength or the frequency, we say that there is *dispersion*. If a wave motion resulting from the superposition of several harmonic waves of different frequencies impinges on a *dispersive* medium, the wave is distorted, since each of its component waves propagates with a different velocity. Dispersion is a very important phenomenon present in several types of wave propagation. In particular it appears in the case of electromagnetic waves propagating through matter, as we shall see in the next chapter.

EXAMPLE 18.9. The general expression for the velocity of propagation of surface waves in a liquid is

$$v = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho\lambda}\right)\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}}, \tag{18.38}$$

where h is the depth of the liquid. Find the limiting values of this expression when h is very large or very small compared with λ.

Solution: When the depth h is very large compared with the wavelength (that is, the quantity $2\pi h/\lambda$ is large compared with unity), the value of the hyperbolic tangent is very close to 1, and therefore the last factor in Eq. (18.38) can be replaced by 1 without great error. Under this approximation Eq. (18.38) becomes Eq. (18.35).

On the other hand, when the depth h is very small compared with the wavelength λ, the quantity $2\pi h/\lambda$ is very small compared with unity, and using the approximation $\tanh x \sim x$ that is permissible when x is very small, we may replace the last factor in

Eq. (18.38) con $2\pi h/\lambda$. Trascurando anche il termine $2\pi T/\rho\lambda$, avendo supposto una lunghezza d'onda relativamente grande, otteniamo

In queste condizioni la velocità di propagazione è indipendente dalla lunghezza d'onda.

ESEMPIO 18.10. Si ottenga direttamente l'equazione delle onde di superficie in un liquido quando la lunghezza d'onda è molto grande e l'ampiezza è molto piccola rispetto alla profondità.

Soluzione: Si consideri un liquido in un canale di profondità h e larghezza L. Se perturbiamo la superficie del liquido con onde di piccola ampiezza e grande lunghezza d'onda (rispetto ad h), un particolare elemento verticale del liquido di larghezza dx subisce spostamenti sia in senso verticale che in senso orizzontale. Come risultato di questi spostamenti, la larghezza dell'elemento passa da dx a $dx + d\xi$ (Fig. 18–21), e la sua altezza da h a $h + \eta$. Supponendo il liquido sia incompressibile, il volume dell'elemento deve rimanere costante. Si deve quindi avere

Undisturbed liquid surface = Superficie del liquido non perturbata
Disturbed liquid surface = Superficie perturbata del liquido

Tenendo presente che η è molto piccolo rispetto ad h e che $d\xi$ è molto piccolo rispetto a dx, si può trascurare l'ultimo termine $\eta\, d\xi$ e, dopo aver eliminato i termini equivalenti, si ottiene

che pone in relazione per un liquido incompressibile lo spostamento verticale della superficie con quello orizzontale.

Figura 18–21

Poichè il livello perturbato non è orizzontale, la pressione media su ciascun lato dell'elemento di fluido è diversa, come mostrato in figura. Se $A = hL$ è l'area della sezione normale del canale, la forza risultante verso destra sull'elemento è

ave = med

Il moto orizzontale della sezione è quindi

ossia

Ma, usando l'Eq. (9.69), cioè, $p = \rho gz$, la differenza di pressione è

Eq. (18.38) by $2\pi h/\lambda$. Also neglecting the term $2\pi T/\rho\lambda$, since we are assuming a relatively large wavelength, we have then

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\cdot\frac{2\pi h}{\lambda}} = \sqrt{gh}. \tag{18.39}$$

In these circumstances the velocity of propagation is independent of the wavelength.

EXAMPLE 18.10. Obtain directly the equation for surface waves in a liquid when the wavelength is very large and the amplitude is very small compared with the depth.

Solution: Let us consider a liquid in a channel of depth h and width L. If we perturb the surface of the liquid with waves of small amplitude and large wavelength (compared with h), a particular vertical section of the liquid of width dx suffers some displacements in the vertical and in the horizontal direction. As a result of these displacements, the width of the section changes from dx to $dx + d\xi$ (Fig. 18–21) and its height from h to $h + \eta$. Assuming the liquid to be incompressible, the volume of the section must remain constant. Therefore we must have

$$\begin{aligned} Lh\,dx &= L(h+\eta)(dx + d\xi) \\ &= L(h\,dx + \eta\,dx + h\,d\xi + \eta\,d\xi). \end{aligned}$$

Considering that η is very small compared with h and that $d\xi$ is very small compared with dx, we may neglect the last term $\eta\,d\xi$ and, after cancellation of equivalent terms, we obtain

$$\eta\,dx + h\,d\xi = 0 \quad \text{or} \quad \eta = -h\frac{\partial\xi}{\partial x}, \tag{18.40}$$

which relates the vertical surface displacement to the horizontal displacement for an incompressible liquid.

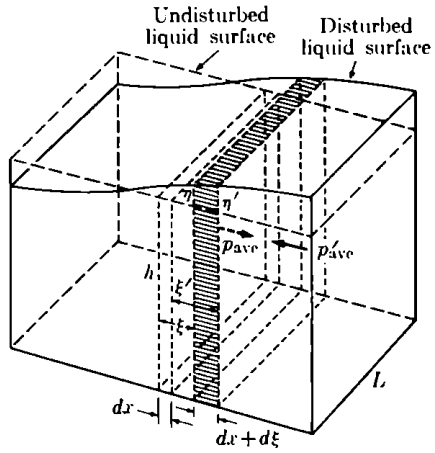


Figure 18–21

Because the disturbed level is not horizontal, the average pressure on each side of the fluid section is different, as shown in the figure. If $A = hL$ is the area of the cross section of the channel, the net force to the right on the section is

$$p_{ave}A - p'_{ave}A = -(p'_{ave} - p_{ave})A = -A\,dp_{ave}.$$

The horizontal motion of the section is thus

$$(\rho A\,dx)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -A\,dp_{ave} \quad \text{or} \quad \rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p_{ave}}{\partial x}.$$

But, using Eq. (9.69), that is, $p = \rho gz$, the pressure difference is

$$dp_{ave} = \rho g(\eta' - \eta) = \rho g\frac{\partial\eta}{\partial x}dx,$$

in modo che $\partial p_{med}/\partial x = \rho g\ \partial \eta/\partial x$, e l'equazione precedente diventa

Dalla Eq. (18.40) si ha, derivando

Quindi, eliminando $\partial \eta/\partial x$ tra queste due equazioni, otteniamo infine

Questa è ancora l'equazione d'onda (18.11) che corrisponde ad onde che si propagano con velocità $v = \sqrt{gh}$, in accordo con il risultato ottenuto nell'Eq. (18.39) in analoghe circostanze. Per la relazione (18.40), lo spostamento verticale sulla superficie soddisfa una equazione simile; cioè,

18.9 *Che cosa si propaga in un moto d'onda?*

È molto importante capire chiaramente che cosa si propaga sotto forma di onda in un moto d'onda. La risposta generale è che ciò che si propaga è una condizione fisica generata in qualche punto e che, come conseguenza della natura del fenomeno, tale condizione può essere trasmessa ad altre regioni. Poichè questa spiegazione è piuttosto astratta, tentiamo di formularla in termini più concreti.

Si considerino i diversi tipi di onde discussi nei paragrafi precedenti. Tutte queste onde corrispondono a certi tipi di moti di atomi o molecole del mezzo, attraverso cui l'onda si propaga, mentre gli atomi restano, in media, nelle loro posizioni di equilibrio (Fig. 18–22). Quindi, non è la materia che si propaga, ma lo *stato di moto* della materia. È una condizione dinamica che è trasferita da una regione all'altra. Ma noi siamo abituati a descrivere una condizione dinamica in termini di quantità di moto e di energia. Quindi possiamo dire che,

in un moto di onde, energia e quantità di moto sono trasferiti o propagati.

Si consideri, per esempio, il caso delle onde elastiche longitudinali che si propagano lungo una sbarra. In un particolare elemento che si sposta con velocità $\partial \xi/\partial t$ (Fig. 18–11), la parte destra della sbarra agisce sul lato sinistro con una forza di trazione F e la parte sinistra agisce sul lato destro con una forza di trazione $-F$. Quindi la potenza (o il lavoro ad unità di tempo) che il lato sinistro trasmette al lato destro in quell'elemento è

so that $\partial p_{ave}/\partial x = \rho g\ \partial \eta/\partial x$, and the preceding equation becomes

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g\frac{\partial \eta}{\partial x}.$$

From Eq. (18.40) we have, by differentiation, that

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -h\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Therefore, eliminating $\partial \eta/\partial x$ between these two equations, we finally obtain

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

This is again the wave equation (18.11) corresponding to waves propagating with velocity $v = \sqrt{gh}$, in agreement with the result obtained in Eq. (18.39) under similar circumstances. Because of relation (18.40), the vertical displacement at the surface satisfies a similar equation; that is,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}.$$

18.9 *What Propagates in a Wave Motion?*

It is very important to understand clearly what is propagated as a wave in a wave motion. The general answer is that what propagates is a physical condition generated at some place and that, as a consequence of the nature of the phenomenon, the condition may be transmitted to other regions. Since this explanation is somewhat abstract, let us try to formulate it in more concrete terms.

Consider the different kinds of waves discussed in the previous sections. All these waves correspond to certain kinds of motion of atoms or molecules of the medium through which the wave propagates, but the atoms remain, on the average, at their equilibrium positions (Fig. 18–22). Then it is not matter that propagates, but the *state of motion* of matter. It is a dynamic condition that is transferred from one region to another. But we are in the habit of describing a dynamic condition in terms of momentum and energy. Therefore we may say that,

in wave motion, energy and momentum are transferred or propagated.

Let us look, for example, at the case of longitudinal elastic waves propagating along a rod. At a particular section that is displaced with velocity $\partial \xi/\partial t$ (Fig. 18–11), the right side of the rod pulls on the left side with a force F and the left side pulls on the right side with a force $-F$. Then the power (or work per unit time) that the left side transmits to the right side at that section is

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (-F)\frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Perciò, quando la perturbazione passa da un elemento all'altro, questa potenza deve venire trasmessa. Se l'onda si propaga da sinistra verso destra, l'energia deve essere fornita all'estremo di sinistra della sbarra. Se l'energia è fornita durante un breve intervallo di tempo, si produce una perturbazione di lunghezza limitata o un impulso transitorio. Se ci deve essere un treno continuo di onde, allora l'energia deve essere fornita in continuazione alla estremità sinistra.

Per esaminare il problema più in dettaglio, si consideri il caso di un'onda sinusoidale elastica, $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$. Effettuando le opportune derivate, troviamo che $\partial\xi/\partial t = -\omega\xi_0 \cos(kx - \omega t)$ e $F = YA\,\partial\xi/\partial x = YAk\xi_0 \cos(kx - \omega t)$. Quindi, usando la relazione $\omega = kv$ e $v = \sqrt{Y/\rho}$, abbiamo

La presenza del fattore $\cos^2(kx - \omega t)$ ci assicura che $\partial W/\partial t$ è sempre positivo, per quanto variabile. Poichè $\partial W/\partial t$ dipende da $kx - \omega t$, esso soddisfa anche l'equazione d'onda e corrisponde ad una *onda di energia*. La potenza media è

$$\text{ave} = \text{med}$$

Ma $[\cos^2(kx - \omega t)]_{\text{med}} = \frac{1}{2}$, e quindi

$$\text{ave} = \text{med}$$

Ora, ricordando l'Eq. (12.11), che fornisce l'energia totale di un oscillatore come $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$, e notando che ora l'ampiezza A è indicata con ξ_0 e che invece della massa

Fig. 18–22. Propagazione di un impulso in una molla. Le sezioni della molla si muovono su e giù mentre l'impulso si muove da sinistra a destra.

Therefore, when the disturbance passes from one section to another, this power must be transmitted. If the wave propagates from left to right, energy must be fed into the left end of the rod. If the energy is fed during a short time interval, a disturbance of limited length, or a transient pulse, is produced. If there is to be a continuous train of waves, then energy must be supplied continuously at the left end.

To see the problem in more detail, let us consider the case of a sinusoidal elastic wave, $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$. Then, taking the appropriate derivatives, we find that $\partial\xi/\partial t = -\omega\xi_0 \cos(kx - \omega t)$ and $F = YA\,\partial\xi/\partial x = YAk\xi_0 \cos(kx - \omega t)$. Then, using the relations $\omega = kv$ and $v = \sqrt{Y/\rho}$, we have

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= YA\omega k\xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)\\ &= (\rho v^2)A(\omega^2/v)\xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)\\ &= vA[\rho\omega^2\xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)].\end{aligned}$$

The presence of the factor $\cos^2(kx - \omega t)$ assures us that $\partial W/\partial t$ is always positive, although fluctuating. Since $\partial W/\partial t$ depends on $kx - \omega t$, it also satisfies the wave equation and corresponds to an *energy wave*. The average power is

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\text{ave}} = vA\{\rho\omega^2\xi_0^2[\cos^2(kx - \omega t)]_{\text{ave}}\}.$$

But $[\cos^2(kx - \omega t)]_{\text{ave}} = \frac{1}{2}$, so that

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\text{ave}} = vA(\tfrac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2). \qquad (18.41)$$

Now, remembering Eq. (12.11), which gives the total energy of an oscillator as $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$, and noting that now the amplitude A is designated by ξ_0 and that instead of the mass

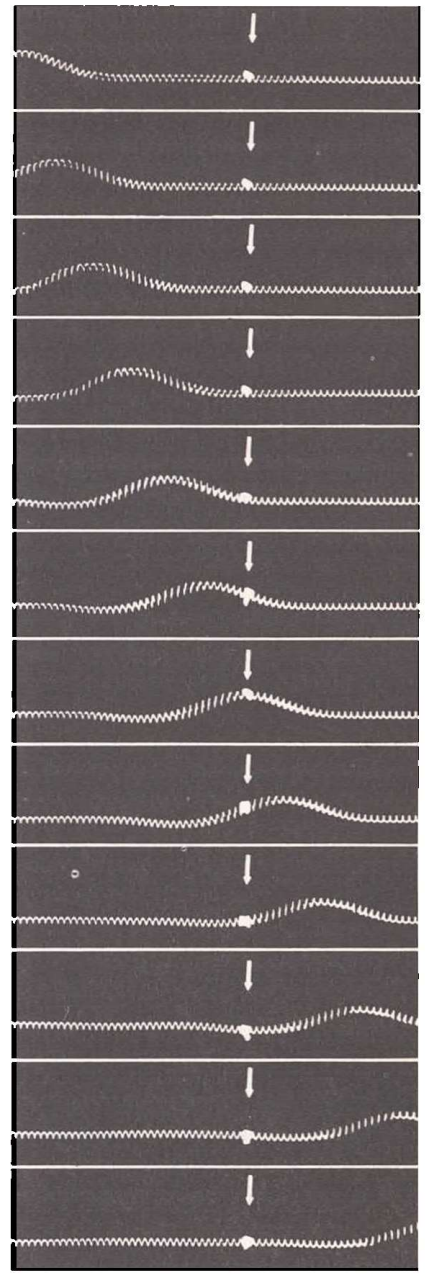


Fig. 18–22. Propagation of a pulse on a spring. The sections of the spring move up and down as the pulse moves from left to right.

m abbiamo la densità ρ, vediamo che

$$\text{ave} = \text{med}$$

è l'energia ad unità di volume, o densità di energia nella sbarra, dovuta alle oscillazioni prodotte dal moto dell'onda. Sostituendo l'Eq. (18.42) nella Eq. (18.41), possiamo scrivere

Poichè v è la velocità di propagazione, abbiamo che $v\text{E}$ è il flusso di energia attraverso l'unità di area nell'unità di tempo. Moltiplicando questa quantità per l'area A, abbiamo il flusso di energia nell'unità di tempo attraverso una sezione retta della sbarra. Così concludiamo che possiamo interpretare l'Eq. (18.43) come indicante un flusso medio di energia lungo la sbarra come conseguenza del moto dell'onda.

Il flusso medio di energia ad unità di area e unità di tempo espresso in W m^{-2} è

Questa quantità è detta *intensità* dell'onda. Lo studente può verificare che risultati analoghi valgono per le onde di pressione in un gas e per le onde trasversali in una corda.

In conclusione, noi possiamo di nuovo dire che in tutti i moti di onde, energia e quantità di moto sono trasferiti da un punto ad un altro lungo l'onda.

ESEMPIO 18.11. Esprimere l'intensità delle onde in una colonna di gas (discussa nel Paragrafo 18.6) in funzione dell'ampiezza dell'onda di pressione.

Threshold of feeling = Soglia della sensazione dolorosa
Threshold of hearing = Soglia della sensazione sonora
Intensity = Intensità
Intensity level, decibels = Livello di intensità, decibel
Frequency = Frequenza
Pressure = Pressione

Fig. 18–23. Campo acustico medio dell'orecchio umano.

m we have the density ρ, we see that

$$\text{E} = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 \tag{18.42}$$

is the energy per unit volume, or the energy density in the rod due to the oscillations resulting from the wave motion. Substituting Eq. (18.42) into Eq. (18.41), we may write

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\text{ave}} = vA\text{E}. \tag{18.43}$$

Since v is the velocity of propagation, we have that $v\text{E}$ is the energy flow through the unit area per unit time. By multiplying this quantity by the area A, we have the energy flow per unit time through a cross section of the rod. Thus we conclude that we may interpret Eq. (18.43) as indicating an average energy flow along the rod as a result of the wave motion.

The average energy flow per unit area and unit time, expressed in W m^{-2}, is

$$I = \frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial t} = v\text{E}. \tag{18.44}$$

This quantity is called the *intensity* of the wave. The student may verify that similar results hold for pressure waves in a gas and for transverse waves in a string.

In conclusion we may again say that in all wave motions, energy and momentum are transferred from one place to another along the wave.

EXAMPLE 18.11. Express the intensity of the waves in a gas column (discussed in Section 18.6) in terms of the amplitude of the pressure wave.

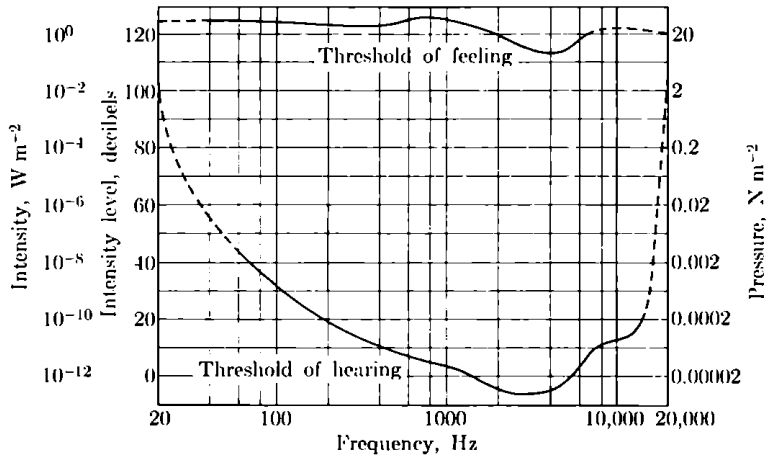


Fig. 18–23. Average auditory range for the human ear.

Soluzione: Dall'esempio 18.7 abbiamo che le ampiezze delle onde di pressione e di spostamento sono poste in relazione dalla $\mathcal{P}_0 = 2\pi v \rho_0 \nu \xi_0$. Quindi la densità di energia dell'onda è

e l'intensità dell'onda, secondo l'Eq. (18.44), è

La sensibilità dell'orecchio dell'uomo è tale che per ciascuna frequenza vi è un'intensità minima, o *soglia di sensazione sonora* al disotto della quale il suono non è udibile, ed una intensità massima o *soglia della sensazione dolorosa* al disopra della quale il suono produce disagio o dolore. Questo è illustrato per ciascuna frequenza dalle due curve di Fig. 18–23 che indica inoltre le intensità e le ampiezze di pressione. Si noti come l'intensità è espressa anche per mezzo di un'altra unità detta il *decibel.* Il *livello di intensità* del suono (o di qualsiasi moto d'onda), è indicato da B, ed è espresso in decibel, abbreviato db, secondo la definizione

essendo I_0 una intensità di riferimento. In caso di suono in aria il livello di riferimento è stato scelto arbitrariamente come 10^{-12} W m^{-2}. Per esempio, all'ampiezza di pressione data nell'Esempio 18.7 per il più debole suono che può venire udito a 400 Hz, corrisponde una intensità di 7.2×10^{-12} W m^{-2}, ed un livello di intensità di 8.57 db.

18.10 *Onde a due e a tre dimensioni*

Per quanto $\xi = f(x - vt)$ rappresenti un'onda che si propaga lungo l'asse X, non dobbiamo necessariamente interpretarla come avente il significato di un'onda concentrata *sull'*asse X. Se la perturbazione fisica descritta da ξ è estesa in tutto lo spazio, abbiamo che in un dato istante t, la funzione $\xi = f(x - vt)$ assume lo stesso valore per tutti i punti che hanno lo stesso x. Ma x = cost. rappresenta un piano perpendicolare

Direction of propagation = Direzione di propagazione

Fig. 18–24. Onde piane propagantesi lungo l'asse X.

Direction of propagation = direzione di propagazione

Fig. 18–25. Onde piane propagantesi in una direzione arbitraria.

Solution: From Example 18.7, we have that the amplitudes of the pressure and displacement waves are related by $\mathcal{P}_0 = 2\pi v \rho_0 \nu \xi_0$. Therefore the energy density of the wave is

$$\mathrm{E} = \tfrac{1}{2}\rho_0 \omega^2 \xi_0^2 = 2\pi^2 \rho_0 \nu^2 \xi_0^2 = \mathcal{P}_0^2 / 2v^2 \rho_0$$

and the intensity of the wave, according to Eq. (18.44), is

$$I = \frac{\mathcal{P}_0^2}{2v\rho_0}.$$

The sensitivity of man's ear is such that for each frequency there is a minimum intensity or *threshold of hearing,* below which the sound is not audible, and a maximum intensity or *threshold of feeling,* above which the sound produces discomfort or pain. This is illustrated for each frequency by the two curves of Fig. 18–23, which also indicates the intensity and pressure amplitudes. Note that intensity is also expressed by means of another unit called the *decibel.* The *intensity level* of sound (or of any wave motion), is indicated by B, and is expressed in decibels, abbreviated db, according to the definition

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

where I_0 is a reference intensity. For the case of sound in air the reference level has been arbitrarily chosen as 10^{-12} W m^{-2}. For example, to the pressure amplitude given in Example 18.7 for the faintest sound that can be heard at 400 Hz, there corresponds an intensity of 7.2×10^{-12} W m^{-2} and an intensity level of 8.57 db.

18.10 Waves in Two and Three Dimensions

Although $\xi = f(x - vt)$ represents a wave motion propagating along the X-axis, we do not necessarily have to interpret it as meaning a wave concentrated *on* the X-axis. If the physical disturbance described by ξ is extended over all space, we have that at a given time t, the function $\xi = f(x - vt)$ takes the same value at all points having the same x. But x = const represents a plane perpendicular to

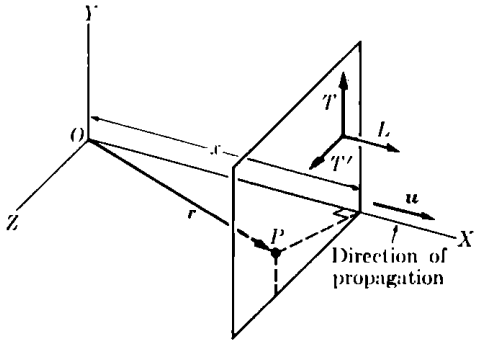


Fig. 18–24. Plane wave propagating along the X-axis.

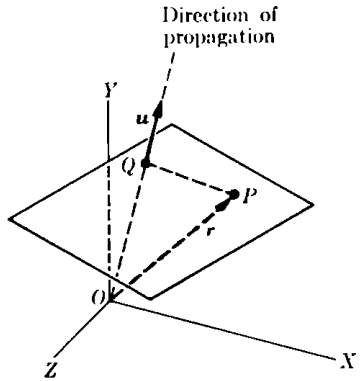


Fig. 18–25. Plane wave propagating in an arbitrary direction.

all'asse X (Fig. 18–24). Perciò in tre dimensioni $\xi = f(x - vt)$ descrive un'*onda piana* che si propaga parallelamente all'asse X. Se ξ è uno spostamento (o un campo vettoriale), abbiamo un'onda longitudinale quando ξ è parallelo alla direzione di propagazione o asse X, come indicato dalla freccia L, ed abbiamo un'onda trasversale quando ξ è perpendicolare alla direzione di propagazione (cioè parallelo al piano YZ). In questo ultimo caso ξ può essere anche espresso come somma di due spostamenti diretti secondo direzioni tra loro perpendicolari, come indicato dalle frecce T e T'.

Dobbiamo notare che ciò che conta in un'onda piana è la direzione di propagazione, indicata da un versore $\boldsymbol{u}$ perpendicolare al piano dell'onda, e che l'orientazione degli assi coordinati è più o meno arbitraria. È conveniente quindi esprimere l'onda piana $\xi = f(x - vt)$ in una forma indipendente dall'orientazione degli assi. Nel caso della Fig. 18–24, il versore $\boldsymbol{u}$ è parallelo all'asse X. Se $\boldsymbol{r}$ è il vettore che individua la posizione di un *generico* punto P nel fronte d'onda, abbiamo che $x = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}$, e quindi possiamo scrivere

Se $\boldsymbol{u}$ è diretto in una direzione arbitraria (Fig. 18–25), la quantità $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}$ è ancora una distanza misurata dall'origine O lungo la direzione di propagazione. Quindi l'Eq. 18.45 rappresenta un'onda piana che si propaga nella direzione $\boldsymbol{u}$. Nel caso di un'onda piana sinusoidale o armonica che si propaga nella direzione $\boldsymbol{u}$, noi scriviamo

È conveniente definire un vettore $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{u}$. Questo vettore ha valore assoluto $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$, ed è diretto nella direzione di propagazione. È usualmente detto *vettore d'onda*. Quindi, poichè $\omega = kv$, un'onda armonica piana è espressa dalla

essendo k_x, k_y, k_z le componenti di k che soddisfano la

Quando la propagazione avviene in un campo tridimensionale, l'equazione d'onda (18.11) deve essere opportunamente modificata. Essa diviene

un risultato prevedibile in base a sole condizioni di simmetria. Si può verificare per sostituzione diretta che l'espressione (18.46) per un'onda piana armonica soddisfa l'equazione generale dell'onda (18.48). Questa verifica è lasciata allo studente. [*Suggerimento:* È necessario usare l'Eq. (18.47).]

Le onde piane (18.45) o (18.46), per quanto esse contengano le tre coordinate x, y, z, sono in realtà problemi unidimensionali, poichè la propagazione avviene lungo una particolare direzione e la situazione fisica è la stessa in tutti i piani

the X-axis (Fig. 18-24). Therefore in three dimensions $\xi = f(x - vt)$ describes a *plane wave* propagating parallel to the X-axis. If ξ is a displacement (or a vector field), we have a longitudinal wave when ξ is parallel to the direction of propagation or X-axis, as indicated by the arrow L, and we have a transverse wave when ξ is perpendicular to the direction of propagation (i.e., parallel to the YZ-plane). In this last case ξ can also be expressed as the superposition of two displacements along mutually perpendicular directions, as indicated by arrows T and T'.

We must note that what is relevant in a plane wave is the direction of propagation, indicated by a unit vector $\boldsymbol{u}$ perpendicular to the plane of the wave, and that the orientation of the coordinate axes is a more or less arbitrary matter. It is therefore convenient to express the plane wave $\xi = f(x - vt)$ in a form which is independent of the orientation of the axes. In the case of Fig. 18-24, the unit vector $\boldsymbol{u}$ is parallel to the X-axis. If $\boldsymbol{r}$ is the position vector of *any* point P in the wave front, we have that $x = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}$, and therefore we may write

$$\xi = f(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r} - vt). \tag{18.45}$$

If $\boldsymbol{u}$ is pointing in an arbitrary direction (Fig. 18-25), the quantity $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}$ is still a distance measured from an origin O along the direction of propagation. Therefore Eq. (18.45) represents a plane wave propagating in the direction $\boldsymbol{u}$. In the case of a harmonic or sinusoidal plane wave propagating in the direction $\boldsymbol{u}$, we write

$$\xi = \xi_0 \sin k(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r} - vt).$$

It is convenient to define a vector $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{u}$. This vector has a length $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$, and points in the direction of propagation. It is usually called the *propagation vector*. Then, since $\omega = kv$, a plane harmonic wave is expressed as

$$\xi = \xi_0 \sin (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) = \xi_0 \sin (k_x x + k_y y + k_z z - \omega t), \tag{18.46}$$

where k_x, k_y, and k_z are the components of k satisfying

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2/v^2. \tag{18.47}$$

When the propagation is in three-dimensional space, the wave equation (18.11) must be modified accordingly. It then becomes

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right), \tag{18.48}$$

a result that was to be expected from symmetry conditions alone. It may be verified by direct substitution that expression (18.46) for a harmonic plane wave satisfies the general wave equation (18.48). This check is left to the student. [*Hint:* It is necessary to use Eq. (18.47).]

The plane waves (18.45) or (18.46), although they contain the three coordinates x, y, z, are really one-dimensional problems, since the propagation is along one particular direction and the physical situation is the same in all planes perpen-

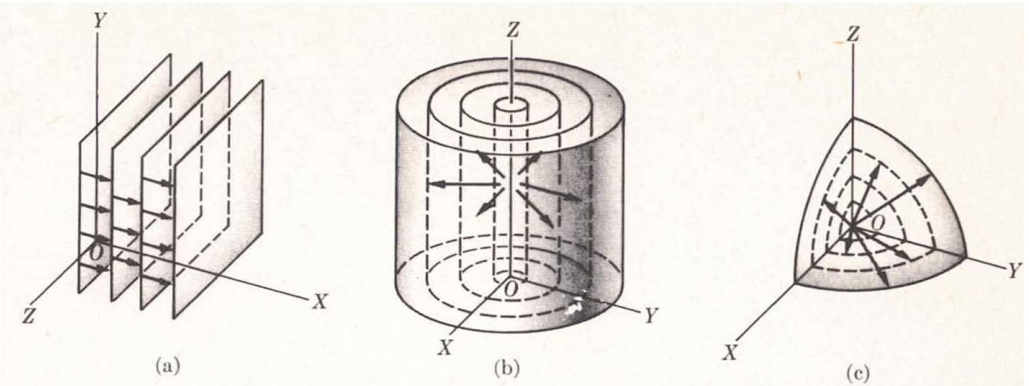


Fig. 18–26. Onde (a) piane, (b) cilindriche, e (c) sferiche.

Fig. 18–26. (a) Plane, (b) cylindrical, and (c) spherical waves.

perpendicolari ad una direzione di propagazione (Fig. 18—26a). In natura esistono altri tipi di onde che si propagano in più direzioni. I due casi più interessanti sono quelli delle onde *cilindriche* e delle onde *sferiche*. Si può provare che anche queste onde più generali sono ancora soluzioni dell'equazione d'onda tridimensionale (18.48). Nel caso di onde cilindriche, i fronti d'onda sono superficie parallele ad una data retta, per esempio l'asse Z e quindi perpendicolari al piano XY (Fig. 18—26b). La perturbazione si propaga in tutte le direzioni perpendicolarmente all'asse Z. Questo tipo di onda è prodotto, ad esempio, se abbiamo una serie di sorgenti uniformemente distribuite lungo l'asse Z, tutte oscillanti in fase.

Se la perturbazione che si origina in un certo punto si propaga con la medesima velocità in tutte le direzioni (cioè il mezzo è *isotropo; isos:* uguale, *tropos:* direzione), ne risultano onde sferiche. I fronti d'onda sono sfere concentriche con il punto in cui la perturbazione è stata originata (Fig. 18—26c). Tali onde sono prodotte, ad esempio, quando si verifica un improvviso cambiamento di pressione in un punto in un gas.

Qualche volta la velocità di propagazione non è la stessa in tutte le direzioni, in tale caso il mezzo è detto *anisotropo*. Per esempio, un gas nel quale vi sia un gradiente di temperatura, un solido sotto certe tensioni, o un grosso cristallo possono avere

dicular to the direction of propagation (Fig. 18–26a). But in nature there are other kinds of waves that propagate in several directions. The two most interesting cases are *cylindrical* and *spherical* waves. It can be proved that these more general waves are also solutions of the three-dimensional wave equation (18.48). In the case of cylindrical waves, the wave fronts are surfaces parallel to a given line, say the Z-axis, and thus perpendicular to the XY-plane (Fig. 18–26b). The disturbance propagates in all directions perpendicular to the Z-axis. This type of wave is produced, for example, if we have a series of sources uniformly distributed along the Z-axis, all oscillating in phase.

If a disturbance that originates at a certain point propagates with the same velocity in all directions (i.e., the medium is *isotropic; isos:* the same, *tropos:* direction), spherical waves result. The wave fronts are spheres concentric with the point where the disturbance originated (Fig. 18–26c). Such waves are produced, for example, when there is a sudden change of pressure at a point in a gas.

Sometimes the velocity of propagation is not the same in all directions, in which case the medium is called *anisotropic*. For example, a gas in which there is a temperature gradient, a solid under certain strains, or a large crystal may have

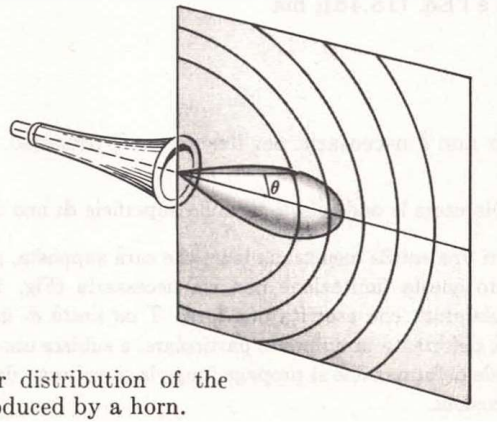
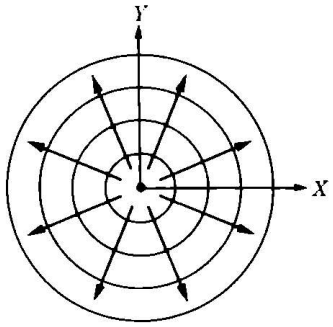
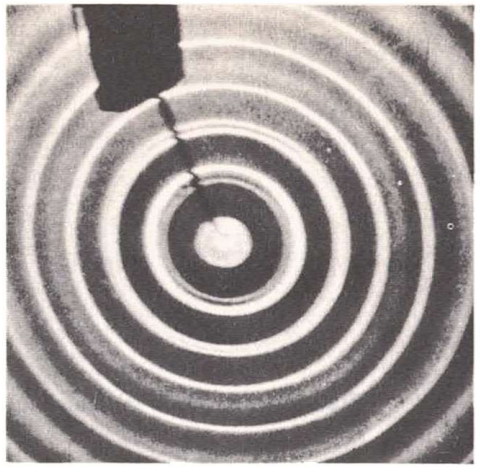


Fig. 18–27. Distribuzione angolare dell'intensità del suono prodotto da una tromba.

Fig. 18–27. Angular distribution of the intensity of sound produced by a horn.



(a)



(b)

Fig. 18–28. Onde circolari alla superficie di un liquido.

Fig. 18–28. Circular waves on a liquid surface.

differenti proprietà elastiche nelle differenti direzioni, dando origine a diverse velocità di propagazione per ciascuna direzione. In questi mezzi le onde non sono sferiche.

Anche se un'onda è sferica, essa può non avere la stessa ampiezza o intensità in tutte le direzioni perchè la sorgente della perturbazione può produrre differenti effetti nelle diverse direzioni. Per esempio un uomo che suona una tromba, produce al suo estremo aperto un'onda di pressione. Tuttavia, a causa della forma della tromba al suo estremo, un ascoltatore non sente il suono con la stessa intensità in tutte le direzioni, per quanto esso si propaghi con la stessa velocità in tutte le direzioni (Fig. 18—27).

In alcuni casi, un'onda si propaga sopra una superficie come una membrana o la superficie libera di un liquido. Se in un dato punto della superficie è prodotta una perturbazione, tale perturbazione si propaga in tutte le direzioni lungo la superficie con la stessa velocità, dando origine ad una serie di onde *circolari* (Fig. 18—28). Questa è un'onda a due dimensioni che richiede per essere descritta solo due coordinate spaziali. L'equazione per questa onda non è l'Eq. (18.48), ma

different elastic properties in different directions, resulting in a different velocity of propagation for each direction. In these media, the waves are not spherical.

Even if a wave is spherical, it may not have the same amplitude or intensity in all directions because the source of the disturbance may produce different effects in different directions. For example, a man who blows a horn produces a pressure wave at its open end. However, because of the shape of the tube at the end, a listener does not hear the sound with the same intensity in all directions, although it propagates with the same velocity in all directions (Fig. 18–27).

In some instances a wave propagates over a surface such as a membrane or the free surface of a liquid. If a disturbance is produced at a certain point of the surface, the disturbance propagates in all directions along the surface with the same velocity, resulting in a series of *circular* waves (Fig. 18–28). This is a two-dimensional wave that requires only two space coordinates to describe it. The equation for this wave is not Eq. (18.48), but

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right), \tag{18.49}$$

poichè la coordinata z non è necessaria per descrivere il processo.

since the z-coordinate is not required to describe the process.

ESEMPIO 18.12. Discutere le onde elastiche sulla superficie di una membrana tesa.

Soluzione: Si consideri una sottile membrana tesa, che sarà supposta, per semplicità di forma, rettangolare, per quanto questa limitazione non sia necessaria (Fig. 18—29). La membrana è montata su una intelaiatura che esercita una forza $\mathcal{T}$ *ad unità di lunghezza* espressa in N m^{-1}. Se la membrana è deformata in un punto particolare, e subisce uno spostamento nella direzione perpendicolare, tale deformazione si propaga lungo la membrana dando origine ad un'onda superficiale a due dimensioni.

EXAMPLE 18.12. Discuss elastic waves on the surface of a stretched membrane.

Solution: Let us consider a thin stretched membrane which, for simplicity, we assume is of rectangular shape, although this limitation is not required (Fig. 18–29). The membrane is mounted on a frame exerting a force $\mathcal{T}$ *per unit length*, expressed in N m^{-1}. If the membrane is deformed at a particular point, and suffers a displacement in the perpendicular direction, this deformation propagates along the membrane, resulting in a two-dimensional surface wave.

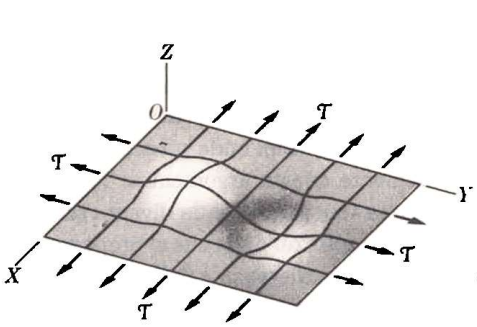


Fig. 18–29. Onde di superficie su di una membrana tesa.

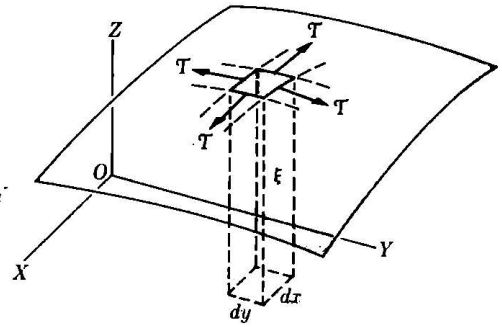


Fig. 18–30. Forze applicate ad un elemento di una membrana tesa.

Per ottenere l'equazione di questo moto d'onda, consideriamo un piccolo elemento rettangolare della membrana avente lati dx e dy (Fig. 18–30). In un istante particolare esso subisce uno spostamento ξ verso l'alto. Poichè la superficie è curva, lo spostamento ξ è funzione delle coordinate x e y, e le forze sui lati di questo elemento non sono direttamente opposte. Per ottenere la forza verticale risultante sull'elemento, facciamo gli stessi ragionamenti che abbiamo fatto nel Paragrafo 18.7 quando abbiamo discusso le onde trasversali in una corda. Secondo questi ragionamenti, considerando i lati paralleli all'asse Y, possiamo dire che essi sono soggetti alle forze $\mathcal{T}\,dy$, e che la loro forza verticale risultante vale

Fig. 18–29. Surface wave on a stretched membrane.

Fig. 18–30. Forces on a surface element of a stretched membrane.

To obtain the equation of this wave motion, we consider a small rectangular section of the membrane with sides dx and dy (Fig. 18-30). At a particular instant it suffers an upward displacement ξ. Because the surface is curved, the displacement ξ is a function of coordinates x and y, and the forces on the sides of the section are not directly opposite. To obtain the resultant vertical force on the section, we use the same logic we applied in Section 18.7 when we were discussing transverse waves in a string. By this reasoning, considering the sides parallel to the Y-axis, we say that they are subject to forces $\mathcal{T}\,dy$, and that their resultant vertical force is

$$(\mathcal{T}\,dy)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,dx = \mathcal{T}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\,dx\,dy.$$

Analogamente, i lati paralleli all'asse X sono soggetti alle forze $\mathcal{T}\,dx$, con una risultante verticale

Similarly, the sides parallel to the X-axis are subject to forces $\mathcal{T}\,dx$, with a vertical resultant of

$$(\mathcal{T}\,dx)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\,dy = \mathcal{T}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\,dx\,dy.$$

Quindi la forza verticale totale è la somma di queste due, ossia

Therefore the total vertical force is the sum of these two, or

$$F_z = \mathcal{T}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)dx\,dy.$$

Se σ è la massa ad unità di *area* della membrana (o *densità superficiale*, espressa in kg m^{-2}), la massa dell'elemento è $\sigma\,dx\,dy$, ed essendo la sua accelerazione verticale $\partial^2\xi/\partial t^2$, possiamo scrivere l'equazione del moto di questo elemento della membrana come

If σ is the mass per unit *area* of the membrane (or *surface density*, expressed in kg m^{-2}), the mass of the section is $\sigma\,dx\,dy$, and since its vertical acceleration is $\partial^2\xi/\partial t^2$, we may write the equation of motion of this section of the membrane as

$$(\sigma\,dx\,dy)\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \mathcal{T}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right)dx\,dy$$

ossia

or

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{T}}{\sigma}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}\right).$$

Poichè questa equazione è analoga alla Eq. (18.49), possiamo concludere che la perturbazione si propaga lungo la membrana come un'onda con velocità $v = \sqrt{\mathcal{T}/\sigma}$. Lo studente dovrebbe verificare che questa espressione per v è corretta dimensionalmente.

Since this equation is similar to Eq. (18.49), we may conclude that the disturbance propagates along the membrane as a wave with a velocity $v = \sqrt{\mathcal{T}/\sigma}$. The student should verify that the expression for v is dimensionally correct.

18.11 Onde sferiche in un fluido

Come esempio di onde sferiche, si consideri un'onda di pressione in un fluido isotropo omogeneo. A prima vista si potrebbe essere tentati di dire che se r è la distanza dall'origine e p_0 la pressione normale, l'onda di pressione può essere scritta nella forma $p - p_0 = f(r - vt)$, poichè ora r gioca lo stesso ruolo di x in un'onda piana. Tuttavia, ciò non è vero, e dobbiamo esaminare più accuratamente questo argomento.

Osserviamo che mentre un'onda sferica si propaga, la superficie d'onda diventa sempre più grande (aumentando come r^2). Si consideri, ad esempio, un'onda che si propaga nell'angolo solido Ω (Fig. 18–31). La superficie d'onda a una distanza r dalla sorgente ha area A; le superficie d'onda alle distanze $2r$, $3r$, . . ., nr, sono $4A$, $9A$, . . ., n^2A. Ciò fa pensare che l'ampiezza dell'onda di pressione debba diminuire, all'aumentare della distanza dalla sorgente, poichè essa agisce su di un'area più grande, risultato questo confermato sperimentalmente e previsto da una analisi teorica più dettagliata che sarà omessa. Per esempio, se il fluido è isotropo e l'onda ha la stessa ampiezza in tutte le direzioni, può essere provato che l'onda di pressione è data dall'espressione

Abbiamo ora un fattore geometrico $1/r$ che non era presente in un'onda piana, che tiene conto della diminuzione della pressione con la distanza dalla sorgente. Quando l'ampiezza (o l'intensità) è diversa in ogni direzione, può ottenersi un'espressione più complicata. L'Eq. (18.50) rappresenta un'onda sferica *uscente*. Possiamo anche avere un'onda sferica *entrante*, che può essere espressa da

La velocità di propagazione è data dalla stessa espressione ottenuta per le onde piane, Eq. (18.27). Cioè,

Un caso particolarmente interessante è quello di un'onda di pressione sferica ed armonica espressa da

Source = Sorgente

Figura 18–31

L'ampiezza dell'onda di pressione è $\mathcal{P}_0/r$, e decresce con la distanza dalla sorgente. Lo spostamento che corrisponde a questa onda di pressione è dato da una espressione più complicata. Ma a grandi distanze dalla sorgente, questo spostamento può essere espresso con ottima approssimazione dalla

18.11 Spherical Waves in a Fluid

As an example of spherical waves, let us consider a pressure wave in a homogeneous, isotropic fluid. At first one may be tempted to say that if r is the distance from the origin and p_0 the normal pressure, the pressure wave can be written in the form $p - p_0 = f(r - vt)$, since r now plays the role of x in a plane wave. However, this is not so, and we must look into this matter more carefully.

We observe that while a spherical wave propagates, the wave surface becomes larger and larger (increasing as r^2). Consider, for example, a wave propagating within the solid angle Ω (Fig. 18–31). The wave surface at a distance r from the source has an area A; the wave surfaces at $2r$, $3r$, . . . , nr, are $4A$, $9A$, . . . , n^2A. This suggests that the amplitude of the pressure wave must drop as the distance from the source increases, since it acts over a larger area, a result confirmed experimentally and predicted by a more detailed theoretical analysis, which will be omitted. For example, if the fluid is isotropic and the wave has the same amplitude in all directions, it can be proved that the pressure wave is given by the expression

$$p - p_0 = \frac{1}{r} f(r - vt). \tag{18.50}$$

We now have a geometrical factor $1/r$ that was not present in a plane wave, which accounts for a decrease in pressure with the distance from the source. When the amplitude (or intensity) is different in each direction, a more complicated expression may result. Equation (18.50) represents an *outgoing* spherical wave. We may also have an *incoming* spherical wave, which may be expressed by

$$p - p_0 = \frac{1}{r} f(r + vt).$$

The velocity of propagation is given by the same expression obtained for plane waves, Eq. (18.27). That is,

$$v = \sqrt{\kappa/\rho_0}. \tag{18.51}$$

A particularly interesting case is that of a spherical harmonic pressure wave expressed by

$$p = p_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{r} \sin(kr - \omega t). \tag{18.52}$$

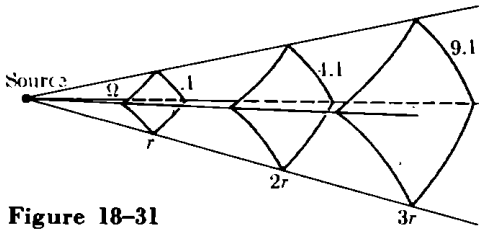


Figure 18–31

The amplitude of the pressure wave is $\mathcal{P}_0/r$, and it decreases with the distance from the source. The displacement corresponding to this pressure wave is given by a more complicated expression. But at large distances from the source, this displacement may be expressed to a very good approximation by

$$\xi = \frac{\xi_0}{r} \cos(kr - \omega t), \tag{18.53}$$

dove $\xi_0 = \mathcal{P}_0/v\rho_0\omega$, relazione questa identica a quella per le onde piane (Esempio 18.7). Si noti che anche l'ampiezza dell'onda di spostamento decresce con la distanza dalla sorgente come $1/r$.

In seguito discuteremo l'intensità dell'onda sferica. Usiamo l'Eq. (18.53) e notiamo che l'ampiezza è ora ξ_0/r invece di ξ_0. L'energia ad unità di volume a grandi distanze è data, secondo l'Eq. (18.42), da

e decresce come $1/r^2$. Il flusso di energia ad unità di tempo attraverso una superficie sferica di raggio r, se usiamo l'Eq. (18.43) con $A = 4\pi r^2$, è

Si noti come il fattore r^2 sia sparito da questa espressione, che risulta avere un valore indipendente dal raggio. Questo è il risultato che ci attendevamo, poichè il principio di conservazione dell'energia richiede che, in media, la stessa quantità di energia attraversi nell'unità di tempo una superficie sferica, indipendentemente dal suo raggio. Ciò chiarisce il motivo dell'apparire del fattore $1/r$ nelle Equazioni (18.52) e (18.53).

Secondo l'Eq. (18.44), l'intensità dell'onda sferica, o l'energia media che attraversa l'unità di area nell'unità di tempo è

dove

risultato identico a quello dell'Esempio 18.11. Concludiamo dunque che

in un'onda sferica l'intensità decresce come l'inverso del quadrato della distanza dalla sorgente,

risultato di notevole applicazione sia in acustica che in ottica. Questo risultato è ancora in accordo con il principio di conservazione dell'energia poichè, se il flusso di energia attraverso ciascuna superficie sferica deve essere lo stesso, e se l'area della sfera varia come r^2, il flusso di energia attraverso l'unità di area nell'unità di tempo deve variare come $1/r^2$.

Le onde sferiche che abbiamo ora discusso si applicano solo al caso di un fluido perfetto, che non può sopportare una tensione tangenziale. Tuttavia, in un solido elastico, sono possibili due generi di onde: onde *irrotazionali* e onde *solenoidali*. Nel caso di onde piane esse corrispondono essenzialmente alle onde longitudinali ed a quelle trasversali discusse nei Paragrafi 18.5 e 18.7. Le loro rispettive velocità di propagazione sono

where $\xi_0 = \mathcal{P}_0/v\rho_0\omega$, a relation identical to that for plane waves (Example 18.7). Note that the amplitude of the displacement wave also decreases with the distance from the source as $1/r$.

Next we shall discuss the intensity of the spherical wave. We use Eq. (18.53) and note that the amplitude is now ξ_0/r instead of ξ_0. The energy per unit volume at large distances is given, according to Eq. (18.42), by

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\frac{\rho_0\omega^2\xi_0^2}{r^2} = \frac{\mathcal{P}_0}{2v^2\rho_0 r^2},$$

and decreases as $1/r^2$. The energy flowing per unit time through a spherical surface of radius r, if we use Eq. (18.43) with $A = 4\pi r^2$, is

$$\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{\mathrm{ave}} = v(4\pi r^2)\left(\frac{1}{2}\frac{\rho_0\omega^2\xi_0^2}{r^2}\right) = 2\pi v\rho_0\omega^2\xi_0^2 = \frac{2\pi\mathcal{P}_0^2}{\rho_0 v}. \qquad (18.54)$$

Note that the factor r^2 has canceled from the above expression, resulting in a value independent of the radius. This is the result we would have expected, since the conservation of energy requires that, on the average, the same amount of energy flows per unit time through a spherical surface, irrespective of its radius. This explains the appearance of the factor $1/r$ in Eqs. (18.52) and (18.53).

According to Eq. (18.44), the intensity of the spherical wave, or the average energy crossing the unit area per unit time, is

$$I = v\mathrm{E} = \frac{\mathcal{P}_0}{2v\rho_0 r^2} = \frac{I_0}{r^2}, \qquad (18.55)$$

where

$$I_0 = \mathcal{P}_0^2/2\rho v, \qquad (18.56)$$

a result identical to that of Example 18.11. We conclude then that

in a spherical wave the intensity decreases as the inverse of the square of the distance from the source,

a result of great application both in acoustics and optics. This result is again consistent with the conservation of energy since, if the energy flowing through each spherical surface has to be the same, and if the area of the sphere changes as r^2, the energy flowing through the unit area in unit time must change as $1/r^2$.

The spherical waves we have just discussed apply only to the case of a perfect fluid, which cannot sustain a shear stress. However, in an elastic solid, two kinds of waves are possible: *irrotational* and *solenoidal* waves. In the case of plane waves they correspond essentially to the longitudinal and transverse waves discussed in Sections 18.5 and 18.7. Their respective velocities of propagation are

$$v_l = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}G}{\rho}}, \qquad v_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Si noti che se $G = 0$, abbiamo solo onde longitudinali con una velocità eguale al nostro risultato (18.51). D'altra parte, nessun mezzo stabile può avere $v_l = 0$ e sopportare solo onde trasversali, poichè ciò richiederebbe $\kappa = -\frac{4}{3}G$ = numero negativo. Un tale valore di κ significherebbe che ad un aumento della pressione corrisponderebbe un aumento del volume, situazione che è contraria sia all'esperienza che all'intuizione.

18.12 Velocità di gruppo

La velocità $v = \omega/k$, data dalla Eq. (18.6) per un'onda armonica di pulsazione ω e lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$, è detta velocità di *fase*. Tuttavia, essa non è necessariamente la velocità che osserviamo quando analizziamo un moto di un'onda. Se abbiamo un'onda continua (o come si dice talvolta, un treno d'onda di lunghezza infinita), l'onda può avere una singola lunghezza d'onda ed una singola frequenza. Ma un'onda di questo tipo non è adatta a trasmettere un segnale, poichè un segnale implica un qualche cosa che comincia ad un certo istante e finisce ad un certo istante successivo; cioè l'onda deve avere una forma simile a quella indicata in Fig. 18—32. Un'onda con una tale forma è detta un *impulso*. Perciò, se misuriamo la velocità con cui il segnale è trasmesso, siamo interessati essenzialmente alla velocità con cui si propaga questo impulso.

Fig. 18—32. Impulso d'onda.

Inizialmente si potrebbe dire: bene, questa velocità è proprio la velocità di fase $v = \omega/k$ poichè abbiamo tenuto ad affermare in tutti i paragrafi precedenti che questa è la velocità di propagazione delle onde. Tuttavia, un importante fattore entra qui in gioco. L'onda o l'impulso descritto nella Fig. 18—32 *non* è armonico, poichè la sua ampiezza non è costante lungo l'asse X. Quindi dobbiamo compiere l'analisi di Fourier dell'onda. Quando la facciamo, ci accorgiamo che essa contiene in realtà parecchie frequenze e lunghezze d'onda. Naturalmente, se la velocità di propagazione è indipendente dalla frequenza (cioè, se non vi è dispersione) allora tutte le componenti di Fourier dell'onda viaggiano con la medesima velocità, ed è allora corretto dire che la velocità dell'impulso è la stessa della velocità di fase. Tuttavia, in un mezzo dispersivo ciascuna componente di Fourier ha la sua propria velocità di propagazione e quindi la situazione va esaminata più a fondo.

Considereremo per semplicità un caso in cui il moto d'onda può essere scomposto in due frequenze ω e ω', che sono quasi eguali, in modo che $\omega' - \omega$ sia molto piccolo. Supporremo inoltre che le loro ampiezze siano le stesse. Allora adoperando l'Eq. (M.7), otteniamo

Note that if $G = 0$ we have only longitudinal waves with a velocity equal to our result (18.51). On the other hand, no stable medium can have $v_l = 0$ and sustain only transverse waves, because that would require $\kappa = -\frac{4}{3}G$ = negative number. Such a value for κ would mean that an increase in pressure would result in an increase in volume, a situation which is contrary to both experience and intuition.

18.12 Group Velocity

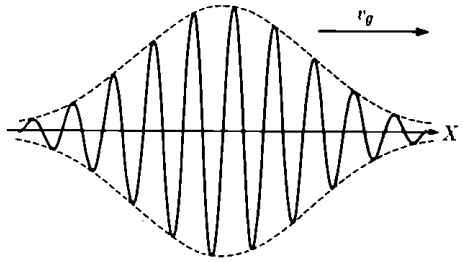


Fig. 18-32. Wave pulse.

The velocity $v = \omega/k$, as given by Eq. (18.6), for a harmonic wave of angular frequency ω and wavelength $\lambda = 2\pi/k$, is called the *phase* velocity. However, this is not necessarily the velocity we observe when we analyze a wave motion. If we have a continuous wave (or as it is sometimes said, a wave train of infinite length), the wave may have a single wavelength and a single frequency. But a wave of this nature is not adequate for transmitting a signal, because a signal implies something that begins at a certain time and ends at a certain later time; i.e., the wave must have a shape similar to that indicated in Fig. 18-32. A wave with such a shape is called a *pulse*. Therefore, if we measure the velocity with which the signal is transmitted, we are essentially implying the velocity with which this pulse travels.

We may at first say: Well, this velocity is just the phase velocity $v = \omega/k$, since we kept saying in all previous sections that this is the velocity of propagation of the waves. However, an important factor enters here. The wave or pulse depicted in Fig. 18-32 is *not* harmonic, since its amplitude is not constant along the X-axis. Thus we must make a Fourier analysis of the wave. When we do, we discover that it actually contains several frequencies and wavelengths. Of course, if the velocity of propagation is independent of the frequency (i.e., if there is no dispersion), then all Fourier components of the wave travel with the same speed, and we are correct in saying that the velocity of the pulse is the same as the phase velocity. However, in a dispersive medium each Fourier component has its own velocity of propagation, and therefore we must examine the situation more carefully.

For simplicity we shall consider a case in which the wave motion may be broken down into two frequencies, ω and ω', which are almost equal, so that $\omega' - \omega$ is very small. We shall also assume that their amplitudes are the same. Then, using Eq. (M.7), we have

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_0 \sin(kx - \omega t) + \xi_0 \sin(k'x - \omega' t)\\ &= \xi_0[\sin(kx - \omega t) + \sin(k'x - \omega' t)]\\ &= 2\xi_0 \cos \tfrac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin \tfrac{1}{2}[(k' + k)x - (\omega' + \omega)t].\end{aligned}$$

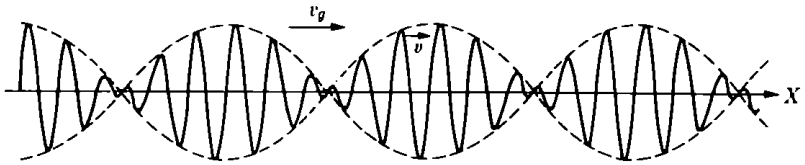


Fig. 18–33. Velocità di fase e di gruppo.

Fig. 18–33. Phase and group velocity.

Poichè ω e ω', così come k e k' sono quasi eguali, possiamo sostituire $\frac{1}{2}(\omega' + \omega)$ con ω e $\frac{1}{2}(k' + k)$ con k, in modo che

Since ω and ω' as well as k and k' are almost equal, we may replace $\frac{1}{2}(\omega' + \omega)$ by ω and $\frac{1}{2}(k' + k)$ by k, so that

$$\xi = 2\xi_0 \cos \tfrac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t] \sin (kx - \omega t). \tag{18.57}$$

L'Eq. (18.57) rappresenta un moto d'onda la cui ampiezza è modulata. La modulazione è data dal fattore

Equation (18.57) represents a wave motion whose amplitude is modulated. The modulation is given by the factor

$$2\xi_0 \cos \tfrac{1}{2}[(k' - k)x - (\omega' - \omega)t].$$

Ciò è stato indicato in Fig. 18–33. L'ampiezza di modulazione corrisponde essa stessa ad un moto d'onda che si propaga con una velocità

This has been indicated in Fig. 18–33. The modulating amplitude itself corresponds to a wave motion propagated with a velocity

$$v_g = \frac{\omega' - \omega}{k' - k} = \frac{d\omega}{dk}, \tag{18.58}$$

detta *velocità di gruppo*. Questa è la velocità con cui si propaga l'onda di ampiezza rappresentata dalla linea tratteggiata in Fig. 18–33. Se ricordiamo che $\omega = kv$, l'Eq. (18.58) diviene

which is called *group velocity*. This is the velocity with which the amplitude wave, represented by the dashed line in Fig. 18–33, propagates. If we remember that $\omega = kv$, Eq. (18.58) becomes

$$v_g = v + k\frac{dv}{dk}. \tag{18.59}$$

Se la velocità di fase è indipendente dalla lunghezza d'onda, $dv/dk = 0$, e $v_g = v$. Per questo, nei mezzi non dispersivi, non vi è alcuna differenza tra velocità di fase e velocità di gruppo, come avevamo ricavato precedentemente. Ma in un mezzo dispersivo la velocità di gruppo può essere più grande o più piccola della velocità di fase. Possiamo concludere allora che il massimo dell'impulso di Fig. 18–32 si propaga con la velocità di gruppo v_g. Perciò in un mezzo dispersivo la velocità di segnale è la velocità di gruppo. Per quanto l'Eq. (18.59) sia stata ricavata per il caso di due sole frequenze, essa vale anche per il caso di un impulso contenente frequenze comprese nell'intervallo da $\omega - \Delta\omega$ a $\omega + \Delta\omega$. Si deve affermare, tuttavia, che questo argomento è realmente molto più complesso di quanto non appaia dalla nostra presentazione ed una sua esauriente discussione esula dallo scopo di questo libro.

Come esempio, consideriamo il caso di onde di superficie in un liquido nella approssimazione delle grandi lunghezza d'onda. In questo caso la velocità di fase è data dalla Eq. (18.36), e poichè $k = 2\pi/\lambda$, $v = \sqrt{g\lambda/2\pi} = \sqrt{g/k}$. Allora

If the phase velocity is independent of the wavelength, $dv/dk = 0$ and $v_g = v$. Therefore in nondispersive media there is no difference between phase velocity and group velocity, as we had previously inferred. But in a dispersive medium the group velocity may be larger or smaller than the phase velocity. We may conclude then that the maximum of the pulse in Fig. 18–32 propagates with the group velocity v_g. Therefore in a dispersive medium the signal velocity is the group velocity. Although we have derived Eq. (18.59) for the case of only two frequencies, it also holds true for the case of a pulse containing frequencies in the range from $\omega - \Delta\omega$ to $\omega + \Delta\omega$. We must state, however, that this matter is really more complex than our presentation has shown, and a thorough discussion of it is beyond the scope of this book.

As an illustration, let us consider the case of surface waves in a liquid in the long wave approximation. In this case the phase velocity is given by Eq. (18.36), and since $k = 2\pi/\lambda$, $v = \sqrt{g\lambda/2\pi} = \sqrt{g/k}$. Then

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{g}{k}} = -\frac{v}{2k},$$

e l'Eq. (18.59) dà $v_g = \frac{1}{2}v$, in modo che la velocità di gruppo è proprio la metà della velocità di fase. Questo significa che se una perturbazione avente grande lunghezza d'onda è prodotta in acqua, la perturbazione iniziale è distorta in modo tale che le componenti di maggior lunghezza d'onda "fuggono" dalla perturbazione spostandosi più velocemente della velocità di gruppo, che è la velocità del picco della perturbazione.

18.13 *Effetto Doppler*

Quando la sorgente di un'onda e l'osservatore sono in moto relativo rispetto al mezzo materiale in cui si propagano le onde, la frequenza delle onde osservate è diversa da quella della sorgente. Questo fenomeno è detto *effetto Doppler*, dal fisico austriaco, tedesco di nascita, C. J. Doppler (1803–1853), che per primo lo osservò nelle onde sonore.

and Eq. (18.59) gives $v_g = \frac{1}{2}v$, so that the group velocity is just half the phase velocity. This means that if a long wave disturbance is produced in water, the initial disturbance is distorted in such a way that the components of longer wavelength "escape" from the disturbance by moving faster than the group velocity, which is the velocity of the peak of the disturbance.

18.13 *The Doppler Effect*

When the source of a wave and the observer are in relative motion with respect to the material medium in which the waves propagate, the frequency of the waves observed is different from the frequency of the source. This phenomenon is called the *Doppler effect*, after the German-born Austrian physicist C. J. Doppler (1803–1853), who first noticed it in sound waves.

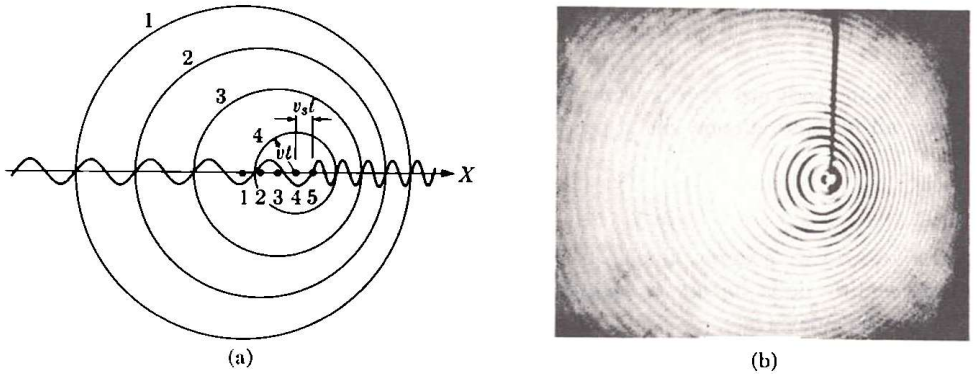


Fig. 18–34. Effetto Doppler dovuto ad una sorgente in movimento. La fotografia illustra l'effetto Doppler sulla superficie di un liquido.

Fig. 18–34. Doppler effect due to a moving source. The photograph illustrates the Doppler effect on a liquid surface.

Si supponga di avere una sorgente di onde, come un corpo vibrante, che si muove verso destra (Fig. 18–34) con velocità v_s attraverso un mezzo in quiete come aria o acqua. Osservandolo in parecchie posizioni 1, 2, 3, 4, . . ., notiamo che dopo il tempo t contato a partire dall'istante in cui la sorgente era nella posizione 1, le onde emesse nelle varie posizioni occupano le sfere 1, 2, 3, 4, . . . che non sono concentriche. Le onde sono più vicine le une alle altre dalla parte verso la quale si muove il corpo e sono molto più spaziate dalla parte opposta. Per un osservatore fermo da una delle due parti, questo corrisponde, rispettivamente, a lunghezze d'onda effettive più corte o più lunghe o a frequenze effettive più grandi o più piccole. Ma se l'osservatore è in moto con velocità v_O, le onde lo raggiungono con diversa velocità. Per esempio, se egli si avvicina alla sorgente da destra, egli osserverà una lunghezza d'onda ancora più corta o una frequenza più alta, poichè egli si sta muovendo verso le onde. L'opposto accade se egli si sta allontanando dalla sorgente e perciò si muove allontanandosi dalle onde.

Per ottenere la relazione tra la frequenza ν delle onde prodotte dalla sorgente e la frequenza ν' rivelata dall'osservatore, facciamo il seguente ragionamento. Assumeremo, per semplicità, che la sorgente e l'osservatore si muovano

Suppose we have a source of waves, such as a vibrating body, moving to the right (Fig. 18-34) with velocity v_s through a still medium such as air or water. Observing it at several positions 1, 2, 3, 4, . . . , we note that after a time t counted from the time when the source was at position 1, the waves emitted at the several positions occupy the spheres 1, 2, 3, 4, . . . which are not concentric. The waves are more closely spaced on the side in which the body is moving and are more widely separated on the opposite side. To an observer at rest on either side, this corresponds, respectively, to a shorter and a longer effective wavelength or a larger and a smaller effective frequency. But if the observer is in motion with velocity v_O, the waves will reach him at a different rate. For example, if he is approaching the source from the right he will observe an even shorter wavelength or higher frequency, since he is moving into the waves. The opposite happens if he is receding from the source, and therefore moving away from the waves.

To obtain the relation between the frequency ν of the waves produced by the source and the frequency ν' recorded by the observer, we use the following reasoning. For simplicity we shall assume that the source and the observer are moving

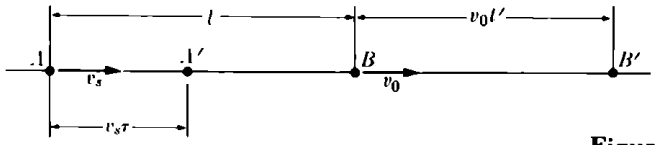


Figure 18–35

lungo la stessa retta. Si supponga che all'istante $t = 0$, quando la distanza AB (Fig. 18–35) tra la sorgente e l'osservatore è l, la sorgente emetta un'onda che raggiunge l'osservatore in un istante successivo t. In questo intervallo di tempo l'osservatore ha percorso la distanza v_0t e la distanza totale percorsa dall'onda nel tempo t è stata $l + v_0t$. Se v è la velocità di propagazione dell'onda, questa distanza vale anche vt. Quindi

ossia

Nell'istante $t = \tau$, la sorgente è in A', e l'onda emessa in quell'istante raggiungerà l'osservatore all'istante t', misurato dalla medesima origine del tempo di prima. La distanza totale percorsa dall'onda dall'istante in cui è emessa in A', fino a quando è ricevuta dall'osservatore è $(l - v_s\tau) + v_0t'$. L'effettivo tempo di viaggio dell'onda è stato $t' - t$, e la distanza percorsa è $v(t' - \tau)$. Perciò

ossia

L'intervallo di tempo misurato dall'osservatore tra le due onde emesse dalla sorgente in A e A' è

Ora se ν è la frequenza della sorgente, il numero di onde emesse da essa nel tempo τ è $\nu\tau$. Poichè le onde sono ricevute dall'osservatore nel tempo τ', la frequenza che egli osserva è $\nu' = \nu\tau/\tau'$, ossia

Questa equazione dà la relazione tra la frequenza ν della sorgente e la frequenza ν' rilevata dall'osservatore quando entrambi si muovono lungo la direzione di propagazione.

Quando sia v_0 che v_s sono molto piccoli rispetto a v, l'espressione (18.60) può essere semplificata. Per prima cosa, la scriviamo come

Ma ricordando lo sviluppo binomiale, Eq. (M.28), possiamo scrivere $(1 - v_s/v)^{-1} \approx 1 + v_s/v$, e

along the same line. Suppose that at time $t = 0$, when the distance AB (Fig. 18–35) between the source and the observer is l, the source emits a wave that reaches the observer at a later time t. In that time the observer has moved the distance v_0t and the total distance traversed by the wave in the time t has been $l + v_0t$. If v is the velocity of propagation of the wave, this distance is also vt. Then

$$vt = l + v_0t \qquad \text{or} \qquad t = \frac{l}{v - v_0}.$$

At time $t = \tau$ the source is at A', and the wave emitted at that instant will reach the observer at a time t', measured from the same time origin as before. The total distance traveled by the wave from the time it is emitted at A' until it is received by the observer is $(l - v_s\tau) + v_0t'$. The actual travel time of the wave has been $t' - \tau$ and the distance traveled is $v(t' - \tau)$. Therefore

$$v(t' - \tau) = l - v_s\tau + v_0t' \qquad \text{or} \qquad t' = \frac{l + (v - v_s)\tau}{v - v_0}.$$

The time interval reckoned by the observer between the two waves emitted by the source at A and at A' is

$$\tau' = t' - t = \frac{v - v_s}{v - v_0}\tau.$$

Now if ν is the frequency of the source, the number of waves emitted by it in time τ is $\nu\tau$. Since the waves are received by the observer in the time τ', the frequency he observes is $\nu' = \nu\tau/\tau'$ or

$$\nu' = \nu\frac{v - v_0}{v - v_s}. \tag{18.60}$$

This equation gives the relation between the frequency ν of the source and the frequency ν' noticed by the observer when both are moving along the direction of propagation.

When both v_0 and v_s are very small compared with v, expression (18.60) can be simplified. First we write it as

$$\nu' = \frac{1 - v_0/v}{1 - v_s/v}\nu = \left(1 - \frac{v_0}{v}\right)\left(1 - \frac{v_s}{v}\right)^{-1}\nu.$$

But remembering the binomial expansion, Eq. (M.28), we may write $(1 - v_s/v)^{-1} \approx 1 + v_s/v$, and

$$\nu' = \left(1 - \frac{v_0}{v}\right)\left(1 + \frac{v_s}{v}\right)\nu = \left(1 - \frac{v_0}{v} + \frac{v_s}{v} - \frac{v_0v_s}{v^2}\right)\nu.$$

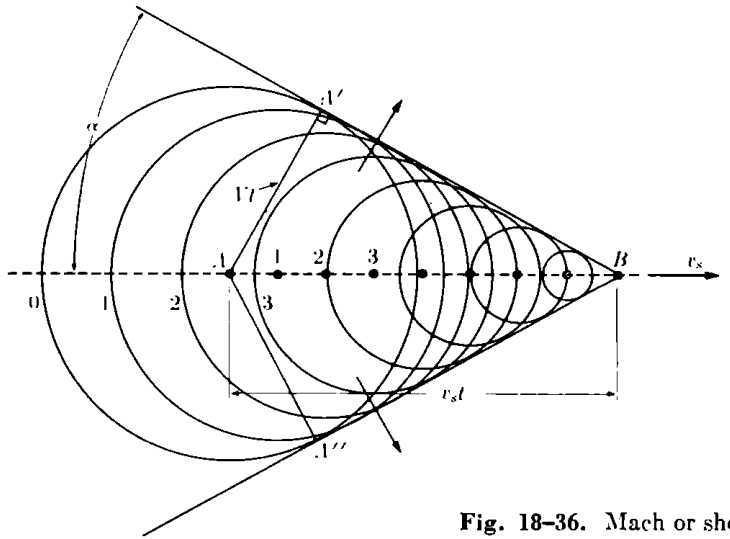


Fig. 18–36. Onda d'urto o di Mach.

Fig. 18–36. Mach or shock wave.

Moltiplicando entrambe le parentesi e d'accordo con la nostra approssimazione, conserviamo solo i termini del 1° ordine. Quindi, trascurando il termine $v_o v_s/v^2$, abbiamo che la frequenza misurata dall'osservatore è

$$\nu' = \left(1 - \frac{v_O - v_s}{v}\right)\nu = \left(1 - \frac{v_{Os}}{v}\right)\nu, \tag{18.61}$$

dove $v_{Os} = v_O - v_s$ è la velocità dell'osservatore rispetto alla sorgente. Ricordando che $\omega = 2\pi\nu$, possiamo anche scrivere la pulsazione rivelata dall'osservatore come

$$\omega' = \left(1 - \frac{v_{Os}}{v}\right)\omega. \tag{18.62}$$

Se v_{Os} è positivo, l'osservatore si allontana dalla sorgente e la frequenza che egli osserva è più piccola. Ma se v_{Os} è negativo, l'osservatore e la sorgente si avvicinano l'uno all'altra e la frequenza osservata è più grande.

Quando v_{Os} non è diretto lungo la direzione di propagazione ma fa un angolo con essa, dobbiamo sostituire l'Eq. (18.62) con

$$\omega' = \left(1 - \frac{v_{Os}\cos\theta}{v}\right)\omega, \tag{18.63}$$

come lo studente può facilmente verificare. Si noti come $v_{Os}\cos\theta$ sia la componente della velocità dell'osservatore relativa alla sorgente lungo la direzione di propagazione.

Si ha una situazione particolare quando l'osservatore è fermo, ma la sorgente si muove con una velocità più grande di v. Allora, in un dato tempo la sorgente avanza di più del fronte d'onda; per esempio, se nel tempo t la sorgente si muove da A a B (Fig. 18–36), l'onda emessa in A si è spostata solo da A a A'. La superficie tangente a tutte

When we multiply both parentheses we must be consistent with our approximation, and keep only the first-order terms. Then, neglecting the term $v_O v_s/v^2$, we have that the frequency measured by the observer is

where $v_{Os} = v_O - v_s$ is the velocity of the observer relative to the source. Remembering that $\omega = 2\pi\nu$, we may also write the angular frequency detected by the observer as

If v_{Os} is positive, the observer is receding from the source and the frequency he observes is smaller. But if v_{Os} is negative, the observer and the source are approaching each other and the frequency observed is larger.

When v_{Os} is not along the direction of propagation but makes an angle with it, we must replace Eq. (18.62) by

as the student may easily verify. Note that $v_{Os}\cos\theta$ is the component of the velocity of the observer relative to the source along the direction of propagation.

A special situation occurs when the observer is at rest but the source moves with a velocity larger than v. Then in a given time the source advances more than the wave front; for example, if in time t the source moves from A to B (Fig. 18–36), the wave emitted at A has traveled only from A to A'. The surface tangent to all

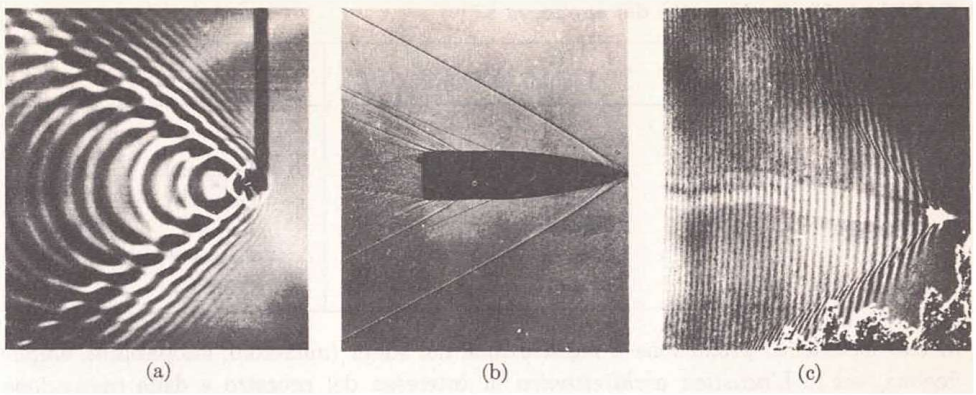


Fig. 18–37. Esempi diversi di onde (d'urto) di Mach prodotte da (a) punta vibrante, in movimento, che tocca una superficie d'acqua, (b) un proiettile in aria, e (c) un motoscafo.

Fig. 18–37. Different examples of Mach (shock) waves produced by (a) a moving, vibrating reed touching a water surface, (b) a bullet in air, and (c) a speeding boat.

le onde successive è un cono, il cui asse coincide con la direzione del moto della sorgente la cui apertura α è data dalla

successive waves is a cone, whose axis is the line of motion of the source and whose aperture α is given by

$$\sin \alpha = v/v_s. \tag{18.64}$$

Il moto d'onda risultante è quindi un'onda *carica* che si propaga come indicato dalle frecce in Fig. 18–36. Questa onda è talvolta detta una *onda di Mach* o una *onda d'urto*, ed è causa dell'improvviso e violento colpo che si ode quando un aereo supersonico passa nei pressi. Queste onde sono anche osservate nelle scie delle barche che si muovono più velocemente della velocità delle onde di superficie sull'acqua (Fig. 18–37).

The resultant wave motion is then a *conical* wave which propagates as indicated by the arrows in Fig. 18–36. This wave is sometimes called a *Mach wave* or a *shock wave*, and is the sudden and violent sound we hear when a supersonic plane passes nearby. These waves are also observed in the wakes of boats moving faster than the speed of surface waves on the water (Fig. 18–37).

18.14 Suono; acustica

Ad eccezione delle onde sulla superficie del liquido, tutte le altre onde discusse in questo capitolo appartengono alla categoria delle *onde elastiche*, nelle quali la perturbazione — sia essa una tensione, una pressione, o uno spostamento di massa interessante parecchi atomi — si propaga con una velocità che dipende dalle proprietà elastiche del mezzo.

Queste onde elastiche sono anche chiamate *suono*. Nel linguaggio quotidiano il concetto di suono è connesso alla sensazione dell'*udito*. Ogni qualvolta un'onda elastica che si propaga attraverso un gas, un liquido, od un solido raggiunge il nostro orecchio, esso produce vibrazioni sulla membrana dell'orecchio. Queste vibrazioni provocano una risposta nervosa che costituisce il processo noto come ascolto. Ma il nostro sistema nervoso produce una sensazione dell'udito soltanto per frequenze tra 16 Hz e circa 20,000 Hz. (Il campo di frequenza è diverso per altri animali.) Al di fuori di questi limiti, il suono non è udibile, ma le onde elastiche sono ancora chiamate suono. La fisica delle onde elastiche con frequenze al di sopra di 20,000 Hz è detta *ultrasonica*.

La scienza che tratta i metodi di creazione, ricezione, e propagazione dei suoni è detta *acustica*. Essa in realtà interessa parecchi campi ed è strettamente connessa con parecchie branche dell'ingegneria. Tra i campi dell'acustica, si può citare il progetto di strumenti acustici, che include l'*elettroacustica*, che tratta dei

18.14 Sound; Acoustics

With the exception of waves on the surface of a liquid, all other waves discussed in this chapter fall in the category of *elastic waves*, in which the disturbance—whether it is a strain, a pressure, or a bulk displacement involving many atoms—propagates with a velocity depending on the elastic properties of the medium.

These elastic waves are also called *sound*. In everyday language the concept of sound is related to the sensation of *hearing*. Whenever an elastic wave propagating through a gas, a liquid, or a solid reaches our ear, it produces vibrations in the ear's membrane. These vibrations provoke a nervous response constituting the process known as hearing. But our nervous system produces a hearing sensation only for frequencies between 16 Hz and about 20,000 Hz. (The frequency range is different for other animals.) Outside these limits, sounds are not audible, but the elastic waves are still called sound. The physics of elastic waves with frequencies above 20,000 Hz is called *ultrasonics*.

The science dealing with the methods of generation, reception, and propagation of sound is called *acoustics*. It really covers many fields and is closely related to several branches of engineering. Among the fields of acoustics are the design of acoustical instruments, which includes *electroacoustics*, dealing with electrical

TABELLA 18–2 Velocità del suono, m s^{-1}

Solidi (20°C)	Liquidi (25°C)	Gas (0°C)
Granito	Acqua	Aria
Ferro	Acqua di mare	Idrogeno
Rame	(salinità 3.6%)	Ossigeno
Alluminio	Kerosene	Azoto
Piombo	Mercurio	Vapore d'acqua
Lucite		(100°C)

metodi elettrici di produzione e registrazione dei suoni (microfoni, altoparlanti, amplificatori, ecc.). L'*acustica architettonica* si interessa del progetto e della costruzione delle stanze e degli edifici e del comportamento delle onde sonore negli ambienti chiusi. L'*acustica musicale* si interessa più direttamente del suono in connessione con la musica.

Il suono, come spiegato sopra, implica lo spostamento di atomi e di molecole del mezzo attraverso il quale esso si propaga. Ma questo spostamento è un moto collettivo ordinato nel quale tutti gli atomi contenuti in un piccolo volume subiscono essenzialmente lo stesso spostamento. Questo moto ordinato si sovrappone quindi alla agitazione molecolare disordinata casuale dei liquidi e dei gas. Ne risulta quindi che mentre l'onda sonora si propaga l'intensità del suono diminuisce o è *attenuata* perchè parte dell'energia dell'onda è assorbita dalle molecole del mezzo a causa delle collisioni. Ciò genera un aumento dell'energia interna molecolare, principalmente quella dovuta ai moti rotazionali delle molecole, o dell'energia cinetica di traslazione. Nei liquidi la viscosità, che è in sostanza una conseguenza del moto molecolare, gioca anche un ruolo importante nell'attenuazione del suono.

La velocità di propagazione del suono è praticamente indipendente dalla frequenza per un campo molto vasto di frequenze, che si estende fino a più di 10^8 Hz. Il valore di questa velocità per varie sostanze è indicato nella Tabella 18–2. La velocità di propagazione è, tuttavia, piuttosto sensibile a variazioni di temperature e di pressione a causa della dipendenza della velocità dalla densità. Molti dei fenomeni ondulatori che saranno descritti nei capitoli seguenti si applicano alle onde sonore. Noi non entreremo, tuttavia, in uno studio dettagliato dell'acustica. Invece ci applicheremo principalmente alle onde elettromagnetiche.

Bibliografia

TABLE 18–2 Velocity of Sound, m s^{-1}

Solids (20°C)		Liquids (25°C)		Gases (0°C)	
Granite	6000	Fresh water	1493.2	Air	331.45
Iron	5130	Sea water	1532.8	Hydrogen	1269.5
Copper	3750	(3.6% salinity)		Oxygen	317.2
Aluminum	5100	Kerosene	1315	Nitrogen	339.3
Lead	1230	Mercury	1450	Steam (100°C)	404.8
Lucite	1840				

methods of sound production and recording (microphones, loudspeakers, amplifiers, etc.). *Architectural acoustics* deals with the design and construction of rooms and buildings and the behavior of sound waves in closed spaces. *Musical acoustics* deals more directly with sound in relation to music.

Sound, as explained before, involves the displacement of atoms and molecules of the medium through which it propagates. But this displacement is an ordered collective motion in which all atoms in a small volume suffer essentially the same displacement. This ordered motion is then superposed on the random or disordered molecular agitation of liquids and gases. The net result is that the intensity of sound decreases or is *attenuated* while the sound wave propagates because some of the wave's energy is taken away by the molecules of the medium by collisions. This results in an increase in the molecular internal energy, mainly rotational molecular motion, or in the translational kinetic energy. In liquids the viscosity, which in essence is an effect of the molecular motion, also plays an important role in sound attenuation.

The velocity of propagation of sound is practically independent of frequency for a very large range of frequencies, extending up to more than 10^8 Hz. The value of this velocity for different substances is given in Table 18–2. The velocity of propagation is, however, rather sensitive to temperature and pressure changes because of the dependence of velocity on density. Many of the wave phenomena which will be described in succeeding chapters apply to sound waves. However, we shall not enter into the detailed study of acoustics. Instead we shall concentrate mainly on electromagnetic waves.

References

1. "Helmholtz," A. C. Crombie, *Sci. Am.*, March 1959, page 94
2. "Kilomegacycle Ultrasonics," K. Dransfeld, *Sci. Am.*, June 1963, page 48
3. "Sonic Boom," R. Emrich, *The Physics Teacher* **3**, 18 (1965)
4. "A Method for Measuring the Sound Wavelength in Gases," S. Lestz, *Am. J. Phys.* **31**, 96 (1963)
5. *Waves and Oscillations*, R. A. Waldron. Princeton, N.J.: Momentum Books, Van Nostrand, 1963

6. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. New York: Dover, 1963, Appendix 2
7. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. L. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 47 through 51
8. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 122 (Helmholtz); page 174 (Fourier)

Problemi

18.1 Si distingua tra (a) le parole omogeneo ed eterogeneo, (b) le parole isotropo ed anisotropo. (c) Può un mezzo essere omogeneo ed anisotropo, eterogeneo e isotropo?

18.2 Facendo oscillare una barca, un uomo produce onde di superficie su di un lago tranquillo. Egli osserva che la barca effettua 12 oscillazioni in 20 secondi, ogni oscillazione producendo una cresta d'onda. Una data cresta impiega 6 s per raggiungere la spiaggia che dista 12 m. Si calcoli la lunghezza d'onda delle onde di superficie.

18.3 L'equazione di una data onda è $\xi = 10 \sin 2\pi(2x - 100t)$, dove x è espresso in metri e t in secondi. Si trovi (a) l'ampiezza, (b) la lunghezza d'onda, (c) la frequenza, e (d) la velocità di propagazione dell'onda. Si faccia un disegno dell'onda mostrandone l'ampiezza e la lunghezza d'onda.

18.4 Data l'onda

dove x è espresso in metri e t in secondi, si determini (a) la lunghezza d'onda, (b) la frequenza, (c) il periodo, (d) la velocità di propagazione, (e) l'ampiezza, e (f) la direzione di propagazione. Si scriva l'espressione di un'onda che sia identica, ma che si propaghi nella direzione opposta.

18.5 Data l'onda

dove t è espresso in secondi e x in metri, si diagrammi ξ per un intervallo di varie lunghezze d'onda per $t = 0$ e $t = \frac{1}{10}$ s. Si ripeta il problema per $\xi = 2 \sin 2\pi(0{,}5x + 10t)$. Si confrontino i risultati.

18.6 Un'onda armonica

si propaga verso destra. Si scelgano 13 punti equidistanti su una distanza di una lunghezza d'onda e si riporti in grafico la perturbazione agli istanti 0, $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{2}P$, $\frac{3}{4}P$, e P dopo che l'onda ha raggiunto il primo punto.

18.7 Supponendo che nel precedente problema l'onda corrisponda ad un'onda trasversale elastica, si mostri in ciascuno dei grafici la velocità in ciascun punto. Si diagrammi la velocità $\partial\xi/\partial t$ e l'accelerazione $\partial^2\xi/\partial t^2$ all'istante $t = 0$.

18.8 Dimostrare che un'onda elastica trasversale propagantesi lungo l'asse X e corrispondente ad uno spostamento ξ avente componenti $\xi_y = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ e $\xi_z = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$ è polarizzata circolarmente. Determinare il senso di rotazione di ξ quale è visto da un osservatore sull'asse X. Scrivere le espressioni per ξ_y e ξ_z per un'onda avente polarizzazione opposta.

18.9 Data l'equazione di un'onda in una corda $\xi = 0.03 \sin(3x - 2t)$, dove ξ e x sono espressi in metri e t in secondi, rispondere a quanto segue: (a) All'istante $t = 0$, qual'è lo spostamento in $x = 0$, 0.1 m, 0.2 m e 0.3 m? (b) Nel punto $x = 0.1$ m, qual'è lo spostamento per $t = 0$, 0.1 s e 0.2 s? (c) Qual'è l'equazione per la velocità di oscillazione delle particelle costituenti la corda? Qual'è la massima velocità di oscillazione? (d) Qual'è la velocità di propagazione dell'onda?

18.10 Un pendolo è costituito da un filo di acciaio lungo 2.00 m che sostiene una massa di 20 kg. Se il pendolo è lasciato libero in una posizione

Problems

18.1 Distinguish between (a) the words homogeneous and heterogeneous, (b) the words isotropic and anisotropic. (c) Can a medium be homogeneous and anisotropic, heterogeneous and isotropic?

18.2 By rocking a boat, a man produces surface waves on a quiet lake. He observes that the boat performs 12 oscillations in 20 seconds, each oscillation producing a wave crest. It takes 6 s for a given crest to reach the shore 12 m away. Calculate the wavelength of the surface waves.

18.3 The equation of a certain wave is $\xi = 10 \sin 2\pi(2x - 100t)$, where x is in meters and t is in seconds. Find (a) the amplitude, (b) the wavelength, (c) the frequency, and (d) the velocity of propagation of the wave. Make a sketch of the wave, showing the amplitude and the wavelength.

18.4 Given the wave

$$\xi = 2 \sin 2\pi(0.1x - 5t),$$

where x is in meters and t in seconds, determine (a) the wavelength, (b) the frequency, (c) the period, (d) the velocity of propagation, (e) the amplitude, and (f) the direction of propagation. Give the expression for a wave which is identical but which propagates in the opposite direction.

18.5 Given the wave

$$\xi = 2 \sin 2\pi(0.5x - 10t),$$

where t is in seconds and x is in meters, plot ξ over several wavelengths for $t = 0$ and $t = \frac{1}{40}$ s. Repeat the problem for $\xi = 2 \sin 2\pi(0.5x + 10t)$. Compare results.

18.6 A harmonic wave

$$\xi = A \sin 2\pi(x/\lambda - t/P)$$

propagates to the right. Choose 13 equidistant points over a distance of one wavelength and plot the disturbance at time 0, $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{2}P$, $\frac{3}{4}P$, and P after the wave has reached the first point.

18.7 Assuming that in the previous problem the wave corresponds to an elastic transverse wave, show in each of the graphs the velocity at each point. Plot the velocity $\partial\xi/\partial t$ and the acceleration $\partial^2\xi/\partial t^2$ at $t = 0$.

18.8 Show that a transverse elastic wave propagating along the X-axis and corresponding to a displacement ξ having as components $\xi_y = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$ and $\xi_z = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$ is circularly polarized. Determine the sense of rotation of ξ as seen by an observer on the X-axis. Write the expressions for ξ_y and ξ_z for a wave having an opposite polarization.

18.9 Given the equation for a wave in a string $\xi = 0.03 \sin(3x - 2t)$, where ξ and x are in meters and t is in seconds, answer the following: (a) At $t = 0$, what is the displacement at $x = 0$, 0.1 m, 0.2 m and 0.3 m? (b) At $x = 0.1$ m, what is the displacement at $t = 0$, 0.1 s, and 0.2 s? (c) What is the equation for the velocity of oscillation of the particles of the string? What is the maximum velocity of oscillation? (d) What is the velocity of propagation of the wave?

18.10 A pendulum consists of a steel wire 2.00 m long carrying a mass of 20 kg. If the pendulum is released from a position

che fa un angolo di 60° con la verticale, trovare la differenza di lunghezza del filo quando il peso è nella posizione iniziale e nell'istante nel quale il peso passa attraverso il punto più basso.

18.11 Una sbarra di acciaio è impiegata per trasmettere onde longitudinali per mezzo di un oscillatore accoppiato ad un estremo. La sbarra ha un diametro di 4mm. L'ampiezza delle oscillazioni è 0.1mm e la frequenza è 10 oscillazioni al secondo. Trovare (a) l'equazione delle onde lungo la sbarra, (b) l'energia ad unità di volume della sbarra, (c) il flusso medio di energia ad unità di tempo attraverso una qualsiasi sezione della sbarra, e (d) la potenza necessaria per comandare l'oscillatore.

18.12 Si considerino onde longitudinali lungo una sbarra (Paragrafo 18.5) e si assuma che la deformazione in ciascun punto sia

(a) usando la relazione (18.16), si ottenga l'espressione della forza in ogni sezione. (b) Si dimostri che le onde ξ e F hanno differenza di fase di $\frac{1}{4}$ di lunghezza d'onda. (c) Diagrammare ξ ed F in funzione di x in un dato istante per varie lunghezze d'onda.

18.13 Una molla avente in riposo una lunghezza di 1 m e una massa di 0.2 kg si allunga di 4 cm quando viene tesa da una forza di 10 N. Trovare la velocità di propagazione delle onde longitudinali lungo la molla.

18.14 Una molla di acciaio ha in riposo una lunghezza di 4 m e una massa di 200 g. Quando la molla è appesa verticalmente e porta un corpo di 100 g attaccato all'estremo inferiore, la molla si allunga di 5.0 cm. Trovare la velocità delle onde longitudinali nella molla.

18.15 Ottenere la velocità delle onde tangenziali nell'acciaio. Si confronti con il risultato ottenuto nell'Esempio 18.4 per le onde longitudinali nella molla.

18.16 Dimostrare che l'onda di energia discussa nel Paragrafo 18.9 può essere scritta nella forma

which makes an angle of 60° with the vertical, find the difference in length of the wire when the bob is at the initial position and at the time when the bob passes through the lowest point.

18.11 A steel rod is forced to transmit longitudinal waves by means of an oscillator coupled to one end. The rod has a diameter of 4 mm. The amplitude of the oscillations is 0.1 mm and the frequency is 10 oscillations per second. Find (a) the equation of the waves along the rod, (b) the energy per unit volume of the rod, (c) the average energy flow per unit time across any section of the rod, and (d) the power required to drive the oscillator.

18.12 Consider longitudinal waves along a rod (Section 18.5) and assume that the deformation at each point is

$$\xi = \xi_0 \sin 2\pi(x/\lambda - t/P).$$

(a) Using relation (18.16), obtain the expression for the force on each section. (b) Show that the ξ and F waves have a phase difference of one-quarter wavelength. (c) Plot ξ and F against x at a given time for several wavelengths.

18.13 A spring having a normal length of 1 m and a mass of 0.2 kg is elongated 4 cm when it is stretched by a force of 10 N. Find the velocity of propagation of longitudinal waves along the spring.

18.14 A steel spring has a normal length of 4 m and a mass of 200 g. When the spring is supported vertically and a 100-g body is attached to the lower end, the spring stretches 5.0 cm. Find the velocity of longitudinal waves in the spring.

18.15 Obtain the velocity of shear waves in steel. Compare with the result for longitudinal waves given in Example 18.4.

18.16 Show that the energy wave discussed in Section 18.9 can be written in the form

$$\partial W/\partial t = v\{\rho\omega^2\xi_0^2[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2(kx - \omega t)]\}.$$

Se ne ottenga il suo valore medio. Si dimostri che la frequenza dell'onda di energia è doppia e la lunghezza d'onda metà di quella dell'onda di spostamento. Si riporti in un grafico $\partial W/\partial t$ in funzione di x in un dato istante.

18.17 Come si modifica la velocità di propagazione di un'onda trasversale lungo una corda se la tensione viene (a) raddoppiata, (b) ridotta alla metà? Come si deve variare la tensione se si vuole che la velocità di propagazione sia (c) raddoppiata, (d) ridotta a metà?

18.18 Un filo di acciaio avente diametro di 0.2 mm è soggetto alla forza di 200 N. Determinare la velocità di propagazione delle onde traversali lungo il filo.

18.19 Una corda lunga due metri ed avente massa di 4 g è tenuta orizzontalmente con un estremo fisso ed una massa di 2 kg appesa all'altro estremo. Si trovi la velocità delle onde trasversali nella corda.

18.20 Un estremo di una corda orizzontale è collegato ad un rebbio di un diapason comandato elettricamente la cui frequenza di vibrazione è di 240 Hz. L'altro estremo passa sopra ad una puleggia e sostiene un peso di 3 kg. La massa ad unità di lunghezza della corda è 0.020 kg m^{-1}. (a) Qual'è la velocità di un'onda trasversale nella corda? (b) Quale ne è la lunghezza d'onda?

18.21 Un tubo di gomma è fissato ad un estremo ad un supporto fisso. L'altro estremo passa sopra una puleggia a 5 m dall'estremo fisso e porta un carico di 2 kg. La massa del tubo tra l'estremo fisso e la puleggia è 0.6 kg. (a) Trovare la velocità di propagazione delle onde trasversali lungo il tubo. (b) Si supponga che un'onda armonica di ampiezza 0,1 cm e lunghezza d'onda 0.3 m si propaghi lungo il tubo; trovare la massima velocità trasversale di alcuni punti del tubo. (c) Scrivere l'equazione dell'onda. (d) Determinare la velocità media del flusso di energia attraverso alcune sezioni del tubo.

18.22 Una sorgente vibrante posta ad un estremo di una corda tesa ha uno spostamento dato dall'equazione $\xi = 0.1 \sin 6t$, dove ξ è espresso in metri e t in secondi. La forza

Obtain from it its average value. Show that the frequency of the energy wave is twice, and the wavelength one-half, that of the displacement wave. Plot $\partial W/\partial t$ as a function of x at a given time.

18.17 How is the velocity of propagation of a transverse wave along a string modified if the tension is (a) doubled, (b) halved? How must the tension be changed to (c) double, (d) halve, the velocity of propagation?

18.18 A steel wire having a diameter of 0.2 mm is subject to a tension of 200 N. Determine the velocity of propagation of transverse waves along the wire.

18.19 A string of length 2 m and mass 4 g is held horizontally, with one end fixed and a mass of 2 kg supported at the other end. Find the velocity of transverse waves in the string.

18.20 One end of a horizontal string is attached to a prong of an electrically driven tuning fork whose frequency of vibration is 240 Hz. The other end passes over a pulley and supports a weight of 3 kg. The mass per unit length of the string is 0.020 kg m^{-1}. (a) What is the speed of a transverse wave in the string? (b) What is the wavelength?

18.21 A rubber tube is fastened at one end to a fixed support. The other end passes over a pulley at 5 m from the fixed end and carries a load of 2 kg. The mass of the tube between the fixed end and the pulley is 0.6 kg. (a) Find the velocity of propagation of transverse waves along the tube. (b) Suppose that a harmonic wave of amplitude 0.1 cm and wavelength 0.3 m propagates along the tube; find the maximum transverse velocity of any point of the tube. (c) Write the equation of the wave. (d) Determine the average rate of energy flow across any section of the tube.

18.22 A vibrating source at the end of a stretched string has a displacement given by the equation $\xi = 0.1 \sin 6t$, where ξ is in meters and t is in seconds. The tension

nella corda è 4 N e la massa ad unità di lunghezza è 0.010 kg m^{-1}. (a) Qual'è la velocità dell'onda nella corda? (b) Quanto vale la frequenza dell'onda? (c) Quanto vale la lunghezza d'onda? (d) Qual'è l'equazione dello spostamento in un punto posto ad un metro dalla sorgente? Ed in un punto posto a 3 m? (e) Si faccia un grafico di ξ in funzione di t per $x = 3$ m. (f) Quanto vale l'ampiezza del moto? (g) Si faccia un grafico di ξ in funzione di x per $t = \pi/12$ s.

18.23 Un filo di acciaio avente una lunghezza di 2 m ed un raggio di 0.5 mm pende dal soffitto. (a) Se un corpo avente una massa di 100 kg è appeso all'estremo libero, trovare di quanto si allunga il filo. (b) Trovare anche lo spostamento e la forza di trazione verso il basso applicata in un punto a metà del filo. (c) Determinare la velocità delle onde longitudinali e di quelle trasversali lungo il filo quando la massa è attaccata.

18.24 Una fune di lunghezza L e massa M pende liberamente dal soffitto. (a) Dimostrare che la velocità di un'onda trasversale è funzione della posizione lungo la fune secondo la $v = \sqrt{gx}$, dove x è la distanza dall'estremo più basso. (b) Dimostrare che un impulso trasversale percorre la fune nel tempo $2\sqrt{L/g}$. Si noti come questi risultati siano indipendenti dalla massa della fune.

18.25 Nel Paragrafo 18.9, abbiamo ottenuto il flusso di energia di una onda longitudinale in una sbarra solida. Si ripeta il calcolo per le onde trasversali in una corda, dimostrando che la potenza media è $v(\frac{1}{2}m\omega^2\xi_0^2)$. Si noti come ora la quantità in parentesi corrisponda all'energia ad unità di lunghezza. [*Suggerimento:* Si calcoli il lavoro riferito al tempo compiuto dalla forza perpendicolare alla corda, cioè $F \sin \alpha \sim F(\partial\xi/\partial x)$ di Fig. 18–14.]

18.26 Calcolare la velocità di propagazione del suono nell'idrogeno, nell'azoto e nell'ossigeno a 0°C. Confrontare con i risultati sperimentali. Si ponga per i tre gas $\gamma = 1.40$.

18.27 Trovare di quanto varia la velocità del suono nell'aria per una variazione unitaria di temperatura intorno a 27°C.

in the string is 4 N and the mass per unit length is 0.010 kg m^{-1}. (a) What is the wave velocity in the string? (b) What is the frequency of the wave? (c) What is the wavelength? (d) What is the equation of the displacement at a point 1 m from the source? at 3 m? (e) Make a graph of ξ versus t at $x = 3$ m. (f) What is the amplitude of motion? (g) Make a graph of ξ versus x at $t = \pi/12$ s.

18.23 A steel wire having a length of 2 m and a radius of 0.5 mm hangs from the ceiling. (a) If a body having a mass of 100 kg is hung from the free end, find the elongation of the wire. (b) Also find the displacement and the downward pull at a point at the middle of the wire. (c) Determine the velocity of longitudinal and transverse waves along the wire when the mass is attached.

18.24 A rope of length L and mass M hangs freely from the ceiling. (a) Show that the velocity of a transverse wave as a function of position along the rope is $v = \sqrt{gx}$, where x is the distance from the lower end. (b) Show that a transverse pulse will traverse the rope in a time $2\sqrt{L/g}$. Note that the results are independent of the mass of the rope.

18.25 In Section 18.9 we obtained the energy flow of a longitudinal wave in a solid rod. Repeat the calculation for transverse waves in a string, showing that the average power is $v(\frac{1}{2}m\omega^2\xi_0^2)$. Note that the quantity inside the parentheses now corresponds to energy per unit length. [*Hint:* Compute the rate of work done by the force perpendicular to the string; that is, $F \sin \alpha \approx F(\partial\xi/\partial x)$ of Fig. 18–14.]

18.26 Compute the velocity of propagation of sound in hydrogen, nitrogen, and oxygen at 0°C. Compare with the experimental results. For the three gases, assume $\gamma = 1.40$.

18.27 Find the change of sound velocity in air per unit change in temperature at 27°C.

18.28 Tenendo presente il valore del coefficiente $\alpha = \sqrt{\gamma R/M}$ per l'aria dato nell'Esempio 18.6, determinare il valore della massa molecolare effettiva dell'aria e lo si confronti con il risultato ottenuto con altri mezzi. Si assuma per l'aria $\gamma = 1.40$.

18.29 Riferendosi alle onde di pressione in una colonna di gas (Paragrafo 18.6), si assuma che la pressione cambi secondo la forma $p - p_0 = \mathcal{P}_0 \sin 2\pi(x/\lambda - t/P)$. (a) Usando le Equazioni (18.21) e (18.24), ottenere le espressioni delle onde di densità e di spostamento nel gas. (b) Dimostrare che le onde di pressione e di densità sono in fase mentre l'onda di spostamento ha una differenza di fase di $\frac{1}{4}$ di lunghezza d'onda. (c) Si riportino in grafico le tre onde in funzione di x per un dato istante per una lunghezza di varie lunghezze d'onda.

18.30 Un'onda sonora armonica piana in aria a 20°C e pressione normale ha una frequenza di 500 Hz ed una ampiezza di spostamento di 10^{-8} m. (a) Scrivere l'espressione che descrive l'onda di spostamento. (b) Si riporti in un grafico la forma dell'onda di spostamento all'istante $t = 0$ s su poche lunghezze d'onda. (c) Scrivere l'espressione che descrive l'onda di pressione. (d) Si riporti in grafico la forma dell'onda di pressione all'istante $t = 0$ s su poche lunghezze d'onda e si confronti con quanto riportato in (b). (e) Esprimere il livello di intensità di questa onda in db.

18.31 Il suono più debole che può venire udito ha una ampiezza di pressione di circa 2×10^{-5} N m^{-2}, ed il suono più forte che può venire udito senza provare dolore ha una ampiezza di pressione di circa 28 N m^{-2}. Determinare, nei due casi, l'intensità del suono sia in W m^{-2} che in db, e l'ampiezza delle oscillazioni se la frequenza è 500 Hz. Si assuma una densità dell'aria di 1.29 kg m^{-3} ed una velocità del suono di 345 m s^{-1}.

18.32 Due onde sonore hanno livelli di intensità che differiscono di (a) 10 db, (b) 20 db. Trovare il rapporto delle loro intensità e delle loro ampiezze di pressione.

18.33 (a) Di quanto è cambiata l'intensità di un'onda sonora quando l'ampiezza di pressione viene raddoppiata? (b) Di quanto deve variare

18.28 From the value given in Example 18.6 for the coefficient $\alpha = \sqrt{\gamma R/M}$ for air, obtain the effective molecular mass of air and compare with the result obtained by other means. Assume that for air $\gamma = 1.40$.

18.29 Referring to pressure waves in a gas column (Section 18.6), assume that the pressure changes in the form $p - p_0 = \mathcal{P}_0 \sin 2\pi(x/\lambda - t/P)$. (a) Using Eqs. (18.21) and (18.24), obtain the expressions for the density and displacement waves in the gas. (b) Show that the pressure and density waves are in phase but that the displacement wave has a phase difference of one-quarter wavelength. (c) Plot the three waves against x for a given time over a length of several wavelengths.

18.30 A plane harmonic sound wave in air at 20°C and standard pressure has a frequency of 500 Hz and a displacement amplitude of 10^{-8} m. (a) Write the expression describing the displacement wave. (b) Plot the displacement wave form at $t = 0$ s over a few wavelengths. (c) Write the expression describing the pressure wave. (d) Plot the pressure wave form at $t = 0$ s over a few wavelengths and compare with the plot in (b). (e) Express the intensity level of this wave in db.

18.31 The faintest sound that can be heard has a pressure amplitude of about 2×10^{-5} N m^{-2}, and the loudest that can be heard without pain has a pressure amplitude of about 28 N m^{-2}. Determine, in each case, the intensity of the sound both in W m^{-2} and in db, and the amplitude of the oscillations if the frequency is 500 Hz. Assume an air density of 1.29 kg m^{-3} and a velocity of sound of 345 m s^{-1}.

18.32 Two sound waves have intensity levels differing by (a) 10 db, (b) 20 db. Find the ratio of their intensities and of their pressure amplitudes.

18.33 (a) How is the intensity of a sound wave changed when the pressure amplitude is doubled? (b) How must the pressure

l'ampiezza di pressione per aumentare di un fattore 10?

18.34 Si esprima la differenza, in db, nei livelli di intensità di due onde sonore se (a) l'intensità di un'onda è due volte l'intensità dell'altra. (b) L'ampiezza di pressione di un'onda è due volte quella dell'altra.

18.35 Due onde sonore, una in aria e l'altra in acqua hanno la medesima intensità. (a) Qual'è il rapporto tra le ampiezze di pressione dell'onda in acqua e dell'onda in aria? (b) Quanto varrebbe il rapporto delle loro intensità se le ampiezze di pressione fossero le stesse?

18.36 Si confronti il valore relativo dei due termini nella velocità delle onde di superficie in acqua profonda [Eq. (18.35)] per le seguenti lunghezze d'onda: (a) 1 mm, (b) 1 cm, (c) 1 m. Per quale lunghezza d'onda i due termini sono uguali? La tensione superficiale dell'acqua vale circa 7×10^{-2} N m^{-1}

18.37 Si consideri un canale con sezione normale rettangolare avente una profondità di 4 m. Determinare la velocità di propagazione di onde aventi lunghezza d'onda di (a) 1 cm, (b) 1 m, (c) 10 m, (d) 100 m. In ogni caso, si usi la formula che meglio si adegua all'ordine di grandezza delle quantità implicate. L'acqua nel canale ha tensione superficiale di 7×10^{-2} N m^{-1}

18.38 Due onde armoniche aventi le medesime frequenza ed ampiezza si propagano in direzioni opposte con la medesima velocità. (a) Determinare il moto d'onda risultante. (b) Supponendo che l'onda risultante corrisponda ad un'onda trasversale in una corda, riportare in grafico lo spostamento dei punti della corda in diversi istanti.

18.39 Due onde di eguale ampiezza, velocità e frequenza, ma con una differenza di fase di $\pi/4$, si propagano nella stessa direzione lungo una corda. Si compongano le due onde e si dimostri che la risultante è un'onda che si propaga con la stessa velocità e la stessa frequenza.

18.40 Due onde aventi la stessa ampiezza e la stessa velocità ma differenti frequenze, eguali rispettivamente a 1000 Hz ed a 1010 Hz, si muovono nella stessa direzione a 10 m s^{-1}. Scrivere le equazioni delle due onde singole e della loro somma. Si faccia uno schizzo della forma dell'onda risultante.

18.41 Si ripeta il problema precedente quando una ampiezza è il doppio dell'altra.

18.42 Due onde, polarizzate in piani perpendicolari, viaggiano nella direzione OX con la stessa velocità. Si trovi il moto dell'onda risultante se (a) $A_1 = 2A_2$ e le fasi sono le stesse, (b) $A_1 = 2A_2$ e le fasi differiscono di $\pi/2$.

18.43 Nella discussione delle onde longitudinali in una sbarra (Paragrafo 18.5), si trascurava la dilatazione laterale che accompagna la dilatazione longitudinale. Quando si tiene conto di questo effetto si può mostrare che la velocità di fase di onde longitudinali armoniche di lunghezza d'onda λ che si propagano lungo una sbarra cilindrica di raggio R è $v_p = \sqrt{Y/\rho}\,(1 - \pi^2\sigma^2R^2/\lambda^2)$, dove σ è un coefficiente detto *rapporto di Poisson* (vedere Problema 18.54). Si trovi la velocità di gruppo delle onde lungo la sbarra e la si esprima in funzione di v_p. Si ottenga il valore limite della velocità di gruppo nel caso di R molto più piccolo di λ. Si discuta la variazione di v_p e v_g in funzione di R/λ.

18.44 La velocità di fase di un'*onda* armonica *di flessione* in una sbarra solida è $v_p = v/\sqrt{1 + \lambda^2/4\pi^2K^2}$, dove $v = \sqrt{Y/\rho}$ è la velocità di fase per onde longitudinali, λ la lunghezza d'onda, e K il raggio di inerzia della sezione normale della sbarra intorno ad un asse attraverso il centro, normale all'asse longitudinale della sbarra. (a) Trovare la velocità di gruppo di onde di flessione e esprimerla in funzione della velocità di fase. (b) Si consideri il caso particolare di una sbarra di sezione circolare retta. (c) Ottenere la velocità di gruppo quando λ è molto più grande di $2\pi K$. [*Nota:* Un'*onda di flessione* è un'onda che si propaga lungo una sbarra caricata; cioè, una sbarra soggetta ad una forza trasversale (come il suo stesso peso) uniformemente distribuita lungo la sua lunghezza.]

18.34 Express the difference, in db, in intensity levels of two sound waves if (a) the intensity of one wave is twice the intensity of the other, (b) the pressure amplitude of one is twice that of the other.

18.35 Two sound waves, one in air and one in water, have the same intensity. (a) What is the ratio of the pressure amplitude of the wave in water to that of the wave in air? (b) What would be the ratio of their intensities if the pressure amplitudes were the same?

18.36 Compare the relative importance of the two terms in the velocity of surface waves in deep water [Eq. (18.35)] for the following wavelengths: (a) 1 mm, (b) 1 cm, (c) 1 m. At what wavelength are the two terms equal? For water the surface tension is about 7×10^{-2} N m^{-1}.

18.37 Consider a canal of rectangular cross section having a depth of 4 m. Determine the velocity of propagation of waves having a wavelength of (a) 1 cm, (b) 1 m, (c) 10 m, (d) 100 m. In each case use the formula that corresponds best to the order of magnitude of the quantities involved. The water in the canal has a surface tension of 7×10^{-2} N m^{-1}.

18.38 Two harmonic waves of the same frequency and amplitude propagate with the same velocity in opposite directions. (a) Determine the resultant wave motion. (b) Assuming that the resultant wave corresponds to a transverse wave in a string, plot the displacement of the points of the string at different times.

18.39 Two waves of equal amplitude, velocity, and frequency, but with a phase difference of $\pi/4$, run in the same direction on a string. Add the two and show that the result is a running wave of the same velocity and frequency.

18.40 Two waves of the same amplitude and velocity but of different frequencies, equal to 1000 and 1010 Hz, respectively, travel in the same direction at 10 m s^{-1}. Write equations for the separate waves and for their sum. Make a sketch of the resultant wave form.

18.41 Repeat the preceding problem when one amplitude is twice the other.

18.42 Two waves, plane polarized in perpendicular planes, travel in the OX-direction at the same velocity. Find the resultant wave motion if (a) $A_1 = 2A_2$ and the phases are the same, (b) $A_1 = 2A_2$ and the phases differ by $\pi/2$, (c) $A_1 = A_2$ and the phases differ by $\pi/2$.

18.43 In the discussion of longitudinal waves in a rod (Section 18.5), we neglected the lateral strain that accompanies the longitudinal strain. When this effect is taken into account, it can be shown that the phase velocity of harmonic longitudinal waves of wavelength λ propagating along a cylindrical rod of radius R is $v_p = \sqrt{Y/\rho}\,(1 - \pi^2\sigma^2R^2/\lambda^2)$, where σ is a coefficient called *Poisson's ratio* (see Problem 18.54). Find the group velocity of waves along the rod and express it in terms of v_p. Obtain the limiting value of the group velocity for the case of R much smaller than λ. Discuss the variation in v_p and v_g as a function of R/λ.

18.44 The phase velocity of a harmonic *flexural wave* in a solid rod is $v_p = v/\sqrt{1 + \lambda^2/4\pi^2K^2}$, where $v = \sqrt{Y'/\rho}$ is the phase velocity for longitudinal waves, λ the wavelength, and K the radius of gyration of the cross section of the rod about an axis through the center normal to the rod's longitudinal axis. (a) Find the group velocity for flexural waves and express it in terms of the phase velocity. (b) Specialize to the case of a rod of circular cross section. (c) Obtain the group velocity when λ is much larger than $2\pi K$. [*Note:* A *flexural wave* is a wave propagated along a loaded rod; that is, a rod subject to a transverse force (such as its own weight) uniformly distributed along its length.]

18.45 Una certa onda è generata da una sorgente il cui moto può essere rappresentato dalla

$$y = \frac{8}{\pi^2} A\left[\sin \omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t - \cdots\right].$$

(a) Costruire la forma dell'onda approssimata sommando graficamente i primi tre termini. (b) A che tipo di forma d'onda conduce la serie infinita? Essa è detta curva a "dente di sega". (c) Esprimere un'onda in moto avente la medesima forma e propagantesi verso destra con una velocità v, indipendente dalla frequenza. [*Suggerimento:* Si noti che $1 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{5})^2 + \cdots = \pi^2/8$.]

18.46 Si ripeta il Problema 18.45 per una sorgente il cui moto ha la forma

$$y = \frac{4}{\pi} A(\sin \omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t + \tfrac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots).$$

[*Suggerimento:* Si noti che $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \pi/4$.]

18.47 La tonalità del fischio di una locomotiva è di 500 Hz. Determinare la frequenza del suono udito da una persona che stia in una stazione se il treno si muove con una velocità di 72 km hr^{-1} (a) verso la stazione, (b) allontanandosi dalla stazione.

18.48 Una sorgente sonora ha la frequenza di 10^3 Hz e si muove a 30 m s^{-1} rispetto all'aria. Supponendo che la velocità del suono relativa all'aria quieta sia 340 m s^{-1}, trovare la lunghezza d'onda e la frequenza effettive percepite da un osservatore in riposo rispetto all'aria e che vede la sorgente, (a) che si allontana da lui, (b) che muove verso di lui.

18.49 Si ripeta il Problema 18.48, supponendo che la sorgente sia in riposo rispetto all'aria ma che l'osservatore si muova a 30 m s^{-1}. Dai vostri risultati concludeete che non ha importanza se è la sorgente o l'osservatore che si muove?

18.45 A certain wave is excited by a source whose motion can be represented by

$$y = \frac{8}{\pi^2} A\left[\sin \omega t - \frac{1}{3^2}\sin 3\omega t + \frac{1}{5^2}\sin 5\omega t - \cdots\right].$$

(a) Construct the approximate wave form by adding the first three terms graphically. (b) What does the infinite series for the wave form lead to? It is called a "sawtooth" curve. (c) Express a traveling wave having the same shape and propagating to the right with velocity v, independent of the frequency. [*Hint:* Note that $1 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{5})^2 + \cdots = \pi^2/8$.]

18.46 Repeat Problem 18.45 for a source whose motion is of the form

$$y = \frac{4}{\pi} A(\sin \omega t + \tfrac{1}{3}\sin 3\omega t + \tfrac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots).$$

[*Hint:* Note that $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \pi/4$.]

18.47 The pitch of the whistle of a locomotive is 500 Hz. Determine the frequency of the sound heard by a person standing at the station if the train is moving with a velocity of 72 km hr^{-1} (a) toward, (b) away from, the station.

18.48 A sound source has a frequency of 10^3 Hz and moves at 30 m s^{-1} relative to the air. Assuming that the velocity of sound relative to still air is 340 m s^{-1}, find the effective wavelength and the frequency perceived by an observer at rest relative to the air and who sees the source (a) moving away from him, (b) moving toward him.

18.49 Repeat Problem 18.48, assuming that the source is at rest relative to the air but that the observer moves at 30 m s^{-1}. From your results do you conclude that it is immaterial whether it is the source or the observer which is in motion?

18.50 L'Eq. (18.61) per l'effetto Doppler è stata ricavata nell'ipotesi che il mezzo in cui le onde si propagano resti in riposo. Dimostrare che se il mezzo ha una velocità v_m lungo la retta che congiunge la sorgente e l'osservatore, l'equazione diventa $\nu' = \nu(v - v_0 + v_m)/(v - v_s + v_m)$.

18.51 La *dilatazione volumica* di un corpo è definita dalla relazione $\epsilon_V = dV/V$, dove dV è la variazione di volume dovuta alle forze applicate al corpo di volume V. (a) Dimostrare che $\epsilon_V = -d\rho/\rho$, dove ρ è la densità del corpo. [*Suggerimento:* Si noti che $\rho V = m = \text{cost.}$] (b) Dimostrare anche che il modulo di contrazione definito dalla Eq. (18.22) può essere espresso nella forma alternativa $\kappa = -V(dp/dV)$, dove dV è la variazione di volume relativa alla variazione di pressione dp.

18.52 Usando i valori del modulo di contrazione per ferro e piombo (Tabella 18–1), calcolare la variazione percentuale nella densità e nel volume di ciascuna sostanza per una variazione di pressione eguale a 1 atm.

18.53 La *dilatazione lineare* è definita dalla relazione $\epsilon_L = dL/L$, dove L è la distanza tra due punti nel corpo nello stato non deformato, e dL la variazione delle loro distanze dovuta alla deformazione. Considerando un cubo di lato L, dimostrare che $\epsilon_V = 3\epsilon_L$.

18.54 Quando un filo è teso nella direzione della sua lunghezza il diametro D del filo diminuisce. Ciò genera una *dilatazione laterale* definita da $\epsilon_D = dD/D$. Il *rapporto di Poisson* è definito da $\sigma = dD/dL$. Dimostrare che se un parallelepipedo rettangolare è soggetto ad una tensione normale S su ciascuna superficie, la dilatazione lineare risultante di ciascun lato è $\epsilon_L = S(1 - 2\sigma)/Y$. [*Suggerimento:* Si noti come la tensione normale su ciascuna coppia di superficie del parallelepipedo dia luogo a dilatazioni laterali opposte sulle altre coppie di superficie.]

18.55 Usando i risultati dei problemi 18.53, e 18.54, dimostrare che $Y = 3\kappa(1 - 2\sigma)$. Risolvere questa relazione per σ, ed usando i

18.50 Equation (18.61) for the Doppler effect was derived assuming that the medium through which the waves propagate remains at rest. Show that if the medium has a velocity v_m along the line joining the source and the observer, the equation becomes $\nu' = \nu(v - v_0 + v_m)/(v - v_s + v_m)$.

18.51 The *volume strain* of a body is defined by the relation $\epsilon_V = dV/V$, where dV is the change in volume resulting from the forces applied to the body of volume V. (a) Show that $\epsilon_V = -d\rho/\rho$, where ρ is the density of the body. [*Hint:* Note that $\rho V = m = \text{const.}$] (b) Show also that the bulk modulus defined by Eq. (18.22) can be expressed in the alternative form $\kappa = -V(dp/dV)$, where dV is the change in volume resulting from the change in pressure dp.

18.52 Using the values of the bulk modulus for iron and for lead (Table 18–1), compute the percentage change in density and volume of each substance for a change in pressure equal to 1 atm.

18.53 The *linear strain* is defined by the relation $\epsilon_L = dL/L$, where L is the distance between any two points in the body in the undeformed state and dL is the change in their distance resulting from the deformation. Show, by considering a cube of side L, that $\epsilon_V = 3\epsilon_L$.

18.54 When a wire is stretched in the direction of its length, the diameter D of the wire is decreased. This results in a *lateral strain* defined by $\epsilon_D = dD/D$. The *Poisson ratio* is defined by $\sigma = dD/dL$. Show that if a rectangular parallelepiped is subject to a normal stress S on each surface, the net linear strain of each side is $\epsilon_L = S(1 - 2\sigma)/Y$. [*Hint:* Note that the normal stress on each pair of surfaces of the parallelepiped results in opposite lateral strains on the other pairs of surfaces.]

18.55 Using the results of Problems 18.53 and 18.54, show that $Y = 3\kappa(1 - 2\sigma)$. Solve this relation for σ, and using the

valori della Tabella 18–1, calcolare il rapporto di Poisson per alcuni materiali.

18.56 Con un ragionamento analogo a quello del Problema 18.55, si può dimostrare che $Y = 2G(1 + \sigma)$. Eliminando σ tra questa espressione e quella del Problema 18.55, dimostrare che $Y = 3\kappa G/(\kappa + \frac{1}{3}G)$. Usando i valori dati nella Tabella 18–1, verificare, per alcuni dei materiali elencati, l'estensione di validità di questa espressione teorica per Y.

18.57 Per alcune sostanze $G = 1.24 \times 10^{10}$ N m^{-2} e $Y = 3.20 \times 10^{10}$ N m^{-2}. Calcolare il valore del modulo di contrazione e del rapporto di Poisson per queste sostanze. Fare lo stesso per il quarzo, che ha $Y = 5.18 \times 10^{10}$ N m^{-2} e $G = 2.88 \times 10^{10}$ N m^{-2}. Discutere il significato fisico dei risultati ottenuti.

18.58 Si può dimostrare che per una molla la costante K, che fu introdotta nell'Esempio 18.5, è data da $\pi GR^4/2a^2$, dove R è il raggio del filo ed a il raggio della molla. Trovare il valore di K per una molla di acciaio che ha raggio di 1 cm, e che è fatta di fili di acciaio aventi un raggio di 1 mm. Se la lunghezza della molla in riposo è 50 cm, trovare il suo allungamento quando ad essa è applicata una forza di 50 N.

18.59 Si consideri un campo ξ avente una equazione di propagazione $\partial^2\xi/\partial t^2 = a\partial^4\xi/\partial x^4$, dove a è una certa costante. (a) Ammette una espressione della forma

come soluzione? Se si, qual'è il valore di v? (b) Ammette $\xi = f(x \pm vt)$ come soluzione? (c) Dai risultati precedenti concludete che questo campo si propaga senza distorsioni?

18.60 Una sbarra di sezione retta circolare con raggio R è contorta per effetto dei momenti applicati rispetto al suo asse. Si dimostri che se θ è l'angolo di torsione in un punto x sull'ascissa, il momento è

dove $A = \pi R^2$ è l'area della sezione normale.

18.61 Usando il risultato del problema precedente, dimostrare che la velocità di propagazione delle onde torsionali lungo la sbarra è $\sqrt{G/\rho}$. [*Suggerimento:* Si consideri un elemento di spessore dx e si noti che la tensione torsionale risultante su di esso vale $(\partial\tau/\partial x)\,dx$.]

18.62 Si può dimostrare che un'onda isotropa sferica soddisfa alla equazione differenziale

Verificare che la soluzione di questa equazione è $\xi = (1/r)f(r \pm vt)$. Si confronti con la discussione nel Paragrafo 18.11 per le onde di pressione in un fluido.

18.63 Dimostrare che quando l'ampiezza è grande l'equazione delle onde trasversali in una corda diventa

Si osservi che questa equazione non è lineare e si riduce alla Eq. (18.29) quando $(\partial\xi/\partial x)^2$ è trascurabile. [*Suggerimento:* Si noti che $\sin\alpha = \tan\alpha/\sqrt{1 + \tan^2\alpha} = \tan\alpha - \frac{1}{2}\tan^3\alpha + \cdots$.]

values of Table 18–1, compute the Poisson ratio for some materials.

18.56 By a logic similar to that of Problem 18.55, it can be shown that $Y = 2G(1 + \sigma)$. By eliminating σ between this expression and that of Problem 18.55, show that $Y = 3\kappa G/(\kappa + \frac{1}{3}G)$. Using the values given in Table 18–1, verify, for some of the materials listed, the extent of the validity of this theoretical expression for Y.

18.57 For a certain substance $G = 1.24 \times 10^{10}$ N m^{-2} and $Y = 3.20 \times 10^{10}$ N m^{-2}. Calculate the value of the bulk modulus and Poisson's ratio for this substance. Do the same for quartz, which has $Y = 5.18 \times 10^{10}$ N m^{-2} and $G = 2.88 \times 10^{10}$ N m^{-2}. Discuss the physical implications of your results.

18.58 It can be shown that for a spring the constant K that was introduced in Example 18.5 is given by $\pi GR^4/2a^2$, where R is the wire radius and a the spring radius. Find the value of K for a steel spring which has a radius of 1 cm and which is made of steel wire having a radius of 1 mm. If the unstretched length of the spring is 50 cm, find its elongation when a force of 50 N is applied to it.

18.59 Assume a field ξ having a propagation equation $\partial^2\xi/\partial t^2 = a\,\partial^4\xi/\partial x^4$, where a is a certain constant. (a) Does it admit an expression of the form

$$\xi = \xi_0 \sin k(x \pm vt)$$

as a solution? If so, what is the value of v? (b) Does it admit $\xi = f(x \pm vt)$ as a solution? (c) From the preceding results, do you conclude that this field propagates undistorted?

18.60 A rod of circular cross section with radius R is twisted as a result of torques applied around its axis. Show that if θ is the torsion angle at a point x on the abscissa, the torque there is

$$\tau = \tfrac{1}{2}AGR^2(\partial\theta/\partial x),$$

where $A = \pi R^2$ is the area of the cross section.

18.61 Using the result of the previous problem, show that the velocity of propagation of torsional waves along the rod is $\sqrt{G/\rho}$. [*Hint:* Consider a section of thickness dx and note that the net torque on it is $(\partial\tau/\partial x)\,dx$.]

18.62 It can be shown that a spherical isotropic wave satisfies the differential equation

$$\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2(r\xi)}{\partial r^2}.$$

Verify that the solution of this equation is $\xi = (1/r)f(r \pm vt)$. Compare with the discussion in Section 18.11 for pressure waves in a fluid.

18.63 Show that when the amplitude is large the equation for transverse waves in a string becomes

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{T}{m}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right].$$

Observe that this equation is not linear and reduces to Eq. (18.29) when $(\partial\xi/\partial x)^2$ is negligible. [*Hint:* Note that $\sin\alpha = \tan\alpha/\sqrt{1 + \tan^2\alpha} = \tan\alpha - \frac{1}{2}\tan^3\alpha + \cdots$.]

19 ONDE ELETTROMAGNETICHE

19.1 Introduzione
19.2 Onde elettromagnetiche piane
19.3 Energia e quantità di moto di un'onda elettromagnetica
19.4 Radiazione da un dipolo elettrico oscillante
19.5 Radiazione da un dipolo magnetico oscillante
19.6 Radiazione da multipoli oscillanti di ordine superiore
19.7 Radiazione da una carica accelerata
19.8 Assorbimento della radiazione elettromagnetica
19.9 Diffusione di onde elettromagnetiche da elettroni legati
19.10 Diffusione della radiazione elettromagnetica da parte di un elettrone libero: effetto Compton
19.11 Fotoni
19.12 Ancora sui fotoni: effetto fotoelettrico
19.13 Propagazione delle onde elettromagnetiche nella materia; dispersione
19.14 Effetto Doppler per onde elettromagnetiche
19.15 Lo spettro della radiazione elettromagnetica

19 ELECTROMAGNETIC WAVES

19.1 Introduction
19.2 Plane Electromagnetic Waves
19.3 Energy and Momentum of an Electromagnetic Wave
19.4 Radiation from an Oscillating Electric Dipole
19.5 Radiation from an Oscillating Magnetic Dipole
19.6 Radiation from Higher-Order Oscillating Multipoles
19.7 Radiation from an Accelerated Charge
19.8 Absorption of Electromagnetic Radiation
19.9 Scattering of Electromagnetic Waves by Bound Electrons
19.10 Scattering of Electromagnetic Radiation by a Free Electron; Compton Effect
19.11 Photons
19.12 More about Photons: the Photoelectric Effect
19.13 Propagation of Electromagnetic Waves in Matter; Dispersion
19.14 Doppler Effect in Electromagnetic Waves
19.15 The Spectrum of Electromagnetic Radiation

19.1 Introduzione

Nel Paragrafo 15.11 abbiamo fatto l'ipotesi che il campo elettromagnetico si possa propagare nel vuoto con una velocità

che corrisponde alla velocità della luce nel vuoto. Nel Paragrafo 17.11, quando abbiamo trattato i fenomeni di induzione elettromagnetica, abbiamo indicato la possibilità di trasmettere un segnale da un punto ad un altro usando un campo elettromagnetico variante nel tempo. Alla fine del diciannovesimo secolo, il fisico tedesco Heinrich Hertz (1857–1894) provò senza alcun dubbio che il campo elettromagnetico si propaga nel vuoto con velocità equale a c.* Le proprietà di queste onde elettromagnetiche scoperte da Hertz sono state esaminate sperimentalmente con grande cura. La grande quantità di informazione che abbiamo accumulato sulle proprietà delle onde elettromagnetiche, come i fatti intorno alla loro produzione, propagazione, ed assorbimento, ha aperto la porta al mondo meraviglioso delle comunicazioni che noi oggi conosciamo. Prima che Hertz effettuasse i suoi esperimenti, l'esistenza delle onde elettromagnetiche era stata prevista da Maxwell come risultato di una analisi accurata delle equazioni del campo elettromagnetico (riassunte nel Paragrafo 17.15). Lo sviluppo della nostra conoscenza delle onde elettromagnetiche è un altro esempio della stretta relazione tra teoria ed esperienza nella evoluzione delle nostre idee fisiche.

In questo capitolo esamineremo le equazioni di Maxwell (che descrivono il campo elettromagnetico funzione del tempo), per vedere come possiamo interpretare la propagazione di questo campo sotto forma di onde. Per fare ciò, dobbiamo verificare se i campi elettrico e magnetico soddisfano una equazione d'onda della forma dell'Eq. (18.11). Discuteremo inizialmente onde elettromagnetiche piane, quindi alcuni meccanismi per l'emissione, l'assorbimento, e la diffusione della radiazione elettromagnetica, concludendo con una breve considerazione sulle diverse parti dello spetto elettromagnetico.

19.2 Onde elettromagnetiche piane

Vediamo di stabilire se le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico ammettano, come soluzione particolare, un campo elettrico $\mathcal{E}$ e un campo magnetico $\mathcal{B}$ perpendicolari tra di loro. Poniamo l'asse Y parallelo al campo $\mathcal{E}$ ed orientiamo l'asse Z parallelo al campo $\mathcal{B}$. In questo caso particolare,

e

Assumeremo inoltre che il campo sia nel vuoto; cioè non vi siano cariche libere o correnti, il che implica $\rho = 0$ e $j = 0$ nelle equazioni di Maxwell.

*Le esperienze di Hertz sono descritte nel Paragrafo 22.7.

19.1 Introduction

In Section 15.11 we suggested that the electromagnetic field may propagate in vacuum with a velocity

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

which corresponds to the velocity of light in vacuum. In Section 17.11, when we were dealing with the phenomenon of electromagnetic induction, we indicated the possibility of transmitting a signal from one place to another using a time-dependent electromagnetic field. Near the end of the nineteenth century, the German physicist Heinrich Hertz (1857–1894) proved beyond any doubt that the electromagnetic field does propagate in vacuum with a velocity equal to c.* The properties of these electromagnetic waves discovered by Hertz have been examined experimentally with great care. The large body of information that we have accumulated about the properties of electromagnetic waves, such as facts about their production, propagation, and absorption, has opened the door to the marvelous world of communications that we know today. Before Hertz performed his experiments, the existence of electromagnetic waves had been predicted by Maxwell as a result of a careful analysis of the equations of the electromagnetic field (summarized in Section 17.15). The development of our knowledge of electromagnetic waves is another example of the close relationship between theory and experiment in the evolution of our physical ideas.

In this chapter we are going to examine Maxwell's equations (which describe the time-dependent electromagnetic field), to see how we may interpret the propagation of this field in the form of waves. In order to do that, we must find out if the electric and magnetic fields satisfy a wave equation of the form of Eq. (18.11). We shall first discuss plane electromagnetic waves, then some mechanisms for emitting, absorbing, and scattering electromagnetic radiation, concluding with a brief consideration of the different parts of the electromagnetic spectrum.

19.2 Plane Electromagnetic Waves

Let us determine whether Maxwell's equations for the electromagnetic field admit, as a special solution, an electric field $\mathcal{E}$ and a magnetic field $\mathcal{B}$ perpendicular to each other. We place the Y-axis parallel to the $\mathcal{E}$-field and orient the Z-axis parallel to the $\mathcal{B}$-field. In this special case,

$$\mathcal{E}_x = 0, \qquad \mathcal{E}_y = \mathcal{E}, \qquad \mathcal{E}_z = 0,$$

and

$$\mathcal{B}_x = 0, \qquad \mathcal{B}_y = 0, \qquad \mathcal{B}_z = \mathcal{B}.$$

We shall also assume that the field is in vacuum; that is, that there are no free charges or currents, implying that $\rho = 0$ and $j = 0$ in Maxwell's equations.

* Hertz's experiments are described in Section 22.7.

In queste condizioni, le Equazioni (17.65) diventano:

(a) legge di Gauss per il campo elettrico,

(b) legge di Gauss per il campo magnetico,

(c) legge di Faraday-Henry,

(d) legge di Ampère-Maxwell,

Le Equazioni (19.1), (19.2), (19.3), e (19.5) indicano che nè $\mathcal{E}$ nè $\mathcal{B}$ dipendono da y e da z. Quindi i campi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ dipendono soltanto da x e da t, ed in ogni istante hanno lo stesso valore in tutti i punti appartenenti a piani perpendicolari all'asse X (Fig. 19–1). Partiamo quindi dalle Equazioni (19.4) e (19.6) per ottenere la dipendenza di $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ da x e t. Derivando l'Eq. (19.4) rispetto a x, otteniamo

Analogamente, facendo la derivata dell'Eq. (19.6) rispetto a t, si ha

Combinando questi due risultati, otteniamo

Questa è una equazione simile all'Eq. (18.11), ed indica che il campo elettrico $\mathcal{E}$ si propaga lungo l'asse X con una velocità

Wave surface = Superficie d'onda
Direction of propagation = Direzione di propagazione

Fig. 19–1. Orientamento dei campi elettrico e magnetico rispetto alla direzione di propagazione di un'onda elettromagnetica piana.

Under these conditions, Eqs. (17.65) become:

(a) Gauss' law for the electric field,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} = 0. \tag{19.1}$$

(b) Gauss' law for the magnetic field,

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} = 0. \tag{19.2}$$

(c) the Faraday-Henry law,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0, \tag{19.3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}. \tag{19.4}$$

(d) the Ampère-Maxwell law,

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} = 0, \tag{19.5}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}. \tag{19.6}$$

Equations (19.1), (19.2), (19.3), and (19.5) indicate that neither $\mathcal{E}$ nor $\mathcal{B}$ depends on y or z. Therefore the fields $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ depend only on x and t, and at each instant have the same value at all points of planes perpendicular to the X-axis (Fig. 19–1). We are then left with Eqs. (19.4) and (19.6) for obtaining the dependence of $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ on x and t. Taking the derivative of Eq. (19.4) with respect to x, we obtain

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x \, \partial t}.$$

Similarly, taking the derivative of Eq. (19.6) with respect to t yields

$$-\frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t \, \partial x} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}.$$

Combining these two results gives

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}. \tag{19.7}$$

This is an equation similar to Eq. (18.11), indicating that the electric field $\mathcal{E}$ propagates along the X-axis with a velocity

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \tag{19.8}$$

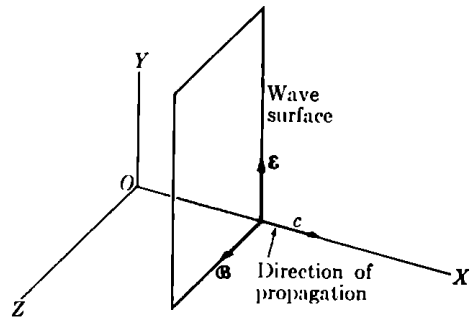


Fig. 19–1. Orientation of the electric and magnetic fields relative to the direction of propagation of a plane electromagnetic wave.

e che può essere espressa come

Con un procedimento simile, si ottiene

in modo che anche il campo magnetico $\mathfrak{B}$ si propaga lungo l'asse X con velocità c, e può essere espresso da

Consideriamo, in particolare, il caso di onde armoniche di frequenza $\nu = \omega/2\pi$ e lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$. In tale caso,

e

Nello scrivere queste equazioni, abbiamo fatto uso della relazione $\omega = kc$, che corrisponde alla Eq. (18.6). Le ampiezze $\mathcal{E}_0$ e $\mathfrak{B}_0$ non sono indipendenti poichè devono essere soddisfatte le Equazioni (19.4) e (19.6). Ora

e

Sostituendo queste nella Eq. (19.4), otteniamo

oppure

Lo studente può verificare che il medesimo risultato si ottiene usando l'Eq. (19.6) invece

Fig. 19–2. Campi elettrico e magnetico in un'onda elettromagnetica piana armonica.

and can be expressed as

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(x - ct). \tag{19.9}$$

By a similar procedure one obtains

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2}, \tag{19.10}$$

so that the magnetic field $\mathfrak{B}$ also propagates along the X-axis with velocity c and can be expressed as

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(x - ct). \tag{19.11}$$

Let us, in particular, consider the case of harmonic waves of frequency $\nu = \omega/2\pi$ and wavelength $\lambda = 2\pi/k$. In such a case,

$$\begin{aligned} &\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin k(x - ct) = \mathcal{E}_0 \sin (kx - \omega t) \\ \text{and} \qquad &\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \sin k(x - ct) = \mathfrak{B}_0 \sin (kx - \omega t). \end{aligned} \tag{19.12}$$

In writing these equations, we have used the relation $\omega = kc$, which corresponds to Eq. (18.6). The amplitudes $\mathcal{E}_0$ and $\mathfrak{B}_0$ are not independent, since we have to satisfy Eqs. (19.4) and (19.6). Now

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = k\mathcal{E}_0 \cos k(x - ct) \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = -kc\mathfrak{B}_0 \cos k(x - ct).$$

Substituting these in Eq. (19.4), we get

$$\mathcal{E}_0 = c\mathfrak{B}_0 \qquad \text{or} \qquad \mathfrak{B}_0 = \frac{1}{c}\mathcal{E}_0. \tag{19.13}$$

The student may verify that the same result is obtained by using Eq. (19.6) instead

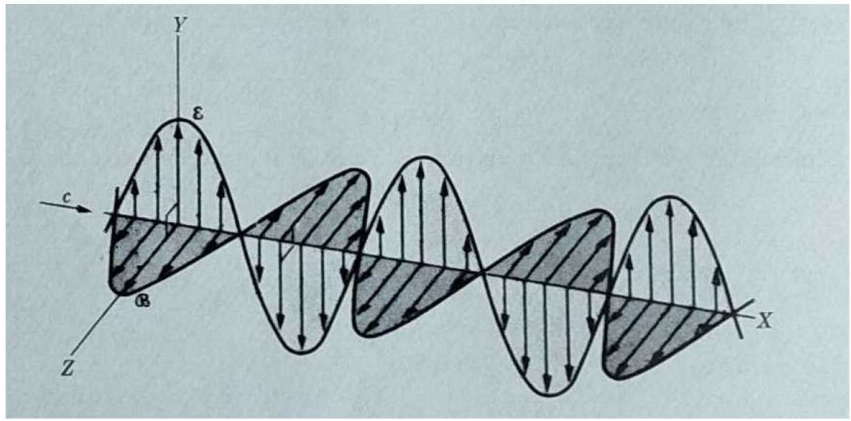


Fig. 19–2. Electric and magnetic fields in a harmonic plane electromagnetic wav

della (19.4). La relazione (19.13) tra le ampiezze significa che per i valori istantanei, dati dalla Eq. (19.12), abbiamo anche

oppurre

Si può verificare, usando le Equazioni (19.4) e (19.6) che le medesime relazioni sono verificate quando applicate a campi definiti in una forma più generale dalle Equazioni (19.9) e (19.11). Dalla Eq. (19.14), vediamo che i campi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ sono in fase poichè assumono nello stesso istante il loro valore zero ed il loro valore massimo. L'onda elettromagnetica descritta dalla Eq. (19.12) è rappresentata in Fig. 19—2. Il campo elettrico oscilla nel piano XY e il campo magnetico nel piano XZ. Ciò corrisponde ad un'onda polarizzata *rettilineamente* in un *piano*. Il piano di polarizzazione è definito come il piano nel quale oscilla il campo elettrico, in questo caso il piano XY. Così un'onda elettromagnetica consiste in effetti in due onde accoppiate: l'onda elettrica e l'onda magnetica.

L'Eq. (19.12) non è la sola onda piana soluzione delle Equazioni (19.7) e (19.10). Per esempio, il campo elettrico può essere diretto lungo l'asse Z, nel qual caso il campo magnetico è diretto lungo l'asse $-Y$. Cioè,

Sia in quest'onda che nell'onda dell'Eq. (19.12), è possibile usare i coseni al posto dei seni, od anche aggiungere una fase costante arbitraria.

Un'altra soluzione avente forma di onda piana è quella nella quale i campi elettrico e magnetico rimangono costanti in valore assoluto ma ruotano intorno alla direzione di propagazione, dando origine ad un'onda *polarizzata circolarmente* (Fig. 19—3). Questa nuova soluzione si ottiene combinando le due soluzioni polarizzate rettilineamente che abbiamo discusso precedentemente, con eguali ampiezze per ciascun campo e con una appropriata differenza di fase. (Questa combinazione è possibile poichè le equazioni di Maxwell sono lineari

Wave surface = Superficie d'onda
Direction of propagation = Direzione di propagazione

Fig. 19—3. Onda elettromagnetica polarizzata circolarmente. I campi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ ruotano intorno alla direzione di propagazione.

Fig. 19—4. Onda elettromagnetica sferica a grande distanza dalla sorgente.

of (19.4). Relation (19.13) among the amplitudes means that for the instantaneous values, given by Eq. (19.12), we also have

$$\mathcal{E} = c\mathcal{B} \qquad \text{or} \qquad \mathcal{B} = \frac{1}{c}\mathcal{E}. \tag{19.14}$$

It may be verified, through the use of Eqs. (19.4) and (19.6), that the same relations hold true when applied to fields defined in a more general form by Eqs. (19.9) and (19.11). From Eq. (19.14), we see that the $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ fields are in phase, reaching their zero and maximum values at the same time. The electromagnetic wave described by Eq. (19.12) is represented in Fig. 19–2. The electric field oscillates in the XY-plane and the magnetic field in the XZ-plane. This corresponds to a *plane* or *linearly* polarized wave. The plane of polarization is defined as the plane in which the electric field oscillates, in this case the XY-plane. Thus an electromagnetic wave actually consists of two coupled waves: the electric wave and the magnetic wave.

Equation (19.12) is not the only plane wave solution of Eqs. (19.7) and (19.10). For example, the electric field may be along the Z-axis, in which case the magnetic field is along the $-Y$-axis. That is,

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t), \qquad \mathcal{B}_y = -\mathcal{B}_0 \sin(kx - \omega t).$$

Both in this wave and the wave of Eq. (19.12), it is possible to use cosines instead of sines, or even to add an arbitrary constant phase.

Another plane-wave solution is one in which the electric and magnetic fields remain constant in magnitude but rotate around the direction of propagation, resulting in a *circularly polarized* wave (Fig. 19–3). This new solution is obtained by combining the two linearly polarized solutions which we have previously discussed, with equal amplitudes for each field and with the appropriate phase difference. (This combination is possible because the Maxwell equations are linear

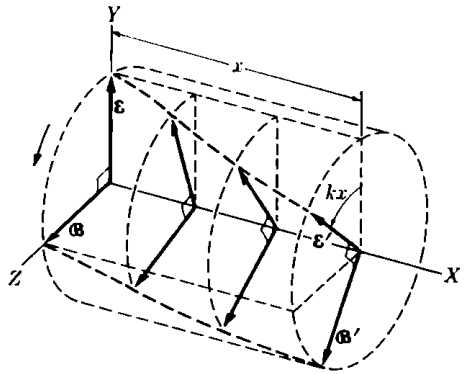


Fig. 19–3. Circularly polarized electromagnetic wave. The $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ fields rotate around the direction of propagation.

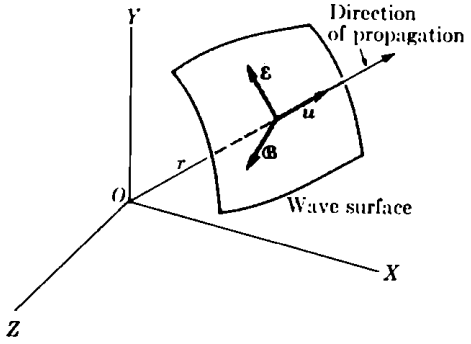


Fig. 19–4. Spherical electromagnetic wave at a large distance from the source.

nei campi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$). La polarizzazione circolare può essere destrorsa o sinistrorsa secondo il senso di rotazione dei campi. Le componenti dei campi elettrico e magnetico lungo due assi mutuamente perpendicolari sono allora date da

e

corrispondenti ad una differenza di fase di $\pm \pi/2$ tra le componenti di ciascun campo, in accordo con il Paragrafo 12.9, con il campo magnetico $\mathcal{B}$ perpendicolare in ogni istante a $\mathcal{E}$. [Si suggerisce allo studente di sostituire queste espressioni per i campi elettrico e magnetico nelle Equazioni (17.65) e verificare che le equazioni di Maxwell siano soddisfatte.] Se le ampiezze delle due componenti ortogonali di ciascun campo sono differenti, si ottiene una *polarizzazione ellittica*. Inoltre, sono possibili altre onde piane quali soluzioni delle equazioni di Maxwell che non corrispondono a nessun particolare stato di polarizzazione. Tuttavia, non le discuteremo qui, poichè per la maggior parte delle applicazioni è sufficiente la conoscenza fondamentale delle onde polarizzate rettilineamente e circolarmente.

Poichè la scelta degli assi XYZ è una questione di convenienza, possiamo concludere che le onde piane soluzioni delle equazioni di Maxwell che abbiamo ottenuto sono completamente generali, e che

> *le onde piane elettromagnetiche sono trasversali, con i campi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ perpendicolari tra di loro e alla direzione di propagazione delle onde.*

Questa previsione teorica delle equazioni di Maxwell è stata ampiamente confermata dall'esperienza ed ha come conseguenza parecchi fenomeni che saranno esaminati nei capitoli seguenti. Oltre alle onde piane soluzioni delle equazioni di Maxwell vi sono anche onde elettromagnetiche cilindriche e sferiche. A grande distanza dalla sorgente, una limitata parte di un'onda cilindrica o sferica può essere considerata praticamente piana ed in questo caso i campi elettrico e magnetico sono ancora perpendicolari tra di loro ed alla direzione di propagazione (cioè, radiale) come indicato in Fig. 19—4.

19.3 Energia e quantità di moto di un'onda elettromagnetica

Se usiamo l'Eq. (16.40), la densità di energia associata con il campo elettrico di un'onda elettromagnetica vale

Analogamente, quando noi usiamo le Equazioni (19.14), $\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$, e (19.8), $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, la densità di energia magnetica data dalla Eq. (17.25) è

in the $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ fields.) The circular polarization may be right- or left-handed according to the sense of rotation of the fields. The components of the electric and magnetic fields along two mutually perpendicular axes are then given by

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \sin(kx - \omega t), \qquad \mathcal{E}_z = \pm\mathcal{E}_0 \cos(kx - \omega t),$$

and

$$\mathcal{B}_y = \mp\mathcal{B}_0 \cos(kx - \omega t), \qquad \mathcal{B}_z = \mathcal{B}_0 \sin(kx - \omega t),$$

corresponding to a phase difference of $\pm\pi/2$ between the components of each field, in accordance with Section 12.9, with the magnetic field $\mathcal{B}$ perpendicular to $\mathcal{E}$ at each instant. [It is suggested that the student substitute these expressions for the electric and magnetic fields into Eqs. (17.65) and verify that Maxwell's equations are satisfied.] If the amplitudes of the two rectangular components of each field are different, *elliptical polarization* results. In addition, other plane wave solutions of Maxwell's equations are possible that do not correspond to any particular state of polarization. However, we shall not discuss them here, since for most applications the basic understanding of plane and circularly polarized waves is enough.

Since the choice of the XYZ axes is a matter of convenience, we may conclude that the plane-wave solutions of Maxwell's equations which we have obtained are completely general, and that

> *plane electromagnetic waves are transverse, with the $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ fields perpendicular both to each other and to the direction of propagation of the waves.*

This theoretical prediction of the Maxwell equations has been amply confirmed by experiment, and it results in several phenomena that will be considered in subsequent chapters. Beside plane-wave solutions to Maxwell's equations, there are also cylindrical and spherical electromagnetic waves. At a large distance from the source a limited portion of a cylindrical or a spherical wave can practically be considered as plane, and in this case the electric and magnetic fields are also perpendicular to each other and to the direction of propagation (i.e., radial) as indicated in Fig. 19–4.

19.3 Energy and Momentum of an Electromagnetic Wave

If we use Eq. (16.40), the energy density associated with the electric field of an electromagnetic wave is

$$\mathrm{E}_{\mathcal{E}} = \tfrac{1}{2}\epsilon_0\mathcal{E}^2.$$

Similarly, when we use Eqs. (19.14), $\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$, and (19.8), $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, the magnetic energy density given by Eq. (17.25) is

$$\mathrm{E}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2\mu_0}\mathcal{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0 c^2}\mathcal{E}^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon_0\mathcal{E}^2,$$

in modo che $\mathrm{E}_{\mathcal{E}} = u_{\mathcal{B}}$. Ciò significa che la densità di energia elettrica di un'onda elettromagnetica è eguale alla densità di energia magnetica. La densità di energia totale è

so that $\mathrm{E}_{\mathcal{E}} = u_{\mathcal{B}}$. That is, the electric energy density of an electromagnetic wave is equal to the magnetic energy density. The total energy density is

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\mathcal{E}} + \mathrm{E}_{\mathcal{B}} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2. \tag{19.15}$$

L'intensità dell'onda elettromagnetica (cioè, l'energia passante attraverso un'unità di superficie nell'unità di tempo) è, per analogia con l'Eq. (18.44),

The intensity of the electromagnetic wave (that is, the energy passing through the unit area in the unit time) is, by similarity with Eq. (18.44),

$$I = \mathrm{E}c = c\epsilon_0 \mathcal{E}^2. \tag{19.16}$$

L'intensità media dell'onda elettromagnetica è $I_{\text{med}} = c\epsilon_0 (\mathcal{E}^2)_{\text{med}}$. Nel caso di un'onda elettromagnetica armonica, $(\mathcal{E}^2)_{\text{med}} = \mathcal{E}_0^2 [\sin^2 k(x - ct)]_{\text{med}} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2$, in modo che l'intensità media è

The average intensity of the electromagnetic wave is $I_{\text{ave}} = c\epsilon_0 (\mathcal{E}^2)_{\text{ave}}$. In the case of a harmonic electromagnetic wave, $(\mathcal{E}^2)_{\text{ave}} = \mathcal{E}_0^2 [\sin^2 k(x - ct)]_{\text{ave}} = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0^2$, so that the average intensity is

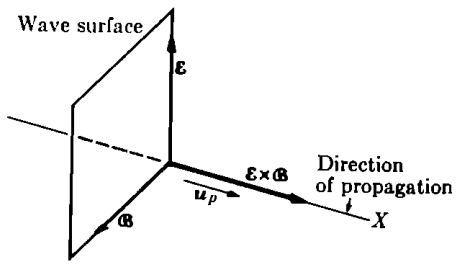
$$I_{\text{ave}} = \tfrac{1}{2} c\epsilon_0 \mathcal{E}_0^2. \tag{19.17}$$

ave = med

Calcoliamo ora il prodotto vettoriale $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ per un'onda elettromagnetica piana. La direzione di $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ è perpendicolare al fronte d'onda ed è perciò diretta nella direzione di propagazione dell'onda (Fig. 19–5). Il suo valore assoluto è

Let us now compute the vector product $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ for a plane electromagnetic wave. The direction of $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ is perpendicular to the wave front and is therefore pointing in the direction of propagation of the wave (Fig. 19–5). Its magnitude is

$$|\mathcal{E} \times \mathcal{B}| = \mathcal{E}\mathcal{B} = \frac{1}{c}\mathcal{E}^2.$$



Wave surface = Superficie d'onda
Direction of propagation = Direzione di propagazione

Fig. 19–5. Definizione della direzione del flusso di energia in un'onda elettromagnetica.

Fig. 19–5. Definition of the direction of energy flow in an electromagnetic wave.

Il vettore $c\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ ha come valore assoluto $\mathcal{E}^2$. Quindi $c^2\epsilon_0 \mathcal{E} \times \mathcal{B}$, detto *vettore di Poynting*, ha valore assoluto eguale a I, e perciò il flusso di questa quantità attraverso una superficie S dato da

The vector $c\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ has the magnitude $\mathcal{E}^2$. Then $c^2\epsilon_0 \mathcal{E} \times \mathcal{B}$, called the *Poynting vector*, has a magnitude equal to I, and therefore the flux of this quantity across a surface S, given by

$$\int_S c^2 \epsilon_0 (\mathcal{E} \times \mathcal{B}) \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS = \frac{dE}{dt}, \tag{19.18}$$

è l'energia che attraversa la superficie S nell'unità di tempo, e per questa ragione l'abbiamo indicata con dE/dt.

Nel Capitolo 11, abbiamo stabilito la proprietà che l'energia e la quantità di moto sono strettamente correlate e che esse formano un quadrivettore (una esigenza del principio di relatività). Ci si deve quindi attendere che un'onda elettromagnetica trasporti, in aggiunta alla sua energia, una certa quantità di moto. Poichè la radiazione elettromagnetica si propaga con velocità c, possiamo usare la relazione tra energia e quantità di moto data dalla Eq. (11.17), $p = vE/c^2$, [con $v = c$], per ottenere la quantità di moto p ad unità di volume associata con un'onda elettromagnetica. Così

is the energy crossing the area S per unit time, and for that reason we have designated it by dE/dt.

In Chapter 11 we established the fact that energy and momentum are closely related, and that they form a four-vector (a requirement of the principle of relativity). We may then expect that an electromagnetic wave carries, in addition to its energy, a certain momentum. Since electromagnetic radiation propagates with velocity c, we may use the relation between energy and momentum given by Eq. (11.17), $p = vE/c^2$, [with $v = c$], to obtain the momentum p per unit volume associated with an electromagnetic wave. Thus

$$p = \frac{\mathrm{E}}{c} = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}^2}{c} = \epsilon_0 |\mathcal{E} \times \mathcal{B}|. \tag{19.19}$$

Lo studente deve verificare che $\epsilon_0 |\mathcal{E} \times \mathcal{B}|$ abbia le dimensioni m^{-2} kg s^{-1}, che corrispondono alle dimensioni di una quantità di moto ad unità di volume. Poichè la quantità di moto deve avere

The student must verify that $\epsilon_0 |\mathcal{E} \times \mathcal{B}|$ has the dimensions of m^{-2} kg s^{-1}, which corresponds to momentum per unit volume. Since momentum must have the

direzione coincidente con quella di propagazione, possiamo scrivere la suddetta equazione in forma vettoriale come

$$\boldsymbol{p} = \frac{\mathrm{E}}{c}\,\boldsymbol{u} = \epsilon_0 \mathcal{E} \times \mathcal{B},$$

dove $\boldsymbol{u}$ è il versore nella direzione di propagazione. Per quanto la relazione data nella Eq. (19.19) sia stata ricavata per un volume unitario, abbiamo che, ad un ammontare arbitrario di energia E in un'onda piana, corrisponde una quantità di moto $p = E/c$ nella direzione di propagazione.

Se un'onda elettromagnetica ha quantità di moto, essa possiede anche un momento della quantità di moto. Il momento della quantità di moto ad unità di volume è

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \epsilon_0 \boldsymbol{r} \times (\mathcal{E} \times \mathcal{B}).$$

Questo è ciò che potrebbe venir chiamato momento della quantità di moto "orbitale" della radiazione, per analogia con il momento della quantità di moto di una particella che descrive un'orbita. Inoltre, la radiazione elettromagnetica possiede un momento della quantità di moto intrinseco, o spin, analogo allo spin delle particelle fondamentali (si ricordi l'Esempio 15.6). Si può dimostrare che per onde piane polarizzate circolarmente, lo spin ha una componente lungo la direzione di propagazione eguale a $\pm E/\omega$, a seconda che la polarizzazione sia oraria o antioraria. Per un'onda polarizzata rettilineamente, il valore medio della componente dello spin lungo la direzione di propagazione è zero.

Per questo, quando una particella carica assorbe od emette radiazione elettromagnetica, non solo cambiano la sua energia e la sua quantità di moto ma varia corrispondentemente anche il suo momento della quantità di moto, risultato questo che è stato verificato sperimentalmente sia in modo diretto che in modo indiretto. Ricapitolando, concludiamo che

> *un'onda elettromagnetica trasporta quantità di moto e momento della quantità di moto così come trasporta energia.*

Questo risultato non è sorprendente. Una interazione elettromagnetica fra due cariche elettriche significa uno scambio di energia e di quantità di moto tra le cariche. Questo si verifica per mezzo del campo elettromagnetico, che è il portatore dell'energia e della quantità di moto scambiate. L'esistenza di una quantità di moto associata al campo elettromagnetico è già stata suggerita nel Paragrafo 15.14. La relazione $p = E/c$ tra l'energia e la quantità di moto della radiazione elettromagnetica è particolarmente importante. Avremo occasione di riferirci ad essa di nuovo parecchie volte, ed indicheremo alcune evidenze sperimentali che appoggiano questa assunzione fondamentale.

ESEMPIO 19.1. Discutere la pressione della radiazione.

Soluzione: Poichè le onde elettromagnetiche trasportano quantità di moto, esse dànno origine ad una certa pressione quando sono riflesse od assorbite alla superficie di un corpo. Il principio fondamentale è il medesimo che si ha nel caso della pressione esercitata da un gas sulle pareti di un recipiente, come illustrato negli Esempi 9.2 e 9.16.

Consideriamo inizialmente alcuni casi semplici. Si supponga che un'onda elettromagnetica piana incida perpendicolarmente su di una superficie perfettamente assorbente (Fig. 19.6). La quantità di moto incidente

direction of propagation, we may write the above equation in vector form as

where $\boldsymbol{u}$ is the unit vector in the direction of propagation. Although the relation given in Eq. (19.19) has been established per unit volume, we have that, to an arbitrary amount of energy E in a plane wave, there corresponds a momentum $p = E/c$ in the direction of propagation.

If an electromagnetic wave has momentum, it also has angular momentum. The angular momentum per unit volume is

This is what could be called the "orbital" angular momentum of radiation, by similarity with the angular momentum of an orbiting particle. In addition, electromagnetic radiation possesses an intrinsic angular momentum, or spin, similar to the spin of fundamental particles (remember Example 15.6). For circularly polarized plane waves it can be shown that the spin has a component along the direction of propagation equal to $\mp E/\omega$, depending on whether the polarization is clockwise or counterclockwise. For a linearly polarized wave, the average value of the component of the spin along the direction of propagation is zero.

Therefore, when a charged particle absorbs or emits electromagnetic radiation, not only do its energy and momentum change but also its angular momentum changes accordingly, a result that has been verified experimentally both directly and indirectly. In summary we conclude that

> *an electromagnetic wave carries momentum and angular momentum as well as energy.*

This result is not surprising. An electromagnetic interaction between two electric charges means an exchange of energy and momentum between the charges. This is accomplished by means of the electromagnetic field, which is the carrier of the energy and momentum exchanged. The existence of a momentum associated with the electromagnetic field has already been suggested in Section 15.14. The relation $p = E/c$ between the energy and momentum of electromagnetic radiation is particularly important. We shall have the opportunity to refer to it again several times, and shall indicate some experimental evidence that supports this transcendental assumption.

EXAMPLE 19.1. Discuss radiation pressure.

Solution: Since electromagnetic waves carry momentum, they give rise to a certain pressure when they are reflected or absorbed at the surface of a body. The basic principle is the same as in the case of the pressure exerted by a gas on the walls of a container, as explained in Examples 9.2 and 9.16.

Let us consider first some simple cases. Suppose that a plane electromagnetic wave falls perpendicularly on a perfectly absorbing surface (Fig. 19–6). The incident momentum

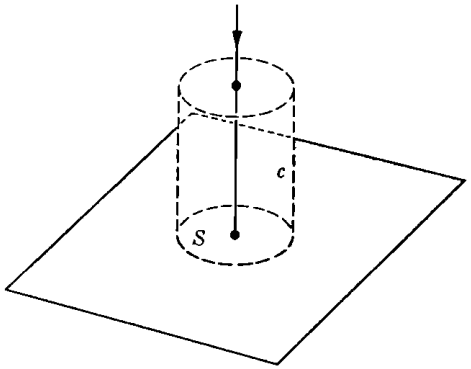


Fig. 19–6. Pressione di radiazione per incidenza normale.

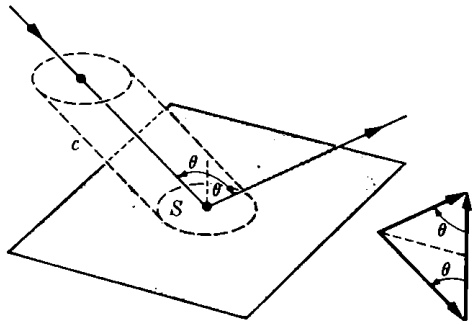


Fig. 19–7. Pressione di radiazione per incidenza obliqua. La costruzione vettoriale delle quantità di moto è indicata a destra.

ad unità di volume è p e l'ammontare della quantità di moto della radiazione che incide, nell'unità di tempo, sulla superficie A, è ottenuta moltiplicando p per il volume cA; cioè vale pcA. Se la radiazione è assorbita completamente dalla superficie, pcA è anche la quantità di moto assorbita dalla superficie A nell'unità di tempo; cioè, la forza su A. Dividendo per A, otteniamo la pressione dovuta alla radiazione

Così per incidenza normale la pressione della radiazione su di un assorbitore perfetto è uguale alla densità di energia nell'onda.

D'altra parte, se la superficie è un riflettore perfetto, la radiazione ha dopo la riflessione una quantità di moto uguale in valore assoluto ma con direzione opposta a quella della radiazione incidente. La variazione nella quantità di moto ad unità di volume vale perciò $2p$, e la pressione della radiazione vale di conseguenza

Questo risultato può essere generalizzato al caso di incidenza obliqua (Fig. 19–7) nel qual caso la variazione nella quantità di moto della radiazione ad unità di volume sulla superficie perfettamente riflettente è $2p \cos \theta$, e la corrispondente pressione della radiazione vale

Lo studente può verificare che questo risultato è identico a quello dell'Esempio 9.16, se c è sostituito da v, velocità delle molecole, e p è sostituito da nmv. Se la radiazione si propaga in tutte le direzioni, dobbiamo integrare su tutte le direzioni, come si è fatto nell'Esempio 9.16, ottenendo come risultato

Quando la superficie è un perfetto assorbitore, la variazione nella quantità di moto normale alla superficie si riduce ad un mezzo del valore precedentemente determinato (poichè non esiste onda riflessa che trasporti quantità di moto), e vale

Fig. 19–6. Radiation pressure at normal incidence.

Fig. 19–7. Radiation pressure at oblique incidence. The momentum diagram is shown at the right.

per unit volume is p and the amount of momentum in the radiation falling, per unit time, on the surface A, is obtained by multiplying p by the volume cA; that is, pcA. If the radiation is completely absorbed by the surface, this is also the momentum absorbed per unit time by the surface A; that is, the force on A. Dividing by A, we get the pressure due to the radiation

$$P_{\text{rad}} = cp = \text{E} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

Thus for normal incidence the radiation pressure on a perfect absorber is equal to the energy density in the wave.

On the other hand, if the surface is a perfect reflector, the radiation after reflection has a momentum equal in magnitude but opposite in direction to the incident radiation. The change in momentum per unit volume is thus $2p$, and the radiation pressure is accordingly

$$P_{\text{rad}} = 2cp = 2\text{E} = 2\epsilon_0 \mathcal{E}^2.$$

These results can be generalized to the case of oblique incidence (Fig. 19–7) in which case the change in momentum of the radiation per unit volume at the perfectly reflecting surface is $2p \cos \theta$, and the corresponding radiation pressure is

$$P_{\text{rad}} = 2cp \cos \theta = 2\text{E} \cos \theta.$$

The student may verify that this is identical to the result of Example 9.16, if c is replaced by v, the molecular velocity, and p is replaced by nmv. If the radiation propagates in all directions, we must integrate over all directions, as we did in Example 9.16, obtaining the result

$$P_{\text{rad}} = \tfrac{2}{3}cp = \tfrac{2}{3}\text{E}.$$

When the surface is a perfect absorber, the change in momentum normal to the surface is reduced to one-half the previously determined value (because there is no reflected wave carrying momentum), resulting in

$$P_{\text{rad}} = \tfrac{1}{3}\text{E}.$$

L'esistenza della pressione di radiazione, che è stata verificata sperimentalmente ed è responsabile di parecchi importanti fenomeni, fornisce una verifica indiretta dell'Eq. (19.19). Per esempio, la curvatura di una coda di una cometa può essere spiegata in termini della pressione della radiazione, dovuta alla radiazione elettromagnetica del sole. Per valutare la pressione di radiazione sulla superficie della terra, dobbiamo tener presente che l'energia incidente vale circa 1.4×10^3 W m^{-2}, corrispondente ad una densità di energia (quando dividiamo per c) eguale a 4.7×10^{-6} J m^{-3}. Assumendo che la terra sia un perfetto assorbitore e che la radiazione provenga da tutte le direzioni, la pressione di radiazione è $P_{rad} = \frac{1}{3}E = 1.6 \times 10^{-6}$ N m^{-2}. Lo studente dovrebbe confrontare questo valore con quello della pressione atmosferica, che vale circa 10^5 N m^{-2}.

19.4 *Radiazione da un dipolo elettrico oscillante*

Nella nostra discussione, finora, abbiamo considerato onde elettromagnetiche senza accennare al modo in cui esse sono prodotte; in altre parole, senza spiegare che cosa sono le *sorgenti* di onde elettromagnetiche. Se, per esempio, stiamo trattando di onde elastiche (come il suono), diciamo che la sorgente delle onde è un qualche corpo vibrante, come una membrana di tamburo o una corda di violino. Nel caso di onde elettromagnetiche, le sorgenti delle onde coincidono ovviamente con le sorgenti del campo elettromagnetico; cioè cariche elettriche in moto. Dato un insieme di cariche in moto, le equazioni di Maxwell ci forniscono (in linea di principio) il campo elettromagnetico che esse producono, e quindi la natura delle onde elettromagnetiche risultanti. Invece di considerare la soluzione generale delle equazioni di Maxwell per cariche in moto generico (che è importantissimo problema teorico, ma troppo complicato per essere discusso in questo libro), considereremo due altri casi importanti. Uno è il caso delle cariche in moto che costituiscono un dipolo elettrico oscillante e l'altro è il caso delle cariche in moto che corrispondono ad un dipolo magnetico oscillante.

Il caso di un dipolo elettrico oscillante si ha quando il moto delle cariche può essere descritto collettivamente da un dipolo elettrico il cui momento cambia con il tempo secondo la legge $\Pi = \Pi_0 \sin \omega t$.* Questo potrebbe essere il caso, per esempio, di un elettrone all'interno di un atomo, quando il movimento normale dell'elettrone viene perturbato, o una corrente oscillante in un'antenna lineare di una stazione trasmittente. Quando il momento di dipolo elettrico è costante, il solo campo prodotto è elettrico, come illustrato nel Paragrafo 14.11. Ma quando il momento di dipolo elettrico è oscillante, anche il campo elettrico è oscillante, ed è perciò funzione del tempo. Ciò significa che, come stabilito dalla legge di Ampère-Maxwell, è presente anche un campo magnetico. Questo può essere anche ricavato dal fatto che un dipolo elettrico oscillante è equivalente ad una corrente oscillante lineare, e una corrente elettrica produce sempre intorno ad essa un campo magnetico.

La soluzione delle equazioni di Maxwell nel caso di un dipolo elettrico oscillante è un problema troppo difficile dal punto di vista matematico per essere qui presentato, ma possiamo usare la nostra intuizione fisica per determinare le principali caratteristiche. In punti molto vicini al dipolo elettrico, l'effetto di ritardo dovuto alla velocità finita di propagazione

*Il simbolo Π è usato per il dipolo elettrico in questo capitolo per evitare confusioni con la quantità di moto e la pressione.

The existence of radiation pressure, which has been verified experimentally and is responsible for several important phenomena, provides an indirect verification of Eq. (19.19). For example, the curvature of a comet tail can be explained in terms of radiation pressure, due to the electromagnetic radiation from the sun. To estimate the radiation pressure on the earth's surface, we must consider that the incident energy is about 1.4×10^3 W m^{-2}, corresponding to an energy density (when we divide by c) equal to 4.7×10^{-6} J m^{-3}. Assuming that the earth is a perfect absorber and that the radiation comes from all directions, the radiation pressure is $P_{rad} = \frac{1}{3}E = 1.6 \times 10^{-6}$ N m^{-2}. The student should compare this with the atmospheric pressure, which is about 10^5 N m^{-2}.

19.4 Radiation from an Oscillating Electric Dipole

In our discussion, so far, we have considered electromagnetic waves without mentioning how they are produced; in other words, without explaining what the *sources* of the electromagnetic waves are. If, for example, we are dealing with elastic waves (such as sound) we say that the source of the waves is some vibrating body, such as a drum's membrane or a violin's string. In the case of electromagnetic waves the sources of the waves are obviously the same as the sources of the electromagnetic field; that is, moving electric charges. Given a set of charges in motion, Maxwell's equations give us (in principle) the electromagnetic field they produce, and therefore the nature of the resulting electromagnetic waves. Instead of considering the general solution of Maxwell's equations for charges in arbitrary motion (which is a very important theoretical problem, but too complicated to be discussed in this book), we shall concentrate on two other important cases. One is the case of moving charges which constitute an oscillating electric dipole and the other is the case of moving charges which correspond to an oscillating magnetic dipole.

The case of an oscillating electric dipole arises when the motion of the charges can be described collectively by an electric dipole whose moment changes with time according to the law $\Pi = \Pi_0 \sin \omega t$.* This could be the case, for example, of an electron within an atom, when the normal motion of the electron is perturbed, or an oscillating current in a linear antenna of a broadcasting station. When the electric dipole moment is constant, the only field produced is electric, as explained in Section 14.11. But when the electric dipole moment is oscillating, the electric field is also oscillating, and is therefore time dependent. This means that in addition a magnetic field is present, as stated in the Ampère-Maxwell law. This can also be seen from the fact that an oscillating electric dipole is equivalent to a linear oscillating current, and an electric current always produces a magnetic field around it.

The solution of Maxwell's equations for the case of an oscillating electric dipole is too difficult a mathematical problem to be presented here, but we may use our physical intuition to determine its main characteristics. At points very close to the electric dipole, the effect of retardation due to the finite velocity of propagation

* The symbol Π is used for the electric dipole moment in this chapter to avoid confusion with momentum and pressure.

delle onde elettromagnetiche è trascurabile poichè la distanza r è molto piccola (si ricordi la discussione nel Paragrafo 15.14). Il campo è allora simile al campo creato da un dipolo elettrico stazionario, come calcolato nel Paragrafo 14.11. Cioè, se assumiamo che l'asse Z sia orientato parallelamente al dipolo, possiamo scrivere le componenti del campo elettrico come

e

$$\mathcal{E}_r = \frac{2\Pi \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2\Pi_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sin\omega t$$

and

$$\mathcal{E}_\theta = \frac{\Pi \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\Pi_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sin\omega t, \tag{19.20}$$

e il campo magnetico è trascurabile. A grandi distanze, tuttavia, la propagazione finita delle onde produce una modificazione nel campo. La soluzione dell'equazione d'onda per onde sferiche di eguale ampiezza in tutte le direzioni, data nel Paragrafo 18.11, suggerisce che in questo caso (per quanto non ci sia simmetria sferica ma piuttosto simmetria assiale intorno all'asse di oscillazione del dipolo), il campo elettromagnetico può dipendere asintoticamente dalla distanza secondo un fattore $1/r$, invece di $1/r^3$ come per le piccole distanze. (Ciò è confermato dalla effettiva soluzione delle equazioni di Maxwell.) Inoltre, a grandi distanze, quando una piccola porzione del fronte d'onda si comporta come un'onda piana, il campo elettrico dovrebbe essere perpendicolare alla direzione di propagazione, che è quella lungo il raggio vettore r, in modo che $\mathcal{E}_r = 0$. Il campo elettrico risulta essere allora

Direction of energy and momentum flow = Direzione del flusso di energia e della quantità di moto.

$$\mathcal{E} = \frac{\Pi_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin(kr - \omega t), \tag{19.21}$$

ed ha direzione indicata in Fig. 19.8. D'altra parte, il campo magnetico, che corrisponde ad una corrente lungo l'asse Z, deve essere rappresentato da linee di forza che sono circonferenze parallele al piano XY. Usando l'Eq. (19.14), abbiamo

$$\mathcal{B} = \frac{1}{c}\mathcal{E} = \frac{\Pi_0 \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin(kr - \omega t), \tag{19.22}$$

Fig. 19–8. Campi elettrico e magnetico prodotti da un dipolo elettrico oscillante.

con il campo orientato come indicato in Fig. 19—8, in modo che $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ siano perpendicolari. Si noti che sia $\mathcal{E}$ che $\mathcal{B}$ sono zero per $\theta = 0$ oppure π; cioè, per i punti lungo l'asse Z. Ciò significa che l'ampiezza dell'onda elettromagnetica di un dipolo elettrico oscillante vale zero lungo la direzione di oscillazione. D'altra parte, sin θ ha il suo valore massimo per $\theta = \pi/2$, cioè per punti appartenenti al piano XY. Perciò, l'onda elettromagnetica di un dipolo elettrico oscillante ha la sua intensità massima nel piano equatoriale. In ogni caso le onde sono polarizzate rettilineamente con il campo elettrico

of the electromagnetic waves is negligible because the distance r is very small (remember the discussion in Section 15.14). The field is then similar to the field created by a static electric dipole, as computed in Section 14.11. That is, if we assume that the Z-axis is oriented parallel to the dipole, we can write the components of the electric field as

and the magnetic field is negligible. At large distances, however, the finite propagation of the waves produces a modification in the field. The solution of the wave equation for spherical waves of equal amplitude in all directions, given in Section 18.11, suggests that in this case (although there is no spherical symmetry but rather axial symmetry around the axis of oscillation of the dipole), the electromagnetic field may depend asymptotically on the distance by a factor $1/r$, instead of $1/r^3$ as for small distances. (This is corroborated by the actual solution of Maxwell's equations.) In addition, at large distances, when a small portion of the wave front looks like a plane wave, the electric field should be perpendicular to the direction of propagation, which is along the radius vector r, so that $\mathcal{E}_r = 0$. The electric field is then found to be

and has the direction indicated in Fig. 19–8. On the other hand, the magnetic field, which corresponds to a current along the Z-axis, must be represented by lines of force that are circles parallel to the XY-axis. Using Eq. (19.14), we have

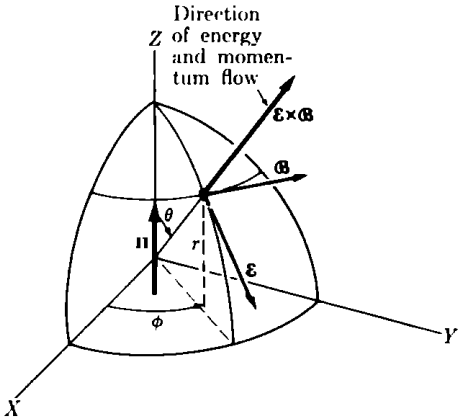


Fig. 19–8. Electric and magnetic fields produced by an oscillating electric dipole.

with the field oriented as indicated in Fig. 19–8, so that $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ are perpendicular. Note that both $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ are zero for $\theta = 0$ or π; that is, for points along the Z-axis. This means that the amplitude of the electromagnetic wave of an oscillating electric dipole is zero along the direction of oscillation. On the other hand, sin θ has its maximum value for $\theta = \pi/2$, or points on the XY-plane. Therefore, the electromagnetic wave of an oscillating electric dipole has its maximum intensity in the equatorial plane. In any case the waves are linearly polarized, with the electric field

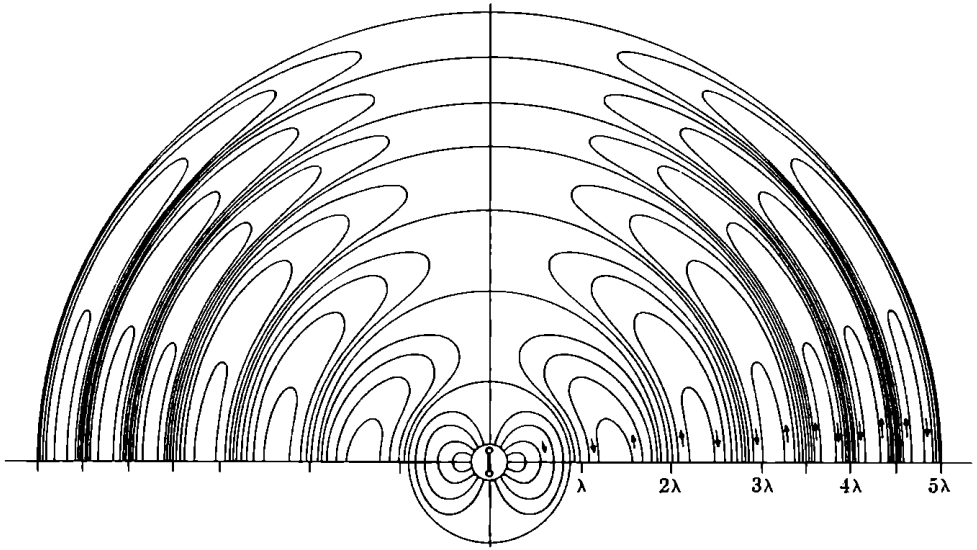


Fig. 19–9. Linee del campo elettrico prodotto da un dipolo elettrico oscillante.

Fig. 19–9. Electric field lines produced by an oscillating electric dipole.

oscillante in un piano meridiano. La Fig. 19—9 indica le linee di forza elettriche in un piano meridiano. Ogni linea chiusa corrisponde ad una oscillazione completa. Le linee di forza magnetiche sono circonferenze parallele al piano XY aventi i loro centri posti sull'asse Z.

Poichè il vettore $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ ha la direzione di $\boldsymbol{r}$, osserviamo come il flusso di energia e di quantità di moto avviene dal dipolo elettrico in direzione radiale, e perciò, per mantenere il dipolo elettrico in oscillazione, gli si deve fornire energia. Dalle Equazioni (19.15) e (19.21), si trova che la densità di energia in un'onda a grande distanza dal dipolo elettrico oscillante vale

La densità di energia media, essendo $[\sin^2 (kr - \omega t)]_{\text{med}} = \frac{1}{2}$, vale

$$\text{ave} = \text{med}$$

L'intensità della radiazione prodotta dal dipolo elettrico oscillante (cioè, l'energia che attraversa una unità di superficie nell'unità di tempo nella direzione di propagazione) secondo l'Eq. (19.16) vale

$$\text{ave} = \text{med}$$

Questa intensità mostra due caratteristiche interessanti. In primo luogo essa mostra la dipendenza $1/r^2$ che ci si attendeva dalla nostra discussione delle onde sferiche nel Paragrafo 18.11. Inoltre, essa mostra una dipendenza angolare, poichè è proporzionale a $\sin^2 \theta$. Quindi è massima nel piano equatoriale ed è nulla lungo l'asse del

oscillating in a meridian plane. Figure 19–9 shows the electric lines of force in a meridian plane. Each loop corresponds to one complete oscillation. The magnetic lines of force are circles parallel to the XY-plane with their centers on the Z-axis.

Since the vector $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ has the direction of $\boldsymbol{r}$, we see that energy and momentum flow away from the electric dipole in the radial direction, and therefore, to keep the electric dipole oscillating, energy must be supplied to it. If we use Eqs. (19.15) and (19.21), we find that the energy density in the wave at large distances from the oscillating electric dipole is

$$\text{E} = \epsilon_0 \mathcal{E}^2 = \frac{\Pi_0^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 r^2} \frac{\omega^4}{c^4} \sin^2 (kr - \omega t).$$

The average energy density, since $[\sin^2 (kr - \omega t)]_{\text{ave}} = \frac{1}{2}$, is

$$\text{E}_{\text{ave}} = \frac{\Pi_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^4 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta. \tag{19.23}$$

The intensity of the radiation from the oscillating electric dipole (that is, the energy passing per unit area and unit time in the direction of propagation) according to Eq. (19.16) is

$$I(\theta) = c\text{E}_{\text{ave}} = \frac{\Pi_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2 \theta. \tag{19.24}$$

This intensity shows two interesting peculiarities. In the first place it exhibits the $1/r^2$ dependence that we expected from our discussion of spherical waves in Section 18.11. In addition it has an angular dependence, since it is proportional to $\sin^2 \theta$. Therefore it is maximum at the equatorial plane and zero along the axis of the

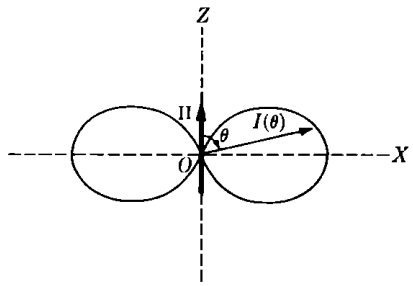


Fig. 19–10. Dipendenza angolare dell'intensità della radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante.

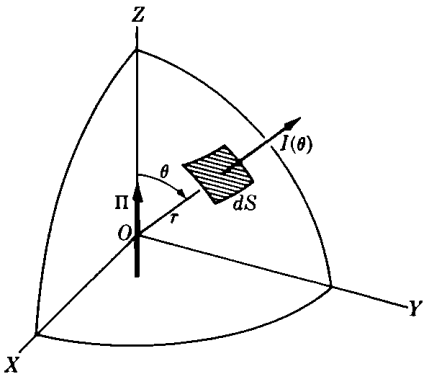


Fig. 19–11. Calcolo dell'energia totale irradiata nell'unità di tempo da un dipolo elettrico oscillante.

dipolo elettrico oscillante. Ciò significa che *un dipolo elettrico oscillante non irradia energia lungo il suo asse*. In Fig. 19–10 è mostrata la dipendenza angolare di $I(\theta)$.

Per calcolare l'energia totale irradiata nell'unità di tempo dal dipolo, procediamo nel seguente modo. Tenendo presente che l'energia fluisce nella direzione radiale (si ricordi la Fig. 19–8), possiamo tracciare una sfera di raggio molto grande intorno al dipolo (Fig. 19–11). L'energia che passa nell'unità di tempo attraverso la piccola area dS è $I(\theta)\, dS$. e perciò l'energia totale irradiata nell'unità di tempo è

Sphere = Sfera

Il calcolo di questo integrale è un esercizio puramente matematico, che verrà qui omesso. Il risultato è

Poichè il momento di dipolo elettrico può essere scritto come qz, dove q è la carica oscillante, e $z = z_0 \sin \omega t$, possiamo sostituire Π_0 con qz_0, z_0 è l'ampiezza delle oscillazioni. In molti casi, si tratta di un protone o di un elettrone che oscilla entro un nucleo od un atomo; cosicchè q è eguale alla carica fondamentale $\pm e$. Quindi l'Eq. (19.26) diventa

Nel caso di un elettrone in un atomo, la quantità z_0 è dell'ordine di grandezza delle dimensioni atomiche, o circa 10^{-10} m. Introducendo i valori delle altre costanti, vediamo allora che per una radiazione da un dipolo elettrico atomico,

Fig. **19–10.** Angular dependence of the intensity of the electromagnetic radiation produced by an oscillating electric dipole.

Fig. 19–11. Calculation of the total energy radiated per unit time by an oscillating electric dipole.

oscillating electric dipole. This means that *an oscillating electric dipole does not radiate energy along its axis*. The angular dependence of $I(\theta)$ is shown in Fig. 19–10.

To compute the total energy radiated per unit time by the dipole, we must proceed as follows. Noting that the energy flows in the radial direction (recall Fig. 19–8), we may draw a sphere of very large radius around the dipole (Fig. 19–11). The energy passing per unit time through the small area dS is $I(\theta)\, dS$, and therefore the total energy radiated per unit time is

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\text{Sphere}} I(\theta)\, dS. \tag{19.25}$$

The computation of this integral is a pure mathematical exercise, which will be omitted. The result is

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\Pi_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \tag{19.26}$$

Since the electric dipole moment may be written as qz, where q is the oscillating charge, and $z = z_0 \sin \omega t$, we may replace Π_0 by qz_0, where z_0 is the amplitude of the oscillations. In many cases it is a proton or an electron that is oscillating within a nucleus or an atom, so that q is equal to the fundamental charge $\pm e$. Then Eq. (19.26) becomes

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2 z_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \tag{19.27}$$

In the case of an electron in an atom, the quantity z_0 is of the order of magnitude of the atomic size, or about 10^{-10} m. Introducing the values of the other constants, we see then that for atomic electric dipole radiation,

$$\frac{dE}{dt} \sim 10^{-74} \omega^4 \text{ W}.$$

Nella regione ottica, ω ha un valore dell'ordine di 10^{14} Hz; ciò significa che $dE/dt \sim 10^{-18}$W o 10 eV s^{-1}, valore piccolo rispetto alle grandezze normali dell'ingegneria, ma apprezzabile dal punto di vista atomico.

La radiazione da un dipolo elettrico è uno dei metodi più efficaci di produrre onde elettromagnetiche e costituisce il più importante meccanismo per mezzo del quale atomi, molecole, e nuclei emettono (e assorbono) radiazione elettromagnetica. Tuttavia, per discutere la radiazione di un dipolo elettrico da atomi, molecole, e nuclei, si devono usare i metodi della meccanica quantistica. Perciò i risultati stabiliti qui e nei successivi paragrafi possono dare solo una stima approssimata degli ordini di grandezze interessati. Uno dei più importanti risultati sperimentali che va esaminato nella trattazione secondo la meccanica quantistica è che un atomo non emette radiazione in continuazione, ma ad impulsi. Un altro risultato sperimentale di cui si deve tenere conto è che la radiazione emessa dagli atomi (o molecole o nuclei) è composta da un insieme ben definito di frequenze ω_1, ω_2, ω_3, . . . , caratteristico di ciascun atomo, molecola, o nucleo, detto *spettro di emissione* della sostanza, fatto da noi ricordato nel Paragrafo 16.7.

Come è stato detto quando abbiamo discusso la Fig. 19—9, la radiazione di dipolo elettrico è polarizzata, con il campo elettrico sempre in un piano meridiano. Tuttavia, il nostro occhio non sembra essere sensibile alla direzione di polarizzazione dell'onda elettromagnetica, e noi non possiamo riconoscere questa importante proprietà ad occhio nudo. È interessante, tuttavia, che certi insetti sembrano essere sensibili alla polarizzazione. In aggiunta, in molte sostanze i dipoli atomici irraggianti sono orientati in modo casuale e non si osserva alcuna polarizzazione risultante nella radiazione totale da questa sostanza.

ESEMPIO 19.2. Si applichi l'Eq. (19.27) per calcolare la potenza trasmessa dall'antenna di una stazione radio.

Soluzione: Una antenna, in forma semplificata, è in effetti un filo di lunghezza z_0 in cui è mantenuta una corrente oscillante. La corrente è posta in relazione con le cariche dalla $I = dq/dt$, e quindi l'ampiezza della corrente è $I_0 = q\omega$. Perciò $\Pi_0 = qz_0 = I_0 z_0/\omega$. Introducendo questa relazione nell'Eq. (19.26), abbiamo

Questa espressione dà la potenza richiesta da una stazione trasmittente di pulsazione ω. Dalla nostra discussione della legge di Ohm applicata ai circuiti con correnti alternate (Paragrafo 17.10) abbiamo che la potenza media richiesta per mantenere una corrente è $\frac{1}{2}RI_0^2$ [Eq. (17.40)]. Conseguentemente, possiamo scrivere l'Eq. (19.28) nella forma

e per analogia chiamare

In the optical region, ω is of the order of 10^{14} Hz, which means that $dE/dt \sim 10^{-18}$ W or 10 eV s^{-1}, a quantity small by engineering standards but appreciable from the atomic point of view.

Electric dipole radiation is one of the most effective ways of producing electromagnetic waves and constitutes the most important mechanism by which atoms, molecules, and nuclei emit (and absorb) electromagnetic radiation. However, to discuss electric dipole radiation by atoms, molecules, and nuclei, we must use the methods of quantum mechanics. Therefore the results stated here and in succeeding sections can give only a rough estimate of the orders of magnitude involved. One of the more important experimental results to be considered in the quantum-mechanical treatment is that an atom does not emit radiation continuously, but in bursts. Another experimental result that must be accounted for is that the radiation emitted by atoms (or molecules or nuclei) is composed of a well-defined set of frequencies ω_1, ω_2, ω_3, . . . , characteristic of each atom, molecule, or nucleus, called the *emission spectrum* of the substance, a fact that we mentioned in Section 16.7.

As we said when we were discussing Fig. 19–9, electric dipole radiation is polarized, with the electric field always in a meridian plane. However, our eye does not seem to be sensitive to the direction of polarization of an electromagnetic wave, and we cannot recognize this important property with the naked eye. It is interesting that certain insects, however, do seem to be sensitive to polarization. In addition, in most substances the radiating atomic dipoles are oriented at random and no net polarization is observed in the total radiation from the substance.

EXAMPLE 19.2. Apply Eq. (19.27) to calculate the power transmitted by the antenna of a radio station.

Solution: An antenna, in simplified form, is just a wire of length z_0 in which an oscillating current is maintained. The current is related to the charges by $I = dq/dt$, and therefore the current amplitude is $I_0 = q\omega$. Therefore $\Pi_0 = qz_0 = I_0 z_0/\omega$. Introducing this relation into Eq. (19.26), we have

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I_0^2 \omega^2 z_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \tag{19.28}$$

This expression gives the power required by a broadcasting station of frequency ω. From our discussion of Ohm's law applied to circuits with alternating currents (Section 17.10) we have that the average power required to maintain a current is $\frac{1}{2}RI_0^2$ [Eq. (17.40)]. Accordingly, we may write Eq. (19.28) in the form

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega^2 z_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\right) I_0^2, \tag{19.29}$$

and by analogy call

$$R = \frac{\omega^2 z_0^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\left(\frac{z_0}{\lambda}\right)^2 \tag{19.30}$$

la *resistenza di radiazione* dell'antenna. Essa è espressa in ohm, come si può verificare dalle sue dimensioni in funzione delle unità fondamentali. La resistenza totale dell'antenna è, naturalmente, la resistenza di radiazione più la resistenza di conduzione. Introducendo i valori numerici nella Eq. (19.30), si ottiene $R = 787\ (z_0/\lambda)^2$ ohm. Si noti che abbiamo ricavato entrambe le Equazioni (19.29) e (19.30) per una antenna lineare nella approssimazione di un dipolo elettrico, e quindi queste equazioni sono valide solo se la lunghezza z_0 è molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione.

Come esempio, si consideri una antenna lineare di lunghezza 30 m che irradia onde elettromagnetiche di frequenza 5×10^5 Hz. Il vqm (o valore quadratico medio) della corrente è 20 A. Usando l'Eq. (19.30), con $\omega = 2\pi\nu = 3.14 \times 10^6\ s^{-1}$ e $z_0 = 30$ m, si ottiene $R = 1.97\ \Omega$ per la resistenza di radiazione. Poichè $I_{vqm} = I_0/\sqrt{2}$ (si ricordi il Problema 17.42), abbiamo $I_{vqm} = \frac{1}{2}I^2{}_0$. Perciò la potenza irradiata vale

$$\text{rms} = \text{vqm}$$

Si noti che in questo caso $\lambda = c/\nu = 600$ m, e perciò $z_0/\lambda \ll 1$, in modo che l'approssimazione fatta può ritenersi corretta.

19.5 Radiazione da un dipolo magnetico oscillante

Un'altra importante sorgente di onde elettromagnetiche è un dipolo magnetico oscillante. La discussione è molto simile a quella presentata per un dipolo elettrico, tranne che i ruoli dei campi elettrici e magnetici sono scambiati.

Nel Paragrafo 15.6 abbiamo definito un dipolo magnetico come una piccola spira percorsa da corrente, il momento magnetico essendo $\mathfrak{M} = IA$, dove I è la corrente ed A l'area della spira. Si supponga che la spira sia contenuta nel piano XY con il suo centro posto nell'origine (Fig. 19—12). Se la corrente oscilla in modo da essere espressa dalla $I = I_0 \sin \omega t$, il momento magnetico vale $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \sin \omega t$ dove $\mathfrak{M}_0 = I_0 A$. Un dipolo magnetico stazionario produce soltanto un campo magnetico costante. Ma quando il dipolo magnetico oscilla, il suo campo magnetico in ogni punto dello spazio è anche oscillante o funzione del tempo. Ciò significa che è anche presente un campo elettrico, in accordo con l'affermazione fatta quando si discuteva della legge di Faraday-Maxwell.

Fig. 19—12. Campi elettrico e magnetico prodotti da un dipolo magnetico oscillante.

Come nel caso di un dipolo elettrico oscillante, ometteremo la derivazione delle espressioni esatte dei campi elettrico e magnetico, a causa delle difficoltà matematiche. In punti vicini al dipolo magnetico, l'effetto di ritardo dovuto alla velocità finita di propagazione delle onde elettromagnetiche è trascurabile

the *radiation resistance* of the antenna. It is expressed in ohms, as may be verified from its dimensions in terms of fundamental units. The total resistance of the antenna is, of course, the radiation resistance plus the conduction resistance. Introducing numerical values in Eq. (19.30), we get $R = 787(z_0/\lambda)^2$ ohms. Note that we have derived both Eqs. (19.29) and (19.30) for a linear antenna by means of the electric dipole approximation, and thus these equations are valid only if the length z_0 is very small compared with the wavelength of the radiation.

As an example, consider a linear antenna 30 m in length which radiates electromagnetic waves of frequency 5×10^5 Hz. The rms (or root-mean-square) value of the current is 20 A. Using Eq. (19.30), with $\omega = 2\pi\nu = 3.14 \times 10^6\ s^{-1}$ and $z_0 = 30$ m, we get $R = 1.97\ \Omega$ for its radiation resistance. Since $I_{rms} = I_0/\sqrt{2}$ (remember Problem 17.42), we have $I_{rms} = \frac{1}{2}I_0^2$. Therefore the power radiated is

$$\frac{dE}{dt} = RI_{rms}^2 \sim 400 \text{ W}.$$

Note that in this case $\lambda = c/\nu = 600$ m, and therefore $z_0/\lambda \ll 1$, so that the approximation is correct.

19.5 Radiation from an Oscillating Magnetic Dipole

Another important source of electromagnetic waves is an oscillating magnetic dipole. The discussion is very similar to the one presented for an electric dipole, except that the roles of the electric and magnetic fields have been interchanged.

In Section 15.6 we defined a magnetic dipole as a small current loop, the magnetic moment being $\mathfrak{M} = IA$, where I is the current and A the area of the loop. Suppose that the loop is in the XY-plane with its center at the origin (Fig. 19–12). If the current oscillates so that it is given by $I = I_0 \sin \omega t$, the magnetic moment is $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \sin \omega t$, where $\mathfrak{M}_0 = I_0 A$. A static magnetic dipole produces only a constant magnetic field. But when the magnetic dipole oscillates, its magnetic field at each point of space is also oscillating or time dependent. This means that an electric field is also present, in accordance with the statement made when we were discussing the Faraday-Maxwell law.

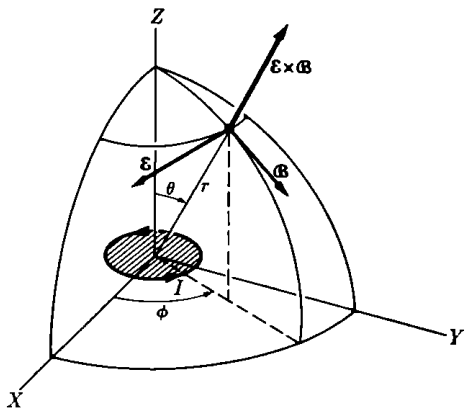


Fig. 19–12. Electric and magnetic fields produced by an oscillating magnetic dipole.

As in the case of the oscillating electric dipole, we shall omit the derivation of the exact expressions for the electric and magnetic fields, because of the mathematical difficulties. At points close to the magnetic dipole the effect of retardation due to the finite velocity of propagation of the electromagnetic waves is negligible

poichè la distanza r è molto piccola. Il campo è quindi simile a quello di un dipolo magnetico statico, che è stato illustrato nel Paragrafo 15.6. Cioè,

because the distance r is very small. The field is then similar to that of a static magnetic dipole, which was explained in Section 15.6. That is,

$$\mathcal{B}_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathfrak{M}\cos\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathfrak{M}_0\cos\theta}{r^3}\sin\omega t,$$
$$\mathcal{B}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}\sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}_0\sin\theta}{r^3}\sin\omega t, \tag{19.31}$$

ed il campo elettrico è trascurabile. A grandi distanze, tuttavia, la velocità finita di propagazione delle onde produce una sensibile modificazione del campo. Come nel caso di un dipolo elettrico, noi ci possiamo attendere una soluzione che dipende asintoticamente da $1/r$ invece che da $1/r^3$, come nelle Equazioni (19.31), con i campi elettrico e magnetico appartenenti ad un piano perpendicolare alla direzione di propagazione delle onde. Ci possiamo anche attendere che i ruoli dei campi elettrico e magnetico siano opposti a quelli che essi hanno nel caso del dipolo elettrico. Cioè, il campo magnetico giacerà in un piano meridiano ed il campo elettrico in una direzione trasversale, in modo tale che le linee di forza elettriche sono circonferenze concentriche con l'asse Z. Le loro espressioni nell'ambito di questa approssimazione sono

and the electric field is negligible. At large distances, however, the finite propagation velocity of the waves produces a noticeable modification of the field. As in the case of an electric dipole, we may expect a solution depending asymptotically on $1/r$ instead of $1/r^3$, as in Eqs. (19.31), with the electric and magnetic fields in a plane perpendicular to the direction of propagation of the waves. We may also expect that the roles of the electric and magnetic fields are the opposite of what they are in the electric dipole case. That is, the magnetic field will be in a meridian plane and the electric field in a transverse direction, so that the electric lines of force are circles concentric with the Z-axis. Their expressions under this approximation are

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 c}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}_0\sin\theta}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\sin(kr-\omega t)$$

e and (19.32)

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}_0\sin\theta}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\sin(kr-\omega t).$$

Si noti come la relazione $\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$ sia ancora valida. L'orientamento relativo dei campi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$ per un dipolo magnetico oscillante è illustrato in Fig. 19–12. Si noti come il vettore $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ abbia direzione radiale. L'onda è polarizzata in un piano, con il campo magnetico oscillante in un piano meridiano. In altre parole, il piano di polarizzazione è ruotato di 90° rispetto alle onde di dipolo elettrico. Ciò fornisce un mezzo per distinguere la radiazione di un dipolo elettrico dalla radiazione di un dipolo magnetico.

Note that the relation $\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$ still holds. The relative orientation of fields $\mathcal{E}$ and $\mathcal{B}$ for an oscillating magnetic dipole is illustrated in Fig. 19–12. Note that the vector $\mathcal{E} \times \mathcal{B}$ is in the radial direction. The wave is plane polarized, with the magnetic field oscillating in a meridian field. In other words, the plane of polarization is rotated 90° with respect to the electric dipole waves. This affords a means of distinguishing electric dipole radiation from magnetic dipole radiation.

Con lo stesso ragionamento usato per ottenere l'Eq. (19.23), la densità media di energia della radiazione emessa da un dipolo magnetico oscillante è

By the same reasoning we used to obtain Eq. (19.23), the average energy density of the radiation emitted by an oscillating magnetic dipole is

$$\text{ave} = \text{med}$$

$$\mathrm{E}_{\text{ave}}(\theta) = \frac{\mathfrak{M}_0^2\omega^4}{32\pi^2\epsilon_0 c^6 r^2}\sin^2\theta. \tag{19.33}$$

L'intensità della radiazione del dipolo magnetico, $I(\theta) = c\mathrm{E}_{\text{med}}(\theta)$, è ancora zero lungo l'asse del dipolo (asse Z), ed è massima nel piano equatoriale, situazione questa simile a quella trovata nel caso del dipolo elettrico oscillante. L'energia media irradiata nell'unità di tempo del dipolo magnetico oscillante è

The intensity of the radiation from the magnetic dipole, $I(\theta) = c\mathrm{E}_{\text{ave}}(\theta)$, is again zero along the axis of the dipole (Z-axis), and is maximum in the equatorial plane, a situation similar to that found for the oscillating electric dipole. The average energy radiated per unit time by the oscillating magnetic dipole is

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mathfrak{M}_0^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^5}. \tag{19.34}$$

Questo risultato è ottenuto seguendo la medesima procedura suggerita per il dipolo elettrico.

This result is obtained by following the same procedure suggested for the electric dipole.

Nel caso di un elettrone in un atomo abbiamo, dalla Eq. (15.27), che $\mathfrak{M}_0 = -(e/2m_e)L$, dove L è il momento della quantità di moto orbitale dell'elettrone, in modo che

La quantità $e/2m_e$ è 1.759×10^{11} C kg^{-1}, e il momento della quantità di moto L è dell'ordine di 10^{-34} J s^{-1} (vedi Esempio 15.7), di modo che

Perciò, quando confrontiamo questo con il corrispondente risultato per un dipolo elettrico, concludiamo che per gli atomi (ed anche per le molecole), il rapporto tra l'intensità della radiazione di dipolo magnetico e la radiazione del dipolo elettrico è dell'ordine di 10^{-6}. Ciò indica che per la medesima frequenza la radiazione di dipolo magnetico dagli atomi è trascurabile nei confronti della radiazione di dipolo elettrico, e deve essere tenuta presente solo quando per qualche ragione la radiazione di dipolo elettrico è assente, questione questa che non sarà discussa qui, in quanto la sua analisi richiede l'impiego della meccanica quantistica. Effettivamente, poichè $L = mrv$ e r e z_0 sono dello stesso ordine di grandezza, troviamo che

Magnetic dipole = Dipolo magnetico
Electric dipole = Dipolo elettrico

in modo che solo per elettroni molto veloci i due termini sono confrontabili. Tuttavia, nei nuclei, la radiazione di dipolo magnetico è relativamente più intensa che negli atomi e nelle molecole.

ESEMPIO 19.3. Discutere la radiazione di dipolo magnetico prodotto da una antenna.

Soluzione: La formula (19.34) applicata ad una antenna irraggiante, con $\mathfrak{M}_0 = I_0 A$, dà la potenza media richiesta per alimentare l'antenna

Il confronto con l'Eq. (19.28) per un'antenna funzionante come dipolo elettrico dà

Magnetic dipole = Dipolo magnetico
Electric dipole = Dipolo elettrico

Ma $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$ ed A è dell'ordine di grandezza di z_0^2. Perciò

Magnetic dipole = Dipolo magnetico
Electric dipole = Dipolo elettrico

Poichè z_0 è normalmente molto più piccolo di λ per antenne trasmittenti, concludiamo di nuovo che il modo magnetico di radiazione è molto più debole del modo elettrico. È istruttivo applicare l'Eq. (19.37) al caso atomico. Allora z_0 è dell'ordine di 10^{-10} m e

In the case of an electron in an atom we have, from Eq. (15.27), that $\mathfrak{M}_0 = -(e/2m_e)L$, where L is the orbital angular momentum of the electron, so that

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(e/2m_e)^2 L^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^5}. \tag{19.35}$$

The quantity $e/2m_e$ is 1.759×10^{11} C kg^{-1}, and the angular momentum L is of the order of 10^{-34} J s^{-1} (see Example 15.7) so that

$$\frac{dE}{dt} \approx 10^{-80}\omega^4 \text{ W}.$$

Therefore, when we compare this with the corresponding result for an electric dipole, we conclude that for atoms (and also molecules) the ratio of the intensity of the magnetic dipole radiation to the electric dipole radiation is of the order of 10^{-6}. This indicates that for the same frequency the magnetic dipole radiation from atoms is negligible compared with the electric dipole radiation, and must be taken into consideration only when for some reason the electric dipole radiation is absent, a matter that will not be discussed here, because its analysis requires the use of quantum mechanics. Actually, since $L = mrv$ and r and z_0 are of the same order of magnitude, we find that

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Magnetic dipole}} \approx \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{Electric dipole}},$$

so that only for very fast electrons are the two comparable. However, in nuclei, the magnetic dipole radiation is relatively more intense than in atoms and molecules.

EXAMPLE 19.3. Discuss the magnetic dipole radiation from an antenna.

Solution: Formula (19.34) applied to a radiating antenna, with $\mathfrak{M}_0 = I_0 A$, gives the average power required to drive the antenna as

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I_0^2 A^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^5}. \tag{19.36}$$

Comparison with Eq. (19.28) for an electric dipole antenna gives

$$\frac{(dE/dt)_{\text{Magnetic dipole}}}{(dE/dt)_{\text{Electric dipole}}} = \left(\frac{A\omega}{z_0 c}\right)^2.$$

But $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$ and A is of the order of magnitude of z_0^2. Therefore

$$\frac{(dE/dt)_{\text{Magnetic dipole}}}{(dE/dt)_{\text{Electric dipole}}} \approx \left(\frac{2\pi z_0}{\lambda}\right)^2. \tag{19.37}$$

Since z_0 is normally much smaller than λ for broadcasting antennas, we conclude again that the magnetic mode of radiation is much weaker than the electric mode. It is instructive to apply Eq. (19.37) to the atomic case. Then z_0 is of the order of 10^{-10} m and in

nella regione ottica λ è circa 10^{-7} m, dando per il rapporto che appare nell'Eq. (19.37) un valore dell'ordine di 10^{-6}, in accordo con le nostre precedenti valutazioni. D'altra parte, per i nuclei, z_0 è dell'ordine di 10^{-14} m e λ è dell'ordine di 10^{-12} m, cosicchè il rapporto (19.37) è circa 10^{-4}, e la radiazione di dipolo magnetico è relativamente più importante che nel caso atomico.

ESEMPIO 19.4. Ottenere la resistenza di radiazione di una antenna a forma di spira. Applicare il risultato ad una antenna circolare di lunghezza 30 m percorsa da una corrente di valore quadratico medio 20 A oscillante con una frequenza di 5×10^5 Hz.

Soluzione: Dalla Eq. (19.36), abbiamo

in modo che la resistenza di radiazione vale

Nel nostro caso, il raggio è $30/2\pi$ m e l'area è $A = 900/4\pi = 71.6$ m^2. Gli altri valori sono gli stessi dell'Esempio 19.2. Perciò $R = 0.0012\ \Omega$. La potenza media irraggiata è

$$I_{rms}^2 = I_{vqm}^2$$

che dovrebbe essere confrontata con il risultato dell'Esempio 19.2.

19.6 Radiazione da multipoli oscillanti di ordine superiore

Nei due paragrafi precedenti abbiamo esaminato la radiazione emessa da dipoli elettrici e magnetici. Ma nei Capitoli 14 e 15 abbiamo appreso quanto riguarda i multipoli di ordine superiore, sia magnetici che elettrici, relativi a diverse configurazioni di cariche e correnti. Se questi multipoli oscillano, essi producono onde elettromagnetiche che differiscono per quanto riguarda la loro distribuzione angolare e lo stato di polarizzazione dalle onde di dipolo. In generale, tanto più è grande l'ordine del multipolo, tanto minore è l'intensità della radiazione quando viene confrontata con un dipolo di dimensioni simili ed eguale frequenza. Per esempio, se r_0 è l'ordine di grandezza delle dimensioni del sistema e λ la lunghezza d'onda, il rapporto tra la radiazione di quadrupolo elettrico e la radiazione di dipolo elettrico è dell'ordine di $(r_0/\lambda)^2$. Per gli atomi, r_0 è dell'ordine di 10^{-10} m, e per la luce visibile, λ è dell'ordine di 10^{-7} m, di modo che $(r_0/\lambda)^2$ è circa 10^{-6}. Per i nuclei, d'altra parte, r_0 è dell'ordine di 10^{-14} m e λ è dell'ordine di 10^{-12} m, in modo che $(r_0/\lambda)^2$ è circa 10^{-4}, e la radiazione di quadrupolo elettrico è relativamente più importante. Si noti come in entrambi i casi la radiazione di quadrupolo elettrico sia dello stesso ordine di grandezza della radiazione di dipolo magnetico. Questi risultati indicano come la radiazione di dipolo elettrico sia la più importante nei sistemi atomici. Tuttavia, in certi nuclei, devono essere tenute in considerazione le radiazioni di quadrupolo elettrico ed anche quelle di ottupolo elettrico. La radiazione di multipolo di ordine superiore è molto debole e raramente viene osservata, eccetto in condizioni molto particolari.

the optical region λ is about 10^{-7} m, giving a value of the order of 10^{-6} for the ratio appearing in Eq. (19.37), in agreement with our previous estimate. On the other hand, for nuclei, z_0 is of the order of 10^{-14} m and λ is of the order of 10^{-12} m, so that the ratio (19.37) is about 10^{-4}, and magnetic dipole radiation is relatively more important than in the atomic case.

EXAMPLE 19.4. Obtain the radiation resistance of an antenna in the form of a loop. Apply the result to a circular antenna of length 30 m which carries an rms current of 20 A oscillating with a frequency of 5×10^5 Hz.

Solution: From Eq. (19.36), we have

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{A^2\omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^5}\right) I_0^2,$$

so that the radiation resistance is

$$R = \frac{A^2\omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{8\pi^3}{3}\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 = 31{,}170\left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 \text{ ohms.}$$

In our case the radius is $30/2\pi$ m and the area is $A = 900/4\pi = 71.6$ m^2. The other values are the same as in Example 19.2. Therefore $R = 0.0012\,\Omega$. The average power radiated is

$$\frac{dE}{dt} = RI_{rms}^2 = 0.24 \text{ W},$$

which should be compared with the result of Example 19.2.

19.6 Radiation from Higher-Order Oscillating Multipoles

In the two previous sections we have considered the radiation emitted from electric and magnetic dipoles. But in Chapters 14 and 15 we learned about higher-order multipoles, both electric and magnetic, related to different charge and current arrangements. If these multipoles oscillate, they produce electromagnetic waves that differ in their angular distribution and state of polarization from the dipole waves. In general the higher the order of the multipole, the lower the intensity of the radiation when compared with a dipole of similar dimensions and the same frequency. For example, if r_0 is the order of magnitude of the dimensions of the system and λ the wavelength, the ratio between electric quadrupole radiation and electric dipole radiation is of the order of $(r_0/\lambda)^2$. For atoms, r_0 is of the order of 10^{-10} m, and for visible light, λ is of the order of 10^{-7} m, so that $(r_0/\lambda)^2$ is about 10^{-6}. For nuclei, on the other hand, r_0 is of the order of 10^{-14} m and λ is of the order of 10^{-12} m, so that $(r_0/\lambda)^2$ is about 10^{-4}, and electric quadrupole radiation is relatively more important. Note that in both cases electric quadrupole radiation is of the same order as the magnetic dipole radiation. These results show that electric dipole radiation is the most important in atomic systems. However, in certain nuclei, the electric quadrupole and even the electric octupole radiation must be taken into consideration. Higher-order multipole radiation is very weak and is seldom observed, except under very special conditions.

19.7 Radiazione da una carica accelerata

Nei Paragrafi 19.4 e 19.5 abbiamo discusso due meccanismi particolari di radiazione elettromagnetica: la radiazione di dipolo elettrico e magnetico. Ma è molto importante avere una conoscenza più generale del meccanismo della radiazione elettromagnetica. Si consideri prima il caso di una carica in moto uniforme; cioè, di una carica che si muove con velocità costante. I campi elettrici e magnetici di una tale carica sono stati discussi nel Paragrafo 15.13. Il campo elettrico è radiale e il campo magnetico è trasversale, con linee di forza circolari concentriche con le linee del moto. La Fig. 19–13 mostra il campo elettrico $\mathscr{E}$ ed il campo magnetico $\mathscr{B}$ in quattro punti simmetrici P_1, P_2, P_3, e P_4. In ciascun punto è stato indicato anche il vettore $\mathscr{E} \times \mathscr{B}$. Dalla figura si vede che quando sommiamo il contributo di $\mathscr{E} \times \mathscr{B}$ in tutti i punti dello spazio, le componenti perpendicolari alla direzione del moto si annullano l'un l'altra, mentre le componenti parallele alla direzione del moto hanno tutte la medesima direzione e si sommano l'un l'altra. Ciò significa che vi è un flusso risultante di energia nella direzione nella quale la carica si sta muovendo. Ciò si può comprendere fisicamente, poichè la particella trasporta con se il campo (e, perciò, anche l'energia del campo e la quantità di moto). Nei punti solidali al sistema di riferimento del laboratorio e che sono dietro alla carica in moto, il campo elettromagnetico è decrescente; mentre nei punti a destra della carica, il campo aumenta gradualmente della stessa quantità. Ciò implica un trasferimento di energia da sinistra a destra (cioè, nella direzione del moto della carica quando osservata dal nostro sistema di riferimento), e ciò dà luogo al suddetto flusso di energia.

Per vedere se viene irradiata energia dobbiamo calcolare il flusso del vettore $\mathscr{E} \times \mathscr{B}$ attraverso una superficie chiusa che circonda la carica. Usando l'Eq. (19.18) per una superficie chiusa, abbiamo

Come superficie chiusa sceglieremo una sfera di raggio r concentrico con la carica. Dalla Fig. 19–13, osserviamo che il vettore $\mathscr{E} \times \mathscr{B}$ è tangente alla superficie in tutti i suoi punti, ed è perciò perpendicolare al versore $\boldsymbol{u}_N$ normale alla superficie. Così

e il flusso di energia risultante attraverso la superficie chiusa è zero. Si conclude allora che

una carica che è in moto rettilineo uniforme non irradia energia elettromagnetica.

Ciò è di nuovo comprensibile poichè, nel sistema di riferimento inerziale della carica, il campo è statico e l'energia rimane costante, e

Fig. 19–13. Campi elettrico e magnetico prodotti da una carica in moto uniforme.

19.7 Radiation from an Accelerated Charge

In Sections 19.4 and 19.5 we discussed two special mechanisms of electromagnetic radiation: electric and magnetic dipole radiation. But it is very important to have a more general understanding of the mechanism of electromagnetic radiation. Let us consider first the case of a charge in uniform motion; that is, a charge moving with constant velocity. The electric and magnetic fields of such a charge were discussed in Section 15.13. The electric field is radial and the magnetic field is transverse, with circular lines of force concentric with the line of motion. Figure 19–13 shows the electric field $\mathscr{E}$ and the magnetic field $\mathscr{B}$ at four symmetric points P_1, P_2, P_3, and P_4. At each point the vector $\mathscr{E} \times \mathscr{B}$ has also been indicated. From the figure we see that when we add the contribution of $\mathscr{E} \times \mathscr{B}$ at all points of space, the components perpendicular to the direction of motion cancel each other, while the components parallel to the direction of motion are all in the same direction and add to each other. This means that there is a net flux of energy in the direction in which the charge is moving. This is understandable physically, since the particle carries the field (and therefore the field's energy and momentum as well) with itself. At points which are fixed in our laboratory frame of reference and which are behind the moving charge, the electromagnetic field is decreasing; while at points to the right of the charge, the field is being built up by the same amount. This requires a transfer of energy from left to right (that is, in the direction of motion of the charge when observed from our frame of reference), and this gives rise to the above energy flux.

To see if energy is radiated, we must compute the flux of the vector $\mathscr{E} \times \mathscr{B}$ through a closed surface surrounding the charge. Using Eq. (19.18) for a closed surface, we have

$$\frac{dE}{dt} = c^2\epsilon_0 \oint_S \mathscr{E} \times \mathscr{B} \cdot \boldsymbol{u}_N \, dS.$$

For our closed surface we shall choose a sphere of radius r concentric with the charge. From Fig. 19–13, we see that the vector $\mathscr{E} \times \mathscr{B}$ is tangent to the spherical surface at all its points, and is therefore perpendicular to the unit vector $\boldsymbol{u}_N$ normal to the surface. Thus

$$\mathscr{E} \times \mathscr{B} \cdot \boldsymbol{u}_N = 0$$

and the net energy flux across the spherical surface is zero. We conclude then that

a charge which is in uniform rectilinear motion does not radiate electromagnetic energy.

This again is understandable since, in the inertial frame of reference of the charge, the field is static and the energy remains constant, and

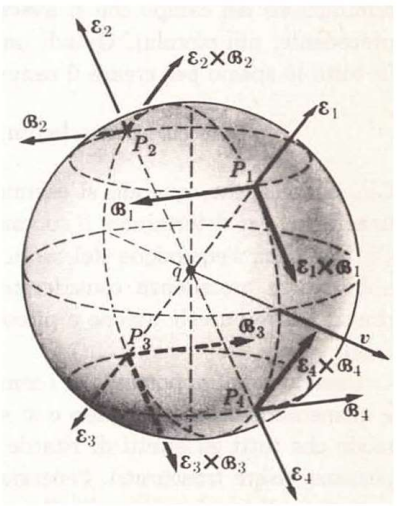


Fig. 19–13. Electric and magnetic fields of a uniformly moving charge.

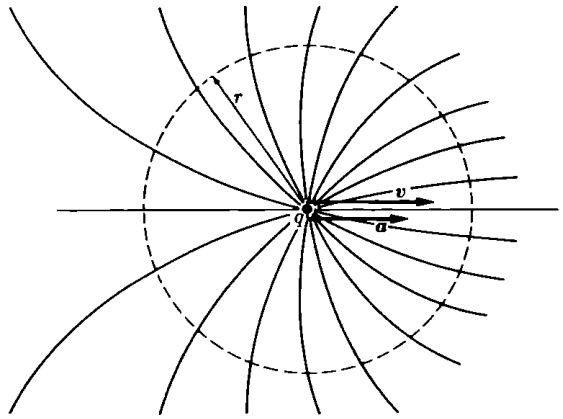


Fig. 19–14. Linee di forza elettriche prodotte da una carica accelerata.

Fig. 19–14. Electric lines of force produced by an accelerated charge.

così, nel sistema di riferimento del laboratorio, anche l'energia deve rimanere costante. Si ha semplicemente un flusso stazionario di energia lungo la direzione del moto della carica.

Una situazione completamente diversa si ha per una carica che si trovi in moto accelerato. Il campo elettrico di una carica accelerata non è più radiale e non ha la simmetria sinistra-destra che esso ha quando il moto è uniforme. Poichè l'espressione per il campo è molto complicata, non verrà data qui; ma le sue linee di forza hanno un andamento simile a quello mostrato in Fig. 19—14. Quando la particella si muove, il campo alla sinistra decresce e quello sulla destra aumenta ma, a causa della accelerazione, l'aumento del campo (che corrisponde alla nuova, più grande velocità) è maggiore della diminuzione del campo che si aveva precedentemente (e che corrisponde a una velocità precedente, più piccola). Quindi un eccesso di energia risultante deve essere trasferito in tutto lo spazio per creare il campo. Perciò

una carica accelerata irradia energia elettromagnetica.

Ciò significa che, quando si esamina il moto di una particella carica sotto l'azione di una forza, per determinare il suo moto, si deve tenere conto della radiazione di energia. Ciò complica l'equazione del moto della particella, ed il motivo per il quale noi non abbiamo in precedenza considerato questo fattore è che, nella maggior parte dei casi pratici (dove l'accelerazione è piccola e la velocità è piccola rispetto a c), esso è trascurabile.

Usando valori opportuni per i campi $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{B}$, possiamo provare che, se la carica accelerata è momentaneamente a riposo o si sta muovendo lentamente rispetto all'osservatore (in modo che tutti gli effetti di ritardo dovuti alla velocità finita di propagazione dell'onda possano essere trascurati), l'energia irradiata nell'unità di tempo e che attraversa una superficie di raggio r intorno alla carica vale

thus in the laboratory frame of reference the energy must also remain constant. There is merely a steady flow of energy along the direction of motion of the charge.

A very different situation exists for a charge which is in accelerated motion. The electric field of an accelerated charge is no longer radial and does not have the left-to-right symmetry it has when the motion is uniform. Since the expression for the field is very complicated, it will not be given here; but its lines of force have a pattern similar to that shown in Fig. 19–14. When the particle moves, the field on the left decreases and the one on the right increases but, because of the acceleration, the increase of the field (which corresponds to the new, larger velocity) is greater than the decrease of the field that existed previously (and which corresponds to an earlier, smaller velocity). Therefore a net excess energy must be transferred to all space to build up the field. Therefore

an accelerated charge radiates electromagnetic energy.

This means that, when we are considering the motion of a charged particle under an applied force, in order to determine its motion, we must take into account the radiation of energy. This complicates the equation of motion of the particle, and the reason that we have not previously considered this factor is that in most practical cases (where the acceleration is small and the velocity is small compared with c) it is negligible.

By using the appropriate values for the fields $\mathfrak{E}$ and $\mathfrak{B}$, we can prove that, if the accelerated charge is momentarily at rest or is moving slowly relative to the observer (so that all retardation effects due to the finite velocity of propagation of the wave can be neglected), the energy radiated per unit time and which crosses a surface of radius r around the charge is

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \tag{19.38}$$

dove a è l'accelerazione della carica. Questo risultato, detto *formula di Larmor*, è essenzialmente identico alla Eq. (19.26), poichè per una carica oscillante lungo l'asse Z, è $a = -\omega^2 z$. Perciò

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2 z^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3},$$

e per ottenere l'energia media irradiata, abbiamo bisogno di $(z^2)_{\text{med}}$, che è eguale a $\frac{1}{2}z_0^2$. Facendo questa sostituzione, otteniamo l'Eq. (19.26).

Una conclusione importante è che, per mantenere una carica in moto accelerato, dobbiamo fornire energia per compensare l'energia perduta per irraggiamento. Ciò significa che quando uno ione viene accelerato in un acceleratore lineare, come una macchina Van de Graaff, una frazione dell'energia fornita allo ione è perduta come radiazione elettromagnetica. Questa perdita, tuttavia, è trascurabile tranne che alle energie relativistiche.

Un'altra interessante teoria è che se tutta la massa è di origine elettrica, come abbiamo suggerito nell'Esempio 17.6, possiamo interpretare l'inerzia dicendo che essa è dovuta al fatto che una carica in moto accelerato necessita di una somministrazione di energia per poter creare il suo campo elettromagnetico. Quando questa energia non è disponibile, la carica decelera fino ad essere in quiete in un sistema inerziale. Tale argomentazione è, tuttavia, ancora aperta a ipotesi e discussione.

Se l'accelerazione è parallela alla velocità, la distribuzione angolare dell'energia irradiata segue la legge del $\sin^2\theta$ illustrata per un dipolo elettrico nella Fig. 19–10, fino a che la velocità della particella è piccola rispetto a c. Cioè, usando l'Eq. (19.24) con le necessarie modifiche (in particolare, sostituendo Π_0^2 con $q^2 z_0^2$ e $z_0\omega^2$ con l'accelerazione a, e notando che non si useranno valori medi, ma valori istantanei, in modo che un fattore $\frac{1}{2}$ va eliminato), troviamo che l'intensità della radiazione nella direzione determinata dall'angolo θ rispetto alla velocità può essere espressa dalla

$$I(\theta) = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^2} \sin^2\theta. \qquad (19.39)$$

La distribuzione angolare $I(\theta)$ è simmetrica rispetto ad un piano che contiene la carica ed è perpendicolare alla direzione del moto come indicato nella Fig. 19–15. Tuttavia, nella regione delle alte energie, l'intensità dell'energia irradiata da una carica accelerata ha il suo massimo su di una superficie conica orientata nella direzione del moto della particella, come indicato ancora nella Fig. 19–15. L'angolo del cono diminuisce quando aumenta la velocità della particella.

Se la particella, invece di essere accelerata, viene decelerata, la espressione (19.38)

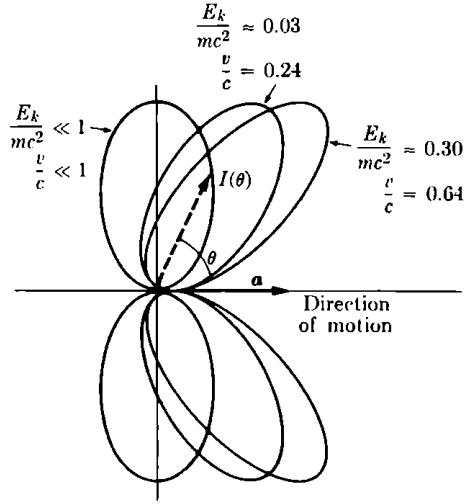


Fig. 19–15. Distribuzione angolare della radiazione emessa da una carica accelerata per diversi valori di v/c.

where a is the acceleration of the charge. This result, called *Larmor's formula*, is essentially identical to Eq. (19.26), since for an oscillating charge along the Z-axis $a = -\omega^2 z$. Therefore

and to obtain the average energy radiated we need $(z^2)_{\text{ave}}$, which is equal to $\frac{1}{2}z_0^2$ Making this substitution, we obtain Eq. (19.26).

One important conclusion is that, to maintain a charge in accelerated motion, we have to supply energy to compensate for the energy lost by radiation. This means that when an ion is accelerated in a linear accelerator, such as a Van de Graaff machine, a fraction of the energy supplied to the ion is lost as electromagnetic radiation. This loss, however, is negligible except at relativistic energies.

Another interesting speculation is that if all mass is of electric origin, as we suggested in Example 17.6, we could interpret inertia by saying that it is due to the fact that a charge with accelerated motion needs a supply of energy in order to build up its electromagnetic field. When this supply is not available, the charge decelerates until it is at rest in an inertial system. This subject, however, is still open to conjecture and discussion.

If the acceleration is parallel to the velocity, the angular distribution of the radiated energy follows the $\sin^2\theta$ law illustrated in Fig. 19–10 for an electric dipole, so long as the velocity of the particle is small compared with c. That is, using Eq. (19.24) with the necessary changes (namely, replacing Π_0^2 by $q^2 z_0^2$ and $z_0\omega^2$ by the acceleration a, and noting that we are not using average values but instantaneous values, so that a factor $\frac{1}{2}$ has to be removed), we find that the intensity of the radiation in the direction given by the angle θ with respect to the velocity can be expressed by

The angular distribution $I(\theta)$ is symmetric relative to a plane through the charge and perpendicular to the direction of motion, as shown in Fig. 19–15. However, in the high-energy region, the intensity of the energy radiated by an accelerated charge has its maximum over a conical surface oriented in the direction of motion of the particle, as indicated also in Fig. 19–15. The angle of the cone decreases when the velocity of the particle increases.

If the particle, instead of being accelerated, is decelerated, expression (19.38)

Fig. 19–15. Angular distribution of the radiation emitted by an accelerated charge for different values of v/c.

è ancora valida, e l'energia irradiata è quella che il campo elettromagnetico ha in eccesso in ogni istante come conseguenza della diminuzione della velocità della carica. Ciò è, per esempio, quanto accade quando una (particella) carica veloce, come un elettrone od un protone, colpisce un bersaglio. Una parte cospicua della sua energia totale è emessa sotto forma di radiazione, detta *radiazione di frenamento*, o più comunemente *bremsstrahlung* (dal tedesco *Bremsung*, decelerazione, e *Strahlung*, radiazione) (Fig. 19—16). È questo il principale meccanismo per mezzo del quale si produce radiazione nei tubi a raggi x usati nelle applicazioni fisiche, mediche, e industriali.

X-ray or bremsstrahlung = Raggi x o radiazione di frenamento

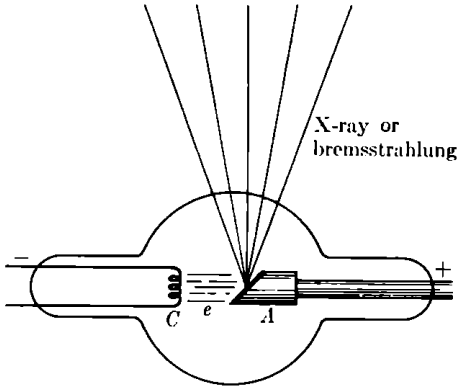


Fig. 19—16. Radiazione emessa da una carica decelerata quando colpisce il bersaglio *A* in un tubo a raggi x. Il bersaglio deve essere costituito da materiale avente alto punto di fusione e deve essere continuamente raffreddato.

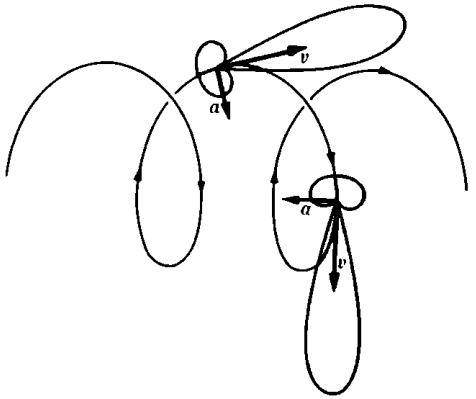


Fig. 19—17. Radiazione di sincrotrone di una particella che si muove in un campo magnetico. La distribuzione angolare dell'intensità è indicata in due posizioni. Sono state anche indicate le direzioni della velocità e della accelerazione.

Per quanto la Fig. 19—14 si riferisca al caso nel quale l'accelerazione ha la stessa direzione del moto, la nostra discussione è valida per qualsiasi tipo di moto in cui vi sia accelerazione. Per esempio, una particella carica che si muove in una traiettoria circolare possiede una accelerazione centripeta, e quindi emette radiazione. Perciò quando uno ione viene accelerato in un acceleratore ciclico, come un ciclotrone, un betatrone, o un sincrotrone, una frazione dell'energia fornitagli viene perduta come radiazione elettromagnetica, effetto che è relativamente più importante negli acceleratori ciclici che in quelli lineari. Non abbiamo tenuto conto di questo fatto nella nostra discussione precedente sul ciclotrone e sul betatrone, omissione che è giustificata quando l'energia implicata non è molto grande e l'accelerazione è piccola. Ma quando le particelle raggiungono alte energie, come succede nei sincrotroni, dove l'accelerazione è elevata, le perdite dovute alla radiazione, chiamata *radiazione di sincrotrone*, diventano molto importanti, e costituiscono un serio limite alla costruzione degli acceleratori ciclici di altissima energia. Quando una particella intrappolata in un campo magnetico percorre una spirale, come discusso nel Paragrafo 15.3, anche essa emette radiazione di sincrotrone.

Poichè la radiazione elettromagnetica viene emessa preferenzialmente in direzione perpendicolare alla accelerazione (si veda Fig. 19—15), e poichè l'accelerazione è diretta

still holds, and the energy radiated is that which the electromagnetic field has in excess at each moment as a result of the decrease in the velocity of the charge. This is what happens, for example, when a fast charge, such as an electron or a proton, hits a target. A substantial part of its total energy goes off as radiation, called *deceleration radiation*, or more commonly *bremsstrahlung* (from the German *Bremsung*, deceleration, and *Strahlung*, radiation) (Fig. 19–16). This is the main mechanism by which radiation is produced in x-ray tubes used for physical, medical, and industrial applications.

Fig. 19–16. Radiation emitted by a charge decelerated when hitting the target *A* in an x-ray tube. The target must be constructed from material with a high melting point and it must be continuously cooled.

Fig. 19–17. Synchrotron radiation of a particle moving in a magnetic field. The angular distribution of the intensity is shown at two positions. The directions of the velocity and acceleration are also shown.

Although Fig. 19–14 shows the case for which the acceleration is in the same direction as the motion, our discussion holds true for any kind of motion in which there is acceleration. For example, a charged particle moving in a circular path has a centripetal acceleration, and hence emits radiation. Therefore when an ion is accelerated in a cyclical accelerator, such as a cyclotron, a betatron, or a synchrotron, a fraction of the energy applied to it is lost as electromagnetic radiation, an effect which is relatively more important in cyclical than in linear accelerators. We did not take this fact into account in our previous discussion of the cyclotron and the betatron, an omission which is justified when the energy involved is not very great and the acceleration is small. But when particles reach high energies, as they do in synchrotrons, where the acceleration is large, the losses due to radiation, called *synchrotron radiation*, become very important, and constitute a serious limitation in the construction of cyclic accelerators of very high energy. When a particle trapped in a magnetic field spirals, as discussed in Section 15.3, it also emits synchrotron radiation.

Since electromagnetic radiation is emitted preferentially in a direction perpendicular to the acceleration (see Fig. 19–15), and since the acceleration is pointing

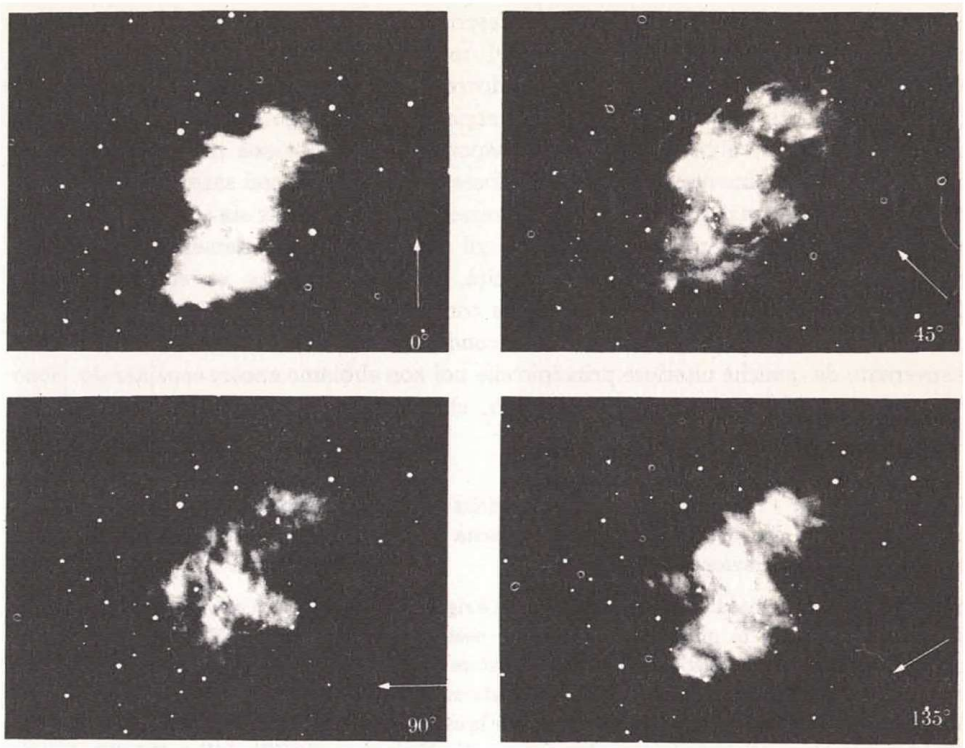


Fig. 19–18. Radiazione di sincrotrone della Nebulosa Crab. Ciascuna fotografia fu fatta attraverso un congegno che accetta soltanto radiazione avente il vettore elettrico come indicato. Il fatto che le fotografie sono differenti indica che la radiazione è polarizzata. (Le fotografie sono dovute alla cortesia degli Osservatori di Mt. Wilson e Mt. Palomar.)

Fig. 19–18. Synchrotron radiation from the Crab Nebula. Each photograph was taken through a device which accepts only radiation with the electric vector as shown. The fact that the photographs are different indicates that the radiation is polarized. (Photographs courtesy of Mt. Wilson and Palomar Observatories)

lungo l'asse dell'elica ed è perpendicolare alla velocità, concludiamo che la radiazione di sincrotrone è emessa principalmente nella direzione del moto entro un cono il cui asse è tangente alla traiettoria dell'elettrone, come indicato nella Fig. 19–17. È sostanzialmente di questo tipo la radiazione dovuta alle particelle cariche provenienti dalle macchie solari o da alcuni corpi più distanti (come certe nebulose) che sono intrappolate nel campo magnetico terrestre. Nella Fig. 19–18 sono riportate quattro fotografie della nebulosa Crab. Si pensa che la radiazione ricevuta, che si estende dalle radio-frequenze all'estremo ultravioletto, sia la radiazione di sincrotrone prodotta da elettroni aventi energie fino a circa 10^{12} eV, che si muovono su orbite circolari o elicoidali in un campo magnetico dell'ordine di 10^{-8} T. La radiazione presenta una forte polarizzazione, come si può vedere dalla differenza nelle fotografie, che sono state prese attraverso un filtro polarizzante, il quale permette di fotografare solo radiazioni con campo elettrico avente una determinata direzione. Le frecce indicano la direzione del campo elettrico.

Un'altra interessante considerazione è relativa alla struttura atomica. Nel Paragrafo 14.7 abbiamo suggerito che, come conseguenza dell'esperienza di Rutherford sulla diffusione delle particelle α, noi immaginiamo l'atomo come formato da un nucleo centrale, carico positivamente,

toward the axis of the helix and is perpendicular to the velocity, we conclude that synchrotron radiation is emitted mainly in the direction of motion within a cone whose axis is tangent to the electron's path, as indicated in Fig. 19–17. Radiation coming from the charged particles trapped in the earth's magnetic field, from sun spots, or from some more distant bodies (such as certain nebulae) are basically of this kind. Figure 19–18 shows four photographs of the Crab Nebula. The radiation received, which extends from radio frequencies to the extreme ultraviolet, is supposed to be synchrotron radiation from electrons with an energy up to about 10^{12} eV, moving in circular or helical orbits in a magnetic field of the order of 10^{-8} T. The radiation shows a strong polarization, as can be seen from the differences in the photographs, which were taken through a polarizing filter, allowing only radiation with the electric field in the specified direction to be photographed. The arrows indicate the direction of the electric field.

Another interesting consideration is related to atomic structure. In Section 14.7 we indicated that, as a result of Rutherford's experiments on the scattering of alpha particles, we picture the atom as formed by a central nucleus, positively charged,

e da elettroni carichi negativamente che descrivono orbite chiuse intorno ad esso. Ma ciò significa che gli elettroni si muovono di moto accelerato e, se applichiamo le idee espresse in questo paragrafo, tutti gli atomi dovrebbero irradiare energia in continuazione. Come conseguenza di questa perdita di energia, le orbite degli elettroni si dovrebbero restringere e vi dovrebbe essere una corrispondente diminuzione nelle dimensioni di tutti i corpi. Naturalmente, se tutti i corpi fossero identici, noi non saremmo in grado di rivelare questa contrazione, poichè essa interesserebbe ugualmente sia i corpi da misurare che il metro con cui si misura. Ma poichè gli atomi dei diversi elementi sono diversi, essi si restringerebbero con diverse velocità, e ciò produrrebbe un effetto notevole. Tuttavia, non è stata osservata nè questa contrazione della materia nè la radiazione continua associata ad essa. Quindi si deve concludere che il moto degli elettroni atomici è governato da qualche ulteriore principio che noi non abbiamo ancora considerato. Sono queste le leggi della meccanica quantistica, che modificano, entro certi limiti, alcuni dei risultati qui discussi.

ESEMPIO 19.5. Ricavare una espressione della energia irradiata nell'unità di tempo da una carica accelerata che sia valida per una velocità qualsiasi della carica e per una direzione qualsiasi della accelerazione.

Soluzione: La formula di Larmor, Eq. (19.38), è rigorosamente corretta solo quando la particella è momentaneamente in quiete rispetto ad un osservatore. Per ottenere il valore dell'energia irradiata dalla carica e misurata da un osservatore che vede la particella muoversi con velocità v, dobbiamo semplicemente effettuare una trasformazione di Lorentz di tutte le grandezze che appaiono in quella espressione. Si supponga che la carica sia momentaneamente in quiete rispetto ad un osservatore O' che si serve del sistema di riferimento $X'Y'Z'$. L'Eq. (19.38) diventa

Per un osservatore O, rispetto al quale la particella ha una velocità v e che si serve del sistema di riferimento XYZ, dobbiamo sostituire dE'/dt' con dE/dt. Ma dt e dt', poichè sono due intervalli di tempo relativi al medesimo punto in $X'Y'Z'$, sono posti in relazione dalla Eq. (6.34); cioè, $dt = dt'/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Analogamente, tra dE e dE' (che sono le variazioni di energia di una particella avente quantità di moto nulla rispetto a $X'Y'Z'$) esiste la relazione $dE = dE'/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, ottenuta dalla Eq. (11.27). (Un altro ragionamento potrebbe essere quello di ricordare che E/c si trasforma come ct, poichè entrambi sono la quarta componente di un quadrivettore.) Perciò, $dE/dt = dE'/dt'$, ed il primo membro resta lo stesso per entrambi gli osservatori.

Per trasformare il secondo membro della formula di Larmor, adoperiamo l'Eq. (6.39) per l'accelerazione della particella misurata da entrambi gli osservatori. Cioè,

Perciò

risultato noto come *formula di Lienard*, ricavata per la prima volta nel 1898, prima che si sviluppasse la teoria della relatività. Si può dimostrare che la formula di Lienard contiene già implicitamente gli effetti di ritardo dovuti alla velocità finita di propagazione della radiazione elettromagnetica.

with negatively charged electrons describing closed orbits around it. But this means that the electrons are moving with accelerated motion and, if we apply the ideas expressed in this section, all atoms would be radiating energy continuously. As a result of this loss of energy, the electron orbits would be shrinking, and there would be a corresponding contraction in size of all bodies. Of course, if all bodies were identical, we would not be able to detect this contraction, since it would affect the bodies measured and the measuring ruler equally. But since atoms of different elements are different, they would shrink at different rates, and this would produce a noticeable effect. However, neither this contraction of matter nor the continuous radiation associated with it has been observed. Therefore we must conclude that the motion of atomic electrons is governed by some additional principles which we have not yet considered. These are the laws of quantum mechanics, which modify, to a certain extent, some of the results discussed here.

EXAMPLE 19.5. Derive an expression for the energy radiated per unit time by an accelerated charge which is valid for any velocity of the charge and any direction of the acceleration.

Solution: Larmor's formula, Eq. (19.38), is strictly correct only when the particle is momentarily at rest relative to an observer. To obtain the value of the energy radiated by the charge as measured by an observer who sees the particle moving with velocity v, we must simply make a Lorentz transformation of all quantities involved in that expression. Suppose that the charge is momentarily at rest relative to an observer O' who uses the frame of reference $X'Y'Z'$. Equation (19.38) becomes

$$\frac{dE'}{dt'} = \frac{q^2 a'^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}.$$

For an observer O, relative to whom the particle has a velocity v and who uses frame XYZ, we have to replace dE'/dt' by dE/dt. But dt and dt', since they are two time intervals corresponding to the same point in $X'Y'Z'$, are related by Eq. (6.34); that is, $dt = dt'/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Similarly, dE and dE' (which are the changes in energy of a particle having zero momentum relative to $X'Y'Z'$) are related by $dE = dE'/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ obtained from Eq. (11.27). (An alternative logic would be to remember that E/c transforms as ct does, since they are both the fourth component of four-vectors.) Therefore $dE/dt = dE'/dt'$, and the left-hand side remains the same for both observers.

To transform the right-hand side of Larmor's formula, we use Eq. (6.39) for the acceleration of the particle as measured by both observers. That is,

$$a'^2 = \frac{a^2 - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}.$$

Therefore

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{a^2 - (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a})^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}, \tag{19.40}$$

a result known as *Lienard's formula*, first derived in 1898, before the theory of relativity was developed. It can be proved that Lienard's formula already incorporates the retardation effects due to the finite velocity of propagation of electromagnetic radiation.

Se l'accelerazione è parallela alla velocità, $v \times a = 0$, e l'Eq. (19.40) si riduce a

Questa è l'espressione che si deve usare per valutare le perdite di radiazione negli acceleratori lineari. D'altra parte, quando l'accelerazione è perpendicolare alla velocità, come nel caso di una orbita circolare, $(v \times a)^2 = v^2a^2$ e l'Eq. (19.40) diventa

È questa l'espressione che si deve usare per calcolare la radiazione di sincrotrone. Per velocità molto basse ($v \ll c$), allora $(dE/dt)_\parallel$ e $(dE/dt)_\perp$ diventano identiche all'Eq. (19.38).

ESEMPIO 19.6. Un protone viene accelerato in un acceleratore Van de Graaff attraverso una differenza di potenziale di 5×10^5 V. La lunghezza del tubo è 2 m. Si determini l'energia irradiata e la si confronti con l'energia acquistata.

Soluzione: Se t è il tempo richiesto dal protone per percorrere la lunghezza del tubo acceleratore, e v è la sua velocità finale, $v = at$, supposto che il moto non sia relativistico, ipotesi valida in questo caso. Perciò si applica l'Eq. (19.38). Osservando che l'accelerazione a è costante, vediamo che l'energia totale perduta dal protone per irraggiamento nel tempo t [ponendo $v = at$ e $q = l$ nell'Eq. (19.38)] è

Ma se s è la lunghezza del tubo acceleratore, $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(at)t = \frac{1}{2}vt$. Così $t = 2s/v$, e

D'altra parte, l'energia cinetica acquistata dall'elettrone nel muoversi attraverso la differenza di potenziale V è $E_k = \frac{1}{2}m_ev^2 = eV$. Così

poichè $v = (2eV/m_e)^{1/2}$. Introducendo i valori numerici, abbiamo che $E_{rad}/E_k = 8.4 \times 10^{-20}$. Perciò, in questa accelerazione, le perdite per irradiazione sono trascurabili.

ESEMPIO 19.7. Un protone viene accelerato in un ciclotrone avente raggio di 0.92 m. La frequenza del potenziale applicato alle "di" è 1.5×10^7 Hz, ed il valore di picco della differenza di potenziale è 20,000 V (si veda l'Esempio 15.3). Si confronti l'energia perduta per irradiazione in un giro con l'energia cinetica acquistata.

Soluzione: La massima energia cinetica acquistata dal protone in ciascun giro è $E_k = 2eV_{max}$ poichè attraversa lo spazio tra le armature due volte. L'accelerazione del protone vale

If the acceleration is parallel to the velocity, $v \times a = 0$ and Eq. (19.40) reduces to

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_\parallel = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0(1 - v^2/c^2)^3}. \tag{19.41}$$

This is the expression that must be used to estimate radiation losses in linear accelerators. On the other hand, when the acceleration is perpendicular to the velocity, as in the case of a circular orbit, $(v \times a)^2 = v^2a^2$ and Eq. (19.40) reduces to

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_\perp = \frac{q^2a^2}{6\pi\epsilon_0(1 - v^2/c^2)^2}. \tag{19.42}$$

This is the expression one must use for computing synchrotron radiation. At very low velocity ($v \ll c$), then $(dE/dt)_\parallel$ and $(dE/dt)_\perp$ become identical with Eq. (19.38).

EXAMPLE 19.6. A proton is accelerated in a Van de Graaff accelerator through a potential difference of 5×10^5 V. The length of the tube is 2 m. Determine the energy radiated and compare it with the energy gained.

Solution: If t is the time required by the proton to travel the length of the accelerator tube and v is its final velocity, $v = at$, assuming the motion is nonrelativistic, an assumption valid in this case. Therefore Eq. (19.38) applies. Noting that the acceleration a is constant, we see that the total energy lost by the proton through radiation in the time t [setting $v = at$ and $q = l$ in Eq. (19.38)] is

$$E_{rad} = \left(\frac{dE}{dt}\right)t = \frac{e^2v^2}{6\pi\epsilon_0c^3t}.$$

But if s is the length of the accelerator tube, $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(at)t = \frac{1}{2}vt$. Thus $t = 2s/v$ and

$$E_{rad} = \frac{e^2v^3}{12\pi\epsilon_0c^3s}.$$

On the other hand, the kinetic energy gained by the electron in going through the potential difference V is $E_k = \frac{1}{2}m_ev^2 = eV$. Thus

$$\frac{E_{rad}}{E_k} = \frac{e^2v}{6\pi\epsilon_0c^3m_es} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0c^3m_es}\left(\frac{2eV}{m_e}\right)^{1/2},$$

since $v = (2eV/m_e)^{1/2}$. Introducing numerical values, we have that $E_{rad}/E_k = 8.4 \times 10^{-20}$. Therefore radiation losses are negligible in this accelerator.

EXAMPLE 19.7. A proton is accelerated in a cyclotron having a radius of 0.92 m. The frequency of the potential applied to the dees is 1.5×10^7 Hz, and the peak value of the potential difference is 20,000 V (see Example 15.3). Compare the energy lost by radiation in one revolution with the kinetic energy gained.

Solution: The maximum kinetic energy gained by the proton in each revolution is $E_k = 2eV_{max}$, since it crosses the dees' gap twice. The acceleration of the proton is

$a = \omega^2 r = 4\pi^2\nu^2 r$, e possiamo trascurare gli effetti relativistici. Così l'Eq. (19.38), con $q = e$, ci dà

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2(4\pi^2\nu^2 r)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{8\pi^3 e^2 \nu^4 r^2}{3\epsilon_0 c^3},$$

e l'energia irradiata in un giro (tempo $= 1/\nu$) è

$$E_{\text{rad}} = \left(\frac{dE}{dt}\right)\frac{1}{\nu} = \frac{8\pi^3 e^2 \nu^3 r^2}{3\epsilon_0 c^3}.$$

Introducendo i valori numerici, abbiamo che $E_{\text{rad}}/E_k = 4.0 \times 10^{-15}$. Qui E_{rad} è ancora più piccola di E_k, ma è relativamente più importante rispetto al nostro precedente esempio sull'acceleratore lineare. Più grande è l'energia della particella, più rilevante è l'energia persa per irradiazione.

19.8 *Assorbimento della radiazione elettromagnetica*

Abbiamo discusso i meccanismi radiativi più importanti per mezzo dei quali può essere prodotta un'onda elettromagnetica. Dobbiamo ora analizzare il processo inverso e vedere cosa succede quando un'onda elettromagnetica interagisce con un atomo o con un sistema di cariche in modo che il sistema assorba energia dall'onda. L'assorbimento di energia da un'onda elettromagnetica è un problema complicato che richiede lunghi calcoli matematici e l'uso della meccanica quantistica, ma le idee fondamentali sono facili da comprendere. Quando un'onda elettromagnetica incontra un atomo, il campo elettrico e il campo magnetico dell'onda interagiscono con gli elettroni dell'atomo. Ora l'effetto del campo magnetico può essere trascurato in una prima approssimazione, poichè è dello stesso ordine di grandezza di $ev\,\mathcal{B} = (v/c)e\mathcal{E}$, dove v è la velocità dell'elettrone, e abbiamo usato la relazione $\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$, che è valida per onde elettromagnetiche piane. Concludiamo allora che l'interazione magnetica con un'onda elettromagnetica è v/c volte l'interazione elettrica $e\mathcal{E}$, e può perciò essere trascurata eccetto che per elettroni molto veloci.

Initial spectral distribution of incoming radiation = Distribuzione spettrale iniziale della radiazione incidente
Energy absorbed by the atom = Energia assorbita dall'atomo
Spectral distribution of transmitted radiation = Distribuzione spettrale della radiazione trasmessa

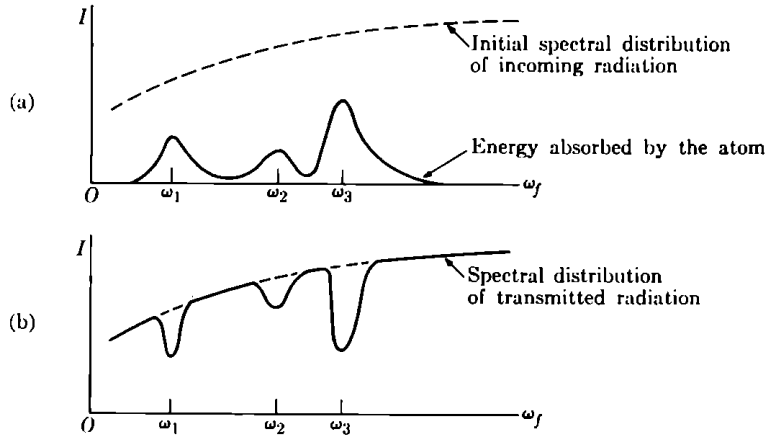


Fig. 19–19. Intensità della radiazione assorbita e trasmessa da una sostanza.

$a = \omega^2 r = 4\pi^2\nu^2 r$, and we may neglect relativistic effects. Thus Eq. (19.38), with $q = e$, yields

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2(4\pi^2\nu^2 r)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{8\pi^3 e^2 \nu^4 r^2}{3\epsilon_0 c^3},$$

and the energy radiated in one revolution (time $= 1/\nu$) is

$$E_{\text{rad}} = \left(\frac{dE}{dt}\right)\frac{1}{\nu} = \frac{8\pi^3 e^2 \nu^3 r^2}{3\epsilon_0 c^3}.$$

Introducing numerical values, we have that $E_{\text{rad}}/E_k = 4.0 \times 10^{-15}$. Here E_{rad} is still much smaller than E_k, but it is relatively more important than in our previous example of the linear accelerator. The larger the energy of the particle, the more serious is the energy loss by radiation.

19.8 *Absorption of Electromagnetic Radiation*

We have discussed the most important radiative mechanisms by which an electromagnetic wave can be produced. Now we must analyze the reverse process and see what happens when an electromagnetic wave interacts with an atom or a system of charges so that energy from the wave is absorbed by the system. The absorption of energy from an electromagnetic wave is a complicated problem that requires extensive mathematical calculations and the use of quantum mechanics, but the fundamental ideas are easy to understand. When an electromagnetic wave impinges on an atom, both the electric and magnetic fields of the wave interact with the electrons in the atom. Now the effect of the magnetic field can be neglected in a first approximation, because it is of the order of magnitude of $ev\mathcal{B} = (v/c)e\mathcal{E}$, where v is the electron's velocity, and we have used the relation $\mathcal{B} = \mathcal{E}/c$, which is valid for a plane electromagnetic wave. We conclude then that the magnetic interaction with an electromagnetic wave is v/c times the electric interaction $e\mathcal{E}$, and therefore may be neglected except for very fast electrons.

Fig. 19–19. Intensities of absorbed and transmitted radiation passing through a substance.

In una regione dello spazio che sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda (come in un atomo), il campo elettrico dell'onda elettromagnetica può essere scritto come $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega_f t$, poichè il termine x dell'espressione dell'onda è praticamente costante entro lo spazio della piccola regione in cui gli elettroni si muovono. La frequenza del campo è stata indicata con ω_f in accordo con la notazione del Paragrafo 12.13. La forza elettrica sull'elettrone è $-e\mathcal{E}$, e sotto l'azione di essa l'elettrone effettua oscillazioni forzate. Ricordando la nostra discussione del Paragrafo 12.13, possiamo concludere che la velocità alla quale l'energia è assorbita dall'elettrone (cioè, la potenza media trasmessa all'oscillatore dal campo elettrico dell'onda) è massima alla energia di risonanza. Ciò avviene quando la frequenza ω_f dell'onda è eguale alla frequenza propria dell'elettrone. Una più dettagliata analisi quantistica, che noi omettiamo, indica come questa frequenza sia una delle frequenze $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ dello spettro di emissione dell'atomo (o molecola) al quale l'elettrone è legato. In altre parole,

un atomo o una molecola assorbe preferenzialmente radiazione elettromagnetica quando la frequenza dell'onda elettromagnetica coincide con una delle frequenze del suo spettro di emissione,

o in forma più sintetica, gli spettri di emissione e di assorbimento di una sostanza sono composti dalle medesime frequenze.

La Fig. 19—19(a) mostra la distribuzione in intensità di un'onda incidente e l'energia assorbita da una sostanza in funzione della frequenza. La Fig. 18—19(b) mostra la distribuzione in intensità della radiazione trasmessa. Si noti la corrispondenza tra le due curve, poichè la radiazione trasmessa risulta diminuita alle frequenze che corrispondono ad un assorbimento preferenziale da parte dell'atomo.

Qual'è il risultato dell'assorbimento di energia da parte dell'atomo (o della molecola)? Questo assorbimento di energia determina una modificazione del moto degli elettroni corrispondente ad una nuova più elevata energia dell'atomo (o della molecola). Si dice allora che l'atomo (o la molecola) si trova in uno *stato eccitato*. Un atomo (o una molecola) eccitato può a sua volta, per mezzo di una radiazione di dipolo elettrico, riemettere l'eccesso di energia che ha assorbita.

Vi è in natura uno scambio continuo di energia tra atomi, molecole, e radiazione elettromagnetica. Il sole è la sorgente principale di radiazione elettromagnetica che raggiunge la terra. L'interazione della radiazione elettromagnetica proveniente dal sole con i corpi sulla superficie della terra è alla base della maggior parte dei fenomeni che noi osserviamo quotidianamente, compresa la stessa vita.

19.9 *Diffusione di onde elettromagnetiche da elettroni legati*

Quando un'onda elettromagnetica attraversa un atomo (o una molecola), disturba il moto degli elettroni legati, come illustrato nel Paragrafo precedente, e l'atomo (o la molecola) può essere lasciato in uno stato eccitato. Ma per il processo reciproco, poichè gli elettroni si comportano come dipoli elettrici che compiono oscillazioni forzate, l'atomo eccitato può emettere radiazione elettromagnetica avente la medesima frequenza dell'onda incidente senza apprezzabile ritardo di tempo. L'energia che l'atomo emette è stata assorbita

At a region of space which is small compared with the wavelength (such as in an atom), the electric field of the electromagnetic wave can be written as $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega_f t$, since the x part of the wave expression is practically constant over the dimensions of the small region where the electron moves. The frequency of the field has been designated by ω_f in accordance with the notation of Section 12.13. The electric force on the electron is $-e\mathcal{E}$, and under it the electron performs forced oscillations. Recalling our discussion of Section 12.13, we may conclude that the rate at which energy is absorbed by the electron (that is, the average power transferred to the oscillator by the wave's electric field) is maximum at energy resonance. This occurs when the frequency ω_f of the wave is equal to the natural frequency of the electron. A more detailed quantum-mechanical analysis, which we omit, shows that this frequency is any of the frequencies $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ of the emission spectrum of the atom (or molecule) to which the electron is bound. In other words,

an atom or molecule absorbs electromagnetic radiation preferentially when the frequency of the electromagnetic wave coincides with one of the frequencies of its emission spectrum,

or in a more synthetic form, the emission and absorption spectra of a substance are composed of the same frequencies.

Figure 19–19(a) shows the intensity distribution of an incident wave and the energy absorbed by a substance as functions of the frequency. Figure 19–19(b) shows the intensity distribution of the transmitted radiation. Note the correspondence between the two curves, since the transmitted radiation is depleted in the frequencies corresponding to favored absorption by the atom.

What is the result of energy absorption by the atom (or molecule)? This energy absorption results in an adjustment of the electronic motion to correspond to the new higher energy of the atom (or molecule). It is then said that the atom (or molecule) is left in an *excited state*. An excited atom (or molecule) may in turn, by means of electric dipole radiation, re-emit the excess energy it has absorbed.

In nature there is a continuous exchange of energy between atoms, molecules, and electromagnetic radiation. The sun is the main source of the electromagnetic radiation which reaches the earth. The interaction of electromagnetic radiation from the sun and the bodies on the earth's surface accounts for most of the phenomena we observe daily, including life itself.

19.9 *Scattering of Electromagnetic Waves by Bound Electrons*

When an electromagnetic wave passes through an atom (or molecule), it disturbs the motion of the bound electrons, as explained in the preceding section, and the atom (or molecule) may be left in an excited state. But by the reciprocal process, since the electrons act as forced oscillating electric dipoles, the excited atom may emit electromagnetic radiation of the same frequency as the incident wave without an appreciable time delay. The energy the atom emits has been absorbed from

dall'onda incidente per mezzo degli elettroni legati all'atomo. Questo processo è detto *diffusione*, e la radiazione emessa è l'*onda diffusa* (Fig. 19–20).

La diffusione contribuisce alla diminuzione dell'intensità dell'onda primaria o incidente poichè l'energia assorbita dall'onda viene riemessa in tutte le direzioni, dando luogo ad una effettiva sottrazione di energia dalla radiazione primaria.

Incident wave = Onda incidente
Scattered wave = Onda diffusa
Bound electron = Elettrone legato

Fig. 19–20. Diffusione di radiazione da un elettrone legato.

È stato osservato sperimentalmente che l'intensità delle onde diffuse dipende dalla frequenza dell'onda primaria e dall'angolo di diffusione. Per calcolare questa dipendenza è per prima cosa necessario determinare l'entità della perturbazione del moto degli elettroni atomici dovuta al campo elettrico dell'onda primaria; questa analisi deve essere compiuta per mezzo della meccanica quantistica.

Una caratteristica importante è che *le onde diffuse sono più intense quando la frequenza della radiazione incidente è eguale ad una delle frequenze* ω_1, ω_2, ω_3 . . . *dello spettro di emissione dell'atomo (o della molecola)*, risultato questo che è noto come *fluorescenza di risonanza.** Questo comportamento fisico era prevedibile poichè sembra ovvio che l'intensità della radiazione diffusa debba essere maggiore a quelle frequenze alla quali è maggiore l'assorbimento di energia dell'onda, e queste frequenze sono le stesse dello spettro di emissione dell'atomo (come illustrato nel Paragrafo 19.8). Tuttavia, a frequenze diverse da quelle dello spettro di emissione, la diffusione può ancora essere apprezzabile.

Un'altra interessante proprietà è che per i gas le cui molecole hanno uno spettro di emissione nella regione dell'ultravioletto (vedere Paragrafo 19.15), la diffusione di onde elettromagnetiche appartenenti alla regione del visibile aumenta con la loro frequenza. Ciò è facile a comprendersi, poichè più grande è la frequenza nella regione del visibile, più vicina essa è alla frequenza di risonanza ultravioletta della molecola e più grande è l'ampiezza delle oscillazioni forzate. Ciò dà origine a una maggior diffusione. Come esempio, lo splendore ed il colore azzurro del cielo sono attribuiti alla diffusione della luce del sole dalle molecole dell'aria. In particolare, il colore azzurro è la conseguenza di una diffusione più intensa delle frequenze più alte (o delle lunghezze d'onda più corte). Il medesimo processo giustifica il colore rosso brillante osservato all'alba o al tramonto, quando i raggi del sole attraversano un grandissimo spessore di aria prima di raggiungere la superficie della terra, dando luogo ad una forte attenuazione delle alte frequenze (o corte lunghezze d'onda) a causa della diffusione.

La diffusione può anche essere prodotta da piccole particelle (come fumo o polvere) o goccioline d'acqua (come nuvole) sospese in aria. Liquidi contenenti una sospensione di particelle, come in un colloide, mostrano una forte diffusione; questo è detto *effetto Tyndall.*

*Nella regione visibile dello spettro elettromagnetico, la luminescenza indotta in una sostanza risultante dall'assorbimento della radiazione e dalla susseguente emissione è detta *fluorescenza*, quando il ritardo di tempo tra assorbimento ed emissione è minore di 10^{-8} s. Quando questo ritardo di tempo è più lungo, il fenomeno è detto *fosforescenza*. La radiazione fluorescente e quella fosforescente non hanno necessariamente la stessa frequenza.

the incident wave by the atom's bound electrons. This process is called *scattering*, and the radiation emitted is the *scattered wave* (Fig. 19–20).

Scattering helps to decrease the intensity of the primary or incident wave because the energy absorbed from the wave is re-emitted in all directions, resulting in an effective removal of energy from the primary radiation.

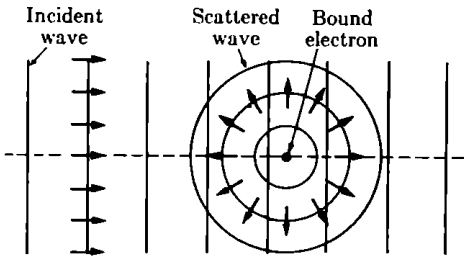


Fig. 19–20. Scattering of radiation by a bound electron.

It has been observed experimentally that the intensity of the scattered waves depends on the frequency of the primary wave and on the angle of scattering. To calculate this dependence it is first necessary to determine the extent of the perturbation of the motion of the atomic electrons by the electric field of the primary wave; this analysis must be accomplished by means of quantum mechanics.

One important feature is that *the scattered waves are more intense when the frequency of incident radiation is equal to one of the frequencies* ω_1, ω_2, ω_3, . . . *of the emission spectrum of the atom (or molecule)*, a result which is known as *resonant fluorescence.** This physical behavior should be expected, since it seems obvious that the intensity of the scattered radiation must be greater at those frequencies at which the energy absorption from the wave is greater, and these are the same frequencies as the emission spectrum of the atom (as explained in Section 19.8). However, at frequencies different from those of the emission spectrum, scattering may still be appreciable.

Another interesting property is that for gases whose molecules have an emission spectrum in the ultraviolet region (see Section 19.15) the scattering of electromagnetic waves falling in the visible region increases with their frequency. This is easy to understand, since the larger the frequency in the visible region, the closer it is to the ultraviolet resonant frequency of the molecule and the larger the amplitude of the forced oscillations. This results in a greater scattering. As an illustration, the brightness and blue color of the sky are attributed to the scattering of sunlight by the air molecules. In particular the blue color is the result of the more intense scattering of the higher frequencies (or shorter wavelengths). The same process accounts for the bright red colors observed at sunrise and at sunset, when the sun's rays traverse a very large thickness of air before reaching the earth's surface, resulting in a strong attenuation of the high frequencies (or short wavelengths) on account of scattering.

Scattering can also be produced by small particles (such as smoke or dust) or water droplets (such as clouds) suspended in the air. Liquids carrying a suspension of particles, as in a colloid, show a strong scattering; this is called the *Tyndall effect.*

* In the visible region of the electromagnetic spectrum, the luminescence induced in a substance resulting from radiation absorption and subsequent emission is called *fluorescence* when the time delay between absorption and emission is less than 10^{-8} s. When the delay time is longer, the phenomenon is called *phosphorescence*. Fluorescent and phosphorescent radiation do not necessarily have the same frequency.

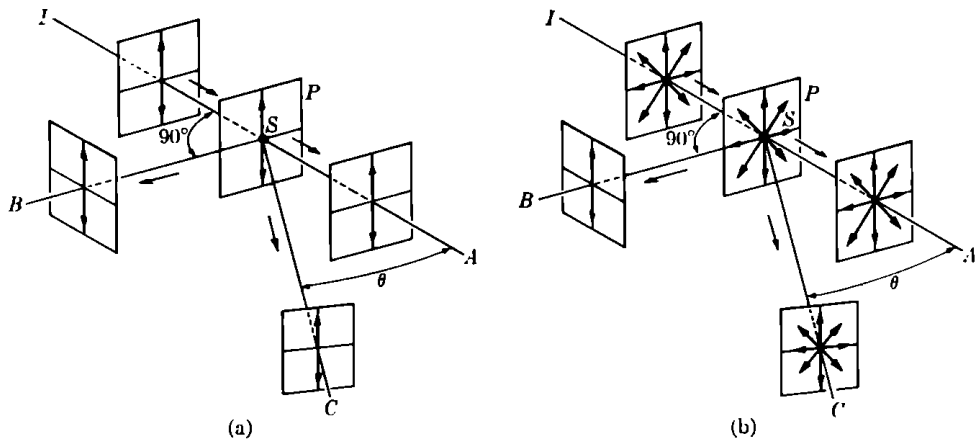


Fig. 19–21. Polarizzazione della radiazione diffusa. (a) Polarizzata rettilineamente e (b) radiazione incidente non polarizzata.

Fig. 19–21. Polarization of scattered radiation. (a) Linearly polarized and (b) unpolarized incident radiation.

Quando la radiazione primaria è polarizzata rettilineamente, le oscillazioni atomiche avvengono nella direzione determinata dal campo elettrico dell'onda e la radiazione diffusa possiede la polarizzazione caratteristica della radiazione di dipolo elettrico (Fig. 19—21a). Tuttavia, anche se la radiazione incidente non è polarizzata, la radiazione diffusa è sempre parzialmente polarizzata. Si consideri, per esempio, un'onda non polarizzata incidente su un atomo S (Fig. 19—21b). Le oscillazioni di dipolo elettrico indotte nell'atomo sono parallele al campo elettrico dell'onda, e perciò giacciono tutte in un piano P perpendicolare alla direzione di propagazione IA dell'onda incidente. La polarizzazione della radiazione diffusa in ciascuna direzione dipende dalla direzione delle oscillazioni di dipolo, e perciò non è sempre determinata quando l'onda incidente non è polarizzata. Ma per ogni direzione SB perpendicolare ad IS, la radiazione diffusa è polarizzata rettilineamente parallelamente al piano P, perpendicolare ad IS, in quanto per queste direzioni i dipoli oscillano sempre in tale piano. Per altre direzioni il grado di polarizzazione della radiazione diffusa dipende dall'angolo che la direzione di diffusione fa con IA. Lungo IA, se la radiazione incidente non è polarizzata, la radiazione diffusa non è per nulla polarizzata.

When the primary radiation is linearly polarized, the atomic oscillations are in the fixed direction of the electric field of the wave and the scattered radiation has the polarization characteristic of the electric dipole radiation (Fig. 19–21a). However, even if the incident radiation is not polarized, the scattered radiation is always partially polarized. Consider, for example, an unpolarized wave incident on an atom S (Fig. 19–21b). The electric dipole oscillations induced in the atom are parallel to the electric field of the wave, and therefore are all in a plane P perpendicular to the direction of propagation IA of the incident wave. The polarization of the scattered radiation in each direction depends on the direction of the dipole oscillations, and therefore is not always fixed when the incident wave is unpolarized. But for any direction SB perpendicular to IS, the scattered radiation is linearly polarized parallel to the plane P, perpendicular to IS, since for these directions the dipoles always oscillate in such a plane. For other directions the degree of polarization of the scattered radiation depends on the angle which the direction of scattering makes with IA. Along IA, if the incident radiation is unpolarized, the scattered radiation is completely unpolarized.

19.10 Diffusione della radiazione elettromagnetica da parte di un elettrone libero; effetto Compton

La diffusione della radiazione elettromagnetica da parte di un elettrone libero ha certe caratteristiche che richiedono che la si discuta separatamente dalla diffusione da elettroni legati o da molecole, che abbiamo trattato nel Paragrafo precedente. Come si è visto, la diffusione è un duplice processo per il quale un elettrone assorbe energia da un'onda elettromagnetica e la irradia come radiazione diffusa. Dobbiamo ricordare che un'onda elettromagnetica trasporta energia e quantità di moto, e se parte dell'energia E è sottratta all'onda, anche un corrispondente ammontare di quantità di moto $p = E/c$ deve essere sottratto all'onda.

19.10 Scattering of Electromagnetic Radiation by a Free Electron; Compton Effect

The scattering of electromagnetic radiation by a free electron has certain peculiarities which require that we discuss it apart from the scattering by bound electrons or molecules, which we took up in the preceding section. As we have seen, scattering is a double process by which an electron absorbs energy from an electromagnetic wave and reradiates it as scattered radiation. We must keep in mind that an electromagnetic wave carries energy and momentum, and if some energy E is removed from the wave, a corresponding amount of momentum $p = E/c$ must also be removed from the wave.

Ora un elettrone libero non può assorbire una quantità di energia E e allo stesso tempo acquistare una quantità di moto $p = E/c$, poichè la relazione tra energia cinetica e quantità di moto per un elettrone è $E_k = c\sqrt{m_e^2c^2 + p_e^2c^2} - m_ec^2$ alle alte energie e $E_k = p_e^2/2m_e$ alle basse energie. Entrambe queste relazioni sono incompatibili con la relazione $p = E/c$ se $E = E_k$, come richiesto dal principio di conservazione dell'energia. Dovremmo concludere allora che un elettrone libero non può assorbire energia elettromagnetica senza violare il principio di conservazione della quantità di moto. Lo studente può quindi chiedersi perchè, quando stavamo discutendo la diffusione e l'assorbimento delle onde elettromagnetiche da elettroni legati nel paragrafo precedente, non abbiamo per niente menzionato questo problema della quantità di moto. La ragione è la seguente: la conservazione della quantità di moto e dell'energia si applica in entrambi i casi; ma nel caso di un elettrone legato, l'energia e la quantità di moto assorbite vengono divise tra l'elettrone e lo ione che forma la restante parte dell'atomo, ed è sempre possibile dividere sia l'energia che la quantità di moto in proporzioni corrette. Tuttavia, lo ione, avendo una massa molto maggiore, acquista (assieme con una certa quantità di moto) soltanto una piccola frazione della energia disponibile, ed abitualmente non la si considera per nulla (vedi Esempio 9.12). Nel caso di un elettrone libero, non vi è altra particella con la quale l'elettrone divida l'energia e la quantità di moto, e non sarebbe possibile nè assorbimento nè diffusione.

L'esperienza, tuttavia, dice cose diverse. Quando analizziamo la radiazione elettromagnetica che è passata attraverso una zona in cui sono presenti elettroni liberi, osserviamo che, oltre alla radiazione incidente, è presente un altro tipo di radiazione, di frequenza *diversa*. Questa nuova radiazione viene interpretata come la radiazione diffusa dagli elettroni liberi. La frequenza della radiazione diffusa è *più piccola* della frequenza incidente, e in conseguenza la lunghezza d'onda della radiazione diffusa è *maggiore* della lunghezza d'onda incidente (Fig. 19–22). La lunghezza d'onda della radiazione diffusa è anche differente per ciascuna direzione di diffusione. Questo interessante fenomeno è detto *effetto Compton*, dal fisico americano A. H. Compton, che per primo lo osservò e lo analizzò all'inizio del 1920.

Supposto che λ sia la lunghezza d'onda della radiazione incidente e λ' quella della radiazione diffusa, Compton trovò che

Incident radiation = Radiazione incidente

Fig. 19–22. Distribuzione della intensità della radiazione diffusa da un elettrone libero a diversi angoli di diffusione.

Now a free electron cannot absorb an amount of energy E and at the same time acquire a momentum $p = E/c$, because the relation between kinetic energy and momentum for an electron is $E_k = c\sqrt{m_e^2c^2 + p_e^2c^2} - m_ec^2$ at high energies and $E_k = p_e^2/2m_e$ at lower energies. Either of these is incompatible with the relation $p = E/c$ if $E = E_k$, as required by the conservation of energy. We should conclude then that a free electron cannot absorb electromagnetic energy without violating the principle of conservation of momentum. The student may then wonder why, when we were discussing scattering and absorption of electromagnetic waves by bound electrons in the previous section, we did not mention this problem of momentum at all. The reason is as follows: The conservation of momentum and energy applies in both cases; but in the case of a bound electron, the energy and momentum absorbed are shared by both the electron and the ion forming the remaining part of the atom, and it is always possible to split both energy and momentum in the correct proportions. However, the ion, having a much larger mass, carries (along with some momentum) only a small fraction of the energy available, and usually one does not consider it at all (see Example 9.12). In the case of a free electron, there is no other particle with which the electron shares the energy and the momentum, and no absorption or scattering should be possible.

Experiment, however, tells a different story. When we analyze the electromagnetic radiation that has passed through a region where free electrons are present, we observe that, in addition to the incident radiation, there is another sort of radiation present, of *different* frequency. This new radiation is interpreted as the radiation scattered by the free electrons. The frequency of the scattered radiation is *smaller* than the incident frequency, and accordingly the wavelength of the scattered radiation is *longer* than the incident wavelength (Fig. 19–22). The wavelength of the scattered radiation is also different for each direction of scattering. This interesting phenomenon is called the *Compton effect*, after the American physicist A. H. Compton, who first observed and analyzed it in the early 1920's.

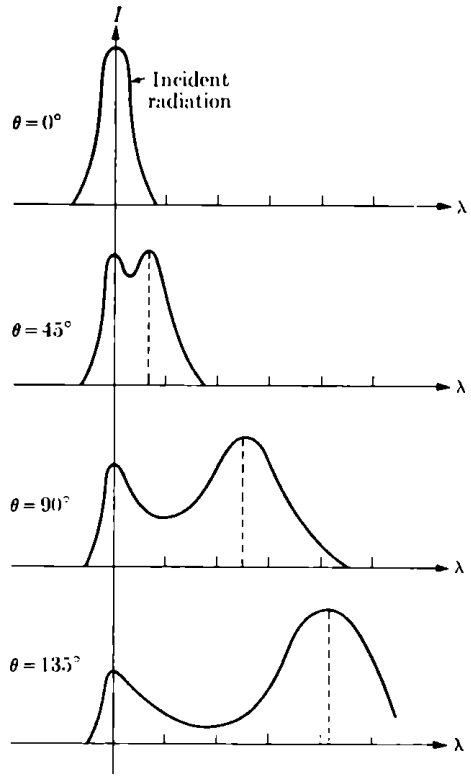


Fig. 19–22. Intensity distribution of the radiation scattered by a free electron at different scattering angles.

Given that λ is the wavelength of the incident radiation and λ' that of the scattered radiation, Compton found that

λ' è determinata unicamente dalla direzione di diffusione. Cioè, se θ è l'angolo tra le onde incidenti e la direzione in cui sono osservate le onde diffuse (Fig. 19–23), la lunghezza d'onda della radiazione diffusa λ' è determinata unicamente dall'angolo θ. La relazione sperimentale è

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta), \tag{19.43}$$

dove λ_C è una costante, il cui valore, se λ e λ' sono misurate in metri, è

$$\lambda_C = 2.4262 \times 10^{-12}\ \text{m}$$

nel caso degli elettroni che stiamo qui esaminando. Essa è detta *lunghezza d'onda Compton per gli elettroni.*

Incident radiation = Radiazione incidente
Scattered radiation = Radiazione diffusa
Electron = Elettrone
Detector = Rivelatore

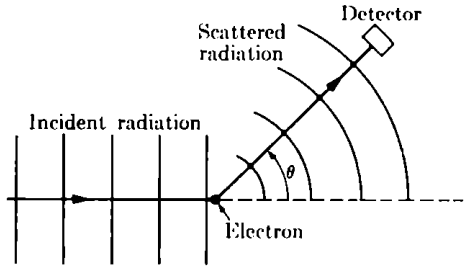


Fig. 19–23. Geometria nella diffusione Compton.

Ricordando che $\lambda = c/\nu$, dove ν è la frequenza $\omega/2\pi$ dell'onda, possiamo scrivere l'Eq. (19.43) nella forma

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda_C}{c}(1 - \cos\theta). \tag{19.44}$$

Ora la diffusione di un'onda elettromagnetica da parte di un elettrone può essere visualizzata come una "collisione" tra l'onda e l'elettrone, poichè essa implica uno scambio di energia e di quantità di moto. E poichè l'onda si propaga con velocità c e la sua relazione energia-quantità di moto $E = cp$ è simile a quella per una particella di massa di riposo nulla, questa diffusione deve essere simile ad una collisione nella quale una delle particelle ha massa di riposo nulla e si muove con velocità c. Questo tipo di collisione è stato discusso nell'Esempio 11.10. Il risultato è contenuto nell'Eq. (19.43),

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta), \tag{19.45}$$

dove E e E' sono le energie della particella di massa di riposo nulla prima e dopo la collisione e m_e è la massa di riposo dell'altra particella interessata nella collisione, in questo caso un elettrone. La somiglianza tra le Equazioni (19.44) e (19.45) è notevole, e va oltre una semplice somiglianza algebrica. Entrambe le equazioni si applicano ad un processo di collisione nel suo significato più generale, e, come già stabilito, la relazione energia-quantità di moto $E = cp$ per un'onda elettromagnetica è dello stesso tipo di quella corrispondente ad una particella di massa di riposo nulla, alla quale si applica l'Eq. (19.45). La conclusione ovvia è di porre in relazione la frequenza ν e l'energia E scrivendo

$$E = h\nu, \tag{19.46}$$

dove h è una costante universale che descrive la proporzionalità tra la frequenza di un'onda elettromagnetica e l'energia ad essa associata nel

λ' is determined solely by the direction of the scattering. That is, if θ is the angle between the incident waves and the direction in which the scattered waves are observed (Fig. 19–23), the wavelength of the scattered radiation λ' is solely determined by the angle θ. The experimental relation is

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta), \tag{19.43}$$

where λ_C is a constant, whose value, if λ and λ' are measured in meters, is

$$\lambda_C = 2.4262 \times 10^{-12}\ \text{m}$$

for the case of electrons we are considering here. It is called the *Compton wavelength for electrons.*

Fig. 19–23. Geometry in Compton scattering.

Remembering that $\lambda = c/\nu$, where ν is the frequency $\omega/2\pi$ of the wave, we may write Eq. (19.43) in the form

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda_C}{c}(1 - \cos\theta). \tag{19.44}$$

Now the scattering of an electromagnetic wave by an electron may be visualized as a "collision" between the wave and the electron, since it comprises an exchange of energy and momentum. And since the wave propagates with the velocity c and its energy–momentum relationship $E = cp$ is similar to that for a particle of zero rest mass, this scattering must resemble a collision in which one of the particles has zero rest mass and is moving with velocity c. This kind of collision was discussed in Example 11.10. The result is contained in Eq. (11.43),

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta), \tag{19.45}$$

where E and E' are the energies of the particle of zero rest mass before and after the collision and m_e is the rest mass of the other particle involved in the collision, in this case an electron. The similarity between Eqs. (19.44) and (19.45) is striking, and goes beyond a simple algebraic similarity. Both equations apply to a collision process in its most general sense, and, as already stated, the energy–momentum relationship $E = cp$ for an electromagnetic wave is of the same type as that corresponding to a particle of zero rest mass, to which Eq. (19.45) applies. The obvious conclusion is to link the frequency ν and the energy E by writing

$$E = h\nu, \tag{19.46}$$

where h is a universal constant that describes the proportionality between the frequency of an electromagnetic wave and the energy associated with it in the

processo di "collisione". Allora, l'Eq. (19.45) diventa

ossia

che è identica alla Eq. (19.44). Per ottenere l'equivalente dell'Eq. (19.43), moltiplichiamo l'Eq. (19.47) per c, ed usiamo $\lambda = c/\nu$. Il risultato è:

Quindi la lunghezza d'onda Compton per un elettrone λ_C è legata alla massa dell'elettrone diffuso dalla

Dai valori noti di λ_C, m_e, e c, possiamo ottenere per la nostra nuova costante h il valore

Questa è detta *costante di Planck* e giuoca un ruolo molto importante nella fisica (si ricordi l'Esempio 7.15 e il Paragrafo 15.6). Storicamente questa costante è apparsa per la prima volta nella fisica in un diverso contesto essendo stata introdotta alla fine del diciannovesimo secolo dal fisico tedesco Max Planck (1858–1947) come risultato del suo tentativo di spiegare l'intensità della radiazione elettromagnetica in equilibrio con la materia, detta *radiazione del corpo nero*. La velocità della luce c, la carica fondamentale e, la massa dell'elettrone m_e, e la costante di Planck h costituiscono le quattro costanti fondamentali della fisica.

Un protone, che ha una massa differente da quella dell'elettrone, ha una lunghezza d'onda Compton calcolata (usando il suddetto valore di h) di

Questo risultato è stato verificato sperimentalmente, ciò che ci conferma la validità della nostra ipotesi (19.46). Tuttavia, poichè la lunghezza d'onda Compton del protone è $1/10^3$ di quella dell'elettrone, l'effetto Compton è molto meno apprezzabile.

Possiamo dunque concludere che si può "spiegare" la diffusione della radiazione elettromagnetica da parte di un elettrone libero identificando tale processo con la collisione di un elettrone libero con una particella di massa di riposo nulla.

19.11 Fotoni

La nostra "spiegazione" dell'effetto Compton richiede una analisi dettagliata per le sue ampie possibili conseguenze. Per prima cosa, ricapitoliamo le nostre supposizioni:

(a) La diffusione della radiazione elettromagnetica da parte di un elettrone libero può essere considerata come una collisione tra l'elettrone ed una particella di massa di riposo nulla.

"collision" process. Then Eq. (19.45) becomes

$$\frac{1}{h\nu'} - \frac{1}{h\nu} = \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

or

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos\theta), \tag{19.47}$$

which is identical to Eq. (19.44). To obtain the equivalent of Eq. (19.43), multiply Eq. (19.47) by c and use $\lambda = c/\nu$. The result is

$$\lambda' - \lambda = (h/m_e c)(1 - \cos\theta). \tag{19.48}$$

Then the Compton wavelength for an electron λ_C is related to the mass of the scattering electron by

$$\lambda_C = h/m_e c. \tag{19.49}$$

From the known values of λ_C, m_e, and c, we may obtain for our new constant h the value

$$h = 6.6256 \times 10^{-34}\ \text{J s or m}^2\ \text{kg s}^{-1}.$$

This is called *Planck's constant*, and it plays a very important role in physics (recall Example 7.15 and Section 15.6). Historically this constant appeared for the first time in physics in a different context, having been introduced at the end of the nineteenth century by the German physicist Max Planck (1858–1947) as a result of his attempt to explain the intensity of electromagnetic radiation in equilibrium with matter, called *blackbody radiation*. The speed of light c, the fundamental charge e, the electron mass m_e, and Planck's constant h constitute four fundamental constants of physics.

A proton, which has a mass different from that of an electron, has a calculated Compton wavelength (using the above value of h) of

$$\lambda_{C,p} = h/m_p c = 1.3214 \times 10^{-15}\ \text{m}.$$

This result has been experimentally confirmed, which assures us of the validity of our assumption (19.46). However, because the Compton wavelength of the proton is $1/10^3$ that of the electron, the Compton effect is much less noticeable.

We may then conclude that we can "explain" the scattering of electromagnetic radiation by a free electron by identifying the process with the collision of a free electron and a particle of zero rest mass.

19.11 Photons

Our "explanation" of the Compton effect requires a careful analysis because of its possible far-reaching consequences. First, let us recapitulate our assumptions:

(a) The scattering of electromagnetic radiation by a free electron can be considered as a collision between the electron and a particle of zero rest mass.

(b) La radiazione elettromagnetica gioca il ruolo di particella di massa di riposo nulla, che, per brevità chiameremo, d'ora in poi, *fotone*.

(c) L'energia e la quantità di moto della particella di massa di riposo nulla (o fotone) sono legate alla frequenza ed alla lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica dalla

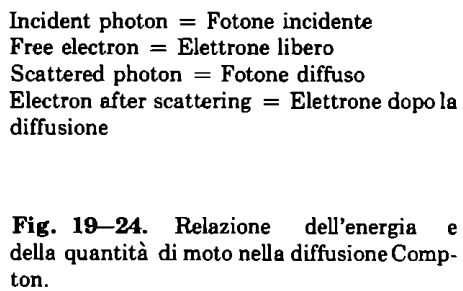


Fig. 19–24. Relazione dell'energia e della quantità di moto nella diffusione Compton.

La seconda relazione deriva dal fatto che $p = E/c = h\nu/c$ e $\nu/c = 1/\lambda$. Possiamo visualizzare l'effetto Compton come la collisione indicata in Fig. 19–24, nella quale un fotone di frequenza ν urta con un elettrone in quiete, trasferendo ad esso una certa energia ed una certa quantità di moto. Come risultato della interazione, l'energia del fotone diffuso è minore, con una corrispondente frequenza ν' minore. Una ulteriore verifica è vedere se l'elettrone, dopo la diffusione, ha una quantità di moto eguale alla differenza tra la quantità di moto del fotone incidente e quella del fotone diffuso. È una esperienza difficile, ma è stata realizzata ed i risultati la verificano bene.

Qual'è il significato fisico del concetto di fotone e delle relazioni (19.50) che lo definiscono? Che la radiazione elettromagnetica sia una corrente di fotoni, il che potrebbe essere una possibile spiegazione visiva, non è una conclusione necessaria. Possiamo interpretare l'energia del fotone $E = h\nu$ e la quantità di moto $p = h/\lambda$ come l'energia e la quantità di moto assorbita da parte dell'elettrone libero dall'onda elettromagnetica incidente. Il fotone di energia $E' = h\nu'$ e la quantità di moto $p' = h/\lambda'$ sono allora l'energia e la quantità di moto restituita dall'elettrone come radiazione diffusa. L'elettrone acquista una energia cinetica $E_k = E - E'$ ed una quantità di moto $\boldsymbol{p}_e = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'$, che sono legate dalle $E_k = c\sqrt{m_e^2c^2 + p_e^2} - m_ec^2$, come richiesto dalla dinamica delle alte energie e dalla conservazione dell'energia e della quantità di moto. Possiamo perciò concludere che il fotone è il "quanto" di energia elettromagnetica e quantità di moto assorbita od emessa in un processo singolo da una particella carica. Esso è completamente determinato dalla frequenza della radiazione. Il concetto di fotone è applicabile solo alle interazioni tra radiazione elettromagnetica e particelle cariche, e gioca un ruolo in tutti i processi in cui la radiazione elettromagnetica interagisce con la materia, e non soltanto con gli elettroni liberi. Possiamo perciò stabilire il seguente principio:

> *Quando un'onda elettromagnetica interagisce con un elettrone (o con una qualsiasi altra particella carica), le quantità di energia e di quantità di moto che possono essere scambiate nel processo sono quelle corrispondenti ad un fotone.*

Il principio sopra stabilito, che è una delle leggi fondamentali della fisica, sembra essere caratteristico di tutti i processi radiativi che interessano particelle cariche e campi elettromagnetici. Esso non deriva da alcuna legge precedentemente stabilita o

(b) Electromagnetic radiation plays the role of the particle of zero rest mass, which for brevity will be called, from now on, a *photon*.

(c) The energy and momentum of the particle of zero rest mass (or photon) are related to the frequency and wavelength of the electromagnetic radiation by

$$E = h\nu, \qquad p = h/\lambda. \tag{19.50}$$

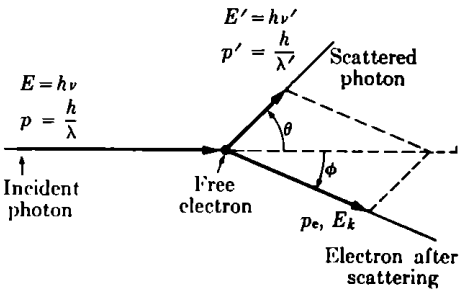


Fig. 19–24. Momentum and energy relations in Compton scattering.

The second relation is due to the fact that $p = E/c = h\nu/c$ and $\nu/c = 1/\lambda$. We may visualize the Compton effect as the collision illustrated in Fig. 19–24, in which a photon of frequency ν collides with an electron at rest, transferring to it certain energy and momentum. As a result of the interaction, the energy of the scattered photon is smaller, with a correspondingly smaller frequency ν'. A further test is to check to see whether the electron, after the scattering, has a momentum equal to the difference between the momentum of the incident photon and that of the scattered photon. It is a difficult experiment, but it has been performed and the results check very well.

What is the physical meaning of the photon concept and of the defining relations (19.50)? It is not a necessary conclusion that electromagnetic radiation is a stream of photons, which would be a possible pictorial explanation. We may interpret the photon energy $E = h\nu$ and the momentum $p = h/\lambda$ as the energy and momentum absorbed by the free electron from the incident electromagnetic wave. The photon of energy $E' = h\nu'$ and the momentum $p' = h/\lambda'$ are then the energy and momentum re-emitted by the electron into the scattered radiation. The electron acquires a kinetic energy $E_k = E - E'$ and a momentum $\boldsymbol{p}_e = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'$, which are related by $E_k = c\sqrt{m_e^2c^2 + p_e^2} - m_ec^2$, as required by high-energy dynamics and by the conservation of energy and momentum. Therefore we may conclude that the photon is the "quantum" of electromagnetic energy and momentum absorbed or emitted in a single process by a charged particle. It is entirely determined by the frequency of the radiation. The concept of a photon is applicable only to interactions between electromagnetic radiation and charged particles, and it plays a role in all processes in which electromagnetic radiation interacts with matter, and not just with free electrons. Therefore we may state the following principle:

> *When an electromagnetic wave interacts with an electron (or any other charged particle), the amounts of energy and momentum that can be exchanged in the process are those corresponding to a photon.*

The principle stated above, which is one of the fundamental laws of physics, seems to be characteristic of all radiative processes involving charged particles and electromagnetic fields. It does not stem from any law previously stated or dis-

discussa. È un principio completamente nuovo, che va aggiunto alle altre leggi universali quali quelle della conservazione dell'energia e della quantità di moto. La sua scoperta nel primo quarto di questo secolo fu una pietra miliare nello sviluppo della fisica. Le sue conseguenze hanno dato origine ad un nuovo campo della fisica detto *meccanica quantistica*.

Questo importante principio è fondamentale per la comprensione dell'emissione e dell'assorbimento della radiazione elettromagnetica in atomi, molecole, e nuclei. Abbiamo ricordato più volte in precedenza che un atomo (o una molecola) può emettere o assorbire soltanto radiazioni elettromagnetiche di certe frequenze. Abbiamo anche indicato nel Paragrafo 14.7 che l'energia degli atomi (o molecole) è quantizzata e può avere solo certi valori. Questi due importanti fatti sono legati attraverso il concetto di fotone. Si supponga che un atomo nello stato stazionario di energia E assorba radiazione elettromagnetica di frequenza ν e passi ad un altro stato stazionario di energia superiore E'. La variazione di energia dell'atomo è $E' - E$. D'altra parte, l'energia del fotone che è stato assorbito è $h\nu$. La conservazione dell'energia richiede che queste due quantità siano uguali. Perciò

espressione nota come *formula di Bohr*, poichè fu proposta per la prima volta nel 1913 dal fisico danese Niels Bohr (1885—1962). L'espressione su scritta vale anche nel caso che un atomo emetta un fotone e passi da uno stato stazionario di energia E' ad un altro di energia più bassa E.

Poichè l'energia dello stato stazionario è quantizzata e può avere solo certi valori $E_1, E_2, E_3, \ldots$, la formula di Bohr pone una limitazione alla frequenza della radiazione emessa o assorbita. Questo è il motivo per cui si ha uno spettro discreto di frequenze. Storicamente, Bohr propose il concetto di stati stazionari per spiegare l'esistenza di uno spettro discreto di frequenze. La Fig. 19—25 è un diagramma schematico che elenca alcune delle possibili variazioni di energia di un sistema. Essi corrispondono a transizioni tra stati stazionari o *livelli di energia*.

Per esempio, le energie degli stati stazionari degli atomi con un solo elettrone (H, He^+, Li^{++}, ecc.) è data da $E = -RZ^2\,hc/n^2$, dove R è la costante di Rydberg (vedere Problema 14.88). Per questo, in una transizione tra stati aventi numeri quantici n e n' $(n' > n)$, la frequenza della radiazione emessa o assorbita è

o, introducendo valori numerici,

Questa formula conferma molto bene le frequenze di emissione ed assorbimento degli spettri di questi tipi di atomi. Essa è detta *formula di Balmer*, dal fisico e matematico svizzero Johann Balmer (1825—1898), che la introdusse per catalogare le linee dello spettro visibile dell'idrogeno.

cussed. It is a completely new principle, to be added to such universal laws as the conservation of energy and momentum. Its discovery in the first quarter of this century was a milestone in the development of physics. Its consequences have given rise to a new branch of physics called *quantum mechanics*.

This important principle is basic to the understanding of emission and absorption of electromagnetic radiation in atoms, molecules, and nuclei. We have mentioned several times before that an atom (or molecule) can only emit or absorb electromagnetic radiation of certain frequencies. Also we indicated in Section 14.7 that the energy of atoms (and molecules) is quantized and can have only certain values. These two important facts are related through the concept of the photon. Suppose that an atom in the stationary state of energy E absorbs electromagnetic radiation of frequency ν and passes to another stationary state of higher energy E'. The change in energy of the atom is $E' - E$. On the other hand, the energy of the photon absorbed is $h\nu$. Conservation of energy requires that both quantities be equal. Therefore

$$E' - E = h\nu,$$

an expression known as *Bohr's formula*, because it was first proposed in 1913 by the Danish physicist Niels Bohr (1885–1962). The above expression also applies when an atom emits a photon and passes from a stationary state of energy E' to another of lower energy E.

Since the energy of the stationary state is quantized and can have only certain values $E_1, E_2, E_3, \ldots$, Bohr's formula limits the frequency of the radiation emitted or absorbed. This is how a discrete spectrum of frequencies results. Historically, Bohr proposed the concept of stationary states to explain the existence of a discrete spectrum of frequencies. Figure 19–25 is a schematic diagram listing some of the possible changes in energy of a system. They correspond to transitions between stationary states or *energy levels*.

For example, the energies of the stationary state of atoms with only one electron (H, He^+, Li^{++}, etc.) is given by $E = -RZ^2hc/n^2$, where R is Rydberg's constant (see Problem 14.88). Therefore, in a transition between states with quantum numbers n and n' $(n' > n)$, the frequency of the radiation emitted or absorbed is

$$\nu = \frac{E' - E}{h} = RZ^2c\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)$$

or, introducing numerical values,

$$\nu = 3.2800 \times 10^{15}Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}\right)\text{Hz}.$$

This formula fits the emission and absorption frequencies of the spectra of these kinds of atoms quite well. It is called *Balmer's formula*, after the Swiss mathematician and physicist Johann Balmer (1825–1898), who invented it to catalog the visible spectral lines of hydrogen.

Absorption = Assorbimento
Emission = Emissione

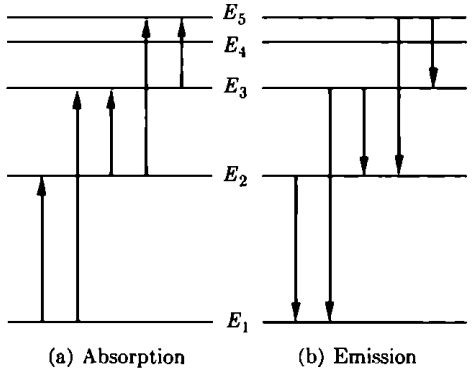


Fig. 19–25. Transizioni tra stati stazionari in un atomo, molecola, o nucleo. La distanza relativa dei livelli energetici e le transizioni possibili dipendono dalle caratteristiche del sistema.

After = Dopo
Interaction = Interazione
Photon exchanged = Fotone scambiato
Before = Prima

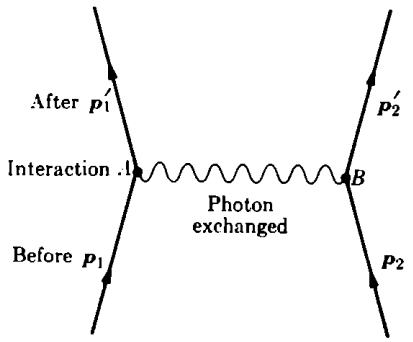


Fig. 19–26. Interazione elettromagnetica considerata come scambio di fotoni. I fotoni trasferiscono energia e quantità di moto da una carica all'altra.

Fig. 19–25. Transitions between stationary states in an atom, molecule, or nucleus. The relative spacing of the energy levels and the possible transitions depend on the nature of the system.

Fig. 19–26. Electromagnetic interaction considered as an exchange of photons. The photons transfer energy and momentum from one charge to the other.

Il concetto di fotone suggerisce una semplice rappresentazione visiva della interazione elettromagnetica tra due particelle cariche. In Fig. 19—26 è rappresentata questa interazione tra due particelle. L'interazione corrisponde ad uno scambio di quantità di moto e di energia. Le quantità di moto iniziali delle particelle $\boldsymbol{p}_1$ e $\boldsymbol{p}_2$ diventano dopo l'interazione $\boldsymbol{p}_1'$ e $\boldsymbol{p}_2'$. Per quanto l'interazione non sia localizzata in un particolare istante, per semplicità le abbiamo rappresentate in un istante preciso, e nelle posizioni A e B. La particella 1 interagisce con la particella 2 attraverso il suo campo elettromagnetico, con il risultato che la particella 2 acquista dal campo una certa energia ed una certa quantità di moto, equivalente ad un fotone, con una corrispondente variazione nel suo moto. Il moto della particella 1 deve quindi essere adattato in modo da corrispondere al nuovo campo, che è il campo originale meno un fotone. Naturalmente, è possibile anche il processo inverso, e la particella 1 può assorbire un fotone dal campo della particella 2. Possiamo dire allora che quanto è accaduto è che, tra la particella 1 e la particella 2, c'è stato uno scambio di fotoni. In altre parole,

le interazioni elettromagnetiche possono essere immaginate come il risultato dello scambio di fotoni tra particelle cariche interagenti.

(Diagrammi come quello di Fig. 19—26 sono detti *diagrammi di Feynman*, e sono molto utili nell'analizzare processi non semplici che interessano diversi tipi di interazioni.)

In ogni istante, la quantità di moto totale di un sistema di due particelle cariche è $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_{\text{campo}}$, dove $\boldsymbol{p}_{\text{campo}}$ è la quantità di moto associata al campo elettromagnetico delle particelle cariche. Questa è proprio la descrizione di una interazione che abbiamo data a Paragrafo 15.14 quando abbiamo discusso il principio di conservazione della quantità di moto nel caso di una interazione che si propaga con una velocità finita. Ora abbiamo una base teorica e sperimentale più fondata per la nostra descrizione concettuale di un campo che possiede energia e quantità di moto.

The concept of the photon suggests a simple pictorial representation of the electromagnetic interaction between two charged particles. Figure 19–26 shows this interaction between two particles. The interaction corresponds to an exchange of momentum and energy. The particles' initial momenta $\boldsymbol{p}_1$ and $\boldsymbol{p}_2$ become $\boldsymbol{p}_1'$ and $\boldsymbol{p}_2'$ after the interaction. Although the interaction is not localized at a particular instant, for simplicity we have indicated it at a particular time, and at positions A and B. Particle 1 interacts with particle 2 via its electromagnetic field, with the result that particle 2 takes from the field certain energy and momentum, equivalent to a photon, with a corresponding change in its motion. The motion of particle 1 must then be adjusted to correspond to the new field, which is the original field minus one photon. Of course, the reverse process is also possible, and particle 1 may absorb a photon from the field of particle 2. We may say then that what has happened is that, between particle 1 and particle 2, there has been an exchange of photons. In other words,

electromagnetic interactions can be pictured as being the result of the exchange of photons between the interacting charged particles.

(Diagrams such as Fig. 19–26 are called *Feynman diagrams*, and are very useful in analyzing complex processes involving different kinds of interactions.)

At any instant the total momentum of a system of two charged particles is $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_{\text{field}}$, where $\boldsymbol{p}_{\text{field}}$ is the momentum associated with the electromagnetic field of the charged particles. This is just the picture we drew of an interaction in Section 15.14 when we were discussing the principle of conservation of momentum when an interaction propagates with a finite velocity. Now we have a firmer theoretical and experimental basis for our conceptual picture of a field possessing energy and momentum.

Alla fine del Paragrafo 19.3, abbiamo stabilito che la radiazione elettromagnetica possiede un momento della quantità di moto intrinseco o spin in aggiunta all'energia e alla quantità di moto, e che per onde polarizzate circolarmente lo spin lungo la direzione di propagazione vale $\mp E/\omega$. Dalla relazione $\omega = 2\pi\nu$, vediamo che l'energia di un fotone è $E = h\omega/2\pi = \hbar\omega$, dove $\hbar = h/2\pi$ (si ricordino gli Esempi 7.15 e 15.7). Quindi i fotoni polarizzati circolarmente hanno uno spin lungo la direzione di propagazione eguale a $\mp\hbar$. D'altra parte, il valore medio dello spin dei fotoni polarizzati rettilineamente è zero.

ESEMPIO 19.8. Esprimere l'energia di un fotone in elettroni volt se la sua lunghezza d'onda è espressa in metri. Applicare questo risultato per ottenere la lunghezza d'onda dei raggi x in funzione del potenziale acceleratore applicato ad un tubo a raggi x.

Soluzione: Dalla $E = h\nu$ e $\lambda\nu = c$, abbiamo che $E = hc/\lambda$. Ma

Ricordando che 1 eV = 1,6021 × 10^{-19} J, abbiamo che hc = 1.2397 × 10^{-6} eV m. Perciò $E = 1.2397 \times 10^{-6}/\lambda$, dove E è espresso in elettroni volt, e λ in metri.

Come abbiamo spiegato in relazione alla Fig. 19–16, i raggi x sono prodotti dall'urto di elettroni veloci contro il materiale dell'anticatodo di un tubo a raggi x. L'energia di un elettrone può essere irradiata in una sola collisione. Ovviamente, i fotoni più energetici provenienti da un tubo a raggi x sarebbero quelli emessi in processi del secondo tipo, ed essi corrispondono alle lunghezze d'onda più corte. In altre parole, supponendo che V sia il potenziale acceleratore, le lunghezze d'onda dei raggi x prodotti sono eguali o maggiori della lunghezza d'onda di soglia, che soddisfa la relazione

dal momento che, in questo caso, l'energia E del fotone è eguale all'energia dell'elettrone, che, se espresso in elettroni volt, è, a sua volta, eguale a V. Per esempio, in un tubo televisivo, gli elettroni sono accelerati da una differenza di potenziale dell'ordine di 18,000 V. Quando gli elettroni raggiungono lo schermo del tubo, essi vengono bruscamente fermati, emettendo raggi x così come avviene in un tubo a raggi x. L'intensità, tuttavia, è molto bassa. La lunghezza d'onda minima dei raggi x prodotti quando gli elettroni sono fermati dallo schermo è allora di λ = 6.9 × 10^{-11} m.

19.12 Ancora sui fotoni: effetto fotoelettrico

Ulteriori ricerche hanno dimostrato che il concetto di fotone si applica non solo al processo di diffusione da parte di un elettrone libero, ma a *tutti* i processi nei quali le onde elettromagnetiche interagiscono con la materia. Un altro esempio che illustra l'uso del concetto di fotone è l'*effetto fotoelettrico*. Nel 1887 Heinrich Hertz osservò che illuminando, con luce ultravioletta, gli elettrodi tra i quali avveniva una scarica elettrica, egli poteva aumentare l'intensità della scarica. Ciò suggeriva la disponibilità di più particelle cariche o elettroni. Un anno dopo, Wilhelm

At the end of Section 19.3 we indicated that electromagnetic radiation carries intrinsic angular momentum or spin in addition to energy and momentum, and that for circularly polarized waves the spin along the direction of propagation is $\mp E/\omega$. Using the relation $\omega = 2\pi\nu$, we see that the energy of a photon is $E = h\omega/2\pi = \hbar\omega$, where $\hbar = h/2\pi$ (recall Examples 7.15 and 15.7). Thus circularly polarized photons have a spin along the direction of propagation equal to $\mp\hbar$. On the other hand, the average value of the spin of linearly polarized photons is zero.

EXAMPLE 19.8. Express the energy of a photon in electron volts when its wavelength is given in meters. Apply the result to obtain the wavelength of x-rays in terms of the accelerating voltage applied to an x-ray tube.

Solution: From $E = h\nu$ and $\lambda\nu = c$, we have that $E = hc/\lambda$. But

$$hc = (6.6256 \times 10^{-34}\ \text{J s})(2.9979 \times 10^{-8}\ \text{m s}^{-1}) = 1.9863 \times 10^{-25}\ \text{J m}.$$

Remembering that 1 eV = 1.6021 × 10^{-19} J, we have that hc = 1.2397 × 10^{-6} eV m. Therefore $E = 1.2397 \times 10^{-6}/\lambda$, where E is expressed in electron volts and λ in meters.

As we explained in connection with Fig. 19–16, x-rays are produced by the impact of fast electrons against the anticathode material of an x-ray tube. The energy of an electron may be radiated as a result of successive collisions, giving rise to several photons, or it may all be radiated in just one collision. Obviously, the most energetic photons coming out of the x-ray tube would be those emitted in the latter process, and they correspond to the shortest wavelength. In other words, given that V is the accelerating voltage, the wavelengths of the x-rays produced are equal to or larger than the threshold wavelength, satisfying the relation

$$\lambda_0 = \frac{1.2397 \times 10^{-6}}{V} \approx \frac{1.24 \times 10^{-6}}{V},$$

since in this case the energy E of the photon is equal to the energy of the electron, which in turn is equal to V expressed in electron volts. For example, in a television tube, electrons are accelerated by a potential difference of the order of 18,000 V. When the electrons reach the screen of the tube, they are abruptly stopped, emitting x-rays for the same reason as in an x-ray tube. The intensity, however, is quite low. The minimum wavelength of the x-rays produced when the electrons are stopped at the screen is then λ = 6.9 × 10^{-11} m.

19.12 More about Photons: the Photoelectric Effect

Further research has proved that the concept of the photon applies not only to the process of scattering by a free electron, but to *all* processes in which electromagnetic waves interact with matter. Another example which illustrates the use of the photon concept is the *photoelectric effect*. In 1887 Heinrich Hertz observed that by illuminating, with ultraviolet light, the electrodes between which an electric discharge takes place, he could increase the intensity of the discharge. This suggested the availability of more charged particles or electrons. A year later Wilhelm

Hallwachs (1859—1922) osservò una emissione di elettroni quando venivano illuminate le superficie di certi metalli come Zn, Rb, K, Na, ecc. Questi elettroni sono detti *fotoelettroni* dal metodo con cui sono prodotti. Ovviamente, l'emissione elettronica aumenta con l'intensità della radiazione che incide sulla superficie metallica, poichè è disponibile più energia per emettere elettroni. Ma si può inoltre osservare una dipendenza caratteristica dalla frequenza. Ciò significa che per ciascuna sostanza vi è una frequenza minima ν_0 della radiazione elettromagnetica tale che, per radiazione di frequenza minore di ν_0, non si ha produzione di fotoelettroni per quanto intensa possa essere la radiazione.

Abbiamo già spiegato prima che in un metallo vi sono elettroni che sono più o meno liberi di muoversi attraverso il reticolo cristallino. Questi elettroni non sfuggono dal metallo a temperatura ambiente poichè, se uno sfugge, si distrugge l'equilibrio elettrico del metallo, che si carica positivamente e attrae di nuovo l'elettrone. A meno che l'elettrone abbia energia sufficiente per sottrarsi a questa attrazione, esso ricadrà sul metallo. Un metodo per aumentare l'energia degli elettroni è quello di scaldare il metallo. Gli elettroni "evaporati" sono detti allora *termoelettroni*. Questo è il tipo di emissione elettronica che si ha nei tubi elettronici. Un altro metodo per emettere elettroni da un metallo è quello di assorbire energia dalla radiazione elettromagnetica.

L'*effetto fotoelettrico* è un processo per il quale gli elettroni di conduzione nei metalli ed in altre sostanze assorbono energia dal campo elettromagnetico e vengono emessi dalla sostanza, a differenza del processo di assorbimento discusso nel Paragrafo 19.8, che corrisponde all'assorbimento da parte di un elettrone legato ad un atomo o ad una molecola. Si indichi con ϕ l'energia richiesta da un elettrone per sfuggire da un certo metallo. Allora, se l'elettrone acquista l'energia E, la differenza $E - \phi$ apparirà come energia cinetica dell'elettrone, e possiamo scrivere nel caso di bassa energia o non-relativistico

Ovviamente, se E è minore di ϕ non si ha alcuna emissione elettronica. Se E è l'energia assorbita dalla radiazione elettromagnetica da parte di un elettrone, e ν è la frequenza della radiazione, allora $E = h\nu$, secondo L'Eq. (19.50). Possiamo così scrivere per l'Eq. (19.51),

Questa equazione è stata proposta per primo da Albert Einstein nel 1905, antecedentemente alla scoperta dell'effetto Compton. Non tutti gli elettroni richiedono la medesima energia ϕ per essere emessi dal metallo. Chiameremo quindi *lavoro di estrazione* del metallo il valore minimo ϕ_0. Quindi, la massima energia cinetica degli elettroni è

L'energia cinetica massima $\frac{1}{2}mv^2_{max}$ può essere misurata con il metodo indicato in Fig. 19—27. Applicando una differenza di potenziale V tra gli elettrodi A e C, possiamo rallentare il moto dei fotoelettroni. Per una tensione particolare V_0, la

Hallwachs (1859–1922) observed an electronic emission when the surfaces of certain metals such as Zn, Rb, K, Na, etc., were illuminated. These electrons are called *photoelectrons* in view of the method of their production. Obviously the electronic emission increases with the intensity of the radiation falling on the metal surface, since more energy is available to release electrons. But a characteristic frequency dependence is also observed. This means that for each substance there is a minimum frequency ν_0 of electromagnetic radiation such that, for radiation of frequency less than ν_0, no photoelectrons are produced, no matter how intense the radiation may be.

We have explained before that in a metal there are electrons that are more or less free to move throughout the crystal lattice. These electrons do not escape from the metal at normal temperature because, if one escapes, it destroys the electrical balance of the metal, which becomes positively charged and attracts the electron back again. Unless the electron has enough energy to overcome this attraction, it will fall back on the metal. One way to increase the energy of the electrons is by heating the metal. The "evaporated" electrons are then called *thermoelectrons*. This is the kind of electronic emission that exists in electron tubes. Another way to release electrons from a metal is by absorption of energy from electromagnetic radiation.

The *photoelectric effect* is a process by which conduction electrons in metals and in other substances absorb energy from the electromagnetic field and escape from the substance, in contrast to the absorption process discussed in Section 19.8, which corresponds to absorption by an electron bound to an atom or molecule. Let us designate by ϕ the energy required by an electron to escape from a given metal. Then, if the electron absorbs the energy E, the difference $E - \phi$ will appear as the kinetic energy of the electron, and we may write in the low-energy or nonrelativistic limit

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = E - \phi. \tag{19.51}$$

Obviously if E is smaller than ϕ, no electronic emission will result. If E is the energy absorbed by an electron from the electromagnetic radiation and ν is the frequency of the radiation, then $E = h\nu$, according to Eq. (19.50). Thus we may write for Eq. (19.51),

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = h\nu - \phi. \tag{19.52}$$

This equation was first proposed by Albert Einstein in 1905, prior to the discovery of the Compton effect. Not all electrons require the same energy ϕ to escape from a metal. Hence we call the minimum value ϕ_0 the *work function* of the metal. Then the maximum kinetic energy of the electrons is

$$\tfrac{1}{2}mv^2_{max} = h\nu - \phi_0. \tag{19.53}$$

The maximum kinetic energy $\frac{1}{2}mv^2_{max}$ can be measured by the method indicated in Fig. 19–27. By applying a potential difference V between the plates A and C, we can retard the motion of the photoelectrons. At a particular voltage V_0 the

Electric field = Campo elettrico
Force on electron = Forza sull'elettrone
Radiation = Radiazione

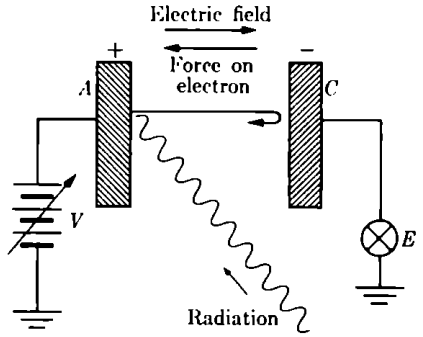


Fig. 19–27. Dispositivo sperimentale per osservare l'effetto fotoelettrico.

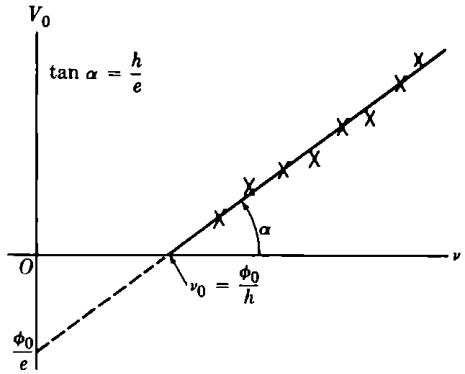


Fig. 19–28. Relazione tra il potenziale di arresto e la frequenza nell'effetto fotoelettrico.

Fig. 19–27. Experimental arrangement for observing the photoelectric effect.

Fig. 19–28. Relation between stopping potential and frequency in the photoelectric effect.

corrente misurata dall'elettrometro E si riduce bruscamente a zero, indicando che nessun elettrone, neanche il più veloce, raggiunge l'elettrodo C. Allora, per l'Eq. (14.38), $\frac{1}{2}mv^2_{max} = eV_0$, e l'Eq. (19.53) diventa

Cambiando la frequenza ν, possiamo ottenere una serie di valori per il potenziale di arresto V_0. Se l'Eq. (19.54) è corretta, il diagramma dei valori di V_0 in funzione di ν dovrebbe risultare una retta. Ciò è esattamente quello che si ottiene, come rappresentato in Fig. 19–28. La pendenza della retta è $\tan\alpha = h/e$. Misurando α, ed adottando il valore noto per e, possiamo ricalcolare la costante di Planck h, ed ottenere il medesimo risultato trovato per l'effetto Compton. Questo accordo può essere considerato una ulteriore giustificazione del concetto di fotone.

Dalla Eq. (19.53), vediamo che per la frequenza $\nu_0 = \phi_0/h$, l'energia cinetica degli elettroni è nulla. Quindi ν_0 è la frequenza minima per la quale si ha emissione fotoelettrica, ed e detta *frequenza di soglia*. Per frequenze inferiori a ν_0, non si ha alcuna emissione. L'effetto fotoelettrico ha innumerevoli applicazioni nei sistemi di controllo automatico, per la sua utilizzazione in dispositivi quali le cellule fotoelettriche.

Quando si ha radiazione elettromagnetica di adeguata frequenza (o fotoni di sufficiente energia), gli elettroni possono essere emessi dagli atomi (o dalle molecole) per il cosiddetto *effetto fotoelettrico atomico*, che è responsabile per la massima parte dell'assorbimento dei raggi x e γ da parte dei materiali. Questo effetto fotoelettrico atomico produce una corrispondente ionizzazione del materiale (compresa l'aria) attraverso cui passano i raggi x e γ ed è uno dei meccanismi con i quali la radiazione interagisce con la materia. Un processo analogo è l'*effetto fotonucleare*, per il quale una particella, di solito un protone, viene emesso da un nucleo che ha assorbito la radiazione elettromagnetica. Questi fotoni devono possedere tanta più energia e una corrispondente frequenza tanto più elevata dei fotoni interessati all'effetto fotoelettrico atomico da cadere nella zona dei raggi γ di alta energia.

current indicated by the electrometer E drops suddenly to zero, indicating that no electrons, even the fastest, are reaching plate C. Then, by Eq. (14.38), $\frac{1}{2}mv^2_{max} = eV_0$, and Eq. (19.53) becomes

$$eV_0 = h\nu - \phi_0. \tag{19.54}$$

By changing the frequency ν, we can obtain a series of values for the stopping potential V_0. If Eq. (19.54) is correct, the result of plotting the values of V_0 against ν should be a straight line. This is exactly what one does obtain, as shown in Fig. 19–28. The slope of the straight line is $\tan\alpha = h/e$. Measuring α, and using the known value of e, we may recalculate Planck's constant h and obtain the same result found for the Compton effect. This agreement can be considered as a further justification of the photon concept.

From Eq. (19.53), we see that for the frequency $\nu_0 = \phi_0/h$, the kinetic energy of the electrons is zero. Therefore ν_0 is the minimum frequency at which there is photoelectric emission, and is called the *threshold frequency*. For frequencies smaller than ν_0, there is no emission at all. The photoelectric effect has innumerable applications in automatic control mechanisms, due to its use in devices such as photoelectric cells.

When there is electromagnetic radiation of adequate frequency (or photons of sufficient energy), electrons may be ejected from atoms (or molecules) in what is called the *atomic photoelectric effect*, which is responsible for most of the absorption of x- and γ-rays by any material. This atomic photoelectric effect results in a corresponding ionization of the material (including air) through which the x- and γ-rays pass, and is one of the mechanisms by which radiation affects matter. A similar process is the *photonuclear effect*, by which a particle, usually a proton, after it absorbs electromagnetic radiation, is ejected from a nucleus. These photons must have so much more energy and a corresponding frequency so much higher than the photons involved in the atomic photoelectric effect that they fall within the range of the higher-energy γ-rays.

Si noti come non abbiamo accennato alla conservazione della quantità di moto nella nostra discussione sull'effetto fotoelettrico. Il motivo è ancora che l'elettrone che assorbe la radiazione elettromagnetica è legato al reticolo cristallino del solido, o ad un atomo o ad una molecola; la quantità di moto del fotone assorbito viene divisa tra l'elettrone e il reticolo, l'atomo, o la molecola. Tuttavia, a causa della massa relativamente grande del reticolo, dell'atomo o della molecola, la sua energia cinetica è trascurabile e noi possiamo supporre (senza sensibile errore) che tutta l'energia del fotone vada all'elettrone. La medesima analisi si applica al protone nel caso dell'effetto fotonucleare.

19.13 Propagazione delle onde elettromagnetiche nella materia; dispersione

Fino ad ora si è considerata soltanto la propagazione di onde elettromagnetiche nel vuoto. Gli esperimenti rivelano che la velocità di propagazione di un'onda elettromagnetica nella materia è diversa dalla sua velocità di propagazione nel vuoto. Per vedere la ragione di queste diverse velocità di propagazione nella materia e nel vuoto, dobbiamo ricordare che, al Paragrafo 19.2, la nostra discussione era basata sulla assenza di cariche e di correnti. Tuttavia, quando un'onda elettromagnetica si propaga attraverso la materia, anche se non vi sono cariche libere e correnti, essa induce certe cariche e correnti nella materia come risultato della polarizzazione e della magnetizzazione della materia, come è stato discusso nel Capitolo 16. Se la sostanza è omogenea ed isotropa, si può dimostrare che l'effetto risultante della polarizzazione e della magnetizzazione del mezzo da parte delle onde elettromagnetiche è di sostituire le costanti ϵ_0 e μ_0 nelle equazioni di Maxwell con la permittività elettrica ϵ e la permeabilità magnetica μ caratteristiche del materiale. Tutto resta immutato nei calcoli del Paragrafo 19.2, eccetto che la velocità dell'onda diventa ora

Il rapporto tra la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto, c, e nella materia, v è detto *indice di rifrazione assoluto* dalla sostanza, ed è indicato con n. È questo un concetto utile per descrivere la proprietà dei materiali relativamente alle onde elettromagnetiche. Così

Ma $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r$ e $\mu/\mu_0 = \mu_r$, dove ϵ_r e μ_r sono la permettività relativa e la permeabilità relativa del mezzo. Allora

In generale μ_r differisce di poco da 1 per la maggior parte delle sostanze che trasmettono onde elettromagnetiche (si veda la Tabella 16—3), e possiamo scrivere, con approssimazione soddisfacente

Note that we have not mentioned the conservation of momentum in our discussion of the photoelectric effect. The reason is again that the electron absorbing the electromagnetic radiation is bound to the crystal lattice of the solid, or to an atom or a molecule; the momentum of the absorbed photon is shared by the electron and the lattice, atom, or molecule. However, because of the relatively large mass of the lattice, atom, or molecule, its kinetic energy is negligible and we may assume (without noticeable error) that all the energy of the photon goes to the electron. The same analysis applies to the protons in the photonuclear effect.

19.13 Propagation of Electromagnetic Waves in Matter; Dispersion

So far we have considered only the propagation of electromagnetic waves in vacuum. Experiments reveal that the velocity of propagation of an electromagnetic wave through matter is different from its velocity of propagation in vacuum. To see the reason for these different velocities of propagation in matter and in vacuum, we must remember that our discussion in Section 19.2 was based on the absence of charges and currents. However, when an electromagnetic wave propagates through matter, even if there are no free charges and currents, it induces certain charges and currents in the substance as a result of the polarization and magnetization of matter as discussed in Chapter 16. If the substance is homogeneous and isotropic, it can be proved that the net effect of the polarization and magnetization of the medium by the electromagnetic wave is to replace the constants ϵ_0 and μ_0 in the Maxwell equations by the electric permittivity ϵ and the magnetic permeability μ characteristic of the material. Everything in the calculations of Section 19.2 remains the same, except that the velocity of the wave now becomes

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}. \tag{19.55}$$

The ratio between the velocity of electromagnetic waves in vacuum, c, and in matter, v, is called the *absolute index of refraction* of the substance, designated by n. It is a useful concept for describing the properties of materials in relation to electromagnetic waves. Thus

$$n = \frac{c}{v} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}.$$

But $\epsilon/\epsilon_0 = \epsilon_r$ and $\mu/\mu_0 = \mu_r$, where ϵ_r and μ_r are the relative permittivity and permeability of the medium. Then

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}. \tag{19.56}$$

In general μ_r differs very little from 1 for the majority of substances that transmit electromagnetic waves (see Table 16–3), and we can write, as a satisfactory approximation,

$$n = \sqrt{\epsilon_r}. \tag{19.57}$$

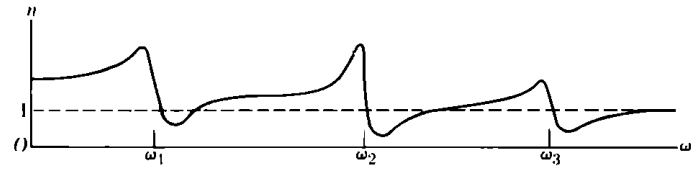


Fig. 19–29. Variazione dell'indice di rifrazione con la frequenza e la lunghezza d'onda.

Questa relazione fornisce un semplice metodo sperimentale per determinare la permettività relativa della sostanza se l'indice di rifrazione è ottenuto in modo indipendente (come può essere fatto). L'accordo dei valori di ϵ_r ottenuti con questo metodo con quelli ottenuti con altri metodi di misura fornisce una base soddisfacente alla teoria. Nel Paragrafo 16.7, abbiamo calcolato ϵ_r, dato dalla Eq. (16.24). Allora, indicando con N il numero di elettroni ad unità di volume per evitare confusione con l'indice di rifrazione, possiamo scrivere

Quindi l'indice di rifrazione dipende dalla frequenza dell'onda, e quindi anche dalla lunghezza d'onda, in maniera analoga a quella illustrata in Fig. 16—20 per ϵ_r e mostrata in Fig. 19—29, dove ω_1, ω_2, ... sono le frequenze caratteristiche dello spettro di emissione della sostanza. In conseguenza, la velocità di fase $v = c/n$ dell'onda elettromagnetica nella materia dipende anche dalla frequenza della radiazione. Perciò le onde elettromagnetiche subiscono dispersione quando si propagano nella materia. Quindi, un impulso contenente parecchie frequenze sarà distorto poichè ciascuna componente viaggerà con velocità differente.

La velocità di gruppo, v_g, dalla Eq. (18.59), è data da

Ora sappiamo che

poichè $v_g = d\omega/dk$. Usando $v = c/n$, abbiamo

Quindi

Risolvendo rispetto a v_g, otteniamo

Fig. 19–29. Variation of the index of refraction with frequency and wavelength.

This relation affords a simple experimental method for determining the relative permittivity of the substance if the index of refraction is obtained independently (as may be done). The consistency of the values of ϵ_r obtained by this method with those from other kinds of measurement gives a satisfactory foundation to the theory. In Section 16.7 we calculated ϵ_r, given by Eq. (16.24). Then, using N for the number of electrons per unit volume to avoid confusion with the index of refraction, we may write

$$n^2 = \epsilon_r = 1 + \frac{Ne^2}{m_e\epsilon_0}\left(\sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}\right). \tag{19.58}$$

Therefore the index of refraction depends on the wave frequency, and hence also on the wavelength, in a manner similar to that illustrated in Fig. 16–20 for ϵ_r and shown in Fig. 19–29, where ω_1, ω_2, ... are the characteristic frequencies of the emission spectrum of the substance. Consequently, the phase velocity $v = c/n$ of the electromagnetic wave in matter also depends on the frequency of the radiation. Therefore the electromagnetic waves suffer dispersion when propagating in matter. That is, a pulse containing several frequencies will be distorted because each component will travel with a different velocity.

The group velocity, v_g, from Eq. (18.59), is given by

$$v_g = v + k\frac{dv}{dk}.$$

Now we know that

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dk} = v_g\frac{dv}{d\omega},$$

since $v_g = d\omega/dk$. Using $v = c/n$, we have

$$\frac{dv}{d\omega} = -\frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\omega}.$$

Therefore

$$v_g = v - \frac{v_g ck}{n^2}\frac{dn}{d\omega}.$$

Solving for v_g, we get

$$v_g = \frac{v}{1 + (ck/n^2)(dn/d\omega)} = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}, \tag{19.59}$$

nella quale abbiamo ottenuto la seconda espressione usando $k = \omega/v = \omega n/c$. Quando $dn/d\omega$ è positivo, la velocità di gruppo è minore della velocita di fase. Tale condizione è detta *dispersione normale*. Ma se $dn/d\omega$ è negativo, allora la velocità di gruppo è maggiore della velocità di fase e si ha *dispersione anomala*. Esiste, in questo caso, la possibilità che la velocità di gruppo sia più grande di c, e che un impulso elettromagnetico possa essere trasmesso con velocità più grande di c. Ciò è apparentemente in contraddizione con i risultati derivati dalla trasformazione di Lorentz e dal principio di relatività.

Una analisi accurata della trasmissione del segnale elettromagnetico, effettuata da Brillouin, Sommerfeld, ed altri (analisi che è matematicamente molto complessa), rivela che non è possibile trasmettere un segnale con velocità maggiore di c. La Fig. 19—30 rappresenta la variazione della velocità di fase v, della velocità di gruppo v_g, e la velocità di segnale v_σ vicino alla frequenza caratteristica ω_i. La velocità di segnale coincide praticamente con la velocità di gruppo, eccetto in vicinanza della frequenza caratteristica, e non è mai maggiore di c, anche nella zona della dispersione anomala.

Quando n è maggiore di 1, in modo che v è minore di c, vi è la possibilità che una particella carica, q, che emette onde elettromagnetiche, si muova nel mezzo con una velocità v_q maggiore della velocità di fase v delle onde elettromagnetiche. Ciò corrisponde alla situazione illustrata in Fig. 18—36 per le onde di Mach in un fluido. Allora le onde elettromagnetiche si propagano lungo superficie coniche, facenti un angolo α con la direzione di propagazione dato da

$$\sin \alpha = v_q/v,$$

in accordo con l'Eq. (18.64). Queste onde sono dette *radiazione Cerenkov*. Poichè la direzione effettiva di propagazione del fronte d'onda è legata alla velocità della particella carica, essa può essere usata per misurare quest'ultima. Gli apparati usati per questo scopo sono detti *rivelatori Cerenkov*, e sono ampiamente usati nelle esperienze con le particelle fondamentali poichè essi forniscono informazioni dirette sulla velocità delle particelle.

Fig. 19—30. Velocità di fase, di gruppo e di segnale di un impulso elettromagnetico in un mezzo dispersivo.

Abbiamo detto che le onde elettromagnetiche paiono propagarsi nella materia con una velocità di fase diversa dalla loro velocità di propagazione nel vuoto. Ma questa differenza sembra derivare dal fatto che la permettività e la permeabilità della materia sono differenti da quelle del vuoto. Questa differenza (nella permettività e nella permeabilità) è, a sua volta, una conseguenza della polarizzazione elettrica e magnetica della materia sotto l'azione dell'onda elettromagnetica incidente. Così quando un'onda elettromagnetica incide su di un pezzo di materia, induce oscillazioni nelle particelle cariche degli atomi o delle molecole, che emettono allora onde secondarie o "diffuse" (vedi Paragrafo 19.9). Queste onde diffuse si sovrappongono all'onda originale, dando luogo ad un'onda risultante. Le fasi delle onde secondarie sono,

in which we obtained the last expression by using $k = \omega/v = \omega n/c$. When $dn/d\omega$ is positive, the group velocity is smaller than the phase velocity. Such a situation is called *normal dispersion*. But if $dn/d\omega$ is negative, then the group velocity is larger than the phase velocity and *anomalous dispersion* results. The possibility exists in this case that the group velocity is larger than c, and that an electromagnetic pulse can be transmitted at a velocity larger than c. This is apparently in contradiction to the results derived from the Lorentz transformation and the principle of relativity.

A careful analysis of the transmission of an electromagnetic signal, made by Brillouin, Sommerfeld, and others (an analysis which is very complex mathematically), revealed that it is impossible to transmit a signal with a velocity larger than c. Figure 19–30 shows the variation of the phase velocity v, the group velocity v_g, and the signal velocity v_σ near a characteristic frequency ω_i. The signal velocity practically coincides with the group velocity except near the characteristic frequency, and is never larger than c, even in the region of anomalous dispersion.

When n is larger than one, so that v is smaller than c, there is the possibility that a charged particle, q, emitting electromagnetic waves, moves in the medium with a velocity v_q larger than the phase velocity v of the electromagnetic waves. This corresponds to the situation depicted in Fig. 18–36 for Mach waves in a fluid. Then the electromagnetic waves propagate along conical surfaces, making an angle α with the direction of propagation given by

$$\sin \alpha = v_q/v,$$

in accordance with Eq. (18.64). These waves are called *Cerenkov radiation*. Because the effective direction of propagation of the wave front is related to the velocity of the charged particle, it may be used to measure it. Devices used for this purpose are called *Cerenkov detectors*, which are widely used in experiments with fundamental particles because they provide direct information about the velocity of the particles.

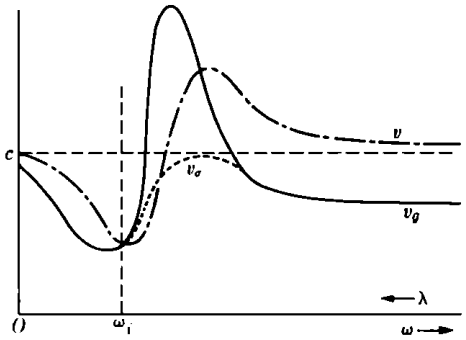


Fig. 19–30. Phase, group, and signal velocities of an electromagnetic pulse in a dispersive medium.

We have said that electromagnetic waves appear to propagate in matter with a phase velocity different from their propagation velocity in vacuum. But that difference seems to stem from the fact that the permittivity and permeability of matter are different from those of vacuum. This difference (in the permittivity and permeability) is, in turn, a consequence of the electric and magnetic polarization of matter under the action of the incoming electromagnetic wave. Thus when an electromagnetic wave falls on a piece of matter, it induces oscillations in the charged particles of the atoms or molecules, which then emit secondary or "scattered" waves (see Section 19.9). These scattered waves are superposed on the original wave, giving a resultant wave. The phases of the secondary waves are,

in generale, diverse da quelle dell'onda originale, poichè un oscillatore forzato non è sempre in fase con la forza applicata (si ricordi il Paragrafo 12.13). Una analisi dettagliata, che noi ometteremo, indica che questa differenza di fase influenza l'onda risultante in modo tale che quest'onda appare avere una velocità di fase differente da quella che un'onda ha nel vuoto (vedi Problema 19.55). È questo un risultato particolarmente soddisfacente poichè, dal punto di vista atomico, tutte le cariche, sia libere che legate, sono equivalenti e le onde elettromagnetiche che esse emettono si devono tutte propagare con velocità c. È l'onda risultante dalla composizione delle loro onde individuali, che hanno fasi diverse, che, come conseguenza delle differenze di fase, appare avere una diversa velocità di propagazione.

ESEMPIO 19.9. Calcolare le velocità di gruppo di radiazioni elettromagnetiche di altissima frequenza, come i raggi x.

Soluzione: Se ω è molto più grande delle frequenze caratteristiche ω_i nell'Eq. (19.58), possiamo trascurare le ω_i e scrivere l'Eq. (19.58) nella forma

poichè $\sum_i f_i = 1$, come indicato nel Paragrafo 16.7. Usando l'approssimazione $(1 - x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \ldots$, che si applica quando $x \ll 1$, secondo l'Eq. (M.28), abbiamo per l'indice di rifrazione,

che è minore di 1, dando $v > c$. Ora $dn/d\omega = Ne^2/\epsilon_0 m_e \omega^3$, e sostituendo nella Eq. (19.58), abbiamo

Perciò, per quanto la velocità di fase v sia maggiore di c perchè n è minore di 1, la velocità di gruppo v_g è minore di c. Si noti che per la velocità di fase,

dove è stata usata l'approssimazione $(1 - x)^{-1} = 1 + x$ (valida quando x $\approx$ 1), secondo l'Eq. (M.28). Allora $v_g v = c^2$. Questa relazione, sebbene non di validità generale, è soddisfatta con ottima approssimazione in un ampio campo di frequenze.

19.14 Effetto Doppler per onde elettromagnetiche

Nel Paragrafo 18.13 abbiamo discusso l'effetto Doppler per le onde elastiche e per altri tipi di onde meccaniche che consistono di materia in moto. L'effetto Doppler per le onde elettromagnetiche deve essere discusso separatamente, poichè in primo luogo le onde elettromagnetiche non consistono di materia in moto, e perciò la velocità della sorgente relativa al mezzo non entra nella discussione. In secondo luogo,

in general, different from that of the original wave, since a forced oscillator is not always in phase with the driving force (remember Section 12.13). A detailed analysis, which we shall omit, indicates that this phase difference affects the resultant wave in such a way that this wave appears to have a phase velocity different from that which a wave in vacuum has (see Problem 19.55). This result is particularly satisfying since, from the atomic point of view, all charges, both free and bound, are equivalent, and the electromagnetic waves they emit must all propagate with the velocity c. It is the wave resulting from the superposition of their individual waves, which have different phases, that, as a consequence of the phase differences, appears to have a different velocity of propagation.

EXAMPLE 19.9. Compute the group velocity for very high frequency electromagnetic radiation, such as x-rays.

Solution: If ω is much larger than the characteristic frequencies ω_i in Eq. (19.58), we may neglect the ω_i's and write Eq. (19.58) in the form

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2} \sum_i f_i = 1 - \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2},$$

since $\sum_i f_i = 1$, as indicated in Section 16.7. Using the approximation $(1 - x)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \cdots$, which applies when $x \ll 1$, according to Eq. (M.28), we have for the index of refraction,

$$n = 1 - Ne^2/2\epsilon_0 m_e \omega^2,$$

which is smaller than one, giving $v > c$. Now $dn/d\omega = Ne^2/\epsilon_0 m_e \omega^3$, and substituting in Eq. (19.58), we have

$$v_g = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)} = \frac{c}{1 - (Ne^2/2\epsilon_0 m_e \omega^2) + \omega(Ne^2/\epsilon_0 m_e \omega^3)} = \frac{c}{1 + (Ne^2/2\epsilon_0 m_e \omega^2)}.$$

Therefore, although the phase velocity v is larger than c because n is smaller than one, the group velocity v_g is smaller than c. Note that for the phase velocity,

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{1 - (Ne^2/2\epsilon_0 m_e \omega^2)} \approx c[1 + (Ne^2/2\epsilon_0 m_e \omega^2)],$$

where we have used the approximation $(1 - x)^{-1} = 1 + x$ (valid when $x \approx 1$), according to Eq. (M.28). Then $v_g v = c^2$. This relation, although not of general validity, is satisfied to a very good approximation over a wide range of frequencies.

19.14 Doppler Effect in Electromagnetic Waves

In Section 18.13 we discussed the Doppler effect for elastic waves and other kinds of mechanical waves which consist of matter in motion. The Doppler effect for electromagnetic waves must be discussed separately, because in the first place electromagnetic waves do not consist of matter in motion, and therefore the velocity of the source relative to the medium does not enter into the discussion. Secondly,

la loro velocità di propagazione è c, ed è la stessa per tutti gli osservatori indipendentemente dal moto relativo degli osservatori. L'effetto Doppler per le onde elettromagnetiche deve necessariamente essere calcolato per mezzo del principio di relatività.

Per un osservatore in un sistema di riferimento inerziale, un'onda elettromagnetica armonica piana può essere descritta da una funzione della forma $\sin(kx - \omega t)$ moltiplicata per un opportuno fattore d'ampiezza. Per un osservatore solidale a un diverso sistema di riferimento inerziale, le coordinate x e t devono essere sostituite con x' e t', dati dalle trasformazioni di Lorentz (6.33), e perciò egli scriverà per la sua funzione $\sin(k'x' - \omega't')$, dove k' e ω' non devono necessariamente essere gli stessi come per l'altro osservatore. D'altra parte, il principio di relatività richiede che l'espressione $kx - \omega t$ debba rimanere invariata quando noi passiamo da un osservatore inerziale ad un altro. Perciò dobbiamo avere

their velocity of propagation is c, and is the same to all observers irrespective of the relative motion of the observers. The Doppler effect for electromagnetic waves must necessarily be computed by means of the principle of relativity.

To an observer in one inertial frame of reference, a plane harmonic electromagnetic wave can be described by a function of the form $\sin(kx - \omega t)$ multiplied by an appropriate amplitude factor. To an observer attached to a different inertial frame of reference, the coordinates x and t must be replaced by x' and t', as given by the Lorentz transformation (6.33), and therefore he will write for his function $\sin(k'x' - \omega't')$, where k' and ω' do not necessarily have to be the same as for the other observer. On the other hand, the principle of relativity requires that the expression $kx - \omega t$ must remain invariant when we pass from one inertial observer to another. Therefore we must have

$$kx - \omega t = k'x' - \omega't'.$$

Usando la prima e la quarta espressione delle trasformazioni di Lorentz reciproche (6.34), abbiamo

Using the first and fourth equations of the reciprocal Lorentz transformation (6.34), we have

$$k\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \omega\frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = k'x' - \omega't'$$

ossia

or

$$\frac{k - \omega v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}x' - \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}t' = k'x' - \omega't'.$$

Perciò

Therefore

$$k' = \frac{k - \omega v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \omega' = \frac{\omega - kv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{19.60}$$

Ricordando che $\omega = ck$, possiamo scrivere ciascuna di queste equazioni nella forma

Remembering that $\omega = ck$, we can write either of these equations in the form

$$\omega' = \omega\frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{19.61}$$

Per piccole velocità, cioè, $v \ll c$, possiamo approssimare il denominatore con 1, dando luogo a

For small velocities, that is, $v \ll c$, we may approximate the denominator by 1, resulting in

$$\omega' = \omega(1 - v/c),$$

che è la stessa dell'Eq. (18.62) per il moto dell'osservatore relativo alla sorgente lungo la linea di propagazione. [Si noti che v_{0s} nell'Eq. (18.62) è ora indicata con v, e v con c.]

L'Eq. (19.61) pone in relazione le frequenze ω e ω' come sono misurate da due osservatori O e O' quando O' si muove lungo l'asse X con una velocità v rispetto ad O. Quando il moto relativo dei due osservatori non avviene lungo la linea di propagazione, un calcolo più elaborato (vedi Esempio 19.10) indica che

which is the same as Eq. (18.62) for motion of the observer relative to the source along the line of propagation. [Note that v_{0s} in Eq. (18.62) is now denoted by v, and v by c.]

Equation (19.61) relates the frequencies ω and ω' as measured by two observers O and O' when O' is moving along the X-axis with a velocity v relative to O. When the relative motion of the two observers is not along the line of propagation, a more elaborate calculation (see Example 19.10) indicates that

$$\omega' = \omega\frac{1 - (v/c)\cos\theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{19.62}$$

Cluster nebula in = Ammasso globulare nella
Virgo = Virgo
Ursa major = Orsa maggiore
Corona borealis = Corona boreale
Bootes = Boote
Hydra = Hydra
Distance in light years = Distanza in anni luce
Red shifts = Spostamento verso il rosso
750 miles per second = 1200 km/sec
9300 ,, ,, ,, = 14,900 km/sec
13,400 ,, ,, ,, = 21,500 km/sec
24,400 ,, ,, ,, = 39,000 km/sec
38,000 ,, ,, ,, = 62,000 km/sec

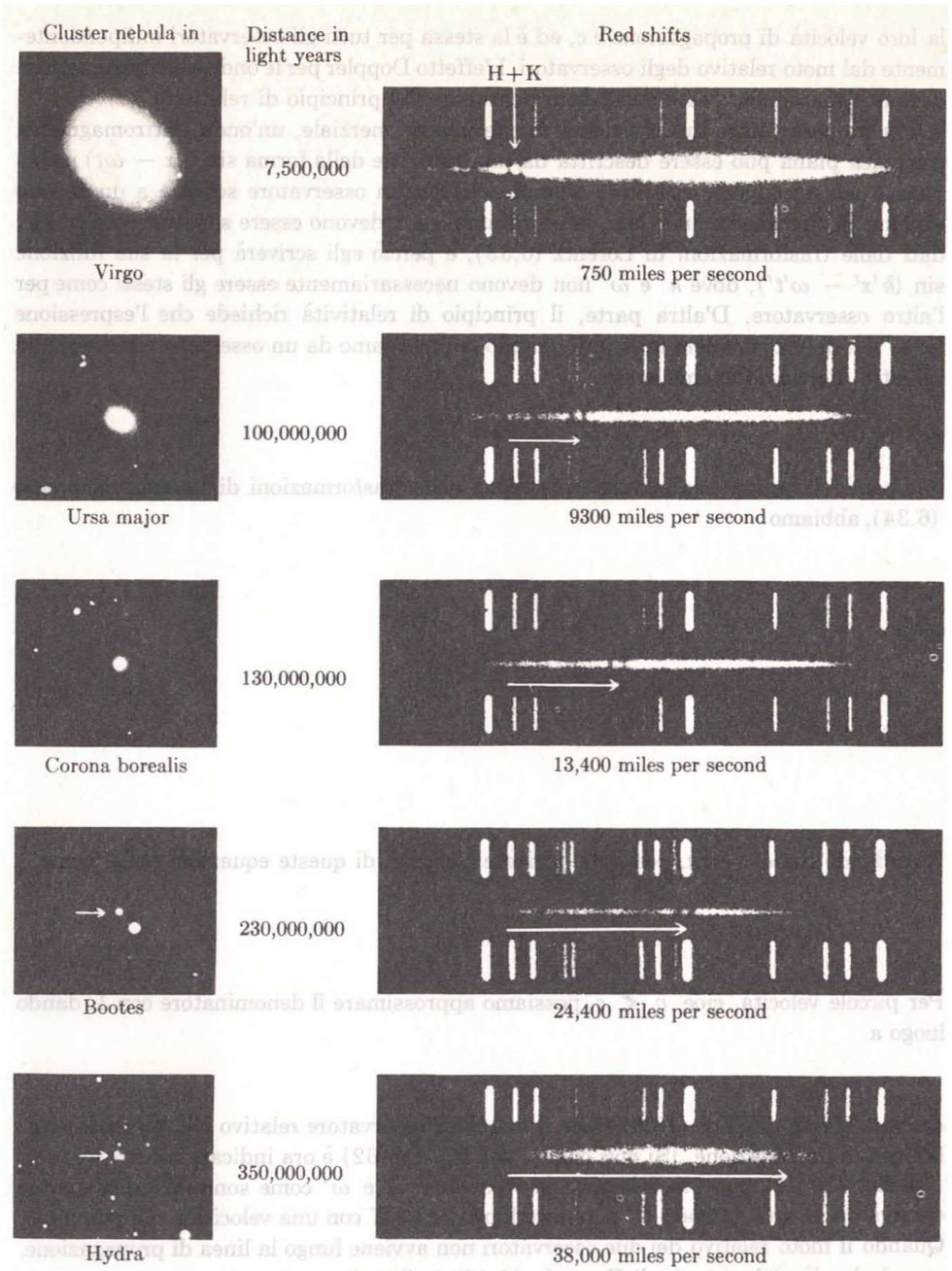


Fig. 19–31. Effetto Doppler nelle nebulose extragalattiche. Lo spostamento verso il rosso delle linee spettrali H e K del calcio (indicate dalla freccia) si accentua con la distanza della nebulosa, facendo pensare a maggiori velocità di allontanamento. (La fotografia è dovuta alla cortesia degli osservatori di Mt. Wilson e Mt. Palomar)

Fig. 19–31. Doppler effect in extragalactic nebulas. The red shift of the spectral H and K calcium lines (indicated by the arrow) increases with the distance of the nebula, suggesting greater recessional velocities. (Photograph courtesy of Mt. Wilson and Palomar Observatories)

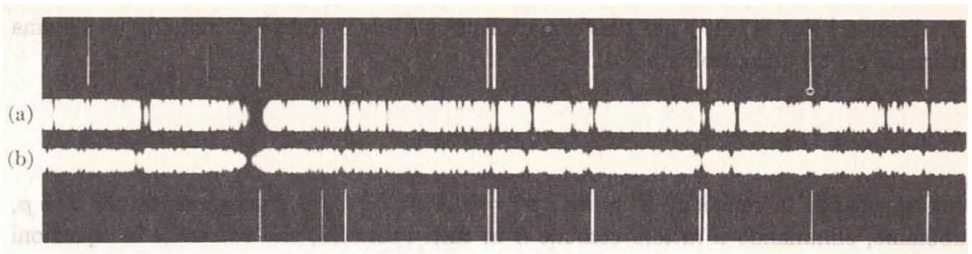


Fig. 19–32. Gli spettri (λ4200 Å a λ4300 Å) della stella Arturo avente velocità costante realizzati alla distanza di 6 mesi. (a) 1 luglio, 1939; velocità misurata, + 18 km s^{-1} rispetto alla terra. (b) 19 gennaio, 1940; velocità misurata − 32 km s^{-1}. La differenza di velocità di 50 km s^{-1} è interamente dovuta alla variazione della velocità orbitale della terra. Si può vedere chiaramente lo spostamento delle linee spettrali quando lo si confronti con due spettri di riferimento. (La fotografia è dovuta alla cortesia degli osservatori di Mt. Wilson e Mt. Palomar)

Fig. 19–32. Spectra (λ4200 Å to λ4300 Å) of the constant-velocity star Arcturus taken about six months apart. (a) July 1, 1939; measured velocity +18 km s^{-1} relative to earth. (b) Jan. 19, 1940; measured velocity −32 km s^{-1}. The velocity difference of 50 km s^{-1} is entirely due to the change in orbital velocity of the earth. One can see the shift in the spectral lines clearly when one compares them with the two reference spectra. (Photograph courtesy of Mt. Wilson and Palomar Observatories)

dove θ è l'angolo tra la direzione di propagazione e la direzione del moto relativo. Supponendo che O sia in riposo rispetto alla sorgente delle onde elettromagnetiche, vediamo che se la sorgente O e l'osservatore O' si stanno allontanando l'uno dall'altro, O' osserva una frequenza minore, o corrispondentemente una lunghezza d'onda maggiore. Questo è osservato nello spettro delle stelle ed è detto *spostamento verso il rosso*, poichè lo spettro visibile della luce proveniente da stelle che si allontanano è spostato verso le lunghezze d'onda del rosso (o lunghezze d'onda maggiori). Questo fattore ci permette di valutare la velocità con cui queste stelle si stanno allontanando.

La Fig. 19—31 mostra lo spostamento verso il rosso delle linee H e K del calcio osservato nello spettro di parecchie nebulose. Lo spostamento è indicato dalla linea orizzontale. Si noti come maggiore è lo spostamento e quindi maggiore la velocità relativa, più grande è la distanza della nebulosa. Ciò appoggia la teoria dell'universo in espansione. Recentemente sono state osservate alcune nebulose che si allontanano a velocità grandi come circa la metà di quella della luce; ciò ha fatto pensare che l'effetto Doppler possa non essere il solo responsabile dello spostamento verso il rosso. È interessante notare che la luce di Andromeda (Fig. 1—6) mostra uno spostamento verso lunghezze d'onda più corte, o uno spostamento verso il blu. Questo sembra indicare che l'attuale moto del sistema solare all'interno della nostra galassia ruotante avviene in direzione di questa nebulosa.

La Fig. 19—32 mostra lo spostamento dello spettro della stella Arturo, che dista circa 36 anni luce dal sole. I due spettri furono registrati alla distanza di sei mesi l'uno dall'altro, e vediamo che lo spostamento di uno è diretto verso il rosso mentre lo spostamento dell'altro è diretto verso l'azzurro. Questo spostamento è dovuto all'inversione della direzione del moto della terra rispetto ad Arturo.

Abbiamo ricavato l'espressione (19.61), applicando il principio di relatività alla fase $kx - \omega t$ dell'onda. Ma, d'altra parte, abbiamo attribuito una certa quantità di moto ed una certa energia alla radiazione e le abbiamo raggruppate nel concetto di fotone. Dobbiamo allora vedere se la nostra logica è coerente verificando la trasformazione di Lorentz dell'energia e della quantità di moto per un fotone per vedere se esse sono compatibili con l'Eq. (19.60). (Vedi Esempio 11.8.) Dall'Eq. (19.50) abbiamo, per un fotone, che

where θ is the angle between the direction of propagation and the direction of the relative motion. Assuming that O is at rest relative to the source of the electromagnetic wave, we see that if the source O and the observer O' are receding from each other, O' observes a lower frequency, or correspondingly longer wavelength. This is observed in the spectrum of stars and is called the *red shift*, since the visible spectrum of the light from receding stars is shifted toward the red (or longer) wavelength limit. This factor allows us to estimate the velocity with which these stars are receding.

Figure 19–31 shows the red shift of the calcium lines H and K observed in the spectra of several nebulas. The shift is indicated by the horizontal line. Note that the larger the shift and therefore the larger the relative velocity, the greater the distance of the nebula. This supports the theory of an expanding universe. Recently certain nebulas have been observed to be receding at velocities as large as half the velocity of light, which has provoked thoughts that the Doppler effect may not be solely responsible for the red shift. It is interesting to note that the light from Andromeda (Fig. 1–6) shows a shift toward shorter wavelengths, or a blue shift. This seems to indicate that the present motion of the solar system within our rotating galaxy is in a direction toward this nebula.

Figure 19–32 shows the shift of the spectrum from the star Arcturus, which is about 36 light years from the sun. The two spectra were recorded six months apart, and we see that the shift of one is toward the red, while the shift of the other is toward the blue. This shift is due to the reversal in the direction of the motion of the earth relative to Arcturus.

We have derived expression (19.61), applying the principle of relativity to the phase $kx - \omega t$ of the wave. But on the other hand we have attached certain momentum and energy to the radiation and grouped them in the concept of the photon. We must then see if our logic is consistent by checking the Lorentz transformation of the energy and momentum for a photon to see if they are compatible with Eq. (19.60). (See Example 11.8.) From Eq. (19.50) we have, for a photon, that

$$E = h\nu, \qquad p = h/\lambda. \tag{19.63}$$

Applicando l'Eq. (11.27) per trasformare l'energia e la quantità di moto da un sistema inerziale ad un altro, abbiamo

Applying Eq. (11.27) for transforming energy and momentum from one inertial frame to another, we have

$$p' = \frac{p - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{and} \quad E' = \frac{E - vp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{19.64}$$

Allora, usando le relazioni $E' = h\nu'$, $p' = h/\lambda' = h\nu'/c$, e analogamente per E e p, abbiamo, eliminando il fattore comune h in tutti i termini, che entrambe le equazioni si riducono a

Then, using the relations $E' = h\nu'$, $p' = h/\lambda' = h\nu'/c$, and similarly for E and p, we have, canceling the common factor h in all terms, that both equations reduce to

$$\nu' = \nu \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{19.65}$$

Moltiplicando entrambe le equazioni per 2π ed usando la $\omega = 2\pi\nu$, si vede che si ottiene di nuovo l'Eq. (19.61). Si sarebbe potuto ottenere direttamente questo risultato dall'Esempio 11.8, se avessimo posto $p = h\nu/c = h\omega/2\pi c$ nella prima relazione, con una espressione analoga per p', e se avessimo eliminato il fattore comune $h/2\pi c$. Possiamo allora concludere che il concetto di fotone è quasi una esigenza del principio di relatività. Cioè, se osserviamo che la relazione $E = cp$ è valida insieme alla $\omega = ck$, vediamo che il semplice confronto delle Equazioni (19.60) e (19.64) avrebbe indotto i fisici a cercare una corrispondenza del tipo $E \to \omega$ oppure ν e $p \to k$ oppure $1/\lambda$. Se un fisico avesse adottato questo principio guida, il concetto di fotone si sarebbe sviluppato in ogni caso come una necessità teorica. Tuttavia, il lavoro di Einstein e Compton, basato sulla evidenza sperimentale diretta, ha affrettato la scoperta delle relazioni (19.50) per la radiazione elettromagnetica.

Multiplying both equations by 2π and using $\omega = 2\pi\nu$, we see that we again obtain Eq. (19.61). This result could have been obtained directly from Example 11.8 if we had set $p = h\nu/c = h\omega/2\pi c$ in the first relation, with a similar expression for p', and if we had canceled the common factor $h/2\pi c$. We may then conclude that the concept of the photon is almost a requirement of the principle of relativity. That is, if we assume that the relation $E = cp$ holds along with $\omega = ck$, we see that the mere comparison of Eqs. (19.60) and (19.64) would have tempted the physicist to look for a correspondence of the type $E \to \omega$ or ν and $p \to k$ or $1/\lambda$. If a physicist had used this guiding principle, the concept of a photon would have evolved anyhow as a theoretical requirement. However, the work of Einstein and Compton, based on direct experimental evidence, speeded up the discovery of relations (19.50) for the electromagnetic radiation.

ESEMPIO 19.10. Provare la relazione (19.62) per l'effetto Doppler.

Soluzione: Quando la direzione di propagazione di un'onda elettromagnetica piana fa un angolo θ rispetto alla direzione del moto relativo di due osservatori O e O', dobbiamo scrivere, invece della seconda delle equazioni (19.64), l'equazione

EXAMPLE 19.10. Proof of relation (19.62) for the Doppler effect.

Solution: When the direction of propagation of a plane electromagnetic wave makes an angle θ with respect to the direction of relative motion of two observers O and O', we must write, instead of the second equation of (19.64), the equation

$$E' = \frac{E - vp_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Ma $p_x = p \cos\theta$. Allora, ricordando che per un fotone $E = cp$, possiamo scrivere

But $p_x = p \cos\theta$. Then, remembering that $E = cp$ for a photon, we may write

$$E' = \frac{E - vp\cos\theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = E\frac{1 - (v/c)\cos\theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{19.66}$$

Usando $E = h\nu = h\omega/2\pi$ ed eliminando i fattori comuni, otteniamo in conclusione

Using $E = h\nu = h\omega/2\pi$ and canceling common factors, we finally obtain

$$\omega' = \omega\frac{1 - (v/c)\cos\theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

che è l'Eq. (19.62); si è così ottenuta la nostra prova.

which is Eq. (19.62); thus we have obtained our proof.

ESEMPIO 19.11. Discutere la relazione tra le direzioni di propagazione di un'onda elettromagnetica piana come determinata da due osservatori in moto relativo. Questo effetto è detto *aberrazione*.

EXAMPLE 19.11. Discuss the relation between the directions of propagation of a plane electromagnetic wave as determined by two observers in relative motion. This effect is called *aberration*.

Soluzione: Si supponga di avere una sorgente in quiete relativamente all'osservatore O, e che egli veda un'onda elettromagnetica propagantesi in una direzione facente un angolo θ con l'asse X, che coincide con la direzione del moto relativo dei due osservatori. Dobbiamo avere allora, secondo l'Eq. (11.27),

ma $p_x = p \cos\theta$, ed analogamente per l'osservatore O', $p'_x = p' \cos\theta'$. Perciò, ponendo $E = cp$, abbiamo

Se poniamo $p = h/\lambda = h\omega/2\pi c$, ed analogamente per p', eliminando i fattori comuni, otteniamo

Combinando questa con l'Eq. (19.62) per eliminare le frequenze, otteniamo

che pone in relazione le direzioni di propagazione dell'onda elettromagnetica come determinata dai due osservatori.

19.15 Lo spettro della radiazione elettromagnetica

Le onde elettromagnetiche coprono un certo campo di frequenze o di lunghezze d'onda, e possono essere classificate secondo la loro sorgente principale. La classificazione non ha delimitazioni ben nette, poichè sorgenti differenti possono produrre onde in zone di frequenze che si sovrappongono.

La classificazione consueta dello spettro elettromagnetico è la seguente:

(1) ***Onde a radiofrequenza.*** Queste hanno lunghezze d'onda che vanno da pochi chilometri fino a 0.3 m. L'intervallo di frequenza va da pochi Hz fino a 10^9 Hz. L'energia dei fotoni va da quasi zero fino a 10^{-5} eV. Queste onde, che sono usate nei sistemi trasmittenti della radio e della televisione, sono generate da apparati elettronici, principalmente circuiti oscillanti.

(2) ***Microonde.*** Le lunghezze d'onda delle microonde vanno da 0.3 m fino a 10^{-3} m. L'intervallo di frequenze va da 10^9 Hz fino a 3×10^{11} Hz. L'energia dei fotoni va da circa 10^{-5} eV fino a 10^{-3} eV. Queste onde sono usate nei sistemi radar ed in quelli di altre comunicazioni, come anche nell'analisi dei particolari della struttura atomica e molecolare, e sono anch'esse generate da apparati elettronici. La regione delle microonde è indicata anche come UHF (altissima frequenza rispetto alla frequenza radio).

Solution: Suppose that we have a source at rest relative to observer O, and that he sees an electromagnetic wave propagating in a direction making an angle θ with the X-axis, which coincides with the direction of the relative motion of the two observers. Then we must have, according to Eq. (11.27),

$$p'_x = \frac{p_x - vE/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

but $p_x = p \cos\theta$, and similarly for observer O', $p'_x = p' \cos\theta'$. Therefore, setting $E = cp$, we have

$$p' \cos\theta' = p \frac{\cos\theta - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

If we make $p = h/\lambda = h\omega/2\pi c$, and similarly for p', and cancel common factors, we obtain

$$\omega' \cos\theta' = \omega \frac{\cos\theta - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Combining this with Eq. (19.62) to eliminate the frequencies, we obtain

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - v/c}{1 - (v/c)\cos\theta}, \tag{19.67}$$

which relates the directions of propagation of the electromagnetic wave as determined by the two observers.

19.15 The Spectrum of Electromagnetic Radiation

Electromagnetic waves cover a wide range of frequencies or wavelengths, and may be classified according to their main source. The classification does not have very sharp boundaries, since different sources may produce waves in overlapping ranges of frequencies.

The usual classification of the electromagnetic spectrum is the following:

(1) ***Radiofrequency waves.*** These have wavelengths ranging from a few kilometers down to 0.3 m. The frequency range is from a few Hz up to 10^9 Hz. The energy of the photons goes from almost zero up to about 10^{-5} eV. These waves, which are used in television and radio broadcasting systems, are generated by electronic devices, mainly oscillating circuits.

(2) ***Microwaves.*** The wavelengths of microwaves range from 0.3 m down to 10^{-3} m. The frequency range is from 10^9 Hz up to 3×10^{11} Hz. The energy of the photons goes from about 10^{-5} eV up to 10^{-3} eV. These waves are used in radar and other communication systems, as well as in the analysis of very fine details of atomic and molecular structure, and are also generated by electronic devices. The microwave region is also designated as UHF (ultrahigh frequency relative to radio frequency).

(3) ***Spettro dell'infrarosso.*** Questo interessa lunghezze d'onda da 10^{-3} m fino a 7.8×10^{-7} m (o 7800Å). L'intervallo di frequenza va da 3×10^{11} Hz fino a 4×10^{14} Hz e l'energia dei fotoni va da 10^{-3} eV fino a circa 1.6 eV. Questa regione è suddivisa in tre: l'*estremo infrarosso*, da 10^{-3} m a 3×10^{-5} m, il *medio infrarosso*, da 3×10^{-5} m a 3×10^{-6} m, e il *prossimo infrarosso*, che si estende fino a circa 7.8×10^{-7} m. Queste onde sono prodotte da molecole e da corpi caldi. Esse hanno parecchie applicazioni nell'industria, nella medicina, nell'astronomia, ecc.

(4) ***Luce o spettro visibile.*** È questa una stretta banda formata dalle lunghezze d'onda a cui è sensibile la nostra retina. Si estende dalla lunghezza d'onda di 7.8×10^{-7}m fino a 3.8×10^{-7} m e dalle frequenze di 4×10^{14} Hz fino a 8×10^{14} Hz. L'energia dei fotoni va da 1.6 eV fino a 3.2 eV. La luce è prodotta da atomi e molecole come conseguenza della transizione nello stato di moto dei loro componenti, principalmente gli elettroni. Non è necessario che venga rilevata l'importanza della luce nel nostro mondo.

La luce è così importante che si è sviluppata una branca speciale della fisica applicata, detta *ottica*. L'ottica si interessa dei fenomeni luminosi come pure della visione, e comprende il progetto degli strumenti ottici. A causa della somiglianza di comportamento delle regioni infrarossa ed ultravioletta dello spettro, il campo dell'ottica comprende attualmente entrambe queste radiazioni, in aggiunta allo spettro visibile. Le diverse sensazioni che la luce produce sull'occhio, dette *colori*, dipendono dalla frequenza, o dalla lunghezza d'onda, dell'onda elettromagnetica e corrispondono ai seguenti intervalli di valori per la persona media:

Colore	λ, m	ν, Hz
Violetto		
Blu		
Verde		
Giallo		
Arancione		
Rosso		

La sensibilità dell'occhio dipende anche dalla lunghezza d'onda della luce; questa sensibilità è massima per lunghezze d'onda di approssimatamente 5.6×10^{-7} m. A causa della relazione tra colore e lunghezza d'onda o frequenza, un'onda elettromagnetica di ben definita lunghezza d'onda o frequenza è detta anche *onda monocromatica* (*monos*: uno; *chromos*: colore).

La visione è il risultato dei segnali trasmessi al cervello da due elementi presenti in una membrana detta *retina*, che si trova al fondo dell'occhio. Questi elementi sono i *coni* ed i *bastoncelli*. I coni sono quegli elementi che sono attivi in presenza di luce intensa, come quella che esiste durante le ore del giorno. I coni sono sensibili al colore. I bastoncelli, d'altra parte, sono elementi in grado di funzionare sotto illuminazione molto debole, come quella che si ha in una stanza oscurata; essi non sono

(3) ***Infrared spectrum.*** This covers wavelengths from 10^{-3} m down to 7.8×10^{-7} m (or 7800 Å). The frequency range is from 3×10^{11} Hz up to 4×10^{14} Hz and the energy of the photons goes from 10^{-3} eV up to about 1.6 eV. This region is subdivided into three: the *far infrared*, from 10^{-3} m to 3×10^{-5} m, the *middle infrared*, from 3×10^{-5} m to 3×10^{-6} m, and the *near infrared*, extending up to about 7.8×10^{-7} m. These waves are produced by molecules and hot bodies. They have many applications in industry, medicine, astronomy, etc.

(4) ***Light or visible spectrum.*** This is a narrow band formed by the wavelengths to which our retina is sensitive. It extends from a wavelength of 7.8×10^{-7} m down to 3.8×10^{-7} m and frequencies from 4×10^{14} Hz up to 8×10^{14} Hz. The energy of the photons goes from 1.6 eV up to about 3.2 eV. Light is produced by atoms and molecules as a result of internal adjustment in the motion of its components, mainly the electrons. It is not necessary to emphasize the importance of light in our world.

Light is so important that a special branch of applied physics has evolved, called *optics*. Optics deals with light phenomena as well as vision, and includes the design of optical instruments. Because of the similarity in the behavior of the infrared and ultraviolet regions of the spectrum, the field of optics presently includes both, in addition to the visible spectrum. The different sensations that light produces on the eye, called *colors*, depend on the frequency, or the wavelength, of the electromagnetic wave, and correspond to the following ranges for the average person:

Color	λ, m	ν, Hz
Violet	$3.90–4.55 \times 10^{-7}$	$7.69–6.59 \times 10^{14}$
Blue	4.55–4.92	6.59–6.10
Green	4.92–5.77	6.10–5.20
Yellow	5.77–5.97	5.20–5.03
Orange	5.97–6.22	5.03–4.82
Red	6.22–7.80	4.82–3.84

The sensitivity of the eye also depends on the wavelength of light; this sensitivity is a maximum for wavelengths of approximately 5.6×10^{-7} m. Because of the relation between color and wavelength or frequency, an electromagnetic wave of well-defined wavelength or frequency is also called a *monochromatic wave* (*monos:* one; *chromos:* color).

Vision is the result of the signals transmitted to the brain by two elements present in a membrane called the *retina*, lying in the back of the eye. These elements are the *cones* and the *rods*. Cones are those elements which are active in the presence of intense light, such as that which exists during the daylight hours. Cones are sensitive to color. Rods, on the other hand, are elements which are able to act under very dim illumination, such as that in a darkened room; they are

Relative sensitivity = Sensibilità relativa
Scotopic = Scotopica
Photopic = Fotopica

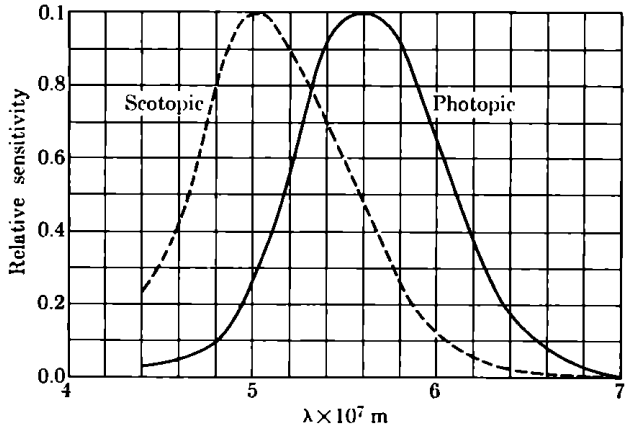


Fig. 19–33. Sensibilità dell'occhio per la visione scotopica e fotopica.

Fig. 19–33. Sensitivity of the eye for scotopic and photopic vision.

sensibili al colore. La visione dovuta ai coni è detta *fotopica*, quella dovuta ai bastoncelli è detta *scotopica*. La sensibilità dell'occhio per diverse lunghezze d'onda per entrambi i tipi di visione è illustrata in Fig. 19—33.

(5) ***Raggi ultravioletti.*** Questi coprono un intervallo da 3.8×10^{-7} m fino a circa 6×10^{-10} m, con frequenze da 8×10^{14} Hz fino a circa 3×10^{17} Hz. L'energia dei fotoni va da 3 eV fino a 2×10^3 eV. Queste onde sono prodotte dagli atomi e dalle molecole nelle scariche elettriche. La loro energia ha lo stesso ordine di grandezza dell'energia in gioco in molte reazioni chimiche, dando così giustificazione di molti dei loro effetti chimici. Il sole è una potentissima sorgente di radiazione ultravioletta, ed è questo fattore che è il principale responsabile delle abbronzature. La radiazione ultravioletta del sole interagisce anche con gli atomi nella parte superiore dell'atmosfera, producendo un grande numero di ioni. Ciò spiega perchè la parte superiore dell'atmosfera, ad una altezza superiore alle 60 miglia (80 km) è altamente ionizzata. Per questo motivo, essa è detta *ionosfera*. Quando alcuni microorganismi assorbono radiazione ultravioletta, essi possono essere distrutti come conseguenza delle reazioni chimiche prodotte dalla ionizzazione e dissociazione delle molecole. Per questo motivo i raggi ultravioletti vengono usati in alcune applicazioni mediche ed anche nei processi di sterilizzazione.

(6) ***Raggi x.*** Questa parte dello spettro elettromagnetico si estende da lunghezze d'onda di circa 10^{-9} m fino a lunghezze d'onda di circa 6×10^{-12} m, o da frequenze tra 3×10^{17} Hz e 5×10^{19} Hz. L'energia dei fotoni va da 1.2×10^3 eV fino a circa 2.4×10^5 eV. Questa parte dello spettro elettromagnetico fu scoperta dal fisico tedesco W. Roentgen nel 1895 durante studi sui raggi catodici. I raggi x sono prodotti dagli elettroni più interni, o più strettamente legati, degli atomi. Un'altra sorgente di raggi x è la bremsstrahlung o radiazione di frenamento ricordata nel Paragrafo 19.7. Infatti, è questo il modo più comune per produrre raggi x nei tubi commerciali per raggi x. Un fascio di elettroni, accelerati da un potenziale di varie migliaia di volt, incide su di un bersaglio metallico detto anticatodo

insensitive to color. The vision due to cones is called *photopic;* that due to rods is called *scotopic.* The sensitivity of the eye for different wavelengths for both kinds of vision is illustrated in Fig. 19–33.

(5) ***Ultraviolet rays.*** These cover from 3.8×10^{-7} m down to about 6×10^{-10} m, with frequencies from 8×10^{14} Hz to about 3×10^{17} Hz. The energy of the photons goes from about 3 eV up to 2×10^3 eV. These waves are produced by atoms and molecules in electric discharges. Their energy is of the order of magnitude of the energy involved in many chemical reactions, which thus accounts for many of their chemical effects. The sun is a very powerful source of ultraviolet radiation, and it is this factor which is mainly responsible for suntans. The sun's ultraviolet radiation also interacts with the atoms in the upper atmosphere, producing a large number of ions. This explains why the upper atmosphere, at a height greater than about 60 miles (80 km) is highly ionized. For this reason it is called the *ionosphere.* When some micro-organisms absorb ultraviolet radiation, they can be destroyed as a result of the chemical reactions produced by the ionization and dissociation of molecules. For that reason ultraviolet rays are used in some medical applications and also in sterilization processes.

(6) ***X-rays.*** This part of the electromagnetic spectrum extends from wavelengths of about 10^{-9} m down to wavelengths of about 6×10^{-12} m, or frequencies between 3×10^{17} Hz and 5×10^{19} Hz. The energy of the photons goes from 1.2×10^3 eV up to about 2.4×10^5 eV. This part of the electromagnetic spectrum was discovered in 1895 by the German physicist W. Roentgen when he was studying cathode rays. X-rays are produced by the inner, or more tightly bound, electrons in atoms. Another source of x-rays is the bremsstrahlung or decelerating radiation mentioned in Section 19.7. In fact, this is the most common way of producing x-rays in commercial x-ray tubes. A beam of electrons, accelerated by a potential of several thousand volts, impinges on a metallic target called the anticathode

Frequency, Hz, cycles/sec = Frequenza, Hz, cicli/sec
Name of radiation = Tipo di radiazione
Photon, energy, eV = Fotone, energia, eV.
Wavelength = Lunghezza d'onda
Gamma rays = Raggi gamma
X-rays = Raggi x
Ultraviolet = Ultravioletto
Infrared = Infrarosso
Microwave = Microonda
Standard broadcast = Trasmissione radio
Radiofrequency = Radiofrequenza
X-unit = Unità x
angstrom = angstrom
nanometer = nanomètro
centimeter = centimetro
meter = metro
kilometer = chilometro

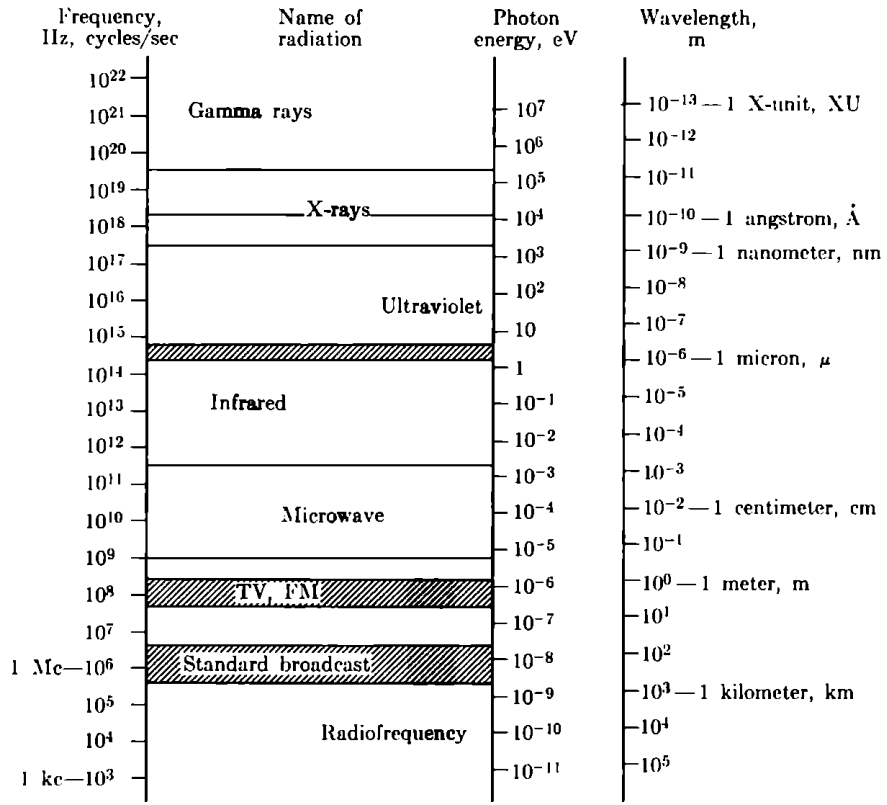


Fig. 19–34. Lo spettro elettromagnetico.

Fig. 19–34. The electromagnetic spectrum.

(Fig. 19–16) (questo fu in realtà il metodo secondo il quale vennero prodotti i raggi x nell'esperimento originale di Roentgen). I raggi x, grazie alla maggior energia dei loro fotoni, producono effetti più marcati sugli atomi e sulle molecole delle sostanze attraverso cui essi si propagano, e perciò essi dissociano o ionizzano le molecole. I raggi x sono usati nella diagnostica medica poichè il relativamente maggior assorbimento dei raggi x da parte delle ossa rispetto ai tessuti permette di ottenere "fotografie" abbastanza ben definite. Essi inoltre, come risultato dei processi chimici che essi generano, producono seri danneggiamenti ai tessuti viventi e agli organismi. È per questo motivo che i raggi x vengono usati nel trattamento del cancro, poichè sembra che i raggi x abbiano tendenza a distruggere più facilmente i tessuti malati dei tessuti sani. Si deve fare notare che *ogni* quantità di radiazione x distrugge un pò di tessuto buono; una esposizione a una dose elevata può causare distruzioni sufficienti a produrre malattia o morte.

(7) ***Raggi Gamma.*** Queste onde elettromagnetiche sono di origine nucleare. Esse si sovrappongono al limite superiore dello spettro di raggi x. La loro lunghezza d'onda va da circa 10^{-10} m fino ad un valore ben al di sotto dei 10^{-14} m, con un corrispondente intervallo di frequenze che va da 3×10^{18} Hz fino a più di 3×10^{22} Hz. L'energia dei fotoni va da

(Fig. 19–16) (actually this was the way in which the x-rays were produced in the original experiment of Roentgen). X-rays, because of the greater energy of their photons, produce more profound effects on the atoms and molecules of the substances through which they propagate, and hence they dissociate or ionize the molecules. X-rays are used in medical diagnosis because the relatively greater absorption of x-radiation by bone as compared with tissue allows for a fairly well-defined "photograph." They also, as a result of the chemical processes they induce, cause serious damage to living tissues and organisms. It is for this reason that x-rays are used for treatment of cancer, since x-rays seem to have a tendency to destroy diseased tissue more readily than healthy tissue. It should be emphasized that *any* amount of x-radiation does destroy some good tissue; an exposure to a large dose may cause enough destruction to produce sickness or death.

(7) ***Gamma rays.*** These electromagnetic waves are of nuclear origin. They overlap the upper limit of the x-ray spectrum. Their wavelength runs from about 10^{-10} m down to well below 10^{-14} m, with a corresponding frequency range from 3×10^{18} Hz up to more than 3×10^{22} Hz. The energies of the photons go from

10^4 eV a circa 10^7 eV. Queste energie sono dello stesso ordine di grandezza di quelle che intervengono nei processi nucleari e perciò l'assorbimento dei raggi γ può produrre alcune mutazioni nucleari. Questi raggi sono prodotti da molte sostanze radioattive, e sono presenti in grandi quantità nei reattori nucleari. Essi non vengono facilmente assorbiti dalla maggior parte delle sostanze, ma quando vengono assorbiti da organismi viventi essi producono effetti seri. La loro manipolazione richiede un pesante schermo di protezione.

Nella radiazione cosmica, si hanno onde elettromagnetiche di lunghezze d'onda ancora più corte o di frequenze più grandi, e con fotoni che sono corrispondentemente più energetici. Questi sono di particolare interesse nella ricerca astronomica.

Quando osserviamo il larghissimo spettro della radiazione elettromagnetica, possiamo facilmente comprendere perchè le diverse parti di esso si comportino in maniera diversa quando si propagano attraverso la materia. Per esempio, quelle onde che hanno fotoni con energia confrontabile con l'energia caratteristica degli elettroni negli atomi o degli atomi nelle molecole, interagiscono più energicamente con atomi e molecole. È questo il caso della radiazione infrarossa, visibile, ed ultravioletta. Radiazione con lunghezza d'onda maggiore, associata a fotoni con energia minore, in generale interagisce debolmente con la materia che ha poca capacità di assorbimento. È questo il caso delle onde a radiofrequenza. Le onde che hanno grande energia o cortissima lunghezza d'onda, come i raggi x e i raggi γ, sono anche pochissimo assorbite dalla materia; tuttavia, i loro effetti sono più profondi poichè producono non solo ionizzazione atomica e molecolare, ma anche in molti casi disintegrazione nucleare.

La Fig. 19–34 illustra le varie parti dello spettro elettromagnetico in termini di energia, frequenza, e lunghezza d'onda.

Bibliografia

10^4 eV to about 10^7 eV. These energies are of the same order of magnitude as those involved in nuclear processes and therefore the absorption of γ-rays may produce some nuclear changes. These rays are produced by many radioactive substances, and are present in large quantities in nuclear reactors. They are not easily absorbed by most substances, but when they are absorbed by living organisms they produce serious effects. Their handling requires a heavy protective shielding.

In cosmic radiation there are electromagnetic waves of even shorter wavelengths or larger frequencies, and with photons which are correspondingly more energetic. These are of special interest in astronomical research.

When we look at the very broad spectrum of electromagnetic radiation, we can easily understand why the different parts of it behave in a different way when propagating through matter. For example, those waves having photons with an energy comparable to the characteristic energies of electrons in atoms or of atoms in molecules will interact more strongly with atoms and molecules. This is the case of the infrared, visible, and ultraviolet radiation. Radiation with longer wavelength, carrying photons with less energy, in general interact weakly with matter having a low ability to absorb. This is the case of the radiofrequency waves. Waves which have high energy or very short wavelength, such as x- and γ-rays, are also very little absorbed in matter; however, their effects are more profound, producing not only atomic and molecular ionization, but also in many cases nuclear break-up.

Figure 19–34 relates the various sections of the electromagnetic spectrum in terms of energy, frequency, and wavelength.

References

1. "The Longest Electromagnetic Waves," J. Heirtzler, *Sci. Am.*, March 1962, page 128
2. "Influence of the Environment on the Wave Transmission of Energy: Resonance and Relaxation," R. Lindsay, *Am. J. Phys.* **28,** 67 (1960)
3. "The Scattering of X-rays as Particles," A. Compton, *Am. J. Phys.* **29,** 817 (1961)
4. "Measurement of the Velocity of Light Through μ_0, ϵ_0," W. Stephens, *Am. J. Phys.* **31,** 105 (1963)
5. "Resource Letter *QSL*-1 on Quantum and Statistical Aspects of Light," P. Carruthers, *Am. J. Phys.* **31,** 321 (1963)
6. "The Compton Effect: Historical Background," A. Bartlett, *Am. J. Phys.* **32,** 120 (1964)
7. "Some Thoughts on Radiation Pressure," P. Tea, Jr., *Am. J. Phys.* **33,** 190 (1965)
8. "Einstein's Proposal of the Photon Concept," A. Arons and M. Peppard, *Am. J. Phys.* **33,** 367 (1965)
9. *Optics*, B. Rossi. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957, Chapters 7 and 9
10. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1959, Chapter 13 (Hertz); Chapter 17 (Einstein); Appendix 5 (Compton)

11. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. Reitz and F. Milford. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960, Sections 15–4, 15–5, 16–8, 16–9, and Chapter 17
12. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 28 and 34; Volume II, Chapters 20, 21, 27, and 28
13. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 549 (Hertz); page 578 (Hallwachs)
14. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapters 29 and 32

Problemi

19.1 Il campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana nel vuoto, usando il sistema MKSC, è rappresentato da $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = 0.5 \cos [2\pi \times 10^8(t - x/c)]$, $\mathcal{E}_z = 0$. (a) Determinare la lunghezza d'onda, lo stato di polarizzazione, e la direzione di propagazione. (b) Calcolare il campo magnetico dell'onda. (c) Calcolare l'intensità media o flusso di energia ad unità di area.

19.2 Si risolvano (a), (b), e (c) del Problema 19.1 per l'onda rappresentata da $\mathcal{E}_x = 0$; $\mathcal{E}_y = 0.5 \cos [4\pi \times 10^7(t - x/c)]$; $\mathcal{E}_z = 0.5 \sin [4\pi \times 10^7(t - x/c)]$.

19.3 Scrivere le equazioni dei campi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{B}$, che descrivono le seguenti onde elettromagnetiche che si propagano lungo l'asse X: (a) Un'onda polarizzata rettilineamente il cui piano di vibrazione forma un angolo di 45° con il piano XY. (b) Un'onda polarizzata rettilineamente il cui piano di vibrazione forma un angolo di 120° con il piano XY. (c) Un'onda con polarizzazione circolare destrorsa. (d) Un'onda con polarizzazione ellittica destrorsa e con l'asse maggiore parallelo all'asse Y; l'asse maggiore è il doppio dell'asse minore.

19.4 Si consideri l'onda rappresentata da: $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos 2\pi(t/P - x/\lambda)$, $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \cos 2\pi(t/P - x/\lambda + \frac{1}{8})$. Si calcoli il valore assoluto del vettore elettrico e l'angolo formato dal vettore elettrico con l'asse Y agli istanti $t = 0$ e $t = P/4$ e nei punti $x = 0, x = \lambda/4, x = \lambda/2$, $x = 3\lambda/4$, $x = \lambda$. In ogni caso si esprima il campo magnetico risultante.

Problems

19.1 The electric field of a plane electromagnetic wave in vacuum, using MKSC units, is represented by $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = 0.5 \cos [2\pi \times 10^8(t - x/c)]$, $\mathcal{E}_z = 0$. (a) Determine the wavelength, the state of polarization, and the direction of propagation. (b) Compute the magnetic field of the wave. (c) Compute the average intensity or energy flux per unit area.

19.2 Solve (a), (b), and (c) of Problem 19.1 for the wave represented by $\mathcal{E}_x = 0$; $\mathcal{E}_y = 0.5 \cos [4\pi \times 10^7(t - x/c)]$; $\mathcal{E}_z = 0.5 \sin [4\pi \times 10^7(t - x/c)]$.

19.3 Write the equations of the $\mathcal{E}$- and $\mathcal{B}$-fields, describing the following electromagnetic waves which propagate along the X-axis: (a) A linearly polarized wave whose plane of vibration lies at an angle of 45° with the XY-plane. (b) A linearly polarized wave whose plane of vibration lies at an angle of 120° with the XY-plane. (c) A wave with right-handed circular polarization. (d) A wave with right-handed elliptical polarization, and with the major axis parallel to the Y-axis; the major axis is twice the minor axis.

19.4 Consider the wave represented by: $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos 2\pi(t/P - x/\lambda)$, $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \cos 2\pi(t/P - x/\lambda + \frac{1}{8})$. Compute the magnitude of the electric vector and the angle formed by the electric vector with the Y-axis at the times $t = 0$ and $t = P/4$ and at the points $x = 0$, $x = \lambda/4$, $x = \lambda/2$, $x = 3\lambda/4$, $x = \lambda$. In each case express the resultant magnetic field.

19.5 Descrivere lo stato di polarizzazione delle onde rappresentate dalle seguenti equazioni:

(a)

(b)

(c)

(d)·

In ogni caso rappresentare il campo magnetico, mostrando come esso varia al progredire dell'onda.

19.6 Un'onda luminosa polarizzata rettilineamente, sinusoidale piana di lunghezza d'onda $\lambda = 5.0 \times 10^{-7}$ m viaggia nel vuoto. L'intensità media è 0.1 W m^{-2}. La direzione di propagazione giace nel piano XY e forma un angolo di 45° con l'asse X. Il campo elettrico oscilla parallelamente all'asse Z. Scrivere le equazioni che descrivono i campi elettrico e magnetico di questa onda.

19.7 Un'onda elettromagnetica polarizzata rettilineamente, sinusoidale piana di lunghezza d'onda $\lambda = 5.0 \times 10^{-7}$ m viaggia nel vuoto nella direzione dell'asse X. L'intensità media dell'onda ad unità di area è 0.1 W m^{-2} e il piano di vibrazione del campo elettrico è parallelo all'asse Y. Scrivere le equazioni che descrivono i campi elettrico e magnetico di questa onda.

19.5 Describe the state of polarization of the waves represented by the following equations:

(a) $\mathcal{E}_y = A \cos \omega(t - x/c)$
$\mathcal{E}_z = A \sin \omega(t - x/c)$

(b) $\mathcal{E}_y = A \cos \omega(t - x/c)$
$\mathcal{E}_z = -A \cos \omega(t - x/c)$

(c) $\mathcal{E}_y = A \cos \omega(t - x/c)$
$\mathcal{E}_z = A \cos [\omega(t - x/c) - 3\pi/4]$

(d) $\mathcal{E}_y = A \cos \omega(t - x/c)$
$\mathcal{E}_z = A \cos [\omega(t - x/c) + \pi/4]$

In each case represent the magnetic field, showing how it changes as the wave progresses.

19.6 A plane sinusoidal linearly polarized light wave of wavelength $\lambda = 5.0 \times 10^{-7}$ m travels in vacuum. The average intensity is 0.1 W m^{-2}. The direction of propagation lies in the XY-plane at 45° with the X-axis. The electric field oscillates parallel to the Z-axis. Write the equations describing the electric and magnetic fields of this wave.

19.7 A plane sinusoidal linearly polarized electromagnetic wave of wavelength $\lambda = 5.0 \times 10^{-7}$ m travels in vacuum in the direction of the X-axis. The average intensity of the wave per unit area is 0.1 W m^{-2} and the plane of vibration of the electric field is parallel to the Y-axis. Write the equations describing the electric and magnetic fields of this wave.

19.8 Il campo elettrico di un'onda elettromagnetica piana ha un'ampiezza di 10^{-2} V m^{-1}. Trovare: (a) il valore assoluto del campo magnetico, (b) l'energia ad unità di volume dell'onda. (c) Se l'onda viene completamente assorbita quando incide su di un corpo, determinare la pressione della radiazione. (d) Ripetere la questione precedente se il corpo è un riflettore perfetto.

19.9 La radiazione elettromagnetica del sole incide sulla superficie terrestre al ritmo di 1.4×10^3 W m^{-2}. Ammettendo che questa radiazione possa essere considerata come un'onda piana, valutare l'intensità delle ampiezze dei campi elettrico e magnetico dell'onda.

19.10 La potenza media di una stazione trasmittente è di 10^5 W. Si supponga che la potenza venga irradiata uniformemente in ciascun emisfero concentrico con la stazione. Si calcoli il valore assoluto del vettore di Poynting e le ampiezze dei campi elettrico e magnetico in un punto a 10 km dalla sorgente. Si supponga che a quella distanza l'onda sia piana.

19.11 Un trasmettitore radar emette la sua energia in un cono avente un angolo solido di 10^{-2} sterad. A una distanza di 10^3 m dal trasmettitore, il campo elettrico ha una ampiezza di 10 V m^{-1}. Trovare l'ampiezza del campo magnetico e la potenza del trasmettitore.

19.12 Si supponga che una lampada da 100 W con efficienza dell'80% irradii tutta la sua energia isotropicamente. Calcolare l'ampiezza dei campi elettrico e magnetico a 2 m dalla lampada.

19.13 Le radio-onde ricevute da un apparecchio radio hanno un campo elettrico di ampiezza massima eguale a 10^{-1} V m^{-1}. Assumendo che l'onda possa essere considerata come piana, si calcoli: (a) l'ampiezza del campo magnetico, (b) l'intensità media dell'onda, (c) la densità media di energia. (d) Supponendo che l'apparecchio radio sia posto ad 1 km dalla stazione trasmittente e che la stazione irradii energia isotropicamente, determinare la potenza della stazione.

19.14 Due onde elettromagnetiche armoniche, entrambe di frequenza ν ed ampiezza $\mathcal{E}_0$, viaggiano nel vuoto nelle direzioni degli assi X ed Y, rispettivamente. I campi elettrici di entrambe le onde sono paralleli all'asse Z. Dell'onda risultante dalla loro composizione, si calcoli (a) le componenti del campo elettrico $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, (b) le componenti del campo magnetico $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, (c) la densità di energia u, (d) le componenti del vettore di Poynting, (e) il valore medio di u e del vettore di Poynting. (f) Si determinino i piani in cui il valore medio di $\mathcal{E}^2$ è un massimo o un minimo. (g) Si determinino i piani in cui il vettore $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ effettua oscillazioni circolari.

19.15 Si dimostri che se

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t),$$

allora la condizione div $\boldsymbol{V} = 0$ implica $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{V}_0 = 0$ ovvero che $\boldsymbol{k}$ sia perpendicolare a $\boldsymbol{V}_0$. Ciò dimostra, secondo le Equazioni (17.65), che nel vuoto sia $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ che $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ sono perpendicolari a $\boldsymbol{k}$, e che i risultati del Paragrafo 19.2 sono di validità generale.

19.16 Dimostrare che se

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t),$$

allora rot $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V}_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$ e le Equazioni (17.65) implicano che $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega \boldsymbol{\mathcal{E}}$ e $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = \omega \boldsymbol{\mathcal{B}}$. Dimostrare che i due risultati sono compatibili. Dai risultati di questo e del precedente problema, discutere l'orientazione relativa dei vettori $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Confrontare con i risultati del Paragrafo 19.2.

19.17 Usando i risultati precedenti, si dimostri che i campi $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ di un'onda elettromagnetica piana devono essere in fase.

19.18 Dimostrare che il vettore di Poynting può scriversi come $\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}$. Questa espressione è applicabile ad un'onda elettromagnetica che si propaga sia nel vuoto sia in un mezzo materiale.

19.19 Dimostrare che il valore medio del vettore di Poynting di un'onda armonica piana è $\frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2$ oppure $\mathcal{E}_0 \mathcal{B}_0 / 2\mu_0$. Confrontare con l'Eq. (19.17).

19.20 Dimostrare che se un sistema di cariche oscillanti irradia energia elettromagnetica

19.8 The electric field of a plane electromagnetic wave has an amplitude of 10^{-2} V m^{-1}. Find: (a) the magnitude of the magnetic field, (b) the energy per unit volume of the wave. (c) If the wave is completely absorbed when it falls on a body, determine the radiation pressure. (d) Repeat the previous question if the body is a perfect reflector.

19.9 Electromagnetic radiation from the sun falls on the earth's surface at the rate of 1.4×10^3 W m^{-2}. Assuming that this radiation can be considered as plane waves, estimate the magnitude of the electric and magnetic field amplitudes in the wave.

19.10 The average power of a broadcasting station is 10^5 W. Assume that the power is radiated uniformly over any hemisphere concentric with the station. For a point 10 km from the source, find the magnitude of the Poynting vector and the amplitudes of the electric and magnetic fields. Assume that at that distance the wave is plane.

19.11 A radar transmitter emits its energy within a cone having a solid angle of 10^{-2} sterad. At a distance of 10^3 m from the transmitter the electric field has an amplitude of 10 V m^{-1}. Find the amplitude of the magnetic field and the power of the transmitter.

19.12 Assume that a 100-W lamp of 80% efficiency radiates all its energy isotropically. Compute the amplitude of the electric and magnetic fields 2 m from the lamp.

19.13 Radio waves received by a radio set have an electric field of maximum amplitude equal to 10^{-1} V m^{-1}. Assuming that the wave can be considered as plane, calculate: (a) the amplitude of the magnetic field, (b) the average intensity of the wave, (c) the average energy density. (d) Assuming that the radio set is 1 km from the broadcasting station and that the station radiates energy isotropically, determine the power of the station.

19.14 Two harmonic electromagnetic waves, both of frequency ν and amplitude $\mathcal{E}_0$, travel in vacuum in the directions of the X-axis and Y-axis, respectively. The electric fields of both waves are parallel to the Z-axis. For the wave resulting from their superposition, compute (a) the components of the electric field $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, (b) the components of the magnetic field $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, (c) the energy density u, (d) the components of the Poynting vector, (e) the average values of u and the Poynting vector. (f) Determine the planes in which the mean value of $\mathcal{E}^2$ is a maximum or a minimum. (g) Determine the planes in which the vector $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ performs circular oscillations.

19.15 Show that if

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t),$$

then the condition div $\boldsymbol{V} = 0$ implies that $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{V}_0 = 0$ or that $\boldsymbol{k}$ is perpendicular to $\boldsymbol{V}_0$. This proves, according to Eqs. (17.65), that in vacuum both $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ and $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ are perpendicular to $\boldsymbol{k}$, and the results of Section 19.2 are of general validity.

19.16 Show that if

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t),$$

then curl $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{V}_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$ and Eqs. (17.65) imply that $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\mathcal{B}} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega \boldsymbol{\mathcal{E}}$ and $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = \omega \boldsymbol{\mathcal{B}}$. Show that the two results are compatible. From the results of this and the preceding problem, discuss the relative orientation of the vectors $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, and $\boldsymbol{\mathcal{B}}$. Compare with the results of Section 19.2.

19.17 Using the previous results, show that the $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ and $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ fields of a plane electromagnetic wave must be in phase.

19.18 Show that the Poynting vector may be written as $\boldsymbol{\mathcal{E}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}$. This expression is applicable to an electromagnetic wave propagating either in vacuum or in a material medium.

19.19 Show that the average value of the Poynting vector of a plane harmonic wave is $\frac{1}{2} c \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2$ or $\mathcal{E}_0 \mathcal{B}_0 / 2\mu_0$. Compare with Eq. (19.17).

19.20 Show that if a system of oscillating charges radiates electromagnetic energy

isotropicamente, il valore medio del vettore di Poynting ad una distanza r è $(dE/dt)_{med}/4\pi r^2$.

19.21 Un sistema di cariche oscillanti concentrate intorno ad un punto irradia energia al ritmo di 10^4 W. Supponendo che l'energia sia irradiata isotropicamente, trovare, per un punto alla distanza di 1 m: (a) il valore medio del vettore di Poynting, (b) l'ampiezza dei campi elettrico e magnetico, (c) la densità di energia e di quantità di moto. [*Suggerimento:* Si noti che a grandi distanze dalla sorgente, una piccola parte del fronte d'onda può essere considerata come piana.]

19.22 Calcolare il flusso di energia ad unità di area attraverso un piano perpendicolare alla velocità di una carica che si muova con velocità costante e che contenga la carica. Si assuma che la carica abbia un raggio R e si usi l'espressione non relativistica dei campi elettrico e magnetico. Si discuta criticamente il risultato ottenuto. [*Suggerimento:* Si adottino anelli di raggio r e spessore dr concentrici con la carica come elementi di area per il flusso.]

19.23 Una sorgente gassosa emette luce di lunghezza d'onda 5×10^{-7} m. Si assuma che ciascuna molecola agisca come un oscillatore di carica e ed ampiezza 10^{-10} m. (a) Calcolare il ritmo medio di irraggiamento di energia da ogni molecola. (b) Se il ritmo totale di irraggiamento di energia della sorgente è 1 W, quante molecole stanno emettendo simultaneamente?

19.24 Valutare il valore di $(dE/dt)_{med}$ dato dall'Eq. (19.26) per un protone in un nucleo. Si assuma che per raggi gamma di bassa energia, z_0 sia dell'ordine di 10^{-15} m e ω circa 5×10^{20} Hz.

19.25 L'espressione (19.39) dà l'intensità della radiazione da una carica accelerata in funzione della direzione della radiazione. Ottenere da essa l'Eq. (19.38) integrando su tutte le direzioni. [*Suggerimento:* si moltiplichi $I(\theta)$ per l'elemento d'area $dS = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$ e si integri da 0 a π.]

19.26 Ottenere una espressione per la quantità di energia irradiata nell'unità di tempo da una particella carica che si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ perpendicolare al campo magnetico $\mathfrak{B}$.

isotropically, the average value of the Poynting vector at a distance r is $(dE/dt)_{ave}/4\pi r^2$.

19.21 A system of oscillating charges concentrated around a point radiates energy at the rate of 10^4 W. Assuming that the energy is radiated isotropically, find, for a point at a distance of 1 m: (a) the average value of the Poynting vector, (b) the amplitude of the electric and magnetic fields, (c) the energy and momentum densities. [*Hint:* Note that at large distances from the source, a small portion of the wave front can be considered as plane.]

19.22 Compute the energy flux per unit area through a plane perpendicular to the velocity of a charge moving with constant velocity and passing through the charge. Assume that the charge has a radius R and use the nonrelativistic expression of the electric and magnetic fields. Discuss your result critically. [*Hint:* Use rings of radius r and width dr concentric with the charge as area elements for the flux.]

19.23 A gaseous source emits light of wavelength 5×10^{-7} m. Assume that each molecule acts as an oscillator of charge e and amplitude 10^{-10} m. (a) Compute the average rate of energy radiation per molecule. (b) If the total rate of energy radiation of the source is 1 W, how many molecules are emitting simultaneously?

19.24 Estimate the value of $(dE/dt)_{ave}$ as given by Eq. (19.26) for a proton in a nucleus. Assume z_0 of the order of 10^{-15} m and ω about 5×10^{20} Hz for low-energy gamma rays.

19.25 Expression (19.39) gives the intensity of the radiation from an accelerated charge in terms of the direction of the radiation. Obtain Eq. (19.38) from it by integration over all directions. [*Hint:* Multiply $I(\theta)$ by the area element $dS = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta$ and integrate from 0 to π.]

19.26 Obtain an expression for the rate of energy radiated by a charged particle moving with velocity $\boldsymbol{v}$ perpendicular to a magnetic field $\mathfrak{B}$.

19.27 (a) L'elettrone in un atomo di idrogeno ha una energia cinetica di 13.6 eV e percorre un'orbita di raggio 5.3×10^{-11} m. Supponendo che si possa applicare la teoria dell'Esempio 19.7, calcolare l'energia irradiata al secondo e ad ogni giro. (b) Ripetere il problema per un elettrone di 50 keV su un percorso circolare di 1 m. (c) Ripetere per un protone di 50 keV su un percorso circolare di 1 m.

19.28 Dimostrare come per una particella che si muove in un acceleratore lineare, il ritmo di irraggiamento dell'energia vale

dove E_k è l'energia cinetica della particella.

19.29 Dimostrare che il ritmo di irraggiamento di energia in un acceleratore circolare vale $(dE/dt)_{rad} = (q^2c/6\pi\epsilon_0 r^2)\,(v/c)^4\,(E/m_0c^2)^4$.

19.30 Dimostrare che, per i gas, il secondo termine nella Eq. (19.58) è piccolo, e che possiamo scrivere

Per un'unica frequenza di risonanza, l'espressione diviene

19.31 L'indice di rifrazione del gas idrogeno in condizioni normali di temperatura e pressione (STP) è $n = 1 + 1.400 \times 10^{-4}$ per $\lambda = 5.46 \times 10^{-7}$ m e $n = 1 + 1.547 \times 10^{-4}$ per $\lambda = 2.54 \times 10^{-7}$ m. Supponendo una sola frequenza di risonanza, calcolare questa frequenza ed il numero di oscillatori elettronici ad unità di volume. Confrontare con il numero di molecole ad unità di volume (vedi Problema 2.4). [*Suggerimento:* Si usi il risultato del Problema 19.30.]

19.32 Con riferimento al problema precedente, calcolare l'indice di rifrazione dell'idrogeno per $\lambda = 4 \times 10^{-7}$ m, una pressione di 10 atm, e una temperatura di 300°K.

19.33 Si consideri un gas le cui molecole si comportino come dipoli oscillanti, con una costante elastica di richiamo di $k = 3 \times 10^2$ kg s^{-2}. Le

19.27 (a) The electron in a hydrogen atom has a kinetic energy of 13.6 eV and a radius of 5.3×10^{-11} m. Assuming that the theory of Example 19.7 can be applied, calculate the energy radiated per second and per revolution. (b) Repeat the problem for a 50-keV electron on a 1-m circular path. (c) Repeat for a 50-keV proton on a 1-m circular path.

19.28 Show that for a particle moving in a linear accelerator the rate of energy radiation is

$$(dE/dt)_{rad} = (q^2/6\pi\epsilon_0 m_0^2 c^3)(dE_k/dx)^2,$$

where E_k is the kinetic energy of the particle.

19.29 Show that the rate of energy radiation in a circular accelerator is $(dE/dt)_{rad} = (q^2c/6\pi\epsilon_0 r^2)(v/c)^4(E/m_0c^2)^4$.

19.30 Show that, for gases, the second term in Eq. (19.58) is small, and that we may write

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m_e\epsilon_0}\left(\sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2}\right).$$

For only one resonant frequency, the expression becomes

$$n \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m_e\epsilon_0(\omega_i^2 - \omega^2)}.$$

19.31 The index of refraction of hydrogen gas at STP is $n = 1 + 1.400 \times 10^{-4}$ at $\lambda = 5.46 \times 10^{-7}$ m and $n = 1 + 1.547 \times 10^{-4}$ at $\lambda = 2.54 \times 10^{-7}$ m. Assuming a single resonant frequency, compute this frequency and the number of electronic oscillators per unit volume. Compare with the number of molecules per unit volume (see Problem 2.4). [*Hint:* Use the result of Problem 19.30.]

19.32 Referring to the preceding problem, compute the index of refraction of hydrogen for $\lambda = 4 \times 10^{-7}$ m, a pressure of 10 atm, and a temperature of 300°K.

19.33 Consider a gas whose molecules behave as dipole oscillators, with a restoring constant of $k = 3 \times 10^2$ kg s^{-2}. The os-

particelle oscillanti sono elettroni. Calcolare la loro frequenza caratteristica. Scrivere l'indice di rifrazione del gas in funzione della frequenza, supponendo che il gas sia in condizioni normali di temperatura e pressione. Ottenere i valori dell'indice per $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m e $\lambda = 10^{-2}$ m.

19.34 Verificare che la quantità $Ne^2/m\epsilon_0\omega^2$ nell'Esempio 19.9 è piccola rispetto all'unità nella regione dei raggi x.

19.35 Determinare la frequenza e la lunghezza d'onda dei fotoni assorbiti dai seguenti sistemi: (a) un nucleo che assorbe energia nella quantità di 10^3 eV, (b) un atomo che assorbe 1 eV, (c) una molecola che assorbe 10^{-2} eV.

19.36 Gli atomi di sodio assorbono ed emettono radiazione elettromagnetica di 5.9×10^{-7} m, corrispondente alla zona del giallo dello spettro visibile. Determinare l'energia dei fotoni che vengono assorbiti od emessi.

19.37 Trovare l'energia di un fotone che ha la stessa quantità di moto di un (a) protone di 40 MeV, (b) elettrone di 40 MeV. Determinare la regione dello spettro a cui esso appartiene. [*Suggerimento:* Si noti che il protone può essere trattato non relativisticamente, ma per l'elettrone è richiesta la meccanica relativistica.]

19.38 Per separare gli atomi di carbonio e di ossigeno che formano la molecola di ossido di carbonio, è richiesta una energia minima di 11 eV. Trovare la frequenza minima e la lunghezza d'onda massima della radiazione elettromagnetica necessaria per dissociare la molecola.

19.39 Un fotone avente una energia di 10^4 eV è assorbito ad un atomo di idrogeno in quiete. Come conseguenza, l'elettrone viene espulso nella medesima direzione della radiazione incidente. Trascurando l'energia necessaria per separare l'elettrone (circa 13.6 eV), calcolare la quantità di moto e l'energia dell'elettrone e del protone.

19.40 L'energia di legame di un elettrone nel piombo è 9×10^4 eV. Quando il piombo viene irradiato con una certa radiazione elettromagnetica ed i fotoelettroni entrano in un campo magnetico di 10^{-2} T, essi descrivono una circonferenza di raggio 0.25 m. Calcolare: (a) la quantità di moto e l'energia degli elettroni, (b) l'energia dei fotoni assorbiti. (c) Può essere trascurato l'effetto del rinculo dello ione piombo?

19.41 Quando una certa superficie metallica viene illuminata con luce di diverse lunghezze d'onda, i potenziali di arresto dei fotoelettroni hanno i valori indicati nella Tabella:

Riportare in un grafico il potenziale di arresto come ordinata e la frequenza della luce come ascissa. Determinare dal grafico: (a) la frequenza di soglia, (b) il lavoro di estrazione fotoelettrico del metallo, (c) il rapporto h/e.

19.42 Il lavoro di estrazione fotoelettrica del potassio vale 2.0 eV. Supponendo che luce avente una lunghezza d'onda di 3.6×10^{-7} m incida sul potassio, trovare: (a) il potenziale d'arresto dei fotoelettroni, (b) l'energia cinetica e la velocità dei più veloci elettroni emessi.

19.43 Un fascio monocromatico uniforme di lunghezza d'onda 4.0×10^{-7} m incide su di un materiale avente un lavoro di estrazione di 2.0 eV. Se il fascio ha una intensità di 3.0×10^{-9} W m^{-2}, trovare: (a) il numero di elettroni emessi al m^2 e al s, (b) l'energia assorbita al m^2 e al s.

19.44 Radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda eguale a 10^{-5} m incide normalmente su di un campione metallico di massa 10^{-1} kg ed un elettrone viene espulso nella direzione opposta a quella della radiazione incidente. Usando le leggi della conservazione dell'energia e della quantità di moto, ottenere l'energia dell'elettrone e l'energia di rinculo del campione metallico. Si supponga che il lavoro di estrazione sia nullo. Il risultato giustifica il fatto che si possa trascurare la conservazione della quantità di moto nel nostro calcolo dell'effetto fotoelettrico?

19.34 Verify that the quantity $Ne^2/m\epsilon_0\omega^2$ in Example 19.9 is small compared with unity in the x-ray region.

19.35 Determine the frequency and the wavelength of the photons absorbed by the following systems: (a) a nucleus absorbing energy in the amount of 10^3 eV, (b) an atom absorbing 1 eV, (c) a molecule absorbing 10^{-2} eV.

19.36 Sodium atoms absorb or emit electromagnetic radiation of 5.9×10^{-7} m, corresponding to the yellow region of the visible spectrum. Determine the energy of the photons which are absorbed or emitted.

19.37 Find the energy of a photon having the same momentum as a 40-MeV (a) proton, (b) electron. Determine the region of the spectrum in which it falls. [*Hint:* Note that the proton can be treated nonrelativistically, but for the electron relativistic mechanics is required.]

19.38 To separate the carbon and oxygen atoms that form the carbon monoxide molecule, a minimum energy of 11 eV is required. Find the minimum frequency and maximum wavelength of the electromagnetic radiation required to dissociate the molecule.

19.39 A photon having an energy of 10^4 eV is absorbed by a hydrogen atom at rest. As a result, the electron is ejected in the same direction as the incident radiation. Neglecting the energy required to separate the electron (about 13.6 eV), find the momentum and the energy of the electron and of the proton.

19.40 The binding energy of an electron in lead is 9×10^4 eV. When lead is irradiated with a certain electromagnetic radiation and the photoelectrons enter a magnetic field of 10^{-2} T, they describe a circle of radius 0.25 m. Compute: (a) the momentum and energy of the electrons, (b) the energy of the photons absorbed. (c) Can you neglect the effect of the recoiling lead ion?

19.41 When a certain metal surface is illuminated with light of different wavelengths, the stopping potentials of the photoelectrons are measured as shown in the table:

$\lambda(\times 10^{-7}\text{m})$	V(V)	$\lambda(\times 10^{-7}\text{m})$	V(V)
3.66	1.48	4.92	0.62
4.05	1.15	5.46	0.36
4.36	0.93	5.79	0.24

Plot the stopping potential as ordinate against the frequency of the light as abscissa. Determine from the graph: (a) the threshold frequency, (b) the photoelectric work function of the metal, (c) the ratio h/e.

19.42 The photoelectric work function of potassium is 2.0 eV. Supposing that light having a wavelength of 3.6×10^{-7} m falls on potassium, find: (a) the stopping potential of the photoelectrons, (b) the kinetic energy and the velocity of the fastest electrons ejected.

19.43 A uniform monochromatic beam of wavelength 4.0×10^{-7} m falls on a material having a work function of 2.0 eV. If the beam has an intensity of 3.0×10^{-9} W m^{-2}, find: (a) the number of electrons emitted per m^2 and per s, (b) the energy absorbed per m^2 and per s.

19.44 Electromagnetic radiation of wavelength equal to 10^{-5} m falls normally on a metal sample of mass 10^{-1} kg and an electron is ejected in a direction opposite to the incident radiation. Using the laws of conservation of energy and momentum, obtain the energy of the electron and the recoil energy of the metal sample. Assume that the work function is zero. Does the result justify not considering momentum conservation in our calculation of the photoelectric effect?

19.45 Un fotone avente una energia di 10^4 eV urta con un elettrone libero in quiete e viene diffuso secondo un angolo di 60°. Trovare: (a) le variazioni di energia, frequenza, e lunghezza d'onda del fotone, (b) l'energia cinetica, la quantità di moto, e la direzione dell'elettrone di rinculo.

19.46 Radiazione avente una lunghezza d'onda di 10^{-10} m (o 1 Å) subisce diffusione Compton in un campione di carbonio. La radiazione diffusa viene osservata in una direzione normale a quella di incidenza. Trovare: (a) la lunghezza d'onda della radiazione diffusa, (b) l'energia cinetica e la direzione del moto degli elettroni di rinculo.

19.47 Con riferimento al precedente problema, se gli elettroni subiscono un rinculo ad un angolo di 60° rispetto alla radiazione incidente, trovare: (a) la lunghezza d'onda e la direzione della radiazione diffusa, (b) l'energia cinetica dell'elettrone.

19.48 Dimostrare che l'energia cinetica dell'elettrone di rinculo nell'effetto Compton è data da

$$E_k = h\nu\alpha(1 - \cos\theta)/[1 + \alpha(1 - \cos\theta)],$$

dove $\alpha = h\nu/m_e c^2$. Dimostrare che l'energia massima dell'elettrone di rinculo è $(h\nu)^2/(h\nu + \frac{1}{2}m_e c^2) \approx h\nu - \frac{1}{2}m_e c^2$ se $h\nu \gg \frac{1}{2}m_e c^2$.

19.49 Dimostrare che se l'elettrone viene diffuso in una direzione che forma un angolo ϕ con il fotone incidente in una diffusione Compton, l'energia cinetica dell'elettrone è $E_k = h\nu\,(2\alpha\cos^2\phi)/[(1 + \alpha)^2 - \alpha^2\cos^2\phi]$ dove $\alpha = h\nu/m_e c^2$.

19.50 Dimostrare che, in una diffusione Compton, la relazione tra gli angoli che definiscono le direzioni del fotone diffuso e dell'elettrone di rinculo è $\cot\phi = (1 + \alpha)\tan\frac{1}{2}\theta$.

19.51 Ricavare l'Eq. (19.62) per l'effetto Doppler, usando il risultato dell'Esempio 11.8.

19.52 Si consideri una sostanza che si muove con velocità v parallela all'asse X. Sia $V' = c/n'$ la velocità della luce nella sostanza misurata da un osservatore O' in quiete rispetto alla sostanza. Dimostrare che la velocità V di un'onda che si propaga lungo l'asse X attraverso la sostanza, misurata da un osservatore O, rispetto al quale la sostanza si muove con velocità v, è $V \approx c/n' + v\,(1 - 1/n'^2)$. [*Suggerimento:* Si usi la trasformazione di Lorentz delle velocità.]

19.53 Dimostrare che, quando la luce si propaga attraverso un mezzo che si muove con velocità v parallelamente all'asse X, l'effetto Doppler è $\nu' = \nu(1 - nv/c)$ se $v \ll c$.

19.54 Usando il risultato del Problema 19.53, dimostrare che $n' = n - (nv/c)\,dn/d\nu$, dove n' è calcolato per ν' e n per ν. Poichè (con riferimento al Problema 19.52) dobbiamo notare che n' deve essere valutato per ν', dimostrare che il risultato del Problema 19.52 può essere anche scritto nella forma $V \approx c/n + v[1 - 1/n^2 - (\lambda/n)\,dn/d\lambda]$. [*Suggerimento:* Si noti che $\lambda\nu = c/n$, e che nell'ultimo termine n' può essere sostituito da n.]

19.45 A photon having an energy of 10^4 eV collides with a free electron at rest and is scattered through an angle of 60°. Find: (a) the changes in energy, frequency, and wavelength of the photon, (b) the kinetic energy, momentum, and direction of the recoiling electron.

19.46 Radiation having a wavelength of 10^{-10} m (or 1 Å) undergoes Compton scattering in a carbon sample. The scattered radiation is observed at a direction perpendicular to that of incidence. Find: (a) the wavelength of the scattered radiation, (b) the kinetic energy and direction of motion of the recoil electrons.

19.47 Referring to the preceding problem, if the electrons recoil at an angle of 60° relative to the incident radiation, find: (a) the wavelength and direction of the scattered radiation, (b) the kinetic energy of the electron.

19.48 Prove that the kinetic energy of the recoiling electron in the Compton effect is given by

$$E_k = h\nu\alpha(1 - \cos\theta)/[1 + \alpha(1 - \cos\theta)],$$

where $\alpha = h\nu/m_e c^2$. Show that the maximum energy of the recoil electron is $(h\nu)^2/(h\nu + \frac{1}{2}m_e c^2) \approx h\nu - \frac{1}{2}m_e c^2$ if $h\nu \gg \frac{1}{2}m_e c^2$.

19.49 Show that if the electron is scattered in a direction making an angle ϕ with the incident photon in a Compton scattering, the kinetic energy of the electron is $E_k = h\nu(2\alpha\cos^2\phi)/[(1 + \alpha)^2 - \alpha^2\cos^2\phi]$, where $\alpha = h\nu/m_e c^2$.

19.50 Show that, in a Compton scattering, the relation between the angles defining the directions of the scattered photon and the recoil electron is $\cot\phi = (1 + \alpha)\tan\frac{1}{2}\theta$.

19.51 Derive Eq. (19.62) for the Doppler effect, using the result of Example 11.8.

19.52 Consider a substance moving with a velocity v parallel to the X-axis. Let $V' = c/n'$ be the velocity of light in the substance as measured by an observer O' at rest relative to the substance. Show that the velocity V of a wave propagating along the X-axis through the substance, as measured by an observer O relative to which the substance moves with velocity v, is $V \approx c/n' + v(1 - 1/n'^2)$. [*Hint:* Use the Lorentz transformation of velocities.]

19.53 Show that, when light propagates through a medium moving with velocity v parallel to the X-axis, the Doppler effect is $\nu' = \nu(1 - nv/c)$ if $v \ll c$.

19.54 Using the result of Problem 19.53, show that $n' = n - (nv/c)\,dn/d\nu$, where n' is evaluated at ν' and n at ν. Since (referring to Problem 19.52) we must note that n' has to be evaluated at ν', show that the result of Problem 19.52 can also be written in the form $V \approx c/n + v[1 - 1/n^2 - (\lambda/n)\,dn/d\lambda]$. [*Hint:* Note that $\lambda\nu = c/n$, and that in the last term n' can be replaced by n.]

Glass plate = Lastra di vetro

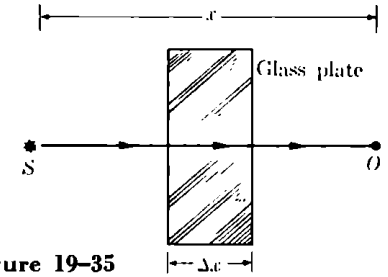


Figura 19–35 **Figure 19–35**

19.55 Si consideri una lastra di vetro avente indice di rifrazione n e spessore Δx posto tra una sorgente monocromatica S ed un osservatore O, come indicato nella Fig. 19–35. (a) Dimostrare che se l'assorbimento da parte della lastra di vetro viene trascurato, l'effetto della lastra di vetro sull'onda ricevuta da O è di aggiungere una differenza di fase eguale a $-\omega(n - 1)\,\Delta x/c$, senza cambiare l'ampiezza $\mathcal{E}_0$ dell'onda. (b) Se la differenza di fase è piccola, o perchè Δx è molto piccolo o perchè n è molto prossimo ad 1, dimostrare che l'onda ricevuta da O può essere considerata come la composizione dell'onda originale di ampiezza $\mathcal{E}_0$, senza nessuna lastra presente, con un'onda di ampiezza $\mathcal{E}_0\omega(n - 1)\,\Delta x/c$ avente uno spostamento di fase dato da $-\pi/2$. (Questo problema mostra l'effetto di un mezzo materiale su di un'onda elettromagnetica.)

19.55 Consider a glass plate of index of refraction n and thickness Δx interposed between a monochromatic source S and an observer O, as shown in Fig. 19–35. (a) Show that if absorption by the glass plate is neglected, the effect of the glass plate on the wave received by O is to add a phase difference equal to $-\omega(n - 1)\,\Delta x/c$, without changing the amplitude $\mathcal{E}_0$ of the wave. (b) If the phase difference is small, either because Δx is very small or because n is very close to one, show that the wave received at O can be considered as a superposition of the original wave of amplitude $\mathcal{E}_0$, with no plate present, with a wave of amplitude $\mathcal{E}_0\omega(n - 1)\,\Delta x/c$ having a phase shift of $-\pi/2$. (This problem shows the effect of a material medium on an electromagnetic wave.)

20
RIFLESSIONE, RIFRAZIONE, POLARIZZAZIONE

20.1 Introduzione
20.2 Principio di Huygens
20.3 Teorema di Malus
20.4 Riflessione e rifrazione di onde piane
20.5 Riflessione e rifrazione di onde sferiche
20.6 Ancora sulle leggi della riflessione e rifrazione
20.7 Riflessione e rifrazione di onde elettromagnetiche
20.8 Propagazione di onde elettromagnetiche in un mezzo anisotropo
20.9 Dicroismo
20.10 Doppia rifrazione
20.11 Attività ottica
20.12 Riflessione e rifrazione su superficie metalliche
20.13 Propagazione in un mezzo non omogeneo

20
REFLECTION, REFRACTION, POLARIZATION

20.1 Introduction
20.2 Huygens' Principle
20.3 Malus' Theorem
20.4 Reflection and Refraction of Plane Waves
20.5 Reflection and Refraction of Spherical Waves
20.6 More About the Laws of Reflection and Refraction
20.7 Reflection and Refraction of Electromagnetic Waves
20.8 Propagation of Electromagnetic Waves in an Anisotropic Medium
20.9 Dichroism
20.10 Double Refraction
20.11 Optical Activity
20.12 Reflection and Refraction at Metallic Surfaces
20.13 Propagation in a Nonhomogeneous Medium

20.1 Introduzione

Per tutti i tipi di onde discussi nei Capitoli 18 e 19, la velocità di propagazione dipende da alcune proprietà fisiche del mezzo attraverso al quale le onde si propagano. Per esempio, la velocità delle onde elastiche dipende da un modulo elastico e dalla densità del mezzo. La velocità delle onde elettromagnetiche dipende dalla permettività e dalla permeabilità della sostanza attraverso la quale esse si propagano.

Tale dipendenza della velocità di propagazione di un'onda dalle proprietà del mezzo dà luogo ai fenomeni di *riflessione* e *rifrazione*, che si verificano quando un'onda attraversa una superficie che separa due mezzi nei quali l'onda si propaga con velocità differenti. L'*onda riflessa* è una nuova onda che si propaga all'indietro nel mezzo nel quale si propagava l'onda iniziale. L'*onda rifratta* è l'onda trasmessa nel secondo mezzo. L'energia dell'onda incidente si suddivide ripartendosi fra l'onda riflessa e l'onda rifratta. In molti casi, è l'onda riflessa che riceve più energia, come nel caso degli specchi. In altri, l'onda rifratta trasporta la maggior parte di energia. Quando un'onda trasversale è polarizzata, il suo stato di polarizzazione viene di solito interessato sia dalla riflessione sia dalla rifrazione; perciò, in questo capitolo, discuteremo anche la polarizzazione.

20.2 Principio di Huygens

La propagazione di un'onda è descritta dalle equazioni del campo al quale l'onda corrisponde. Abbiamo preso in considerazione questo fatto a lungo nei Capitoli 18 e 19. Perciò, se conosciamo la sorgente di un'onda, possiamo in linea di principio individuare la sua propagazione da una regione ad un'altra, pur di tenere in considerazione nei nostri calcoli i cambiamenti nelle proprietà del mezzo. È anche possibile, tuttavia, calcolare l'ampiezza di un'onda in un punto particolare dello spazio senza fare riferimento alle sorgenti. Intorno al 1680 il fisico olandese Christiaan Huygens (1629—1695) propose un semplice meccanismo per determinare il modo di propagazione delle onde. La sua costruzione è applicabile sia alle onde elastiche sia alle onde meccaniche in un mezzo materiale.

Ricordiamo che una *superficie d'onda* o *fronte d'onda* è una superficie che passa per tutti i punti del mezzo raggiunti dall'onda in moto nello stesso istante. Perciò la perturbazione ha la medesima fase in tutti i punti di una superficie d'onda. Per esempio, per un'onda piana, la perturbazione è espressa da $f(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} - vt)$, e una superficie d'onda è costituita da tutti i punti nei quali la fase $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} - vt$ ha il medesimo valore in un dato istante. Perciò la superficie d'onda è data dall'equazione

$$\text{const} = \text{cost}$$

che, per un dato t, corrisponde ad un piano perpendicolare al versore $\boldsymbol{u}$ (si ricordi l'Esempio 3.11). Analogamente, per le onde sferiche, le superficie d'onda sono date da $r - vt = \text{cost}$, che, ad un dato istante t, corrispondono a sfere.

Huygens visualizzò un metodo per passare da una superficie d'onda ad un'altra. Si consideri una superficie d'onda S (Fig. 20—1). Quando l'onda in moto raggiunge questa superficie, ciascuna particella a, b, c, . . . sulla superficie diviene una sorgente secondaria di onde,

20.1 Introduction

In all the kinds of waves discussed in Chapters 18 and 19, the velocity of propagation depends on some physical properties of the medium through which the waves propagate. For example, the velocity of elastic waves depends on an elastic modulus and the density of the medium. The velocity of electromagnetic waves depends on the permittivity and permeability of the substance through which they propagate.

This dependence of the velocity of propagation of a wave on the properties of the medium gives rise to the phenomena of *reflection* and *refraction*, which occur when a wave crosses a surface separating two media in which the wave propagates with different velocity. The *reflected wave* is a new wave that propagates back into the medium through which the initial wave was propagating. The *refracted wave* is the wave transmitted into the second medium. The energy of the incident wave splits, and is divided between the reflected and the refracted waves. In many instances it is the reflected wave that receives more energy, as is the case for mirrors. In others, the refracted wave carries most of the energy. When a transverse wave is polarized, the polarization is usually affected both in reflection and refraction; therefore we shall also discuss polarization in this chapter.

20.2 Huygens' Principle

The propagation of a wave is described by the equations of the field to which the wave corresponds. We considered this at length in Chapters 18 and 19. Therefore, if we know the source of a wave, we can in principle trace its propagation from one region to another, providing we take into account in our computation the changes in the properties of the medium. It is also possible, however, to compute the amplitude of a wave at a particular point of space without making reference to the sources. Around 1680 the Dutch physicist Christiaan Huygens (1629–1695) proposed a simple mechanism for tracing the propagation of waves. His construction is applicable to either elastic or mechanical waves in a material medium.

We recall that a *wave surface* or a *wave front* is a surface passing through all points of the medium reached by the wave motion at the same time. Therefore the perturbation at all points of a wave surface has the same phase. For example, for a plane wave the disturbance is expressed by $f(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} - vt)$, and a wave surface is composed of all points at which the phase $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} - vt$ has the same value at a given time. Therefore the wave surface is given by the equation

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r} - vt = \text{const},$$

which, for a given t, corresponds to a plane perpendicular to the unit vector $\boldsymbol{u}$ (remember Example 3.11). Similarly, for spherical waves, the wave surfaces are given by $r - vt = \text{const}$, which, for a given t, correspond to spheres.

Huygens visualized a method for passing from one wave surface to another. Consider a wave surface S (Fig. 20–1). When the wave motion reaches this surface, each particle a, b, c, . . . on the surface becomes a secondary source of waves,

che emette *onde secondarie* (indicate con piccoli semicerchi), che raggiungono lo strato immediatamente prossimo di particelle nel mezzo. Queste particelle sono quindi messe in movimento, e formano la superficie d'onda successiva S'. La superficie S' è tangente a tutte le onde secondarie. Il processo continua a ripetersi, dando luogo alla propagazione di un'onda attraverso il mezzo. La rappresentazione grafica della propagazione di un'onda ha una forma molto significativa se l'onda è un'onda elastica risultante dalle vibrazioni meccaniche degli atomi o delle molecole in un corpo.

Tuttavia tale rappresentazione non ha un significato fisico in casi quali, ad esempio, quello di un'onda elettromagnetica che si propaga nel vuoto, dove non ci sono particelle che vibrano. La costruzione di Huygens perciò, benchè del tutto plausibile se applicata ad onde di natura meccanica nella materia, richiese una revisione quando si scoprì che in natura esistono anche altre onde, di tipo differente. Questa revisione fu compiuta alla fine del secolo scorso da Kirchhoff, che sostituì la costruzione intuitiva di Huygens con una trattazione più matematica. I calcoli di Kirchhoff sono così complessi che non li riporteremo qui. Tuttavia, il risultato finale di tali calcoli è relativamente semplice come si potrà vedere nei paragrafi successivi.

La propagazione per onde è regolata dall'equazione generale dell'onda (18.48). Vale a dire,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \tag{20.1}$$

dove ξ può essere lo spostamento degli atomi di una sostanza nel caso di un'onda elastica, il campo elettrico o magnetico nel caso di un'onda elettromagnetica, e così via. Individuare il modo di propagazione di un'onda in un mezzo dato qualsiasi, consiste sostanzialmente nell'ottenere una soluzione $\xi(\boldsymbol{r}, t)$ di questa equazione differenziale. La soluzione dell'Eq. (20.1) dipende da quei valori di ξ che soddisfano le condizioni fisiche del problema; cioè la posizione e la natura delle sorgenti, le superficie fisiche di discontinuità, ecc . . . Queste condizioni vengono dette dai matematici le *condizioni al contorno*. La teoria delle equazioni differenziali stabilisce che in condizioni particolari possiamo trovare la soluzione di un'equazione del tipo della (20.1) se conosciamo i valori della funzione $\xi(\boldsymbol{r}, t)$ nei punti di una superficie chiusa S (Fig. 20—2). Per essere più concreti, supponiamo di voler determinare il moto dell'onda in un punto P. Se noi conosciamo le sorgenti $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, possiamo sommare tutti i loro contributi in P per ottenere il moto dell'onda risultante. Ora supponiamo che, invece, noi conosciamo il valore di ξ in tutti i punti della superficie S arbitraria ma chiusa. Anche in questo caso possiamo ottenere l'onda in P, pur ignorando la distribuzione delle sorgenti. Questa affermazione può essere espressa matematicamente nel modo seguente. La funzione $f(Q, t)$ rappresenti l'onda in ciascun punto Q della superficie S all'istante t; r rappresenti la distanza dall'elemento di superficie dS nell'intorno di Q al punto P. La perturbazione in P nell'istante t può essere espressa mediante

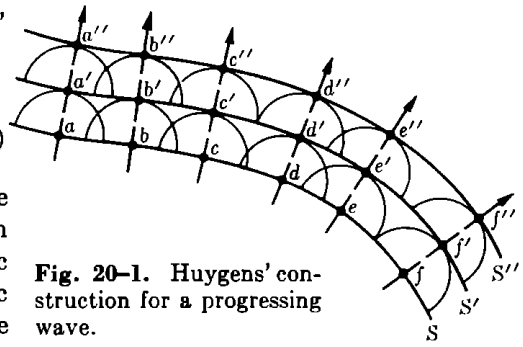


Fig. 20—1. Costruzione di Huygens per un'onda progressiva.

emitting *secondary waves* (indicated by the small semicircles), which reach the next layer of particles in the medium. These particles are then set in motion, forming the next wave surface S'. The surface S' is tangent to all secondary waves. The process keeps repeating itself, resulting in the propagation of a wave through the medium. This pictorial representation of the propagation of a wave looks very reasonable when the wave is an elastic wave resulting from mechanical vibrations of atoms or molecules in a body.

However, this representation has no physical meaning in such cases as, for example, an electromagnetic wave propagating in a vacuum, where there are no vibrating particles. Huygens' construction, therefore, although it was quite plausible when applied to mechanical waves in matter, required a revision when it was recognized that other waves, of a different kind, also exist in nature. This revision was accomplished at the end of the last century by Kirchhoff, who replaced Huygens' intuitive construction by a more mathematical treatment. Kirchhoff's calculations are so complicated that we shall not reproduce them here. The final result of his calculations, however, is relatively simple, as will be seen in the succeeding paragraphs.

Wave motion is regulated by the general wave equation (18.48). That is,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) \tag{20.1}$$

where ξ may be the displacement of the atoms of a substance in the case of an elastic wave, the electric or magnetic field in the case of an electromagnetic wave, and so forth. Understanding wave propagation in any given medium consists basically in obtaining a solution $\xi(\boldsymbol{r}, t)$ to this differential equation. The solution of Eq. (20.1) depends on ξ satisfying the physical conditions of the problem; that is, the position and nature of the sources, physical surfaces of discontinuity, etc. These conditions are called by mathematicians the *boundary conditions*. The theory of differential equations states that under special conditions we can find the solution of an equation such as Eq. (20.1) if we know the values of the function $\xi(\boldsymbol{r}, t)$ over a closed surface S (Fig. 20–2). To be more concrete, suppose that we want to evaluate the wave motion at a point P. If we know the sources $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, we may add all their contributions at P to obtain the resultant wave motion. Now suppose that, instead, we know the value of ξ at all points of the arbitrary but closed surface S. In this case also we may obtain the wave at P, even if we ignore the distribution of the sources. Mathematically, this statement can be expressed in the following way. Let $f(Q, t)$ represent the wave at each point Q on the surface S at time t. Let r represent the distance from the surface element dS around Q to the point P. The perturbation at P at time t can be expressed by an

Fig. 20–1. Huygens' construction for a progressing wave.

un'integrale della forma *

$$\xi_P(t) = \oint_S g(\theta)\frac{f(r - vt)}{r}\,dS, \tag{20.2}$$

dove l'integrale è esteso a tutta la superficie S. Questo integrale ha una interpretazione fisica abbastanza semplice. Il fattore $(1/r)f(r - vt)$ rappresenta un'onda sferica emessa dall'elemento di superficie dS nell'istante $t - r/v$ e che raggiunge P all'istante t, cosicchè r/v è il tempo di propagazione da dS a P. Il fattore $g(\theta)$ è un fattore dipendente dalla direzione che indica come le onde emesse da dS non abbiano la stessa ampiezza in tutte le direzioni. Quando dS è perpendicolare alla direzione di propagazione, la forma di $g(\theta)$ è

Fig. 20–2. L'onda in P può essere determinata se essa è nota nei punti della superficie chiusa S.

cosicchè la massima ampiezza ($g = 1$) corrisponde a $\theta = 0$, o propagazione in avanti, e la minima ampiezza ($g = 0$) a $\theta = \pi$, o propagazione all'indietro. Concludiamo quindi che *è possibile ottenere la perturbazione in un punto P all'istante t se si assume che ciascun elemento di superficie dS della superficie chiusa S agisca come sorgente secondaria di onde*. Questo è sostanzialmente il principio di Huygens, ma in una prospettiva diversa, senza alcun riferimento a modelli meccanici.

Avremo occasione di usare il principio di Huygens nella nuova formulazione datane da Kirchhoff, in molte delle discussioni che seguiranno sulla propagazione per onde, particolarmente quando tratteremo la diffrazione e la diffusione.

20.3 *Teorema di Malus*

Un altro importante strumento per individuare il comportamento di un'onda in un mezzo è il *teorema di Malus*. Facendo ancora riferimento alla Fig. 20–1, osserviamo che si può tracciare una serie di linee perpendicolari alle successive superficie d'onda (indicate con linee tratteggiate con una freccia). Tali linee sono dette *raggi* e corrispondono alle linee di propagazione dell'onda. Bisogna osservare che la relazione tra i raggi e le superficie d'onda è simile alla relazione fra le linee di forza e le superficie equipotenziali. Punti appartenenti a differenti superficie d'onda e uniti da un dato raggio, come ad esempio a, a', a'' o b, b', b'' in Fig. 20–1, sono detti *punti corrispondenti*. Ovviamente il tempo necessario perchè un'onda vada da S a S'', misurato seguendo uno qualsiasi dei raggi, deve essere lo stesso. Possiamo quindi affermare che

> *l'intervallo di tempo che separa punti corrispondenti di due superficie d'onda è lo stesso per tutte le coppie di punti corrispondenti.*

*L'espressione effettiva è un po più complicata; ma la Eq. (20.2) è sufficiente al nostro scopo qui, e fornisce una approssimazione adeguata, applicabile al tipo di problemi che devono venire discussi in questo libro.

integral of the form*

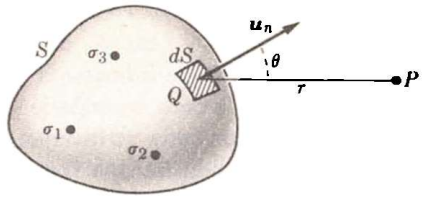


Fig. 20–2. The wave at P can be computed if the wave at the closed surface S is known.

where the integral extends over all the surface S. This integral has a rather simple physical interpretation. The factor $(1/r)f(r - vt)$ represents a spherical wave emitted by the surface element dS at time $t - r/v$ and reaching P at time t, so that r/v is the time for propagation from dS to P. The factor $g(\theta)$ is a directional factor, meaning that the waves emitted by dS do not have the same amplitude in all directions. When dS is perpendicular to the direction of propagation, the form of $g(\theta)$ is

$$g(\theta) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta),$$

so that the maximum amplitude ($g = 1$) corresponds to $\theta = 0$, or forward propagation, and the minimum amplitude ($g = 0$) to $\theta = \pi$, or backward propagation. We conclude then that *we can obtain the perturbation at a point P at time t if we assume that each surface element dS of the closed surface S acts as a secondary source of waves*. This is essentially Huygens' statement, but in a different perspective, without reference to a mechanical model.

We shall have occasion to use Huygens' principle, in the manner reformulated by Kirchhoff, in many of the forthcoming discussions of wave propagation, especially when we deal with diffraction and scattering.

20.3 *Malus' Theorem*

Another important tool for tracing the propagation of a wave through a medium is *Malus' theorem*. Referring back to Fig. 20–1, we note that we may draw a series of lines perpendicular to the successive wave surfaces (indicated by the broken lines with arrows). These lines are called *rays* and correspond to the lines of propagation of the wave. We must observe that the relation between rays and wave surfaces is similar to the relation between lines of force and equipotential surfaces. Points on different wave surfaces joined by a given ray, such as a, a', a'' or b, b', b'' in Fig. 20–1, are called *corresponding points*. Obviously the time required by the wave to go from S to S'' must be the same measured along any ray. We may thus state that

> *the time separation between corresponding points of two wave surfaces is the same for all pairs of corresponding points.*

* The actual expression is somewhat more complicated; but Eq. (20.2) suits our purpose here, and provides an adequate approximation, applicable to the kind of problems to be discussed in this book.

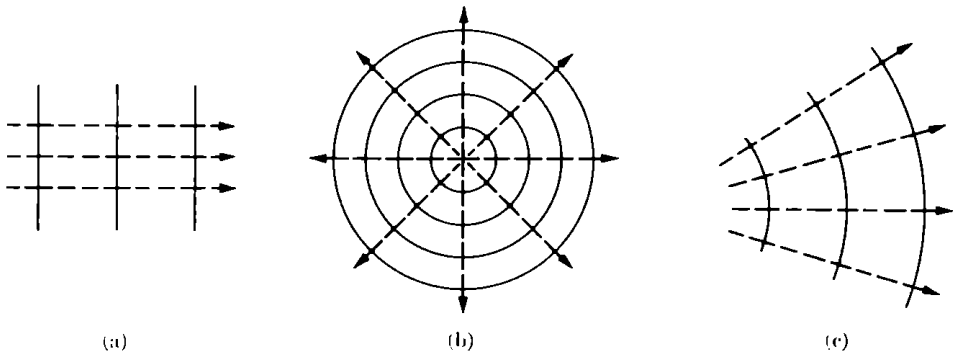


Fig. 20–3. Onde piane, onde sferiche, e onde di forma qualsiasi.

Da questo concludiamo che le distanze aa'', bb'', cc'', ecc., devono dipendere dalla velocità dell'onda in ciascun punto. In un mezzo isotropo e omogeneo, dove la velocità è la stessa in tutti i punti e in tutte le direzioni la distanza fra due superficie d'onda deve essere la stessa per tutti i punti corrispondenti. Un altro fatto importante che è bene segnalare qui è che in un mezzo omogeneo isotropo i raggi devono essere linee rette, perchè la simmetria suggerisce che non c'è ragione per cui essi si incurvino da una parte o dall'altra. Abbiamo già visto questo per le onde piane e sferiche; come è illustrato nelle parti (a) e (b) della Fig. 20—3. Perciò, nel caso generale, la famiglia delle superficie d'onda deve avere un insieme comune di normali, come mostra la Fig. 20—3(c), e tali superficie devono essere ugualmente distanziate lungo queste normali.

Fig. 20–3. Plane waves, spherical waves, and waves of arbitrary shape.

From this we conclude that the distances aa'', bb'', cc'', etc., must depend on the velocity of the wave motion at each point. In a homogeneous isotropic medium, where the velocity is the same at all points and in all directions, the separation between two wave surfaces must be the same for all corresponding points. Another important fact we must recognize here is that in a homogeneous isotropic medium, the rays must be straight lines, because symmetry suggests that there is no reason for their bending to one side or another. We have already seen this with plane and spherical waves; it is illustrated in parts (a) and (b) of Fig. 20–3. Therefore in the general case the family of wave surfaces must have a common set of normals, as shown in Fig. 20–3(c), and must be equally spaced along these normals.

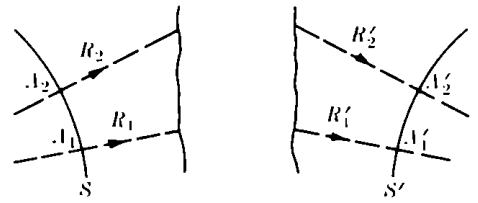


Fig. 20–4. Raggi corrispondenti nell'onda incidente e in quella emergente.

Si consideri ora il caso in cui un'onda si propaga attraverso una successione di mezzi isotropi omogenei. Nell'attraversare ciascuna delle superficie di separazione di due mezzi adiacenti, la direzione di propagazione può cambiare (cioè i raggi possono cambiare direzione), ma fintanto che si trovano in un dato mezzo i raggi saranno ancora linee rette perpendicolari alle superficie d'onda. Sia S (Fig. 20—4) una superficie d'onda nel primo mezzo. Possiamo dunque tracciare due raggi, R_1 e R_2 perpendicolari ad S. Le successive superficie d'onda in tale mezzo devono essere perpendicolari ad R_1 e R_2. Se, dopo che l'onda in moto ha attraversato tutti i vari mezzi, noi osserviamo un'altra superficie d'onda S', troviamo che i raggi R_1 e R_2 sono stati trasformati nei raggi R_1' e R_2', che sono a loro volta perpendicolari a S'. In altre parole.

la relazione di ortogonalità fra raggi e superficie d'onda è conservata durante tutto il processo di propagazione dell'onda.

Fig. 20–4. Corresponding rays in incident and outgoing waves.

Consider now the case in which a wave propagates through a succession of homogeneous isotropic media. At the crossing of each interface separating two adjacent media, the direction of propagation may change (that is, the rays may change direction), but while they are going through a given medium the rays will still be straight lines perpendicular to the wave surfaces. Let S (Fig. 20–4) be one wave surface in the first medium. Then we may trace two rays, R_1 and R_2, which are perpendicular to S. Successive wave surfaces in that medium must be perpendicular to R_1 and R_2. If, after the wave motion passes through all different media, we observe another wave surface S', we find that the rays R_1 and R_2 have been transformed into rays R_1' and R_2', which are also perpendicular to S'. In other words,

the relation of orthogonality between rays and wave surfaces is conserved throughout all the process of wave propagation.

Tale teorema inoltre implica che il tempo necessario perchè l'onda si propaghi da A_1 a A_1' (che sono punti corrispondenti) dev'essere uguale al tempo necessario per andare da A_2 a A_2' (che sono a loro volta punti corrispondenti).

20.4 *Riflessione e rifrazione di onde piane*

Si consideri un'onda piana che si propaga nel mezzo (1) nella direzione del versore $\boldsymbol{u}_i$ (Fig. 20—5). L'esperienza indica che, quando l'onda raggiunge la superficie piana AB che separa il mezzo (1) dal mezzo (2), un'onda viene trasmessa nel secondo mezzo mentre un'altra viene riflessa indietro nel mezzo (1). Tali onde sono, rispettivamente, l'onda *rifratta* e *riflessa*. Quando l'angolo di incidenza è acuto, le onde rifratte si propagano in una direzione, definita dal versore $\boldsymbol{u}_r$, che è differente da $\boldsymbol{u}_i$, e le onde riflesse si propagano in una direzione, di versore $\boldsymbol{u}_r'$, simmetrico a $\boldsymbol{u}_i$ rispetto alla superficie. La Fig. 20—6 mostra la situazione corrispondente per i raggi. Gli angoli θ_i, θ_r, e θ_r' sono detti, rispettivamente, angoli di *incidenza*, *rifrazione*, e *riflessione*. Le direzioni dei tre vettori $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_r$ e $\boldsymbol{u}_r'$ sono legate dalle leggi seguenti verificate sperimentalmente.

(1) *Le direzioni di incidenza, rifrazione, e riflessione giacciono tutte nello stesso piano*, normale alla superficie di separazione e che perciò contiene la normale N alla superficie stessa.

(2) *L'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione*. Vale a dire

Incident waves = Onde incidenti
Refracted waves = Onde rifratte
Reflected waves = Onde riflesse

(3) *Il rapporto fra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è costante*. Tale legge è detta *legge di Snell*, ed è espressa dalla

Fig. 20—5. Onde piane incidenti, riflesse, e rifratte.

La costante n_{21} viene detta *indice di rifrazione* relativo del mezzo (2) rispetto al mezzo (1). Il suo valore numerico dipende dalla natura dell'onda e dalle proprietà dei due mezzi.

Tali leggi rimangono valide anche quando o la superficie d'onda o la superficie di separazione dei due mezzi non siano piane perchè, in ciascun punto, c'è una sezione limitata di superficie che può essere considerata come piana e i raggi in tale punto si comportano secondo le Eq. (20.3) e (20.4).

Le tre leggi possono essere verificate sperimentalmente senza grandi difficoltà. Esse possono d'altra parte essere anche dimostrate teoricamente, facendo uso dei concetti basilari della propagazione per onde e in particolare del teorema di Malus. Per esempio, la prima legge può essere giustificata in base a pure considerazioni di simmetria, dato che il raggio incidente e la

This theorem further assumes that the time required by the wave to propagate from A_1 to A_1' (which are corresponding points) must be the same as the time required to go from A_2 to A_2' (which are also corresponding points).

20.4 Reflection and Refraction of Plane Waves

Consider a plane wave propagating in medium (1) in the direction of the unit vector $\boldsymbol{u}_i$ (Fig. 20–5). Experience indicates that, when the wave reaches the plane surface AB which separates medium (1) from medium (2), a wave is transmitted into the second medium and another wave is reflected back into medium (1). These are the *refracted* and *reflected* waves, respectively. When the angle of incidence is oblique, the refracted waves propagate in a direction indicated by unit vector $\boldsymbol{u}_r$, which is different from $\boldsymbol{u}_i$, and the reflected waves propagate in a direction, indicated by unit vector $\boldsymbol{u}_r'$, which is symmetric to $\boldsymbol{u}_i$ with respect to the surface. Figure 20–6 indicates the corresponding situation for rays. The angles θ_i, θ_r, and θ_r' are called, respectively, the angles of *incidence*, *refraction*, and *reflection*. The directions of the three vectors $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_r$ and $\boldsymbol{u}_r'$ are related by the following experimentally verified laws.

(1) *The directions of incidence, refraction, and reflection are all in one plane*, which is normal to the surface of separation and therefore contains the normal N to the surface.

(2) *The angle of incidence is equal to the angle of reflection*. That is,

$$\theta_i = \theta_r'. \tag{20.3}$$

(3) *The ratio between the sine of the angle of incidence and the sine of the angle of refraction is constant*. This is called *Snell's law*, and is expressed by

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = n_{21}. \tag{20.4}$$

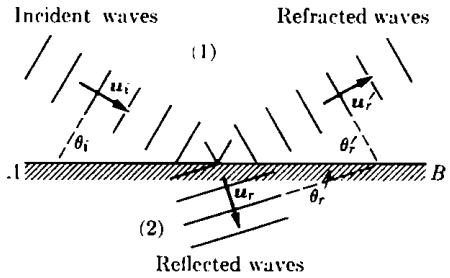


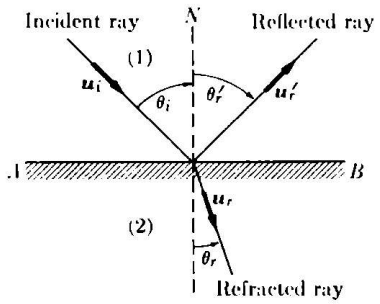
Fig. 20–5. Incident, reflected, and refracted plane waves.

The constant n_{21} is called the *index of refraction* of medium (2) relative to medium (1). Its numerical value depends on the nature of the wave and on the properties of the two media.

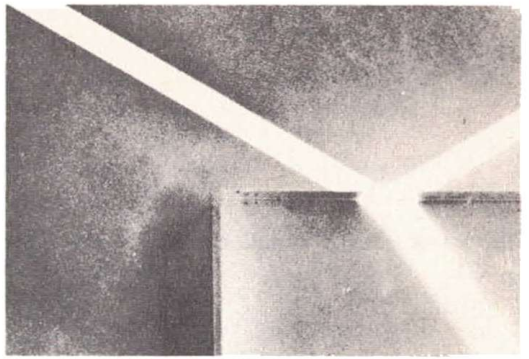
These laws remain valid when neither the wave surface nor the interface are plane because, at each point, there is a limited section of either surface which can be considered as plane and the rays at that point behave according to Eqs. (20.3) and (20.4).

The three laws can be verified experimentally without great difficulty. They can also be proved theoretically, if one uses the basic concepts of wave propagation and in particular the theorem of Malus. For example, the first law can be justified on the basis of symmetry considerations alone, since the incident ray and the nor-

Incident ray = Raggio incidente
Refracted ray = Raggio rifratto
Reflected ray = Raggio riflesso



(a)



(b)

Fig. 20–6. (a) Raggi incidente, riflesso, e rifratto. (b) Un pennello di luce riflesso da un blocco di vetro e rifratto in esso. (Da *Physics*; Boston: D. C. Heath, 1960.)

Fig. 20–6. (a) Incident, reflected, and refracted rays. (b) A pencil of light reflected from and refracted into a glass block. (From *Physics;* Boston: D. C. Heath, 1960.)

normale N individuano un piano, e non esiste nessun motivo *a priori* per cui i raggi rifratto e riflesso siano deviati da questo piano. Per dimostrare la seconda e la terza legge, consideriamo due raggi incidenti R_1 e R_2 (Fig. 20–7) che sono paralleli, dato che le onde incidenti sono piane. Il raggio R_1 incide sulla superficie di separazione nel punto A, R_2 in B'. Essendo le condizioni geometriche le stesse sia in A sia in B', ne concludiamo che i raggi rifratti R_1' e R_2', così come i raggi riflessi R_1'' e R_2'', sono a loro volta paralleli. Essendo i raggi R_1 e R_2 stati scelti arbitrariamente, abbiamo quindi che anche le onde rifratte e riflesse sono piane in quanto debbono essere perpendicolari all'insieme corrispondente di raggi paralleli, secondo quanto richiede il teorema di Malus.

Consideriamo le seguenti superficie d'onda: AB nell'onda incidente, $A'B'$ nell'onda rifratta, e $A''B'$ nell'onda riflessa. Il teorema di Malus implica che i tratti lungo i raggi, compresi tra punti corrispondenti delle superficie d'onda siano descritti in tempi uguali. Indichiamo con t il tempo necessario affinchè l'onda incidente vada da B a B' lungo il raggio R_2 con velocità v_1. Nello stesso tempo, l'onda rifratta si è mossa lungo il raggio R_1' da A a A' con velocità v_2 e l'ondariflessa infine si è spostata lungo il raggio R_1'' da A a A'' con velocità v_1. Quindi

e, dalla geometria della figura,

mal N determine a plane, and there is no *a priori* reason for the refracted and reflected rays to be deflected from this plane. To prove the second and third laws, let us consider two incident rays R_1 and R_2 (Fig. 20–7) which are parallel, since the incident waves are plane. Ray R_1 hits the interface at A and R_2 hits it at B'. Because the geometrical situation is the same at A and at B', we conclude that the refracted rays R_1' and R_2', as well as the reflected rays R_1'' and R_2'', are also parallel. Since the rays R_1 and R_2 were chosen arbitrarily, we have then that the refracted and reflected waves are also plane because they must be perpendicular to a corresponding set of parallel rays, as required by Malus' theorem.

Let us consider the following wave surfaces: AB in the incident wave, $A'B'$ in the refracted wave, and $A''B'$ in the reflected wave. As implied in Malus' theorem, the rays between corresponding points in the wave surfaces must have been traversed in equal times. Let us call t the time taken by the incident wave to go from B to B' along ray R_2 with velocity v_1. In the same time the refracted wave moved along ray R_1' from A to A' with velocity v_2 and the reflected wave moved along ray R_1'' from A to A'' with velocity v_1. Then

$$BB' = v_1 t, \quad AA' = v_2 t, \quad AA'' = v_1 t,$$

and from the geometry of the figure,

$$\sin\theta_i = \frac{BB'}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'},$$

$$\sin\theta_r = \frac{AA'}{AB'} = \frac{v_2 t}{AB'},$$

$$\sin\theta_r' = \frac{AA''}{AB'} = \frac{v_1 t}{AB'}.$$

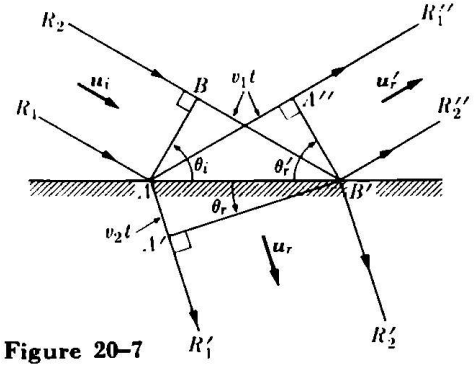
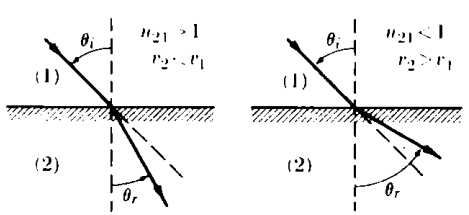


Figura 20–7

Figure 20–7

Incident ray = Raggio incidente
Reflected ray = Raggio riflesso
Refracted ray = Raggio rifratto



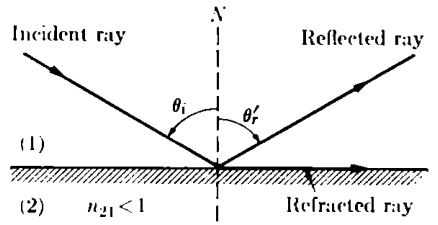


Fig. 20–8. Raggi rifratti con $n_{21} > 1$ e $n_{21} < 1$.

Fig. 20–9. La riflessione totale si ha quando $n_{21} < 1$ e θ_i è maggiore dell'angolo limite λ.

Fig. 20–8. Refracted rays for $n_{21} > 1$ and $n_{21} < 1$.

Fig. 20–9. Total reflection occurs when $n_{21} < 1$ and θ_i is larger than the critical angle λ.

Confrontando la prima e la terza di tali relazioni, $\sin \theta_i = \sin \theta_r'$ o anche $\theta_i = \theta_r'$, che è proprio la legge della riflessione dell'Eq. (20.3). Dividendo membro a membro la prima relazione per la seconda si ottiene

che esprime la legge di Snell dell'Eq. (20.4), dato che il rapporto v_1/v_2 fra le due velocità di propagazione è costante. Confrontando tale equazione con la (20.4), si vede che l'indice di rifrazione relativo di due sostanze è uguale al rapporto delle velocità di propagazione dell'onda nelle sostanze, ossia

Assumiamo un mezzo particolare come mezzo di riferimento e indichiamo con c la velocità di propagazione dell'onda in tale mezzo. L'*indice di rifrazione assoluto* di qualsiasi altro mezzo è definito dalla

Per le onde elettromagnetiche,* il mezzo di riferimento è il vuoto, e quindi $c \approx 3 \times 10^8$ m s^{-1}. Ora, per due sostanze,

cosicchè l'indice di rifrazione relativo di due mezzi è uguale al rapporto dei loro indici di rifrazione assoluti. Usando la relazione (20.7), possiamo scrivere la legge di Snell (20.4), nella forma più simmetrica

Si osservi che, a seconda che sia $v_2 \lesseqgtr v_1$, risulta che $n_2 \gtreqless n_1$ e $n_2 \gtreqless 1$, e ne consegue che $\theta_i \gtreqless \theta_r$, come è indicato in Fig. 20–8. Nel secondo caso, cioè per $n_{21} < 1$, può presentarsi una situazione particolare. Allorchè

*Il concetto di indice di rifrazione assoluto, per le onde elettromagnetiche è stato introdotto nel Paragrafo 19.13.

Comparing the first and third relations, $\sin \theta_i = \sin \theta_r'$ or $\theta_i = \theta_r'$, which is the law for reflection, Eq. (20.3). Dividing the first relation into the second yields

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2},$$

which expresses Snell's law, Eq. (20.4), since the ratio v_1/v_2 between the two velocities of propagation is constant. Comparing this equation with Eq. (20.4), we see that the relative index of refraction of two substances is equal to the ratio of the velocities of propagation of the wave in the substances, or

$$n_{21} = v_1/v_2. \tag{20.5}$$

Let us take a particular medium as reference or standard and designate by c the velocity of propagation of the wave in that medium. The *absolute index of refraction* of any other medium is defined by

$$n = c/v. \tag{20.6}$$

For electromagnetic waves,* the reference medium is vacuum, and thus $c \approx 3 \times 10^8$ m s^{-1}. Now, for two substances,

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{c}{v_2} \times \frac{v_1}{c} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}, \tag{20.7}$$

so that the relative index of refraction of two substances is equal to the ratio of their absolute indexes of refraction. Using relation (20.7), we can write Snell's law, Eq. (20.4), in the more symmetric form,

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r. \tag{20.8}$$

Note that, depending on whether $v_2 \lesseqgtr v_1$, then $n_2 \gtreqless n_1$ and $n_{21} \gtreqless 1$, resulting in $\theta_i \gtreqless \theta_r$, as indicated in Fig. 20–8. In the second case, that is, $n_{21} < 1$, a special situation may arise. When

$$\sin \theta_i = n_{21}, \tag{20.9}$$

* The concept of absolute index of refraction for electromagnetic waves was introduced in Section 19.13.

si ottiene dall'Eq. (20.4) che sin $\theta_r = 1$, cioè $\theta_r = \pi/2$, il che indica che il raggio rifratto è parallelo alla superficie. L'angolo θ_i dato dall'Eq. (20.9) è detto *angolo limite* e indicato con λ. La situazione geometrica è illustrata nella Fig. 20—9. Con $n_{21} < 1$, si ha $\theta_i > \lambda$, cioè sin $\theta_i > n_{21}$, da cui segue sin $\theta_r > 1$, cosa impossibile. Perciò, in tal caso, non esiste raggio rifratto, e si dice che c'è *riflessione totale*. Tale situazione può verificarsi, per esempio, quando la luce passa dal vetro all'aria. A rigore, come mostra la Fig. 20—9, c'è un'onda che si propaga nel secondo mezzo parallelamente alla superficie, ma l'ampiezza di tale onda diminuisce molto rapidamente con la profondità e l'onda è limitata ad un sottilissimo strato lungo la superficie.

ESEMPIO 20.1. Verificare che quando un'onda attraversa un mezzo delimitato da facce piane e parallele, la direzione di propagazione del raggio emergente è parallela a quella del raggio incidente. Valutare lo spostamento laterale dei raggi.

Soluzione: Consideriamo una lastra di spessore a ed un raggio AB (Fig. 20—10) il cui angolo di incidenza sia θ_i. Non considereremo qui il raggio riflesso. L'angolo di rifrazione è θ_r, e il corrispondente raggio rifratto BC. Usando la relazione (20.8), abbiamo che

In C la rifrazione avviene dal mezzo (2) nel mezzo (1), cosicchè l'Eq. (20.8) dà

Dalle proprietà geometriche illustrate in Fig. 20—10, vediamo d'altra parte che $\theta_i' = \theta_r$. Perciò, moltiplicando membro a membro le due relazioni, otteniamo sin θ_i = sin θ_r', vale a dire $\theta_i = \theta_r'$, ciò che dimostra che il raggio emergente CD è parallelo al raggio incidente AB; risultato che ci si sarebbe potuto attendere anche data la geometria del problema. Lasciamo verificare allo studente che lo spostamento laterale del raggio è

Si può anche verificare facilmente che se ci sono parecchie lastre a facce piane e parallele di materiali differenti, anzichè una sola, i raggi incidente ed emergente sono ancora paralleli.

we have from Eq. (20.4) that sin $\theta_r = 1$ or $\theta_r = \pi/2$, indicating that the refracted ray is parallel to the surface. The angle θ_i given by Eq. (20.9) is called the *critical angle* and is designated by λ. The geometrical situation is illustrated in Fig. 20–9. If $n_{21} < 1$, we have $\theta_i > \lambda$ or sin $\theta_i > n_{21}$, and it then follows that sin $\theta_r > 1$, which is impossible. Therefore in this case there is no refracted ray, and we say that there is *total reflection*. This situation may come about, for example, when light passes from glass into air. Strictly speaking, as shown in Fig. 20–9, there is a wave propagating in the second medium parallel to the surface, but the amplitude of the wave decreases very rapidly with depth and the wave is confined to a very thin layer along the surface.

EXAMPLE 20.1. Verify that when a wave passes through a medium limited by plane parallel sides, the direction of propagation of the emergent ray is parallel to that of the incident ray. Compute the lateral displacement of the rays.

Solution: Let us consider a plate of thickness a and a ray AB (Fig. 20–10) whose angle of incidence is θ_i. Here we shall disregard the reflected ray. The angle of refraction is θ_r, corresponding to the refracted ray BC. Using relation (20.8), we have that

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r.$$

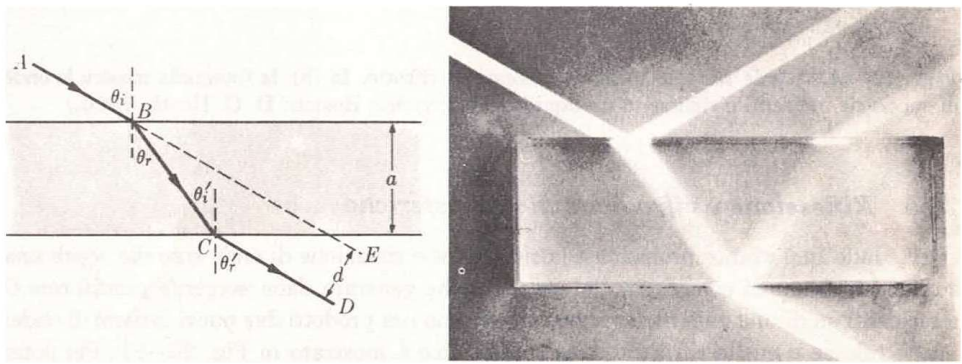
At C the refraction is from medium (2) into medium (1), so that Eq. (20.8) gives

$$n_2 \sin \theta_i' = n_1 \sin \theta_r'.$$

Also from the geometry of Fig. 20–10 we see that $\theta_i' = \theta_r$. Therefore, multiplying both relations, we get sin θ_i = sin θ_r' or $\theta_i = \theta_r'$, which proves that the emergent ray CD is parallel to the incident ray AB, a result that was also to be expected from the geometry of the problem. We leave it to the student to verify that the lateral displacement of the ray is

$$d = a \frac{\sin (\theta_i - \theta_r)}{\cos \theta_r}.$$

It may also be easily verified that if, instead of one, there are several parallel plates of different materials, the emergent and the incident rays are still parallel.



(a) (b)

Fig. 20–10. Propagazione di un raggio attraverso una lastra piana. In (b) la fotografia fa vedere lo spostamento di un pennello di luce. (Da *Physics*; Boston: D. C. Heath, 1960.)

Fig. 20–10. Propagation of a ray through a parallel plate. In (b) the photograph shows the displacement of a pencil of light. (From *Physics;* Boston: D. C. Heath, 1960.)

Incident waves = Onde incidenti
Reflected waves = Onde riflesse
Refracted waves = Onde rifratte

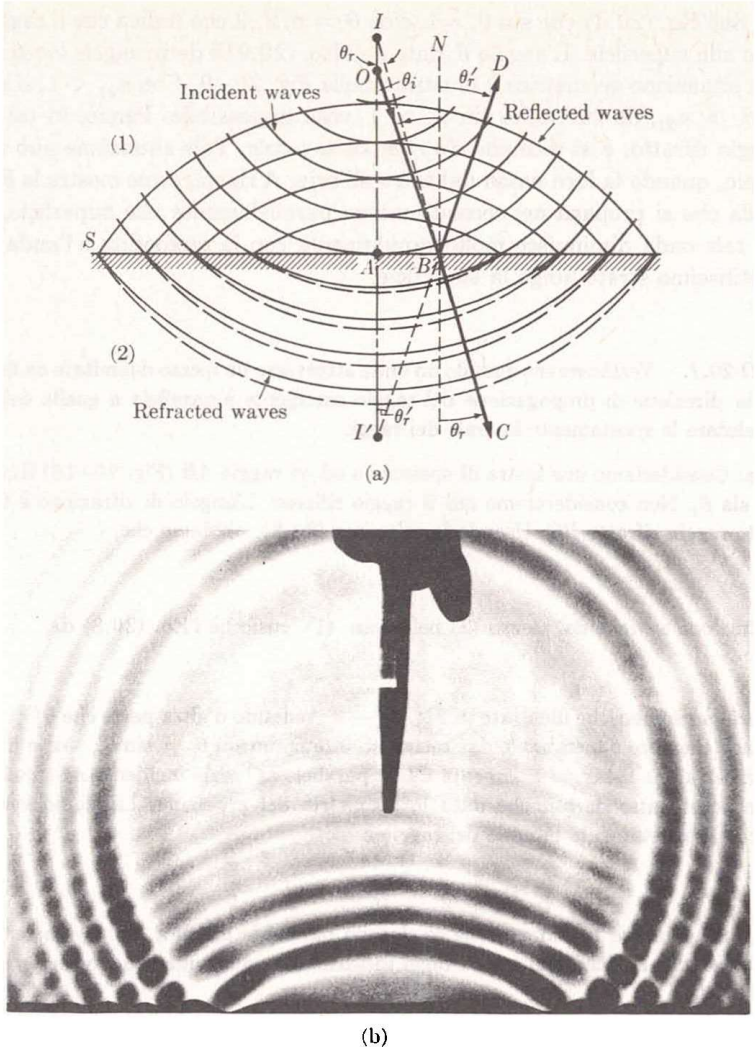


Fig. 20–11. Onde sferiche incidenti, riflesse, e rifratte. In (b), la fotografia mostra le onde di superficie incidenti e riflesse in un liquido. (Da *Physics*; Boston: D. C. Heath, 1960.)

20.5 *Riflessione e rifrazione di onde sferiche*

Un secondo importante problema è la riflessione e rifrazione di onde *sferiche* sopra una superficie piana. Si considerino le onde sferiche generate dalla sorgente puntiforme O e incidenti su di una superficie piana S. Vengono ora prodotti due nuovi insiemi di onde: quelle riflesse e quelle rifratte o trasmesse, come è mostrato in Fig. 20–11. Per poter tracciare la forma dei fronti d'onda riflessi e rifratti, sarebbe necessario disegnare molti raggi riflessi e rifratti. Le relative superficie d'onda

Fig. 20–11. Incident, reflected, and refracted spherical waves. In (b), the photograph shows incident and reflected surface waves in a liquid medium. (From *Physics;* Boston: D. C. Heath, 1960.)

20.5 Reflection and Refraction of Spherical Waves

A second important problem is the reflection and refraction of *spherical* waves at a plane surface. Let us consider spherical waves generated at a point source O and incident on a plane surface S. Two new sets of waves are then produced: the reflected and the refracted or transmitted, as shown in Fig. 20–11. In order to trace the shape of the reflected and refracted wave fronts, it would be necessary to draw many reflected and refracted rays. The corresponding reflected and refracted wave

sono perpendicolari ai raggi. In Fig. 20—11, è stato disegnato un insieme di tali raggi in B, assumendo $n_{21} > 1$. In base alle leggi (2) e (3) per la riflessione e la rifrazione, abbiamo

Se viene prolungato all'indietro nel mezzo (2), il raggio riflesso BD interseca il prolungamento della normale AO nel punto I'. Poichè i triangoli OAB e $I'AB$ sono rettangoli e gli angoli in O e I' sono uguali, ne segue che $AO = AI'$. Dato che B era un punto arbitrario, ne concludiamo che *tutti i raggi riflessi passano per un punto I', simmetrico di O rispetto alla superficie piana.* Questo punto è detto l'*immagine* di O per riflessione.

Perciò, *quando delle onde sferiche incidono su di una superficie piana, le onde riflesse sono sferiche e simmetriche rispetto alle onde incidenti.* Tale simmetria si poteva prevedere per il fatto che le onde riflesse si propagano all'indietro con la stessa velocità delle onde incidenti, in modo tale da rimanere simmetriche rispetto alla superficie riflettente.

Per quanto riguarda il raggio rifratto BC, vediamo che se lo si prolunga nel mezzo (1), esso interseca la normale OA in un punto I tale che $\tan \theta_r = AB/AI$. D'altra parte, $\tan \theta_i = AB/AO$. Perciò

Caustic = Caustica

oppure

Ora la legge di Snell della rifrazione richiede che sia $\sin \theta_i/\sin \theta_r$ costante ed uguale a n_{21}. Ma allora non può essere costante $\tan \theta_i/\tan \theta_r$. Perciò i raggi rifratti non passano tutti per lo stesso punto. Ne concludiamo quindi che *quando delle onde sferiche incidono su di una superficie piana, le onde rifratte non sono sferiche.*

Fig. 20–12. Rifrazione di raggi uscenti da una sorgente puntiforme. I raggi rifratti, prolungati all'indietro, non si incontrano in un unico punto.

I raggi rifratti, dato che non passano tutti per un unico punto, non formano un punto immagine di O come i raggi riflessi. I raggi rifratti si intersecano in molti punti lungo la normale OA, nonchè su di una superficie conica detta *caustica*, mostrata nella Fig. 20—12. Questa può essere osservata senza difficoltà nel caso della rifrazione di onde luminose. Il punto a, formato dalla intersezione dei raggi meno inclinati, può essere trovato molto facilmente, perchè, in tal caso, gli angoli θ_i e θ_r della Fig. 20—11 sono molto piccoli e possiamo sostituire le tangenti con i seni nella Eq. (20.10), che diviene

surfaces are perpendicular to the rays. In Fig. 20–11, one set of these rays has been drawn at B, assuming $n_{21} > 1$. According to laws (2) and (3) for reflection and refraction, we have

$$\theta_i = \theta_r', \qquad \sin \theta_i/\sin \theta_r = n_{21}.$$

The reflected ray BD, when it is extended back into medium (2), intersects the extended normal AO at point I'. Because triangles OAB and $I'AB$ are right triangles and the angles at O and I' are the same, we have that $AO = AI'$. Since B was an arbitrary point, we conclude that *all reflected rays pass through a point I', symmetric from O relative to the plane surface.* This point is called the *image* of O due to reflection.

Therefore, *when spherical waves fall on a plane surface, the reflected waves are spherical and symmetrical with respect to the incident waves.* This symmetry was to be expected in view of the fact that the reflected waves propagate backward with the same velocity as the incident waves, in such a way that they remain symmetric relative to the reflecting surface.

Concerning the refracted ray BC, we see that when we extend it into medium (1) it intersects the normal OA at a point I such that $\tan \theta_r = AB/AI$. Also $\tan \theta_i = AB/AO$. Therefore

$$\frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_r} = \frac{AI}{AO}$$

or

$$AI = AO \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_r}. \tag{20.10}$$

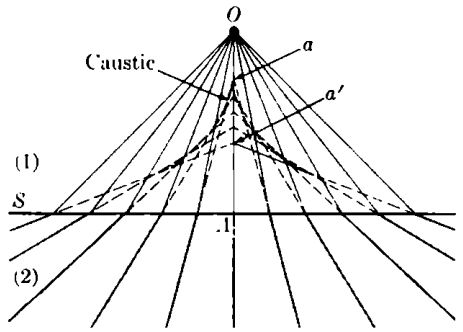


Fig. 20–12. Refraction of rays that proceed from a point source. The refracted rays, when extended back, do not intersect at a single point.

Now Snell's law of refraction requires that $\sin \theta_i/\sin \theta_r$ be constant and equal to n_{21}. But then $\tan \theta_i/\tan \theta_r$ cannot be constant. Therefore the refracted rays do not all pass through the same point. We conclude then that *when spherical waves fall on a plane surface, the refracted waves are not spherical.*

The refracted rays, since they do not pass through a single point, do not form a point image of O as the reflected rays do. The refracted rays intersect at several points along the normal OA, as well as on a conical surface called the *caustic*, shown in Fig. 20–12. This can be observed without difficulty in the case of the refraction of light waves. The point a, formed by the intersection of the least-inclined rays, can be found very easily, because then the angles θ_i and θ_r of Fig. 20–11 are very small and we may replace the tangents by sines in Eq. (20.10), resulting in

$$AI \approx AO \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = n_{21} AO. \tag{20.11}$$

20.6 *Ancora sulle leggi della riflessione e rifrazione*

Abbiamo stabilito le leggi della riflessione e rifrazione usando più o meno dei ragionamenti geometrici basati sul teorema di Malus. È anche possibile tuttavia discutere tali leggi in forma più analitica. Supponiamo che un'onda incidente sia descritta da una equazione del tipo (18.46). Vale a dire,

Le onde riflessa e rifratta saranno, rispettivamente,

e

Si osservi che abbiamo usato la stessa ω sia per le onde riflessa e rifratta, sia per l'onda incidente perchè è un fatto sperimentale che la frequenza del moto per onde non varia per riflessione o rifrazione.

La proprietà fisica attribuita a ξ (uno spostamento, o una pressione, o un campo elettrico o magnetico) è tale che il suo valore alla superficie di separazione dei due mezzi dev'essere lo stesso indipendentemente dalla parte da cui lo si calcola. (Nel caso di un'onda elettromagnetica, la relazione fra le componenti del campo elettrico e del campo magnetico può essere di natura un poco differente. Essa rimane tuttavia ancora una relazione lineare fra i campi dalle due parti della superficie.) Ora nel mezzo (1) abbiamo le onde incidente e riflessa, il che produce $\xi_i + \xi_r'$ come perturbazione risultante, mentre nel mezzo (2) abbiamo soltanto l'onda rifratta, che produce ξ_r. Quindi sulla superficie di separazione,

Affinchè tale condizione sia soddisfatta in tutti i punti della superficie di separazione ad ogni istante, è necessario che le fasi nelle Eq. (20.12), (20.13), e (20.14) siano identiche. Cioè,

per i punti $\boldsymbol{r}$ sulla superficie. Semplificato il termine comune ωt, l'Eq. (20.16) si riduce a

Possiamo ora scegliere gli assi XYZ, come indicato in Fig. 20–13, in modo tale che la superficie di separazione coincida con il piano XZ e la direzione di incidenza giaccia nel piano XY. Allora, poichè $\boldsymbol{r}$ deve stare nel piano XZ, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}_x x + \boldsymbol{u}_z z$. Analogamente $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{u}_x k_{ix} + \boldsymbol{u}_y k_{iy}$, e dato che non sapiamo se $\boldsymbol{k}_r$ e $\boldsymbol{k}_r'$ stiano a loro volta nello stesso piano, dobbiamo scrivere $\boldsymbol{k}_r = \boldsymbol{u}_x k_{rx} + \boldsymbol{u}_y k_{ry} + \boldsymbol{u}_z k_{rz}$ e $\boldsymbol{k}_r' = \boldsymbol{u}_x k_{rx}' + \boldsymbol{u}_y k_{ry}' + \boldsymbol{u}_z k_{rz}'$. Sostituendo nell'Eq. (20.17), e usando l'espressione (3.20) per il prodotto scalare, otteniamo

20.6 *More about the Laws of Reflection and Refraction*

We have established the laws of reflection and refraction by using more or less geometrical reasoning based on Malus' theorem. But it is also possible to discuss these laws in a more analytical form. Suppose that an incident wave is described by an equation of type (18.46). That is,

$$\xi_i = \xi_{0i} \sin (\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t). \tag{20.12}$$

The refracted and reflected waves will be, respectively,

$$\xi_r = \xi_{0r} \sin (\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t) \tag{20.13}$$

and

$$\xi_r' = \xi_{0r}' \sin (\boldsymbol{k}_r' \cdot \boldsymbol{r} - \omega t). \tag{20.14}$$

Note that we have used the same ω in the reflected and refracted waves as in the incident wave because it is an experimental fact that the frequency of wave motion does not change on reflection or refraction.

The physical property ascribed to ξ (a displacement, or a pressure, or an electric or magnetic field) is such that its value at the surface separating the two media must be the same no matter which side we compute it from. (In the case of an electromagnetic wave, the relation among the components of the electric field and the magnetic field may be of a somewhat different nature. But it is still a linear relation involving the fields on both sides of the surface.) Now in medium (1) we have the incident and reflected waves, which yields $\xi_i + \xi_r'$ for the resulting disturbance, and in medium (2) we have only the refracted wave, which yields ξ_r. Then at the surface of separation,

$$\xi_i + \xi_r' = \xi_r. \tag{20.15}$$

In order that this be satisfied at all points and times at the surface of separation, it is necessary that the phases in Eqs. (20.12), (20.13), and (20.14) be identical. That is,

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t = \boldsymbol{k}_r' \cdot \boldsymbol{r} - \omega t \tag{20.16}$$

for points $\boldsymbol{r}$ on the surface. After we cancel the common term ωt, Eq. (20.16) reduces to

$$\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_r' \cdot \boldsymbol{r}. \tag{20.17}$$

Now we may choose our XYZ axes, as indicated in Fig. 20–13, so that the surface of separation coincides with the XZ-plane and the direction of incidence lies in the XY-plane. Then, since $\boldsymbol{r}$ must be in the XZ-plane, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}_x x + \boldsymbol{u}_z z$. Similarly, $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{u}_x k_{ix} + \boldsymbol{u}_y k_{iy}$, and since we do not know whether $\boldsymbol{k}_r$ and $\boldsymbol{k}_r'$ are also in the same plane, we must write $\boldsymbol{k}_r = \boldsymbol{u}_x k_{rx} + \boldsymbol{u}_y k_{ry} + \boldsymbol{u}_z k_{rz}$ and $\boldsymbol{k}_r' = \boldsymbol{u}_x k_{rx}' + \boldsymbol{u}_y k_{ry}' + \boldsymbol{u}_z k_{rz}'$. Substituting in Eq. (20.17), using the expression (3.20) for the scalar product, we obtain

$$k_{ix} x = k_{rx} x + k_{rz} z = k_{rx}' x + k_{rz}' z.$$

Ma tale relazione deve valere per qualsiasi punto del piano XZ, e quindi

Il secondo gruppo di equazioni indica che i vettori $\boldsymbol{k}_r$ e $\boldsymbol{k}'_r$ non hanno componenti lungo l'asse Z, cosicchè stanno a loro volta nel piano XY, e i raggi incidente, riflesso, e rifratto stanno nel medesimo piano; questa è la legge (1) enunciata in precedenza.

Vediamo poi, dalla Fig. 20–14, che $k_{ix} = k_i \sin \theta_i$, $k_{rx} = k_r \sin \theta_r$, e $k'_{rx} = k'_r \sin \theta'_r$. Dall'Eq. (18.6), abbiamo $k_i = k'_r = \omega/v_1$ e $k_r = \omega/v_2$. Usando tutte queste relazioni nelle equazioni del primo gruppo delle (20.18), otteniamo, dopo aver semplificato il fattore comune ω,

Da tali relazioni vediamo che segue immediatamente che $\sin \theta_i = \sin \theta'_r$ o $\theta_i = \theta'_r$ e $\sin \theta_i/\sin \theta_r = v_1/v_2 = n_{21}$. Così, in questa forma più analitica, ritroviamo le leggi (2) e (3) per la riflessione e la rifrazione.

Quando è soddisfatta l'Eq. (20.16), l'Eq. (20.15) si riduce a

$$\xi_{0i} + \xi'_{0r} = \xi_{0r}, \tag{20.19}$$

che è una relazione fra le ampiezze delle tre onde. Ora, se si impone soltanto l'Eq. (20.15), o la sua equivalente (20.19), non abbiamo informazioni sufficienti per determinare l'ampiezza delle onde riflessa e rifratta. Tuttavia, per il contenuto fisico del problema, si può imporre di solito un'altra condizione al contorno, come ad esempio la continuità delle tensioni o della pressione sulla superficie

Plane of incidence = Piano di incidenza
Intersurface = Superficie di separazione fra i due mezzi

Figura 20–13

Fig. 20–14. Vettori d'onda delle onde incidenti, riflesse, e rifratte.

But this relation must hold for all points on the plane XZ, and therefore

$$k_{ix} = k_{rx} = k'_{rx} \qquad \text{and} \qquad k_{rz} = k'_{rz} = 0. \tag{20.18}$$

The second group of equations indicates that the vectors $\boldsymbol{k}_r$ and $\boldsymbol{k}'_r$ have no components along the Z-axis, so that they are also in the XY-plane and the incident, the reflected, and the refracted rays are in the same plane; this is law (1) mentioned before.

Next we see, from Fig. 20–14, that $k_{ix} = k_i \sin \theta_i$, $k_{rx} = k_r \sin \theta_r$, and $k'_{rx} = k'_r \sin \theta'_r$. And, from Eq. (18.6), we have $k_i = k'_r = \omega/v_1$ and $k_r = \omega/v_2$. Using all these relations in the first group of equations of (20.18), we get, after factoring out the common factor ω,

$$\frac{1}{v_1} \sin \theta_i = \frac{1}{v_2} \sin \theta_r = \frac{1}{v_1} \sin \theta'_r.$$

From these relations we see that $\sin \theta_i = \sin \theta'_r$ or $\theta_i = \theta'_r$ and $\sin \theta_i/\sin \theta_r = v_1/v_2 = n_{21}$ immediately follow. Thus, in this more analytic form, we recover laws (2) and (3) for reflection and refraction.

When Eq. (20.16) is satisfied, Eq. (20.15) reduces to

which is a relation among the amplitudes of the three waves. Now if only Eq. (20.15), or its equivalent, Eq. (20.19), is required, we do not have enough information to determine the amplitude of the reflected and refracted waves. However, because of the physics of the problem, another boundary condition is usually required, such as the continuity of the stresses or of the pressure across the interface

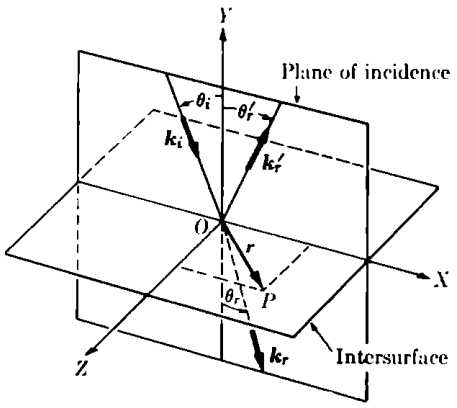


Figure 20–13

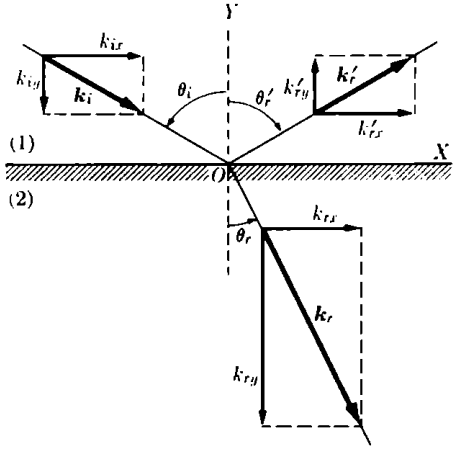


Fig. 20–14. Propagation vectors in incident, reflected, and refracted waves.

Incident = Incidenti
Refracted = Rifratte
Reflected = Riflesse

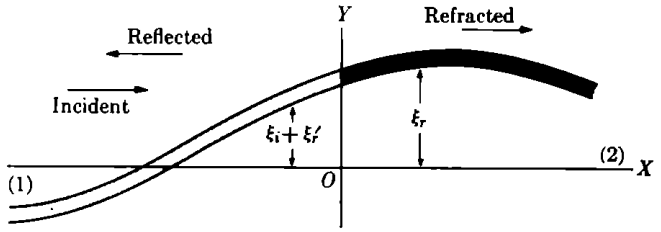


Fig. 20–15. Onde trasversali in due corde di densità lineare differente unite.

Fig. 20–15. Transverse waves in two attached strings of different linear densities.

di separazione nel caso delle onde elastiche, o la continuità di certe componenti dei campi elettrico e magnetico nel caso di onde elettromagnetiche. Perciò esiste una seconda relazione (o condizione al contorno) fra le ampiezze ξ_{0i}, ξ_{0r}, e ξ'_{0r}. Se noi usiamo le due condizioni al contorno, possiamo determinare le ampiezze ξ_{0r} e ξ'_{0r} in funzione di ξ_{0i}. Questo viene illustrato nell'esempio seguente.

ESEMPIO 20.2 Discutere la riflessione e la trasmissione di onde trasversali in un punto nel quale due corde (elastiche) di differenti materiali sono unite. Le corde sono soggette ad una forza T.

Soluzione: Supponiamo di avere due corde (1) e (2) (Fig. 20—15), unite in un punto; tale punto verrà scelto come origine delle coordinate. In questo esempio useremo, poichè è matematicamente più conveniente, l'espressione alternativa per le onde data dall'Eq. (18.10). C'è un'onda incidente proveniente da sinistra, della forma

Nel punto di discontinuità vengono prodotte, un'onda rifratta o trasmessa, che si propaga proseguendo lungo la corda (2),

e un'onda riflessa, che si propaga all'indietro lungo la corda (1),

Si osservi che usiamo k_1 sia per l'onda riflessa sia per l'onda incidente in quanto si propagano nello stesso mezzo: la corda (1). Lo spostamento verticale in ciascun punto della corda (1) è $\xi = \xi_i + \xi_r'$. Nei punti della corda (2) lo spostamento verticale è $\xi = \xi_r$. Il punto O, dove le corde sono unite, corrisponde a $x = 0$. In tale punto dobbiamo avere $\xi_i + \xi'_r = \xi_r$, in conformità all'Eq. (20.15), che diviene

ossia

legame fra le ampiezze analogo all'Eq. (20.19). In base alla discussione del Paragrafo 18.7, la forza verticale in ciascun punto della corda (1) è

in the case of elastic waves, or the continuity of certain components of the electric and magnetic fields in the case of electromagnetic waves. Therefore a second relation (or boundary condition) involving the amplitudes ξ_{0i}, ξ_{0r}, and ξ'_{0r} exists. If we use the two boundary conditions, we can determine the amplitudes ξ_{0r} and ξ'_{0r} in terms of ξ_{0i}. This is illustrated in the following example.

EXAMPLE 20.2. Discuss the reflection and transmission of transverse waves at a point where two strings of different materials are joined. The strings are subject to a tension T.

Solution: Let us suppose that we have two strings (1) and (2) (Fig. 20–15), attached at one point; this point will be chosen as our origin of coordinates. In this example we shall use, for mathematical convenience, the alternative form for waves given in Eq. (18.10). There is an incident wave coming from the left and having the form

$$\xi_i = \xi_{0i} \sin(\omega t - k_1 x).$$

At the point of discontinuity, a refracted or transmitted wave, propagating along string (2),

$$\xi_r = \xi_{0r} \sin(\omega t - k_2 x),$$

and a reflected wave, propagating back along string (1),

$$\xi_r' = \xi_{0r}' \sin(\omega t + k_1 x),$$

are produced. Note that we use k_1 for the reflected and incident waves because they propagate in the same medium: string (1). The vertical displacement at any point on string (1) is $\xi = \xi_i + \xi_r'$. On string (2) the vertical displacement is $\xi = \xi_r$. Point O, where the strings are joined, corresponds to $x = 0$. At this point, we must have $\xi_i + \xi_r' = \xi_r$, in conformity with Eq. (20.15), which becomes

$$\xi_{0i} \sin \omega t + \xi_{0r}' \sin \omega t = \xi_{0r} \sin \omega t$$

or

$$\xi_{0i} + \xi_{0r}' = \xi_{0r}, \tag{20.20}$$

which is a condition among the amplitudes similar to Eq. (20.19). According to the discussion in Section 18.7, the vertical force at any point in string (1) is

$$F_y = T \sin\alpha \approx T \tan\alpha = T \frac{\partial \xi}{\partial x} = T\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_r'}{\partial x}\right),$$

dato che α è piccolo e sin α è praticamente uguale a tan α. Quindi

since α is small and sin α is practically equal to tan α. Then

$$F_y = Tk_1[-\xi_{0i}\cos(\omega t - k_1 x) + \xi'_{0r}\cos(\omega t + k_1 x)].$$

Analogamente, la forza verticale in ciascun punto della corda (2) è

Similarly, the vertical force at any point on string (2) is

$$F_y = T\frac{\partial \xi_r}{\partial x} = -Tk_2\xi_{0r}\cos(\omega t - k_2 x).$$

Ora nel punto di congiunzione, la forza verticale dev'essere la stessa, sia che la si calcoli usando F_y per la corda (1) che per la corda (2). Ponendo $x = 0$ nelle due espressioni precedenti per F_y ed uguagliandole, otteniamo dunque dopo aver semplificato il fattore comune cos ωt,

Now at the junction the vertical force must be the same, whether we compute it using F_y for string (1) or for string (2). Then, setting $x = 0$ in the two expressions above for F_y and equating them, after canceling the common factor cos ωt, we get

$$k_1(\xi_{0i} - \xi'_{0r}) = k_2\xi_{0r}. \tag{20.21}$$

È questa una seconda condizione, che dev'essere soddisfatta dalle tre ampiezze, imposta dalla natura fisica dell'onda. Risolvendo il sistema di equazioni (20.20) e (20.21), otteniamo

This is a second condition to be satisfied by the three amplitudes and imposed by the physical nature of the wave. Solving the system of equations (20.20) and (20.21), we obtain

$$\xi_{0r} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}\xi_{0i}, \qquad \xi'_{0r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\xi_{0i}, \tag{20.22}$$

che determina le ampiezze delle onde rifratta e riflessa. In luogo di queste, osservando che $k = \omega/v$, possiamo scrivere

which determine the amplitudes of the refracted and reflected waves. Noting that $k = \omega/v$, we may write instead

$$\xi_{0r} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2}\xi_{0i}, \qquad \xi'_{0r} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}\xi_{0i}. \tag{20.23}$$

o ancora, dato che nel caso di onde trasversali in una corda $v = \sqrt{T/m}$, dove m è la massa ad unità di lunghezza, possiamo anche scrivere, in base all'Eq. (18.30),

Or, since in the case of transverse waves in a string $v = \sqrt{T/m}$, according to Eq. (18.30), where m is the mass per unit length, we may also write

$$\xi_{0r} = \frac{2\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}\xi_{0i}, \qquad \xi'_{0r} = \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}\xi_{0i}. \tag{20.24}$$

I rapporti ξ_{0r}/ξ_{0i} e ξ'_{0r}/ξ_{0i} sono detti, rispettivamente, *coefficienti di rifrazione* (o trasmissione) *e di riflessione*, e indicati rispettivamente con **T** e **R**. Così

The ratios ξ_{0r}/ξ_{0i} and ξ'_{0r}/ξ_{0i} are called, respectively, the *coefficients of refraction* (or transmission) *and of reflection*, designated by **T** and **R**, respectively. Thus

$$\mathbf{T} = \frac{2\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}, \qquad \mathbf{R} = \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}}.$$

Osserviamo che **T** è sempre positivo, cosicchè ξ_{0r} ha sempre lo stesso segno di ξ_{0i} e l'onda trasmessa è sempre in fase con l'onda incidente. Ma **R** è positivo o negativo a seconda che sia $m_1 \gtrless m_2$, cosicchè l'onda riflessa può essere in fase o in opposizione di fase con l'onda incidente. Nel secondo caso ciò equivale ad aggiungere uno sfasamento di π all'onda riflessa. Le due situazioni sono illustrate in Fig. 20–16.

Lo studente può verificare qual'è il flusso di energia attraverso la giunzione usando l'energia trasmessa per unità di tempo nelle corde (1) e (2). L'energia trasmessa è proporzionale a $\mathbf{T}^2$, mentre l'energia riflessa è proporzionale a $\mathbf{R}^2$.

We note that **T** is always positive, so that ξ_{0r} always has the same sign as ξ_{0i} and the transmitted wave is always in phase with the incident wave. But **R** is positive or negative depending on whether $m_1 \gtrless m_2$, so that the reflected wave may be in phase with or in opposition to the incident wave. In the second case it amounts to adding a phase shift of π to the reflected wave. The two situations are illustrated in Fig. 20–16.

The student may check the flow of energy across the junction by using the rate of energy flow on strings (1) and (2). The energy transmitted is proportional to $\mathbf{T}^2$ and the energy reflected is proportional to $\mathbf{R}^2$.

Incident = Incidente
Reflected = Riflessa
Transmitted = Trasmessa

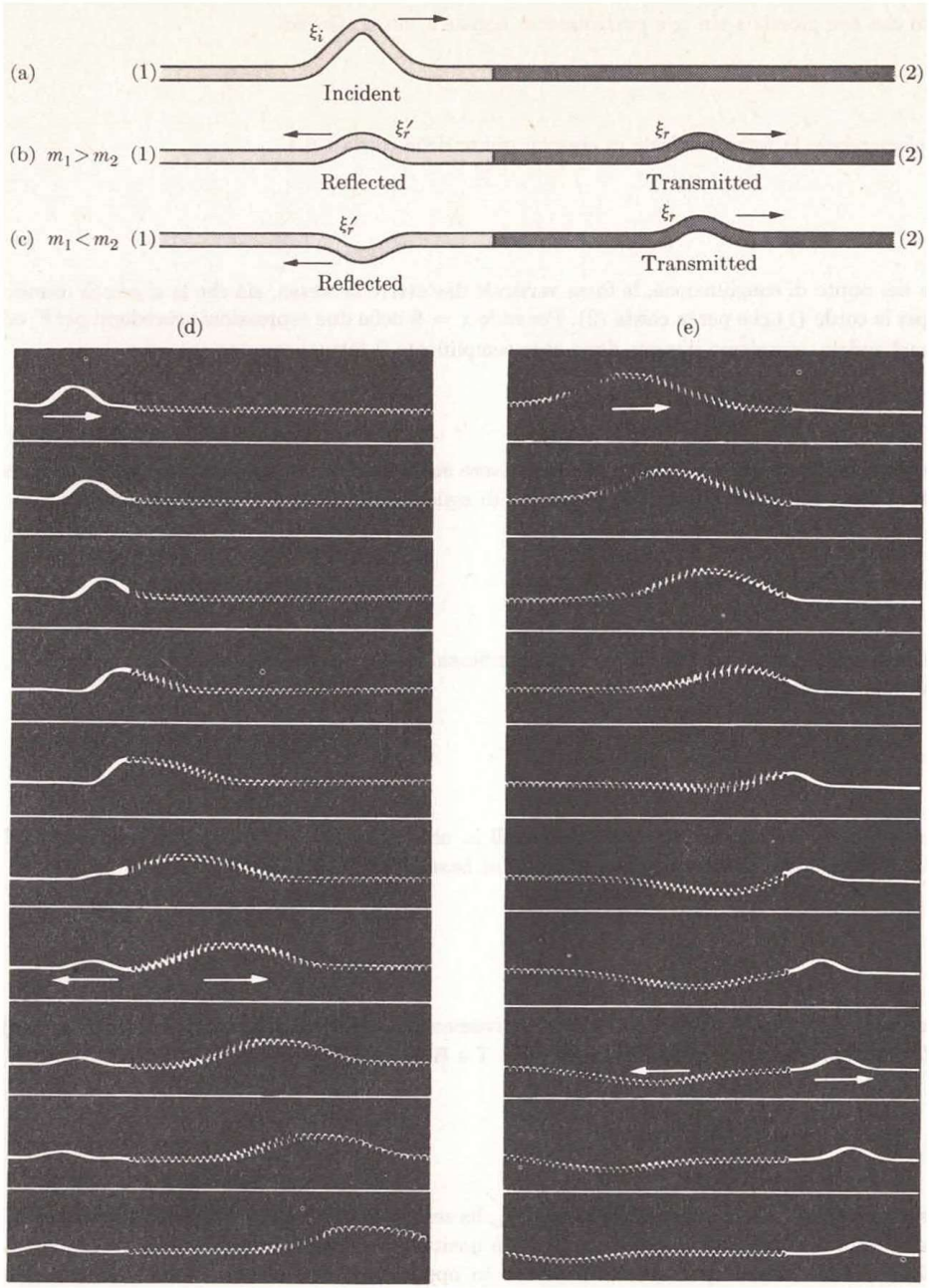


Fig. 20–16. Onde incidente, riflessa, e trasmessa in due corde di differente densità lineare unite. In (b) e (d) la corda lungo la quale arriva l'onda incidente è più pesante; in (c) e (e), la corda a sinistra è più leggera. (Fotografie da *Physics*; Boston: D. C. Heath, 1960.)

Fig. 20–16. Incident, reflected, and transmitted waves in two attached strings of different linear densities. In (b) and (d) the string carrying the incident wave is heavier; in (c) and (e), the string on the left is lighter. (Photographs from *Physics;* Boston: D. C. Heath, 1960.)

20.7 *Riflessione e rifrazione di onde elettromagnetiche*

Il caso delle onde elettromagnetiche richiede un'attenzione particolare perchè interessa due campi: le componenti elettrica e magnetica dell'onda. Sia il campo elettrico sia quello magnetico sono perpendicolari alla direzione di propagazione di ciascuna onda, ma possono tuttavia avere un'orientazione qualsiasi intorno a questa. Così, quando discutiamo la riflessione e rifrazione di onde elettromagnetiche, è più conveniente pensare ciascun campo come avente una componente *parallela* al piano di incidenza, caratterizzata con l'indice π, e una componente *perpendicolare* al piano di incidenza, contrassegnata con l'indice σ. Per la perpendicolarità di $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{B}$, abbiamo una componente $\mathfrak{E}_\pi$ associata con $\mathfrak{B}_\sigma$ e una componente $\mathfrak{E}_\sigma$ associata con $\mathfrak{B}_\pi$. Dato che, come abbiamo indicato nel capitolo 19, la polarizzazione di un'onda elettromagnetica è convenzionalmente definita dalla direzione del campo elettrico, abbiamo indicato in Fig. 20—17 le componenti di $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{B}$ per polarizzazione nel piano di incidenza, e in Fig. 20—18 per polarizzazione perpendicolare al piano di incidenza. Le frecce in ciascun caso indicano le direzioni considerate positive per le componenti di $\mathfrak{E}$. Il caso generale è una combinazione di entrambi gli stati di polarizzazione, dato che, come abbiamo indicato in precedenza, i campi $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{B}$ possono sempre essere scomposti in componenti π e σ.

20.7 *Reflection and Refraction of Electromagnetic Waves*

The case of electromagnetic waves requires special attention because it involves two fields: the electric and the magnetic components of the wave. Both electric and magnetic fields are perpendicular to the direction of propagation of each wave, but otherwise they may have any orientation around it. Thus when we discuss the reflection and refraction of electromagnetic waves, it is more convenient to think of each field as having a component *parallel* to the plane of incidence, designated by the subscript π, and a component *perpendicular* to the plane of incidence, designated by the subscript σ. Because of the perpendicularity of $\mathfrak{E}$ and $\mathfrak{B}$, we have a component $\mathfrak{E}_\pi$ associated with $\mathfrak{B}_\sigma$ and a component $\mathfrak{E}_\sigma$ associated with $\mathfrak{B}_\pi$. Since, as we indicated in Chapter 19, the polarization of an electromagnetic wave is conventionally determined by the direction of the electric field, we have indicated in Fig. 20–17 the $\mathfrak{E}$ and $\mathfrak{B}$ components for polarization in the plane of incidence, and in Fig. 20–18 for polarization perpendicular to the plane of incidence. The arrows in each case indicate the directions considered positive for the $\mathfrak{E}$-components. The general case is a combination of both polarizations since, as we have indicated before, the fields $\mathfrak{E}$ and $\mathfrak{B}$ can always be separated into π- and σ-components.

Plane of incidence = Piano di incidenza
Interface = Superficie di separazione fra i due mezzi

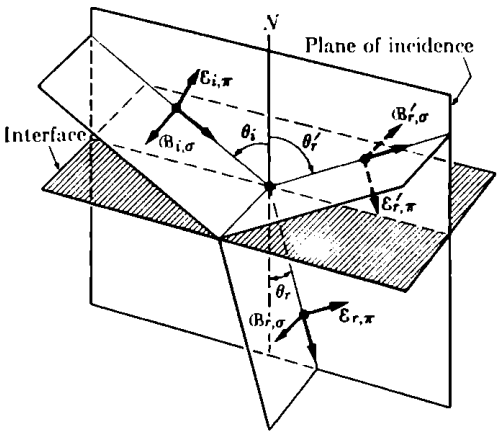


Fig. 20–17. Campi elettrico e magnetico nelle onde incidenti, riflesse, e rifratte con polarizzazione parallela al piano di incidenza.

Fig. 20–17. Electric and magnetic fields in the incident, reflected, and refracted waves for polarization parallel to the plane of incidence.

Plane of incidence = Piano di incidenza

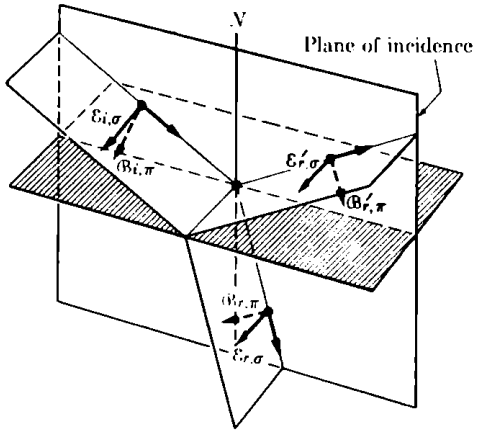


Fig. 20–18. Campi elettrico e magnetico nelle onde incidenti, riflesse, e rifratte con polarizzazione perpendicolare al piano di incidenza.

Fig. 20–18. Electric and magnetic fields in the incident, reflected, and refracted waves for polarization perpendicular to the plane of incidence.

Le equazioni di Maxwell forniscono certe relazioni fra le componenti parallele e perpendicolari dei campi elettrico e magnetico sui due lati della superficie di separazione dei due mezzi, le quali ci consentono di stabilire le relazioni fra le componenti del campo elettrico nelle onde incidente, rifratta, e riflessa. Da esse possiamo calcolare i coefficienti di riflessione e rifrazione o trasmissione. Quando $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$, condizione che si verifica in un gran numero di casi, i risultati

Maxwell's equations provide certain relations among the parallel and perpendicular components of the electric and magnetic fields on both sides of the surface separating two media which allow us to establish the relations between the components of the electric field in the incident, refracted, and reflected waves. From them we can calculate the coefficients of reflection and refraction or transmission. When $\mu_1 = \mu_2 \approx \mu_0$, which applies in a wide range of cases, the results which we

ottenuti sono i seguenti:

obtain are the following:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{R}_\pi &= \frac{\mathcal{E}'_{r,\pi}}{\mathcal{E}_{i,\pi}} = \frac{n_1 \cos\theta_r - n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_r + n_2 \cos\theta_i}, \\
\mathsf{R}_\sigma &= \frac{\mathcal{E}'_{r,\sigma}}{\mathcal{E}_{i,\sigma}} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_r}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_r} \\
\mathsf{T}_\pi &= \frac{\mathcal{E}_{r,\pi}}{\mathcal{E}_{i,\pi}} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_r + n_2 \cos\theta_i}, \\
\mathsf{T}_\sigma &= \frac{\mathcal{E}_{r,\sigma}}{\mathcal{E}_{i,\sigma}} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_r}.
\end{aligned}
\tag{20.25}
$$

Un caso molto importante è quello corrispondente alla situazione per cui $\mathsf{R}_\pi = 0$. L'onda riflessa allora non ha una componente elettrica del tipo $\mathcal{E}'_{r,\pi}$, ma soltanto $\mathcal{E}'_{r,\sigma}$. Quindi l'onda riflessa è totalmente polarizzata in un piano perpendicolare al piano di incidenza. Secondo l'Eq. (20.25), questo avviene quando $n_2 \cos\theta_i = n_1 \cos\theta_r$. Poichè la legge di Snell, l'Eq. (20.8), richiede che sia $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$, abbiamo che $\sin\theta_i \cos\theta_i = \sin\theta_r \cos\theta_r$ cioè $\sin 2\theta_i = \sin 2\theta_r$. La soluzione di tale equazione dà $2\theta_i = \pi - 2\theta_r$, cioè $\theta_i + \theta_r = \pi/2$,* e questo implica che i raggi rifratto e riflesso siano perpendicolari. Così

There is one very important case corresponding to the situation in which $\mathsf{R}_\pi = 0$. Then the reflected wave does not have an electric component of type $\mathcal{E}'_{r,\pi}$, but only $\mathcal{E}'_{r,\sigma}$. Thus the reflected wave is totally polarized in a plane perpendicular to the plane of incidence. This happens when, according to Eq. (20.25), $n_2 \cos\theta_i = n_1 \cos\theta_r$. Since Snell's law, Eq. (20.8), requires that $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$, we have that $\sin\theta_i \cos\theta_i = \sin\theta_r \cos\theta_r$ or $\sin 2\theta_i = \sin 2\theta_r$. The solution of this equation yields $2\theta_i = \pi - 2\theta_r$ or $\theta_i + \theta_r = \pi/2$,* and this implies that the reflected and refracted rays are perpendicular. Thus

quando i raggi riflesso e rifratto sono perpendicolari, il raggio riflesso è totalmente polarizzato, con il campo elettrico perpendicolare al piano di incidenza.

when the reflected and refracted rays are perpendicular, the reflected ray is totally polarized, with the electric field perpendicular to the plane of incidence.

Tale situazione è illustrata nella Fig. 20–19, dove sono indicate soltanto le componenti del campo elettrico; per semplicità, abbiamo omesso le componenti

This situation is illustrated in Fig. 20–19, where only the components of the electric field are indicated; for simplicity, we have omitted the corresponding com-

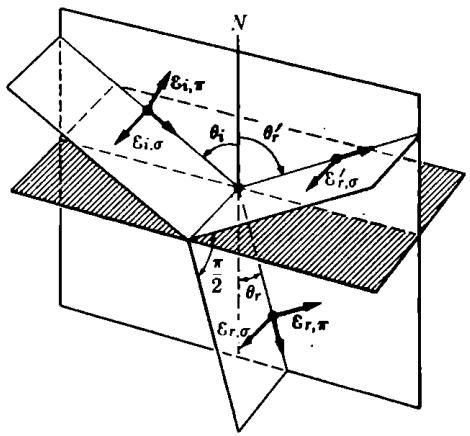


Fig. 20–19. Polarizzazione di un'onda elettromagnetica per riflessione.

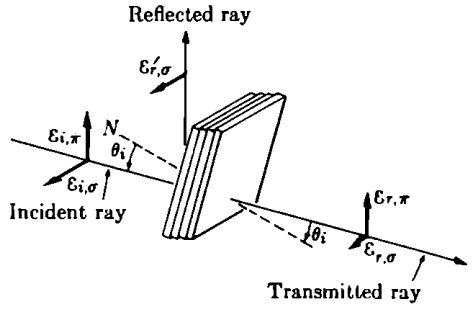


Fig. 20–20. Polarizzazione di un'onda elettromagnetica per rifrazioni successive.

Reflected ray = Raggio riflesso
Incident ray = Raggio incidente
Transmitted ray = Raggio trasmesso

Fig. 20–19. Polarization of an electromagnetic wave by reflection.

Fig. 20–20. Polarization of an electromagnetic wave by successive refractions.

* Si osservi che la possibilità $2\theta_i = 2\theta_r$, cioè $\theta_i = \theta_r$, deve essere esclusa in base alla legge di Snell.

* Note that the possibility $2\theta_i = 2\theta_r$ or $\theta_i = \theta_r$ must be excluded because of Snell's law.

corrispondenti del campo magnetico. Ora, dato che per il caso mostrato in Fig. 20—19, $\sin \theta_r = \cos \theta_i$, la legge di Snell fornisce un angolo di incidenza dato da

$$\tan \theta_i = n_{21}. \tag{20.26}$$

L'angolo θ_i dato dall'Eq. (20.26) è detto *angolo polarizzante*. Il risultato stabilito dall'Eq. (20.26) è detto *legge di Brewster*.

Si può dimostrare che non è possibile avere $\mathsf{R}_\sigma = 0$ e contemporaneamente soddisfare la legge di Snell. Perciò, la componente perpendicolare del campo elettrico nella parte riflessa non può essere resa uguale a zero a meno che non lo sia già nell'onda incidente.

Possiamo osservare anche dall'Eq. (20.25) che i coefficienti di rifrazione T_τ e T_σ non sono mai nulli, e perciò l'onda rifratta non è mai completamente polarizzata. Tuttavia, se un'onda elettromagnetica viene fatta passare attraverso una pila di sottili lamine piane parallele (Fig. 20—20) con un angolo di incidenza uguale all'angolo polarizzante, l'onda trasmessa ha una componente $\mathcal{E}_{r,\sigma}$, molto più piccola, dato che tale componente tende ad andare con l'onda riflessa ogni qualvolta l'onda viene riflessa passando da una lamina all'altra. Perciò l'onda trasmessa è quasi totalmente polarizzata, e il campo elettrico oscilla nel piano di incidenza.

Osserviamo inoltre che i coefficienti di trasmissione T sono positivi, cosicchè l'onda trasmessa è sempre in fase con l'onda incidente. I coefficienti di riflessione R, tuttavia, possono essere positivi o negativi, e l'onda riflessa può essere in fase con l'onda incidente o avere uno sfasamento di π rispetto ad essa.

ESEMPIO 20.3. Calcolare i coefficienti di riflessione e trasmissione per onde elettromagnetiche nella regione visibile per vetro crown, per un angolo di incidenza uguale a 30°.

Soluzione: Dalla Tabella 20—1 risulta $n_{\text{vetro}} = 1.52$, e poichè, per l'aria, $n_{\text{aria}} \approx 1$, si ha $\sin \theta_i = 1.52 \sin \theta_r$. Ponendo $\theta_i = 30°$, otteniamo $\theta_r = 19° 12'$. Perciò, applicando le relazioni (20.25), otteniamo

$$\mathsf{R}_\tau = 0.165, \quad \mathsf{R}_\sigma = -0.248, \quad \mathsf{T}_\tau = 0.442, \quad \mathsf{T}_\sigma = 0.752.$$

Osserviamo che la componente perpendicolare dell'onda riflessa ha subìto un cambiamento di fase di π. L'angolo (polarizzante) di Brewster per il vetro crown corrisponde a $\tan \theta_i = 1.52$, cioè $\theta_i = 56° 41'$.

TABELLA 20—1 Indici assoluti di rifrazione per le onde elettromagnetiche* di diverse sostanze

Sostanza	n	Sostanza	n
Acqua (25°C)	1.33	Vetro Crown	1.52
Alcool (20°C)	1.36	Vetro flint	1.65
Solfuro di carbonio	1.63	Sodio liquido	4.22
Ghiaccio	1.31	Diamante	2.417
Quarzo	1.51	Aria	1.00029

*Valori medi nella regione spettrale visibile.

ponents of the magnetic field. Now, since for the case shown in Fig. 20–19, $\sin \theta_r = \cos \theta_i$, Snell's law yields an angle of incidence given by

The angle θ_i given by Eq. (20.26) is called the *polarizing angle*. The result stated by Eq. (20.26) is called *Brewster's law*.

It may be shown that it is not possible to have $\mathsf{R}_\sigma = 0$ and satisfy Snell's law at the same time. Therefore the perpendicular component of the electric field in the reflected part cannot be made zero unless it is already zero in the incident wave.

Also we may note from Eq. (20.25) that the refraction coefficients T_τ and T_σ are never zero, and therefore the refracted wave is never completely polarized. However, if an electromagnetic wave is transmitted through a stack of thin parallel plates (Fig. 20–20), with an incident angle equal to the polarizing angle, the transmitted wave has a much smaller component $\mathcal{E}_{r,\sigma}$, since this component tends to go with the reflected wave each time the wave is reflected when it passes from one plate to the next. Therefore the transmitted wave is almost totally polarized, and the electric field oscillates in the plane of incidence.

In addition, we note that the transmission coefficients T are positive, so that the transmitted wave is always in phase with the incident wave. However, the reflection coefficients R may be positive or negative, and the reflected wave may be in phase with the incident wave or have a phase shift of π relative to it.

EXAMPLE 20.3. Compute the coefficients of reflection and transmission for electromagnetic waves in the visible region for crown glass at an angle of incidence equal to 30°.

Solution: From Table 20–1 we have $n_{\text{glass}} = 1.52$, and since, for air, $n_{\text{air}} \approx 1$, we have then $\sin \theta_i = 1.52 \sin \theta_r$. Setting $\theta_i = 30°$, we get $\theta_r = 19° 12'$. Therefore, applying relations (20.25), we obtain

Note that the perpendicular component of the reflected wave has suffered a phase change of π. The Brewster angle for crown glass corresponds to $\tan \theta_i = 1.52$ or $\theta_i = 56° 41'$.

TABLE 20–1 Absolute Indexes of Refraction of Several Substances for Electromagnetic Waves*

Substance	n	Substance	n
Water (25°C)	1.33	Crown glass	1.52
Alcohol (20°C)	1.36	Flint glass	1.65
Carbon bisulfide	1.63	Sodium (liquid)	4.22
Ice	1.31	Diamond	2.417
Quartz	1.51	Air	1.00029

* Average values in the visible region of the spectrum.

20.8 *Propagazione di onde elettromagnetiche in un mezzo anisotropo*

Quando un'onda trasversale si propaga in un mezzo anisotropo, la velocità di propagazione dell'onda può dipendere sia dalla direzione di polarizzazione sia dalla direzione di propagazione dell'onda stessa. Ciò è vero in particolare nel caso di onde elettromagnetiche (che sono le sole che verranno prese in considerazione in questo paragrafo). La polarizzabilità della maggior parte delle molecole non è la stessa in tutte le direzioni. Dato che le molecole nei gas e nei liquidi sono orientate in modo casuale, tale dipendenza direzionale della polarizzabilità non dà origine ad alcun effetto particolare, e il mezzo in realtà si comporta dal punto di vista macroscopico come una sostanza isotropa. Ma in un solido cristallino, le molecole sono più o meno orientate e la loro orientazione è "congelata"; vale a dire, esse non sono libere di ruotare intorno alla loro posizione di equilibrio all'interno del reticolo cristallino. Così le proprietà del cristallo dipendono in generale dalla direzione lungo la quale vengono misurate. A seconda di quali siano la loro struttura e disposizione molecolari, i solidi cristallini possono comportarsi agli effetti ottici sia come mezzi isotropi che anisotropi.

Il fatto che la polarizzabilità del mezzo non è la stessa in tutte le direzioni significa che, in generale, la polarizzazione $\mathcal{P}$ non ha la stessa direzione del campo elettrico $\mathcal{E}$ (Fig. 20–21). Ne risulta che anche il vettore spostamento $\mathcal{D} = \epsilon_0\mathcal{E} + \mathcal{P}$ non è parallelo a $\mathcal{E}$. Matematicamente, la situazione è qui molto simile a quella incontrata nel capitolo 10 discutendo la relazione fra momento della quantità di moto $\boldsymbol{L}$ e velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di un corpo rigido rotante. Ricordiamo che $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$, in un corpo rotante, non sono paralleli se non nel caso di rotazione intorno a uno degli assi principali del corpo. Analogamente, troviamo che ci sono almeno tre direzioni fra di loro perpendicolari, dette anche assi principali, caratteristiche di ciascuna sostanza, lungo le quali $\mathcal{E}$ e $\mathcal{D}$ sono paralleli. Orientando gli assi coordinati XYZ parallelamente a tali assi principali, e indicando i tre valori principali della permittività della sostanza, corrispondenti a ciascun asse principale, con ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, abbiamo che le componenti di $\mathcal{D}$ per un'orientazione arbitraria di $\mathcal{E}$ sono, per estensione dell'Eq. (16.14),

Possiamo anche parlare di tre indici di rifrazione principali n_1, n_2, e n_3, ciascuno associato con la corrispondente permittività come indicato dall'Eq. (19.57).

Sia l'esperimento che la teoria (basata sulle equazioni di Maxwell e sulla discussione precedente) dimostrano che

> *in un mezzo anisotropo, a ciascuna direzione di propagazione di un'onda elettromagnetica piana corrispondono due possibili stati di polarizzazione, mutuamente perpendicolari, ciascuno dei quali si propaga con una velocità differente.*

Così, indipendentemente da quale sia lo stato iniziale di polarizzazione, quando un'onda elettromagnetica penetra in una sostanza anisotropa, si suddivide in due onde polarizzate ad angolo retto una rispetto all'altra, propagantesi con velocità di fase diverse. Tale

20.8 *Propagation of Electromagnetic Waves in an Anisotropic Medium*

When a transverse wave propagates through an anisotropic medium, the velocity of propagation of the wave may depend both on the direction of polarization and on the direction of propagation of the wave. This is particularly true in the case of electromagnetic waves (which are the only ones we shall consider in this section). The polarizability of most molecules is not the same in all directions. Since the molecules in gases and liquids are oriented at random, this directional dependence of the polarizability does not give rise to any particular effect, and the medium effectively behaves macroscopically as an isotropic substance. But in a crystalline solid, the molecules are more or less oriented and their orientation is "frozen"; that is, they are not free to rotate around their equilibrium positions within the crystal lattice. Thus the properties of the crystal in general depend on the direction along which they are measured. Depending on what their molecular structure and arrangement is, crystalline solids may behave optically as either isotropic or anisotropic media.

The fact that the polarizability of the medium is not the same in all directions means that, in general, the polarization $\mathcal{P}$ does not have the same direction as the electric field $\mathcal{E}$ (Fig. 20–21). As a result, the displacement vector $\mathcal{D} = \epsilon_0\mathcal{E} + \mathcal{P}$ is also not parallel to $\mathcal{E}$. The situation here is mathematically very similar to that encountered in Chapter 10 when we were discussing the relation between the angular momentum $\boldsymbol{L}$ and the angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ of a rotating rigid body. Let us recall that $\boldsymbol{L}$ and $\boldsymbol{\omega}$, in a rotating body, are not parallel except in the case of rotation along a principal axis of the body. Similarly we find that there are at least three perpendicular directions, also called principal axes, characteristic of each substance, along which $\mathcal{E}$ and $\mathcal{D}$ are parallel. Orienting the coordinate axes XYZ parallel to these principal axes and designating the three principal values of the permittivity of the substance corresponding to each of the principal axes by ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, we have that the components of $\mathcal{D}$ for an arbitrary orientation of $\mathcal{E}$ are, by extension of Eq. (16.14),

$$\mathcal{D}_x = \epsilon_1\mathcal{E}_x, \qquad \mathcal{D}_y = \epsilon_2\mathcal{E}_y, \qquad \mathcal{D}_z = \epsilon_3\mathcal{E}_z.$$

We may also speak of three principal indexes of refraction n_1, n_2, and n_3, each one associated with the corresponding permittivity, as indicated by Eq. (19.57).

Both experiment and theory (based on Maxwell's equations and the preceding discussion) show that

> *in an anisotropic medium, for each direction of propagation of a plane electromagnetic wave there correspond two possible states of polarization, mutually perpendicular, each of which propagates with a different velocity.*

Thus no matter what the initial state of polarization, when an electromagnetic wave penetrates an anisotropic substance, it splits into two waves, polarized at right angles to each other and propagating with different phase velocities. This

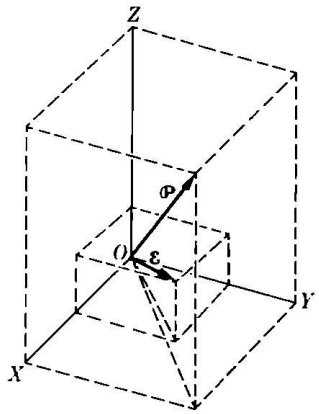


Fig. 20–21. Orientazioni di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{E}$ in una sostanza anisotropa.

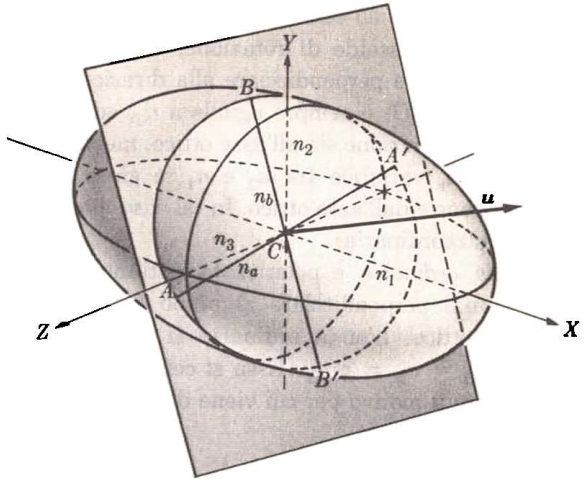


Fig. 20–22. L'ellissoide di Fresnel. L'ellisse $ABA'B'$ è l'intersezione dell'ellissoide con un piano passante per C, perpendicolare a $\boldsymbol{u}$.

Fig. 20–21. Orientation of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{E}$ in an anisotropic substance.

Fig. 20–22. The Fresnel ellipsoid. Ellipse $ABA'B'$ is the intersection with the ellipsoid of a plane perpendicular to $\boldsymbol{u}$, passing through C.

situazione dà origine al fenomeno della doppia rifrazione, che verrà discussa nel Paragrafo 20.10.

Vediamo ora come si possono determinare la velocità di fase e lo stato di polarizzazione di un'onda, qualora sia assegnata la sua direzione di propagazione. Si può far ciò mediante un metodo geometrico suggerito dal fisico francese Augustin Fresnel (1788–1827) molto tempo prima che esistesse la teoria delle onde elettromagnetiche. Costruiamo un'ellissoide di assi n_1, n_2, e n_3, detto l'*ellissoide di Fresnel* (Fig. 20–22). Data quindi la direzione di propagazione dell'onda, individuata dal versore $\boldsymbol{u}$, tracciamo un piano per il centro C dell'elloissoide perpendicolare a $\boldsymbol{u}$. L'intersezione del piano con l'elloissoide è un'ellisse. Le direzioni dei due assi AA' e BB' di tale ellisse individuano i piani di polarizzazione dell'onda per tale direzione di propagazione. Le lunghezze CA e CB dei due semiassi dell'ellisse danno gli indici di rifrazione n_a e n_b, e perciò la corrispondente velocità di fase, per ciascuna polarizzazione.

I mezzi isotropi sono caratterizzati dal fatto che tutti e tre gli indici di rifrazione principali sono uguali ($n_1 = n_2 = n_3$). L'ellissoide di Fresnel è una sfera e l'indice di rifrazione è lo stesso in tutte le direzioni. Quindi non esiste alcuna direzione di polarizzazione particolare, dato che tutte le intersezioni sono cerchi. Si comportano in questo modo i *cristalli cubici* ed anche la maggior parte dei mezzi non cristallini.

Un altro caso particolare è quello in cui due degli indici di rifrazione principali sono uguali, diciamo $n_2 = n_3$. La direzione corrispondente all'indice diverso n_1 viene detto *asse ottico*; esso è un asse di simmetria del cristallo. Per tale ragione, tali sostanze sono dette *cristalli monoassici*. A tale classe appartengono i sistemi cristallini *trigonale, esagonale, e tetragonale*. Se $n_2 < n_1$, il cristallo viene detto *positivo*; se $n_2 > n_1$, *negativo*. L'ellissoide di Fresnel di un cristallo monoassico è un ellissoide di

situation gives rise to the phenomenon of double refraction, which will be discussed in Section 20.10.

Next let us discuss how we can determine the phase velocity and state of polarization of a wave, provided that its direction of propagation is given. We can do this by using a geometrical method suggested by the French physicist Augustin Fresnel (1788–1827) long before the theory of electromagnetic waves came into existence. We construct an ellipsoid of axes n_1, n_2, and n_3, called the *Fresnel ellipsoid* (Fig. 20–22). Then, given the direction of propagation of the wave, determined by the unit vector $\boldsymbol{u}$, we draw a plane through the center C of the ellipsoid and perpendicular to $\boldsymbol{u}$. The intersection of the plane and the ellipsoid is an ellipse. The directions of the two axes AA' and BB' of this ellipse determine the planes of polarization of the wave for that direction of propagation. The lengths CA and CB of the two axes of the ellipse give the indexes of refraction n_a and n_b for each polarization, and therefore the corresponding phase velocity.

Isotropic media are characterized by the fact that all three principal indexes of refraction are equal ($n_1 = n_2 = n_3$). Fresnel's ellipsoid is a sphere and the index of refraction is the same in all directions. Hence no special polarization direction exists, since all intersections are circles. *Cubic crystals*, as well as most noncrystalline media, behave this way.

Another special case is that in which two principal indexes of refraction are the same, say $n_2 = n_3$. The direction corresponding to the unequal index n_1 is called the *optical axis;* it is an axis of symmetry of the crystal. For that reason these substances are called *uniaxial crystals*. To this class belong the *trigonal, hexagonal,* and *tetragonal* crystal systems. When $n_2 < n_1$, the crystal is called *positive;* when $n_2 > n_1$, it is *negative*. The Fresnel ellipsoid of a uniaxial crystal is an ellipsoid of

rotazione intorno all'asse ottico (Fig. 20—23). Dalla conoscenza delle proprietà geometriche dell'ellissoide di rotazione, ricaviamo che la sua intersezione con un piano per il centro C e perpendicolare alla direzione di propagazione $\boldsymbol{u}$ è un'ellisse, uno dei cui semiassi (CO) è sempre uguale a n_2, ed è diretto perpendicolarmente sia alla direzione di propagazione sia all'asse ottico, mentre l'altro semiasse (CE) dell'ellisse ha una lunghezza n_e variabile fra n_2 e n_1, e giace nel piano individuato dalla direzione di propagazione e dall'asse ottico. In tal caso, possiamo definire due onde: quella ordinaria e quella straordinaria.

L'*onda ordinaria* è polarizzata rettilineamente nel piano individuato da CO e $\boldsymbol{u}$, ed è quindi perpendicolare al piano determinato dalla direzione di propagazione e dall'asse ottico. L'onda ordinaria si propaga in tutte le direzioni con la medesima velocità $v_0 = v_2 = c/n_2$. Essa si comporta perciò come un'onda in un mezzo isotropo, ed è questo il motivo per cui viene detta ordinaria.

Optical axis = Asse ottico

Fig. 20—23. Direzioni di polarizzazione dei raggi ordinario e straordinario in un cristallo monoassico per una direzione di propagazione arbitraria.

L'*onda straordinaria* è polarizzata rettilineamente nel piano individuato da CE e $\boldsymbol{u}$ oppure (ciò che è lo stesso) dalla direzione di propagazione e dall'asse ottico; ma la sua velocità v_e dipende dalla direzione di propagazione, e varia fra v_2 e v_1 (corrispondentemente alla variazione dell'indice di rifrazione fra n_2 e n_1).

Quando le onde si propagano lungo l'asse ottico, l'ellisse di intersezione diventa un cerchio di raggio n_2, e le due onde si propagano con la medesima velocità v_2. Questa può essere considerata come una nuova definizione dell'asse ottico (Fig. 20—24a): L'asse ottico è quella direzione lungo la quale si ha una sola velocità di propagazione. Quando le onde si propagano in direzione perpendicolare all'asse ottico, l'ellisse di intersezione ha semiassi n_1 e n_2, e l'onda straordinaria ha velocità v_1 (Fig. 20—24b).

Un'altra utile costruzione geometrica si ottiene riportando in un diagramma, per ciascuna direzione di propagazione, dei vettori di lunghezze uguali a v_o e v_e, le velocità di fase

revolution around the optical axis (Fig. 20–23). From our knowledge of the geometrical properties of an ellipsoid of revolution, we know that its intersection with a plane through the center C and perpendicular to the direction of propagation $\boldsymbol{u}$ is an ellipse, one of whose axes (CO) is always equal to n_2 and is directed perpendicular both to the direction of propagation and the optical axis, while the other axis (CE) of the ellipse has a variable length n_e between n_2 and n_1, and is in the plane determined by the direction of propagation and the optical axis. In this case we may define two waves: the ordinary and the extraordinary.

The *ordinary wave* is linearly polarized in the plane determined by CO and $\boldsymbol{u}$, and is thus perpendicular to the plane determined by the direction of propagation and the optical axis. The ordinary wave propagates in all directions with the same velocity $v_o = v_2 = c/n_2$. It therefore behaves as a wave in an isotropic medium, and this is the reason why it is called ordinary.

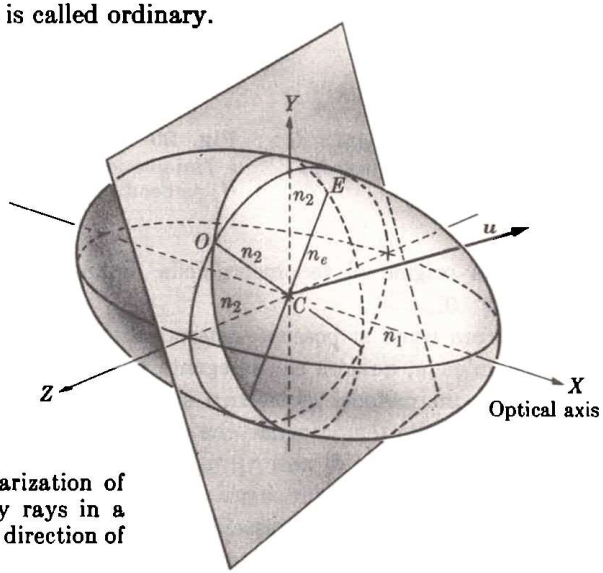


Fig. 20–23. Directions of polarization of the ordinary and extraordinary rays in a uniaxial crystal for an arbitrary direction of propagation.

The *extraordinary wave* is linearly polarized in the plane determined by CE and $\boldsymbol{u}$ or (which is the same thing) by the direction of propagation and the optical axis; but its velocity v_e depends on the direction of propagation, varying from v_2 to v_1 (corresponding to an index of refraction between n_2 and n_1).

When waves are propagating along the optical axis, the ellipse of intersection is a circle of radius n_2 and the two waves propagate with the same velocity v_2. This may be considered as another definition of the optical axis (Fig. 20–24a): The optical axis is that direction along which there is only one velocity of propagation. When waves are propagating perpendicular to the optical axis, the ellipse of intersection has semi-axes n_1 and n_2, and the extraordinary wave has the velocity v_1 (Fig. 20–24b).

Another useful geometrical construction is obtained by plotting, for each direction of propagation, vectors having lengths equal to v_o and v_e, the phase velocities

Optical axis = Asse ottico

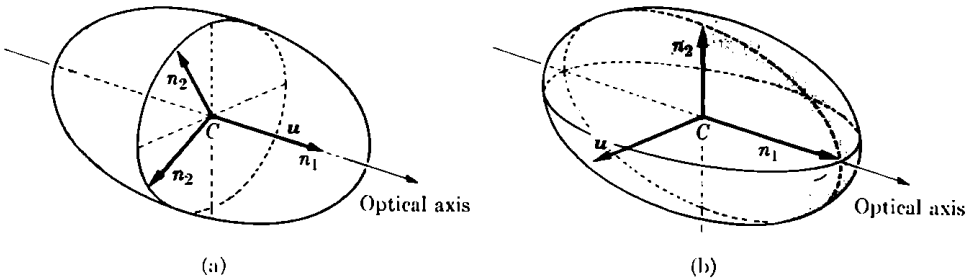


Fig. 20–24. Direzioni di polarizzazione dei raggi ordinario e straordinario in un cristallo monoassico nel caso di propagazione (a) parallela, (b) perpendicolare, all'asse ottico.

Fig. 20–24. Directions of polarization of the ordinary and extraordinary rays in a uniaxial crystal for propagation (a) parallel, (b) perpendicular, to the optical axis.

delle onde ordinaria e straordinaria rispettivamente, così da ottenere una doppia superficie (Fig. 20—25) detta *superficie delle velocità di Fresnel*. Una delle superficie è una sfera di raggio $v_o = v_2$; essa corrisponde alla velocità dell'onda ordinaria. L'altra superficie è un ellissoide di rotazione di semiassi v_1 e v_2; essa corrisponde all'onda straordinaria. Le due superficie sono tangenti fra di loro nel punto in cui intersecano l'asse ottico. In Fig. 20—25, è indicato lo stato di polarizzazione per varie direzioni di propagazione.

Nel caso generale di tre indici di rifrazione diversi, si può dimostrare che si hanno due direzioni per le quali le velocità di propagazione delle due onde polarizzate sono uguali. Tali direzioni, chiamate ancora assi ottici, sono perpendicolari a quei piani le cui intersezioni con l'ellissoide di Fresnel sono cerchi. Le sostanze nelle quali esse esistono sono dette *biassiche*, ed appartengono ai sistemi cristallini *ortorombico*, *monoclino*, e *triclino*. La superficie delle velocità di Fresnel per cristalli biassici è più complicata, e noi non entreremo nella discussione dei dettagli geometrici. La Tabella 20—2 elenca gli indici di rifazione per una scelta di materiali monoassici e biassici.

of the ordinary and extraordinary waves, respectively, resulting in a double surface (Fig. 20–25) called a *Fresnel velocity surface*. One surface is a sphere of radius $v_o = v_2$; it corresponds to the velocity of the ordinary wave. The other surface is an ellipsoid of revolution with axes v_1 and v_2; it corresponds to the extraordinary wave. The two surfaces are tangent at their intersection with the optical axis. The state of polarization for several directions of propagation is indicated in Fig. 20–25.

In the general case of three different indexes of refraction, it can be proved that there are two directions for which the velocities of propagation of the two polarized waves are equal. These directions, also called optical axes, are perpendicular to the planes whose intersections with the Fresnel ellipsoid are circles. Substances in which they exist are called *biaxial*, and they belong to the *orthorhombic*, *monoclinic*, and *triclinic* crystal systems. The Fresnel velocity surface for biaxial crystals is more complicated, and we shall not enter into a discussion of the geometrical details. Table 20–2 lists the indexes of refraction for selected uniaxial and biaxial materials.

Sphere = Sfera
Ellipsoid = Ellissoide
Optical axis = Asse ottico

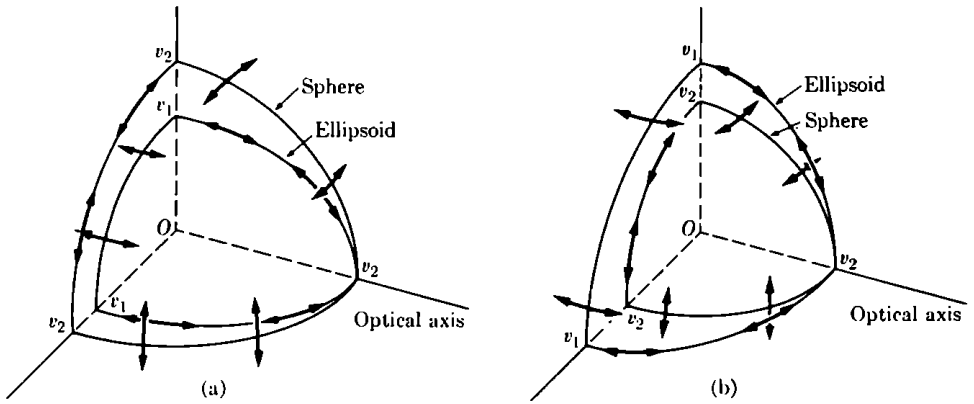


Fig. 20–25. Superficie delle velocità di Fresnel per cristalli monoassici. (a) Cristallo positivo, nel quale $n_2 < n_1$ (oppure $v_2 > v_1$). (b) Cristallo negativo, nel quale $n_2 > n_1$ (oppure $v_2 < v_1$).

Fig. 20–25. Fresnel velocity surface for uniaxial crystals. (a) A positive crystal in which $n_2 < n_1$ (or $v_2 > v_1$). (b) A negative crystal in which $n_2 > n_1$ (or $v_2 < v_1$).

TABELLA 20–2 Indici principali di rifrazione di diversi cristalli*

Sostanza	n_1	n_2	n_3
Monoassici			
Apatite	1.6417	1.6461	
Calcite	1.4864	1.6583	
Quarzo	1.5533	1.5442	
Zircone	1.9682	1.9239	
Biassici			
Aragonite	1.5301	1.6816	1.6859
Gesso	1.5206	1.5227	1.5297
Mica	1.5692	1.6049	1.6117
Topazio	1.6155	1.6181	1.6250

*Per la riga del sodio, $\lambda = 5.893 \times 10^{-7}$ m.

Molte sostanze che sono normalmente isotrope divengono anisotrope e birifrangenti se sono sottoposte a tensioni meccaniche o a forti campi elettrici o magnetici perpendicolari alla direzione di propagazione. Esempi di questo sono l'effetto elettro-ottico di Kerr e l'effetto magneto-ottico di Cotton-Mouton. In tutti questi casi, l'anisotropia della sostanza è dovuta alla parziale orientazione delle molecole risultante dalle tensioni o dai campi.

ESEMPIO 20.4. Un'onda polarizzata rettilineamente incide su di una sottile lamina di materiale monoassico, come ad esempio quarzo, tagliata con le facce parallele all'asse ottico. Trovare la differenza di fase fra le onde ordinaria e straordinaria e lo stato di polarizzazione dell'onda emergente.

Soluzione: La Fig. 20–26 mostra la disposizione sperimentale. La lamina di cristallo è stata posta con l'asse ottico (indice di rifrazione n_1) orizzontale. La direzione dell'asse ottico

Optical axis = Asse ottico

TABLE 20–2 Principal Indexes of Refraction of Several Crystals*

Substance	n_1	n_2	n_3
Uniaxial:			
Apatite	1.6417	1.6461	
Calcite	1.4864	1.6583	
Quartz	1.5533	1.5442	
Zircon	1.9682	1.9239	
Biaxial:			
Aragonite	1.5301	1.6816	1.6859
Gypsum	1.5206	1.5227	1.5297
Mica	1.5692	1.6049	1.6117
Topaz	1.6155	1.6181	1.6250

* For sodium light, $\lambda = 5.893 \times 10^{-7}$ m.

Many substances which normally are isotropic become anisotropic and birefringent when subject to mechanical stresses or to strong static electric or magnetic fields perpendicular to the direction of propagation. Examples of this are the Kerr electro-optic effect and the Cotton-Mouton magneto-optic effect. In all cases the anisotropy of the substance is due to the partial orientation of the molecules that results from the stresses or the fields.

EXAMPLE 20.4. A linearly polarized wave falls on a thin plate of a uniaxial material, such as quartz, cut with the faces parallel to the optical axis. Find the phase difference between the ordinary and extraordinary waves and the state of polarization of the emergent wave.

Solution: Figure 20–26 shows the experimental arrangement. The crystal plate has been placed with its optical axis (index n_1) horizontal. The direction of the optical axis

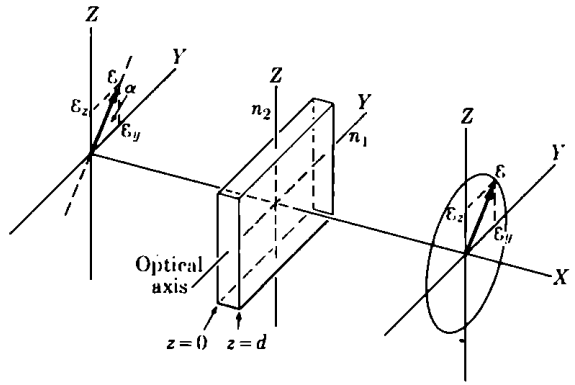


Fig. 20–26. Cambiamento dello stato di polarizzazione di una onda elettromagnetica in seguito all'attraversamento di una lastra piana tagliata da un cristallo monoassico.

Fig. 20–26. Change of polarization of an electromagnetic wave after traversing a parallel plate cut from a uniaxial crystal.

è stata indicata con Y. La direzione perpendicolare Z corrisponde alla direzione di polarizzazione del raggio ordinario (indice di rifrazione n_2). Si supponga che un'onda polarizzata rettilineamente e formante un angolo α con l'asse Y incida sulla lamina. Possiamo dunque scrivere per il campo elettrico nell'onda incidente $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - kx)$. Si osservi che abbiamo invertito l'ordine dei termini nella funzione seno; questa forma che è l'alternativa fornita dall'Eq. (18.10) risulta più conveniente per i nostri calcoli attuali. Le componenti del campo elettrico nell'onda incidente lungo gli assi Y e Z sono

dove

e

Quando l'onda polarizzata rettilineamente si propaga attraverso il cristallo, essa viene suddivisa in due onde con il loro campo elettrico lungo l'asse Y e l'asse Z rispettivamente. Tali onde componenti corrispondono alle onde straordinaria e ordinaria. Dato che la loro velocità di propagazione è rispettivamente $v_1 = c/n_1$ e $v_2 = c/n_2$, i corrispondenti vettori d'onda sono

dove $k = \omega/c$. Perciò, dopo che le onde hanno attraversato lo spessore d, i relativi campi elettrici sono rappresentati dalle espressioni

che indicano una differenza di fase tra le due onde di

Dopo aver attraversata la lamina anisotropa, le due onde si ricompongono in un'onda unica. Secondo la nostra discussione di Paragrafo 12.9, ne concludiamo che, a causa della differenza di fase, l'onda trasmessa sarà in generale polarizzata ellitticamente. Gli assi dell'ellisse saranno paralleli agli assi Y e Z se δ è un multiplo dispari di $\pi/2$, ossia se

$$\text{odd integer} = \text{numero intero dispari}$$

L'onda trasmessa sarà polarizzata rettilineamente se δ è un multiplo di π, o se

$$\text{integer} = \text{numero intero}$$

In tal caso, se il numero intero è pari, l'onda trasmessa è polarizzata rettilineamente nello stesso piano dell'onda incidente, ma se il numero intero è dispari essa è polarizzata in un piano simmetrico rispetto al piano XZ. Ovviamente, se l'angolo α è di 45°, questi due piani saranno perpendicolari l'uno all'altro.

Le lamine corrispondenti alle due condizioni dette sopra si chiamano *lamina quarto d'onda* e *lamina mezz'onda*. Questi tipi di lamine sono ampiamente usati nell'analisi della luce polarizzata.

La situazione si ripete anche in direzione opposta; se una luce polarizzata ellitticamente attraversa una lamina quarto d'onda, essa diventa polarizzata in un piano.

has been designated by Y. The perpendicular Z-direction corresponds to the polarization of the ordinary ray (index n_2). Suppose that a linearly polarized wave making an angle α with the Y-axis falls on the plate. Then we may write $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - kx)$ for the electric field in the incident wave. Note that we have reversed the order of the terms in the sine function; this is more convenient for our present calculation, and is the alternative form given by Eq. (18.10). The components of the electric field in the incident wave along the Y- and Z-axes are

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y} \sin(\omega t - kx), \qquad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{0z} \sin(\omega t - kx),$$

where

$$\mathcal{E}_{0y} = \mathcal{E}_0 \cos\alpha \qquad \text{and} \qquad \mathcal{E}_{0z} = \mathcal{E}_0 \sin\alpha.$$

When the linearly polarized wave propagates through the crystal, it is separated into two waves with their electric field along the Y- and Z-axes, respectively. These component waves correspond to the extraordinary and ordinary waves. Since the velocity of propagation of each wave is $v_1 = c/n_1$ and $v_2 = c/n_2$, the corresponding propagation vectors are

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{\omega n_1}{c} = kn_1, \qquad k_2 = kn_2,$$

where $k = \omega/c$. Therefore, after the waves have traversed the thickness d, the respective electric fields are represented by the expressions

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{0y} \sin(\omega t - k_1 d), \qquad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_{0z} \sin(\omega t - k_2 d),$$

resulting in a phase difference between the two waves of

$$\delta = (k_1 - k_2)d = k(n_1 - n_2)d = 2\pi(n_1 - n_2)d/\lambda.$$

After traversing the anisotropic plate the two waves recombine into a single one. According to our discussion in Section 12.9, we conclude that, because of the phase difference, the transmitted wave will in general be elliptically polarized. The axes of the ellipse will be parallel to the Y- and Z-axes if δ is an odd multiple of $\pi/2$, or if

$$(n_1 - n_2)d = \text{odd integer} \times \lambda/4.$$

The transmitted wave will be linearly polarized if δ is a multiple of π, or if

$$(n_1 - n_2)d = \text{integer} \times \lambda/2.$$

In this case, if the integer is even, the transmitted wave is linearly polarized in the same plane as the incident wave, but if the integer is odd, it is polarized in a plane symmetric with the XZ-plane. Obviously, if the angle α is 45°, these two planes will be perpendicular to each other.

The plates corresponding to the two conditions given above are called a *quarter-wave plate* and a *half-wave plate*. These types of plates are widely used in the analysis of polarized light.

The situation also works in the opposite direction; if elliptically polarized light passes through a quarter-wave plate, it becomes plane polarized.

20.9 *Dicroismo*

Alcune sostanze anisotrope assorbono le onde ordinaria e straordinaria in proporzioni molto differenti. In tali condizioni l'onda elettromagnetica che si propaga attraverso un pezzo sufficientemente spesso della sostanza diviene gradualmente polarizzata in un piano, dato che o l'onda ordinaria o quella straordinaria viene quasi completamente assorbita. Tale situazione è detta *dicroismo*, ed è illustrata in Fig. 20—27, dove $\mathcal{E}_0$ rappresenta l'ampiezza del campo elettrico nell'onda incidente. L'onda incidente, allorchè penetra nella sostanza, viene suddivisa in un'onda ordinaria e una straordinaria, polarizzate parallelamente agli assi Y e Z. Le loro ampiezze sono $\mathcal{E}_{0y}$ e $\mathcal{E}_{0z}$. Se $\mathcal{E}_{0z}$ è assorbita più di $\mathcal{E}_{0y}$, allora, dopo che le onde hanno percorso una certa lunghezza, abbiamo soltanto $\mathcal{E}_{0y}$, che dà origine a luce polarizzata rettilineamente.

Dato che il dicroismo è l'effetto di una differenza nei coefficienti di assorbimento, esso risulta dipendere dalla frequenza dell'onda elettromagnetica, e una sostanza può presentare il fenomeno più intensamente a certe frequenze che ad altre. Ci sono due sostanze dicroiche particolarmente importanti nella regione visibile. Una è la *tormalina* (borosilicato di alluminio), che assorbe preferenzialmente il raggio ordinario. L'altra è la *herapatite* (solfato di iodochinino), che ha l'inconveniente di avere i suoi cristalli molto fragili e quindi difficili da conservare in dimensioni utili. Tuttavia, la Polaroid Corporation produce tale sostanza in una forma detta *polaroide*, che consiste in molti piccoli cristalli orientati parallelamente l'uno all'altro e inseriti fra due sottili fogli di vetro o celluloide. La stessa industria costruisce altri materiali dicroici, usando sostanze composte di molecole molto lunghe orientate parallelamente, come l'alcool polivinilico. Tale disposizione dà origine a un materiale che ha proprietà molto differenti nelle direzioni longitudinale e trasversale. Il dicroismo fornisce uno dei mezzi più semplici e più economici per produrre e analizzare luce polarizzata.

Linearly polarized transmitted light = Luce trasmessa polarizzata rettilineamente
Incident unipolarized light = Luce incidente non polarizzata
Horizontal component completely absorbed = Componente orizzontale completamente assorbita
Vertical component partially absorbed = Componente verticale parzialmente assorbita

Fig. 20—27. Dicroismo.

20.9 *Dichroism*

Some anisotropic substances absorb the ordinary and extraordinary waves in very different proportions. Under such conditions an electromagnetic wave propagating through a sufficiently thick piece of the substance becomes gradually polarized in one plane, since either the ordinary or the extraordinary wave is almost completely absorbed. The situation is called *dichroism*, and is illustrated in Fig. 20–27, in which $\mathcal{E}_0$ is the amplitude of the electric field in the incident wave. The incident wave, as it penetrates the substance, is separated into ordinary and extraordinary waves, polarized parallel to the Y- and Z-axes. Their amplitudes are $\mathcal{E}_{0y}$ and $\mathcal{E}_{0z}$. If $\mathcal{E}_{0z}$ is absorbed more than $\mathcal{E}_{0y}$ then, after the waves have traversed a certain length, we have only $\mathcal{E}_{0y}$, which results in linearly polarized light.

Since dichroism is the result of a difference in absorption coefficients, it is dependent on the frequency of the electromagnetic wave, and a substance may exhibit the phenomenon at certain frequencies to a greater degree than at others. In the visible region there are two especially important dichroic substances. One is *tourmaline* (aluminum borosilicate), which preferentially absorbs the ordinary ray. The other is *herapathite* (sulfate of iodoquinine), which has the inconvenience that its crystals are very brittle and therefore difficult to preserve in appropriate sizes. However, the Polaroid Corporation manufactures this substance in a form called *polaroid*, consisting of many small crystals oriented parallel to one another and sandwiched between two sheets of glass or celluloid. The same company manufactures other dichroic materials, using substances composed of very long molecules which are parallel-oriented, such as polyvinyl alcohol. This combination yields a material which has properties that are very different in the longitudinal and in the transverse directions. Dichroism provides one of the simplest and cheapest ways of producing and analyzing polarized light.

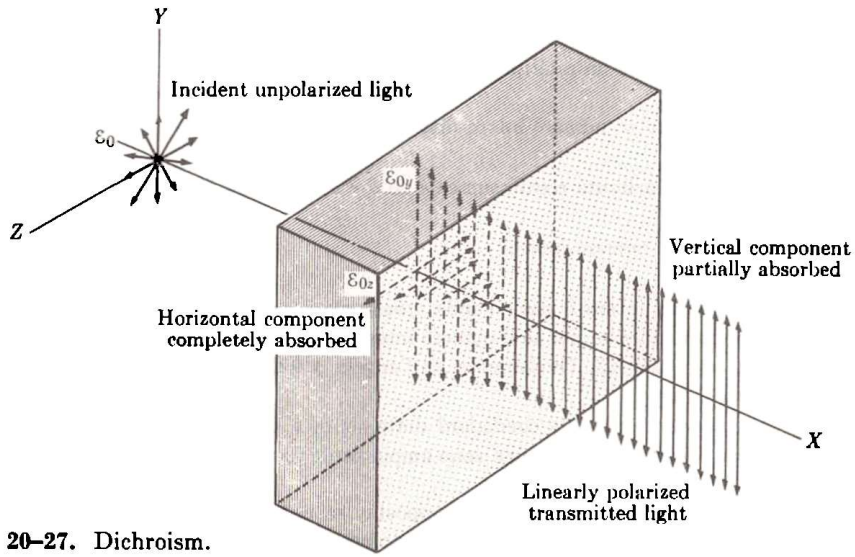


Fig. 20–27. Dichroism.

20.10 Doppia Rifrazione

In questo paragrafo discuteremo come si comporta un'onda elettromagnetica quando viene trasmessa o rifratta in un mezzo anisotropo, limitandoci a sostanze monoassiche. Non discuteremo l'onda riflessa, dato che non implica alcun fattore sostanzialmente differente da quelli discussi in precedenza in questo stesso capitolo. Cominciamo analizzando il caso semplice di un'onda piana che incide normalmente su una superficie piana tagliata perpendicolarmente all'asse ottico, il quale giace nel piano della figura. Considerazioni di simmetria richiedono che entrambe le superficie d'onda rifratte, quella ordinaria e quella straordinaria, siano piane, ed anche che esse rimangano parallele alla superficie del mezzo anisotropo quando si propagano in esso. Per determinare le direzioni dei raggi ordinario e straordinario, disegnamo nei punti di incidenza (Fig. 20—28) la superficie delle velocità di Fresnel, precedentemente indicato in Fig. 20—25. Le tangenti comuni dei due lembi della superficie delle velocità di Fresnel, dànno i fronti d'onda ordinario e straordinario. I punti di tangenza determinano le direzioni dei raggi ordinario e straordinario. Perciò l'onda ordinaria si propagherà nella direzione di incidenza e sarà polarizzata rettilineamente, perpendicolarmente al piano del disegno (come indicano i punti in Fig. 20—28). L'onda straordinaria, invece, pur rimanendo parallela alla superficie del mezzo, subirà uno spostamento laterale, cosicchè il flusso di energia è trasmesso lungo il raggio straordinario ad un angolo β rispetto alla direzione di propagazione. L'onda straordinaria sarà polarizzata nel piano del disegno (come è indicato dalle piccole frecce nella Fig. 20—28).

Il fatto che due raggi rifratti corrispondano a un unico raggio incidente, viene detto *doppia rifrazione*, ed è per tale ragione che le sostanze anisotrope si chiamano *birifrangenti*. Se la sostanza è delimitata da due superficie parallele (Fig. 20—29), i raggi ordinario

Incident waves = Onde incidenti
Incident rays = Raggi incidenti
Interface = Superficie di separazione fra i due mezzi
Optical axis = Asse ottico
Extraordinary waves and rays = Onde e raggi straordinari
Ordinary waves and rays = Onde e raggi ordinari

Fig. 20—28. Raggi rifratti attraverso la superficie di un cristallo monoassico, ordinari e straordinari, nel caso di incidenza normale. Le polarizzazioni rettilinee dei raggi ordinari e straordinari sono perpendicolari fra loro.

20.10 Double Refraction

In this section we shall discuss how an electromagnetic wave behaves when it is transmitted or refracted into an anisotropic medium, and we shall limit ourselves to uniaxial substances. We shall not discuss the reflected wave, since it does not involve any factor essentially different from those discussed earlier in this chapter. We begin by discussing the simple case of normal incidence of a plane wave on a plane intersurface perpendicular to the optical axis, which is coincident with the page of the book. Symmetry considerations require that both refracted surfaces, the ordinary and extraordinary, be plane, and also that they remain parallel to the interface while they propagate into the anisotropic medium. To determine the directions of the ordinary and extraordinary rays, at the points of incidence (Fig. 20–28) we draw the Fresnel velocity surface, previously indicated in Fig. 20-25. The common tangents of the two sheets of the Fresnel velocity surface give the ordinary and extraordinary wave fronts. The points of tangency determine the directions of the ordinary and extraordinary rays. Therefore the ordinary wave will propagate in the direction of incidence and will be linearly polarized perpendicular to the plane of the paper (as indicated by the dots in Fig. 20–28). However, the extraordinary wave, although remaining parallel to the interface, will suffer a sidewise displacement, so that the energy flow is along the extraordinary ray, at an angle β with respect to the direction of propagation. The extraordinary wave will be polarized in the plane of the paper (as indicated by the bars in Fig. 20–28).

When two refracted rays correspond to a single incident ray, this is called *double refraction*, and for that reason anisotropic substances are called *birefringent*. When the substance is bounded by two parallel surfaces (Fig. 20–29), the ordinary and

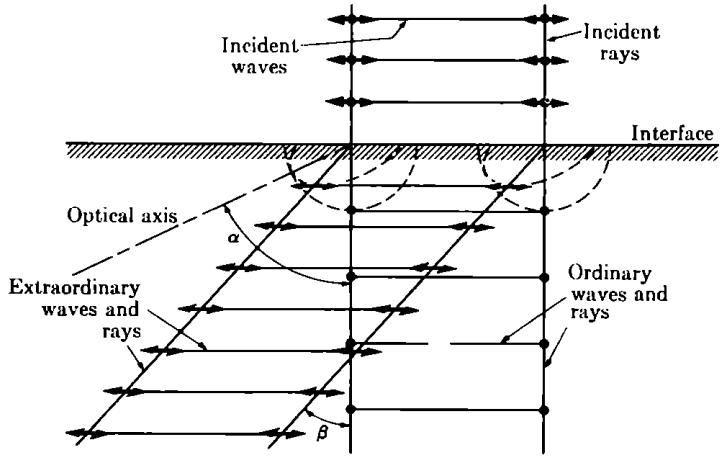


Fig. 20–28. Ordinary and extraordinary refracted rays for normal incidence on the face of a uniaxial crystal. The linear polarizations of the ordinary and extraordinary rays are perpendicular to each other.

Incident rays = Raggi incidenti
Crystal = Cristallo
Extraordinary rays = Raggi straordinari
Screen = Schermo
Ordinary rays = Raggi ordinari

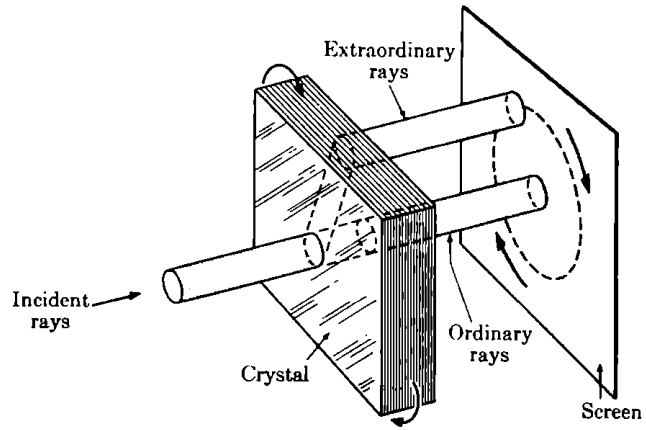


Fig. 20–29. Un sottile fascio di luce non polarizzata può venire suddiviso in due fasci mediante un cristallo birifrangente. Se il cristallo viene fatto ruotare, il fascio straordinario ruota intorno a quello ordinario. I due fasci sono polarizzati rettilineamente ad angolo retto l'uno rispetto all'altro.

Fig. 20–29. A narrow beam of unpolarized light can be split into two beams by a doubly refracting crystal. If the crystal is rotated, the extraordinary beam rotates around the ordinary ray. The two beams are linearly polarized at right angles with respect to each other.

e straordinario emergono paralleli ma separati, dando luogo a una doppia immagine, come viene mostrato nella fotografia di Fig. 20–30 di un cristallo di calcite.

Se l'incidenza è obliqua, la situazione è un po' più complicata geometricamente, ma il risultato fisico è sostanzialmente lo stesso. Per ogni onda incidente, ci sono due distinte onde rifratte che si propagano in direzioni diverse e polarizzate ad angolo retto una rispetto all'altra.

La doppia rifrazione è uno strumento di ricerca importantissimo per lo studio della struttura dei cristalli, e ha anche molte altre applicazioni interessanti. Un'applicazione pratica consiste nel produrre un fascio di luce polarizzata in un piano per mezzo di un *prisma di Nicol*. Per fare un prisma di Nicol, si taglia un cristallo di calcite la cui lunghezza è quattro volte la sua larghezza alle facce estreme, come mostrano le linee tratteggiate ab' e cd' nella Fig. 20–31a. Il cristallo viene poi tagliato diagonalmente lungo la linea $b'd'$ e le due metà sono incollate insieme con balsamo del Canadà. L'indice di rifrazione del balsamo è differente da quelli del cristallo di calcite sia per il raggio ordinario sia per il raggio straordinario. Per questo, ed anche grazie alla geometria del cristallo, i raggi ordinari subiscono una riflessione totale sulla superficie di separazione e vengono deviati fuori dal prisma, mentre i raggi straordinari proseguono nella seconda metà del cristallo e ne escono all'estremità opposta. Perciò la luce trasmessa è polarizzata rettilineamente. I prismi di Nicol sono di grande importanza in molti strumenti ottici, come ad esempio i polarimetri.

ESEMPIO 20.5. Un raggio di luce incide su di un cristallo di calcite tagliato in modo tale che la sua superficie è parallela all'asse ottico. Assumendo che il piano di incidenza sia perpendicolare all'asse ottico e che l'angolo di incidenza sia di 50°, trovare la separazione angolare fra il raggio ordinario e il raggio straordinario.

Soluzione: In base alle Fig. 20–24 e 20–25, quando la direzione di propagazione dell'onda è perpendicolare all'asse ottico, i raggi ordinari si propagano con velocità

the extraordinary rays emerge parallel but separated, resulting in a double image, as shown in the photograph of a calcite crystal in Fig. 20–30.

When the incidence is oblique, the situation is somewhat more complicated geometrically, but the physical result is basically the same. For each incident wave, there are two different refracted waves propagating in different directions and polarized at right angles to each other.

Double refraction is a very important research tool in the study of crystal structure, and has many other interesting applications. One practical application consists in producing a beam of plane polarized light by means of a *Nicol prism*. To make a Nicol prism, a calcite crystal whose length is four times its width is cut at the end faces, as shown by the dashed lines ab' and cd' in Fig. 20–31a. The crystal is then cut diagonally along line $b'd'$ and the two halves are glued together with Canada balsam. The index of refraction of the balsam is different from that of the calcite crystal for the ordinary and the extraordinary rays. Because of this, and also because of the geometry of the crystal, the ordinary rays suffer total reflection at the surface of separation and are deviated out of the prism, while the extraordinary rays proceed into the other half of the crystal and emerge at the far end. Therefore the transmitted light is linearly polarized. Nicol prisms are of great importance in many optical instruments, such as polarimeters.

EXAMPLE 20.5. A ray of light falls on a calcite crystal cut so that its surface is parallel to the optical axis. Assuming that the plane of incidence is perpendicular to the optical axis and that the angle of incidence is 50°, find the angular separation between the ordinary and the extraordinary rays.

Solution: According to Figs. 20–24 and 20–25, when the propagation of the wave is in a direction perpendicular to the optical axis, the ordinary rays propagate with velocity

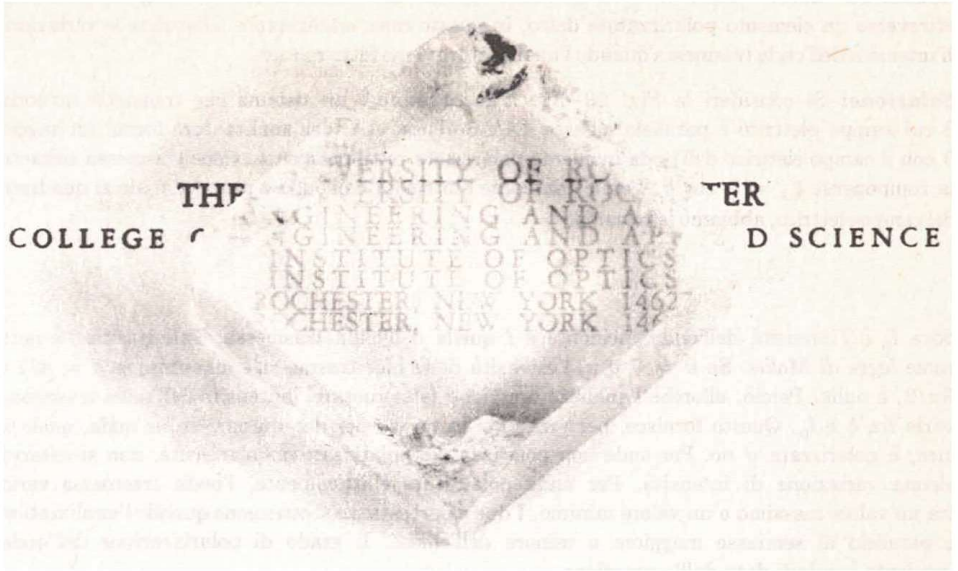


Fig. 20–30. Fotografia della doppia immagine prodotta da un cristallo di calcite. (La fotografia è dovuta alla cortesia di W. L. Hyde, Direttore dell'Istituto di Ottica, Università di Rochester.)

Fig. 20–30. Photograph of the double image produced by a calcite crystal. (Photograph courtesy of W. L. Hyde, Director, Institute of Optics, University of Rochester.)

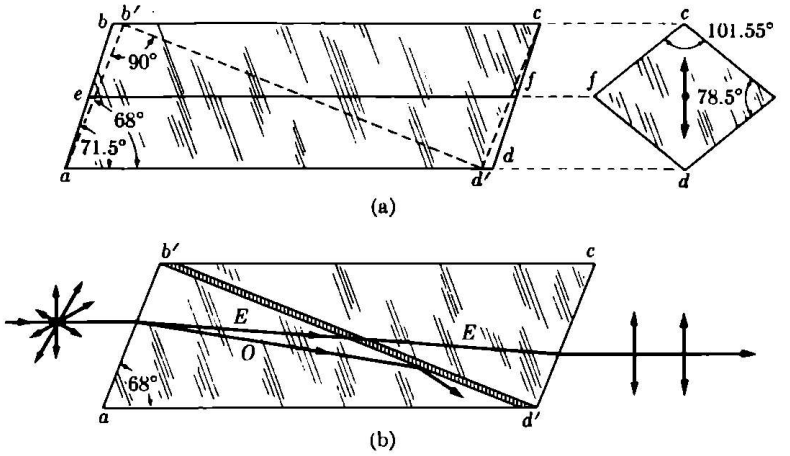


Fig. 20–31. (a) Cristallo di calcite naturale, detto spato di Islanda. (b) Prisma di Nicol.

Fig. 20–31. (a) Natural calcite crystal, called Iceland spar. (b) A Nicol prism.

v_2 corrispondente all'indice di rifrazione n_2, mentre le onde straordinarie si propagano con velocità v_1 corrispondente all'indice di rifrazione n_1. Perciò, usando la legge di Snell e gli indici di rifrazione principali forniti dalla Tabella 20–2, abbiamo $\sin \theta_i / \sin \theta_o = n_2 = 1.6583$ e $\sin \theta_i / \sin \theta_e = n_1 = 1.4864$. Dato $\theta_i = 50°$, otteniamo $\theta_o = 27° 30'$ e $\theta_e = 31° 5'$. La separazione angolare dei due raggi è dunque $\theta_e - \theta_o = 3° 35'$.

v_2 corresponding to the refractive index n_2, and the extraordinary waves propagate with velocity v_1 corresponding to the refractive index n_1. Therefore, using Snell's law and the principal indexes of refraction as given in Table 20–2, we have $\sin \theta_i / \sin \theta_o = n_2 = 1.6583$ and $\sin \theta_i / \sin \theta_e = n_1 = 1.4864$. Given that $\theta_i = 50°$, we obtain $\theta_o = 27° 30'$ and $\theta_e = 31° 5'$. The angular separation of the two rays is thus $\theta_e - \theta_o = 3° 35'$.

ESEMPIO 20.6. Onde elettromagnetiche polarizzate rettilineamente vengono osservate attraverso un elemento polarizzatore detto, in questo caso, *analizzatore*. Discutere le variazioni di intensità dell'onda trasmessa quando l'analizzatore viene fatto ruotare.

Soluzione: Si consideri la Fig. 20–32. L'analizzatore è un sistema che trasmette un'onda il cui campo elettrico è parallelo all'asse AA'. Se l'asse AA' dell'analizzatore forma un angolo θ con il campo elettrico dell'onda incidente polarizzata rettilineamente, viene trasmessa soltanto la componente $\mathcal{E}_A = \mathcal{E} \cos \theta$. Perciò, dato che l'intensità dell'onda è proporzionale al quadrato del campo elettrico, abbiamo la relazione

dove I_0 è l'intensità dell'onda incidente e I quella dell'onda trasmessa. Tale risultato è noto come *legge di Malus*. Se $\theta = 0$ o π, l'intensità della luce trasmessa è massima; se $\theta = \pi/2$ o $3\pi/2$, è nulla. Perciò, allorchè l'analizzatore viene fatto ruotare, l'intensità dell'onda trasmessa varia fra 0 e I_0. Questo fornisce, per esempio, un mezzo per determinare se un'onda, quale la luce, è polarizzata o no. Per onde non polarizzate o polarizzate circolarmente, non si osserva alcuna variazione di intensità. Per onde polarizzate ellitticamente, l'onda trasmessa varia tra un valore massimo e un valore minimo. I due valori estremi si ottengono quando l'analizzatore è parallelo al semiasse maggiore o minore dell'ellisse. Il grado di polarizzazione dell'onda incidente è quindi dato dall'espressione

Si osservi che $P = 1$ per onde polarizzate rettilineamente e $P = 0$ per onde non polarizzate.

ESEMPIO 20.7. Discussione della *polarizzazione cromatica*. Quando della luce bianca polarizzata rettilineamente incide su una lamina analoga a quella considerata nell'Esempio 20.4, e viene poi analizzata per mezzo di un altro sistema polarizzatore, la luce che si osserva è colorata, e il colore dipende dall'orientazione dell'analizzatore. Il problema è di osservare luce di differenti lunghezze d'onda, e determinare il colore per ciascuna orientazione dell'analizzatore.

Analyzer = Analizzatore

Plane polarized light = Luce polarizzata rettilineamente
Optical axis = Asse ottico
Plate = Lastra
Analyzer = Analizzatore

Fig. 20–32. Variazione dell'intensità della luce polarizzata rettilineamente al variare dell'orientazione dell'analizzatore.

Fig. 20–33. Una lastra di cristallo è posta fra una sorgente di luce polarizzata rettilineamente e un analizzatore. Il fenomeno che ne risulta è detto *polarizzazione cromatica*.

EXAMPLE 20.6. Linearly polarized electromagnetic waves are observed through a polarizing device called, in this case, an *analyzer*. Discuss the fluctuation in the intensity of the transmitted wave when the analyzer is rotated.

Solution: Consider Fig. 20–32. The analyzer is a device that transmits a wave whose electric field is parallel to the axis AA'. When the axis AA' of the analyzer makes an angle θ with the electric field of the incident linearly polarized wave, it transmits only the component $\mathcal{E}_A = \mathcal{E} \cos \theta$. Therefore, since the intensity of the wave is proportional to the square of the electric field, we have the relation

$$I = I_0 \cos^2 \theta,$$

where I_0 is the intensity of the incident wave and I that of the transmitted wave. This result is known as *Malus' law*. When $\theta = 0$ or π, the intensity of the transmitted light is maximum; when $\theta = \pi/2$ or $3\pi/2$, it is zero. Therefore, when the analyzer is rotated, the intensity of the transmitted wave fluctuates between 0 and I_0. This, for example, affords a means of determining whether a wave, such as light, is polarized or not. For unpolarized or circularly polarized waves, no fluctuation in intensity is observed. For elliptically polarized waves, the transmitted wave fluctuates between a maximum and a minimum value. These two extremes are obtained when the analyzer is parallel either to the larger or the smaller axis of the ellipse. The degree of polarization of the incident wave is then given by the expression

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}.$$

Note that $P = 1$ for linearly polarized waves and that $P = 0$ for unpolarized waves.

EXAMPLE 20.7. Discussion of *chromatic polarization*. When linearly polarized white light falls on a plate similar to that considered in Example 20.4, and is analyzed by means of another polarizing device, the light is observed as colored, the color being dependent on the orientation of the analyzer. The problem is to observe light of different wavelengths, and determine the color for each orientation of the analyzer.

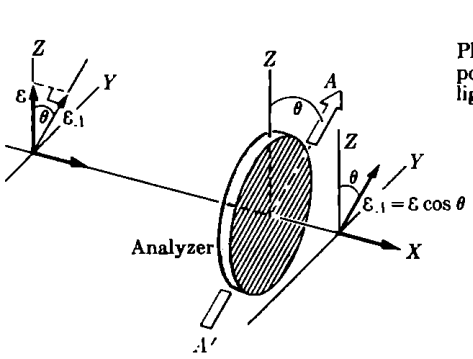


Fig. 20–32. Change in the intensity of linearly polarized light with change in orientation of analyzer.

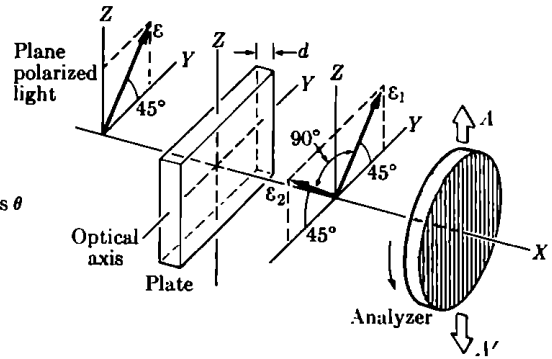


Fig. 20–33. Crystal plate placed between linearly polarized light and analyzer. The resulting phenomenon is called *chromatic polarization*.

Soluzione: Consideriamo la disposizione di Fig. 20–33. Supponiamo per semplicità che la luce bianca incidente sia polarizzata rettilineamente, e che il suo campo elettrico formi un angolo di 45° con l'asse ottico della lamina. In base ai risultati dell'Esempio 20.4, la luce trasmessa sarà polarizzata rettilineamente o come $\mathcal{E}_1$ o come $\mathcal{E}_2$, a seconda che la lunghezza d'onda sia tale che

$$(n_1 - n_2)d = \begin{cases} \text{numero intero pari} \times \lambda/2 & \text{(polarizzazione } \mathcal{E}_1\text{)}, \\ \text{numero intero dispari} \times \lambda/2 & \text{(polarizzazione } \mathcal{E}_2\text{)}. \end{cases}$$

Per tutte le altre lunghezze d'onda, l'onda trasmessa è polarizzata ellitticamente. Se ora osserviamo la luce trasmessa attraverso un analizzatore, vediamo che la luce è colorata invece che bianca, e che il colore varia allorchè l'asse dell'analizzatore AA' viene ruotato. Questo perchè, in base all'Esempio 20.6, quando l'asse dell'analizzatore è parallelo a $\mathcal{E}_1$, le corrispondenti lunghezze d'onda vengono trasmesse con intensità massima, mentre quelle corrispondenti a $\mathcal{E}_2$ sono eliminate. In condizioni invertite, quando l'asse dell'analizzatore è parallelo a $\mathcal{E}_2$, appare il colore complementare. Perciò ruotando l'analizzatore, otteniamo figure variabili, con i colori complementari separati di 90°.

Tale fenomeno è stato applicato all'analisi delle tensioni di elementi strutturali usati in costruzioni e macchinari, dando luogo a una branca della fisica applicata detta *fotoelasticità*. Come abbiamo indicato alla fine del Paragrafo 20.8, quando un materiale plastico è soggetto ad una tensione, diventa birifrangente a causa dell'anisotropia risultante dalle deformazioni. Perciò, se un modello di materia plastica è sottoposto agli stessi sforzi dell'effettivo elemento strutturale, esso si comporta otticamente come una lamina non omogenea birifrangente. La non omogeneità è dovuta alla distribuzione non uniforme delle deformazioni nella materia plastica. Allorchè il pezzo sotto sforzo sostituisce la lamina della Fig. 20–33, ne risulta una figura (colorata) del tipo di quelle in Fig. 20–34, dalle quali, con l'uso di tecniche particolari possono essere valutate le deformazioni.

Solution: Let us consider the arrangement of Fig. 20–33. We suppose for simplicity that the incident white light is linearly polarized, with the electric field making an angle of 45° with the optical axis of the plate. According to the results of Example 20.4, the transmitted light will be linearly polarized as either $\mathcal{E}_1$ or $\mathcal{E}_2$, depending on whether the wavelength is such that

$$(n_1 - n_2)d = \begin{cases} \text{even integer} \times \lambda/2 & \text{(polarization } \mathcal{E}_1\text{)}, \\ \text{odd integer} \times \lambda/2 & \text{(polarization } \mathcal{E}_2\text{)}. \end{cases}$$

For all other wavelengths the transmitted wave is elliptically polarized. If we now observe the transmitted light through an analyzer, we observe that the light is colored instead of white, and that the color changes when the analyzer axis AA' is rotated. This is because, according to Example 20.6, when the axis of the analyzer is parallel to $\mathcal{E}_1$, the corresponding wavelengths are transmitted with maximum intensity, while those corresponding to $\mathcal{E}_2$ are blocked. With reversed conditions, when the axis of the analyzer is parallel to $\mathcal{E}_2$, the complementary color appears. Therefore when we rotate the analyzer we get varying shades, with complementary colors separated by 90°.

This phenomenon has been applied to the stress analysis of structural pieces used in buildings and machines, giving rise to a branch of applied physics called *photoelasticity*. As we mentioned at the end of Section 20.8, when a plastic material is subject to stresses, it becomes birefringent because of the anisotropy resulting from the strains. Therefore, if a model made of plastic is subjected to the same stresses as the actual structural piece, it behaves optically as an inhomogeneous birefringent plate. The inhomogeneity is due to the nonuniform distribution of strains in the plastic. When the stressed piece replaces the plate of Fig. 20–33, a (colored) pattern such as those in Fig. 20–34 results, from which the strains can be estimated by the use of special techniques.

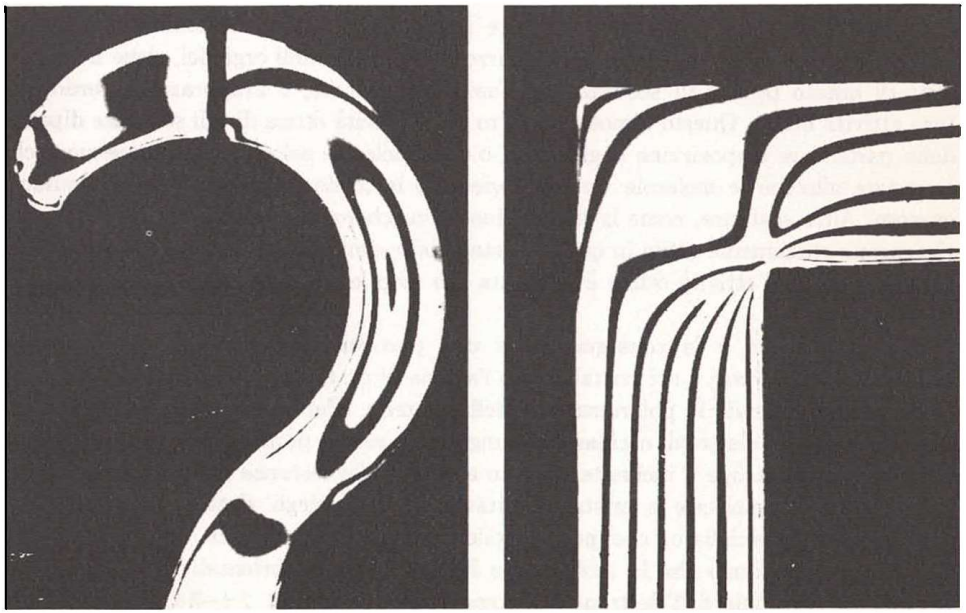


Fig. 20–34. Birifrangenza generata in una sostanza dalle tensioni ad essa applicate. (La fotografia è dovuta alla cortesia della Klinger Scientific Apparatus Company.)

Fig. 20–34. Birefringence induced in a substance by the stresses applied to it. (Photographs courtesy of Klinger Scientific Apparatus Company.)

20.11 Attività ottica

Un altro fenomeno connesso al carattere trasversale delle onde elettromagnetiche è la rotazione del piano di polarizzazione, proprietà che è detta *attività ottica* quando viene osservata nella regione del visibile e in quelle prossime ad essa dello spettro elettromagnetico. Se un fascio di luce polarizzata rettilineamente attraversa una sostanza otticamente attiva (Fig. 20—35), l'onda trasmessa è ancora polarizzata rettilineamente, ma in un altro piano, che forma un angolo θ con il piano dell'onda incidente. Il valore di θ è proporzionale alla lunghezza l del percorso che il fascio compie attraverso la sostanza, e dipende anche dalla natura della sostanza. Dal punto di vista di un osservatore che riceve la luce trasmessa, le sostanze sono dette *destrogire* e *levogire*, a seconda che la rotazione del piano di polarizzazione sia oraria o antioraria rispetto all'osservatore (*dextro:* destra; *levo:* sinistra).

Incident light = Luce incidente
Transmitted light = Luce transmessa
Dextro = Destro
Levo = Sinistra

Fig. 20—35. Rotazione del piano di polarizzazione da parte di una sostanza otticamente attiva.

L'attività ottica è presentata da certe sostanze soltanto nello stato solido. Molti cristalli inorganici, particolarmente il quarzo, e alcuni cristalli organici, come il benzile, sono di questo tipo. Tali sostanze per fusione, soluzione, o evaporazione perdono la loro attività ottica. Questo dimostra il fatto che l'attività ottica di tali sostanze dipende dalla particolare disposizione degli atomi o delle molecole nel cristallo, disposizione che scompare allorchè le molecole vengono orientate in modo casuale negli stati liquido o gassoso. Altre sostanze, come la trementina, lo zucchero, la canfora, e l'acido tartarico, rimangono otticamente attivi in qualsiasi stato fisico e anche in soluzione. In quest'ultimo tipo di sostanze l'attività ottica è associata alle singole molecole e non alla loro disposizione relativa.

L'attività ottica è la conseguenza di una particolare torsione delle orbite degli elettroni nelle molecole o nei cristalli sotto l'azione di un campo elettromagnetico esterno oscillante. Discutendo la polarizzazione della materia (Paragrafo 16.5), abbiamo fatto l'ipotesi che gli elettroni oscillassero lungo una retta, parallela al campo elettrico nelle sostanze isotrope e inclinata rispetto ad esso nelle sostanze anisotrope (Paragrafo 20.8). In certe molecole e cristalli, tuttavia, il moto degli elettroni avviene lungo un percorso attorcigliato, che per semplicità possiamo assumere sia un'elica (Fig. 20—36). Supponiamo che la molecola (o il cristallo) siano orientati in modo tale che il percorso elicoidale dell'elettrone sia come mostrato in Fig. 20—36, cioè con l'asse dell'elica perpendicolare alla direzione di propagazione e parallelo o al campo elettrico o al campo magnetico dell'onda incidente.

20.11 Optical Activity

Another phenomenon related to the transverse character of electromagnetic waves is the rotation of the plane of polarization, a property which is called *optical activity* when it is observed in the visible and nearby regions of the electromagnetic spectrum. If a beam of linearly polarized light passes through an optically active substance (Fig. 20–35), the transmitted wave is also linearly polarized, but in another plane, making an angle θ with the incident plane. The value of θ is proportional to the length l which the beam traverses through the substance, and depends also on the nature of the substance. From the point of view of an observer receiving the transmitted light, the substances are called *dextrorotatory* and *levorotatory*, depending on whether the rotation of the plane of polarization is clockwise or counterclockwise as seen by the observer (*dextro:* right; *levo:* left).

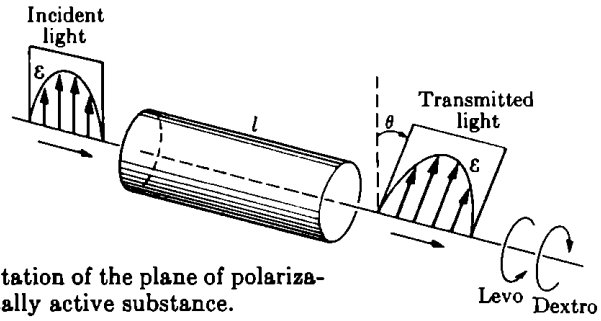


Fig. 20–35. Rotation of the plane of polarization by an optically active substance.

Optical activity is exhibited by certain substances only in the solid state. Many inorganic crystals, especially quartz, and some organic crystals, such as benzil, are of this type. Upon fusion, solution, or vaporization, these substances lose their optical activity. This demonstrates the fact that the optical activity of these substances depends on the special arrangements of atoms or molecules in the crystal, arrangements which disappear when the molecules are oriented at random in the liquid or the gaseous states. Other substances, such as turpentine, sugar, camphor, and tartaric acid, remain optically active in all physical states as well as in solution. In this latter type of substance the optical activity is associated with the individual molecules and not with their relative arrangement.

Optical activity is a result of a certain twisting of the orbits of the electrons in the molecules or crystals under the action of an external oscillatory electromagnetic field. When we were discussing the polarization of matter (Section 16.5), we assumed that the electrons oscillated in a straight line, parallel to the electric field in isotropic substances and at an angle with it in anisotropic substances (Section 20.8). In certain molecules and crystals, however, the electron motion is along a twisted path, which for simplicity we may assume is a helix (Fig. 20–36). Suppose that the molecule (or crystal) is so oriented that the helical electron paths are as shown in Fig. 20–36, i.e., with the helix axis perpendicular to the direction of propagation and parallel either to the electric or the magnetic field of the incoming wave.

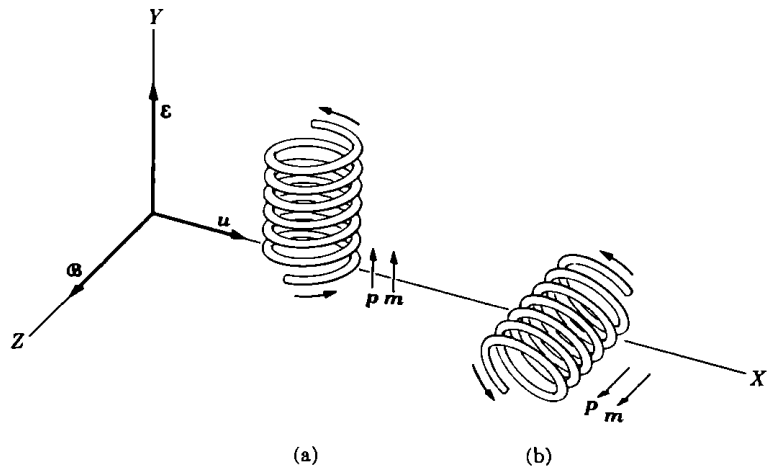


Fig. 20–36. Momenti di dipolo elettrico e magnetico indotti in una molecola elicoidale da un'onda elettromagnetica.

Fig. 20–36. Electric and magnetic dipole moments induced by an electromagnetic wave in a helical molecule.

Consideriamo il primo caso; orientazione (a). Il campo elettrico oscillante dell'onda produce un movimento oscillatorio dell'elettrone su e giù lungo l'elica, che ha l'effetto di un vero e proprio momento di dipolo elettrico oscillante $\boldsymbol{p}$, parallelo all'asse dell'elica. Finora la situazione è simile a quella della polarizzazione ordinaria. Ma, a causa della torsione della traiettoria dell'elettrone, la corrente elettronica in ciascuna spira dell'elica equivale a un dipolo magnetico, e la molecola acquista anche un effetto di momento di dipolo magnetico oscillante $\boldsymbol{m}$, ancora orientato lungo l'asse dell'elica. Con l'orientazione (b), il campo magnetico oscillante dell'onda produce un flusso variabile concatenato con ciascuna spira dell'elica che, per la legge di Faraday-Henry, dà luogo a una corrente elettronica oscillante lungo l'elica. Tale corrente produce ancora un momento di dipolo magnetico oscillante $\boldsymbol{m}$ lungo l'asse dell'elica. D'altra parte il movimento avanti e indietro dell'elettrone produce agli estremi della molecola delle cariche alternativamente positive e negative, e ne risulta l'effetto di un reale momento di dipolo elettrico oscillante $\boldsymbol{p}$ lungo l'asse dell'elica. Perciò, per entrambe le orientazioni della molecola, vengono prodotti sia un momento di dipolo elettrico oscillante $\boldsymbol{p}$, sia un momento di dipolo magnetico oscillante $\boldsymbol{m}$, paralleli all'asse molecolare. Tali dipoli irradiano delle onde elettromagnetiche diffuse, nello stesso modo già discusso nel Paragrafo 19.9, dove si teneva in conto soltanto la diffusione da dipolo elettrico perchè si assumeva che il moto dell'elettrone avvenisse lungo una retta.

Un'analisi matematica dettagliata dell'onda diffusa, che noi qui ometteremo, dimostra che lungo la direzione di propagazione dell'onda incidente, i campi $\mathscr{E}'$ e $\mathscr{B}'$ dell'onda diffusa sono in fase con quelli dell'onda incidente, ma oscillano in direzione differente a causa della diversa orientazione relativa dei campi $\mathscr{E}$ e $\mathscr{B}$ di un dipolo elettrico e di uno magnetico (Figg. 19—8 e 19—12). Un osservatore nella direzione di propagazione riceve sia l'onda incidente sia l'onda diffusa le quali, essendo in fase, interferiscono, dando luogo a polarizzazione rettilinea (vedi Paragrafo 12.9), ma in una direzione formante l'angolo θ con

Let us consider the first case, or orientation (a). The oscillating electric field of the wave produces an oscillatory motion of the electrons up and down along the helix that results in an effective oscillating electric dipole moment $\boldsymbol{p}$ parallel to the helix axis. So far the situation is similar to that of ordinary polarization. But because of the twisting of the electronic path, the electronic current along each turn of the helix is equivalent to a magnetic dipole, and the molecule acquires an effective oscillating magnetic dipole moment $\boldsymbol{m}$ also oriented along the helix axis. For orientation (b), the oscillating magnetic field of the wave produces a variable flux through each turn of the helix that, by the Faraday-Henry law, results in an oscillating electronic current along the helix. This current again produces an oscillating magnetic moment $\boldsymbol{m}$ along the helix axis. But the electron's back-and-forth motion produces, at the ends of the molecule, alternate positive and negative charges, resulting in an effective oscillatory electric dipole moment $\boldsymbol{p}$ along the helix axis. Therefore, for both orientations of the molecule, both an oscillating electric dipole moment $\boldsymbol{p}$ and an oscillating magnetic dipole moment $\boldsymbol{m}$, parallel to the molecular axis, are produced. These dipoles radiate scattered electromagnetic waves, in the same fashion as that discussed in Section 19.9, where only electric dipole scattering was taken into account because the electron's motion was assumed to be in a straight line.

A detailed mathematical analysis of the scattered wave, which we shall omit here, shows that along the direction of propagation of the incident wave, the fields $\mathscr{E}'$ and $\mathscr{B}'$ of the scattered wave are in phase with those of the incident wave, but they oscillate in a different direction because of the differing relative orientation of the $\mathscr{E}$ and $\mathscr{B}$ fields of an electric and a magnetic dipole (Figs. 19–8 and 19–12). An observer along the direction of propagation receives the incident and the scattered waves which, because they are in phase, interfere, resulting in linear polarization (remember Section 12.9), but in a direction making an angle θ with

Incident wave = Onda incidente
Scattered wave = Onda diffusa
Resultant wave = Onda risultante

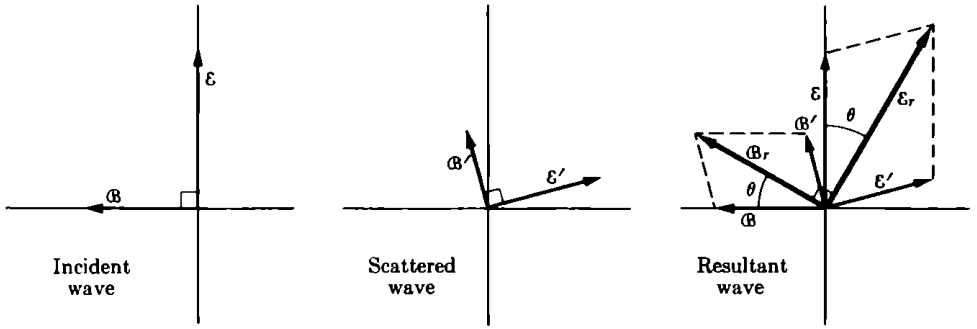


Fig. 20–37. Campi elettrico e magnetico risultanti dalla sovrapposizione delle onde incidente e diffusa.

Fig. 20–37. Resultant electric and magnetic fields due to the superposition of incident and scattered waves.

Mirror = Specchio
Left-handed helix = Elica sinistrorsa
Right-handed helix = Elica destrorsa
Left hand = Mano sinistra
Right hand = Mano destra

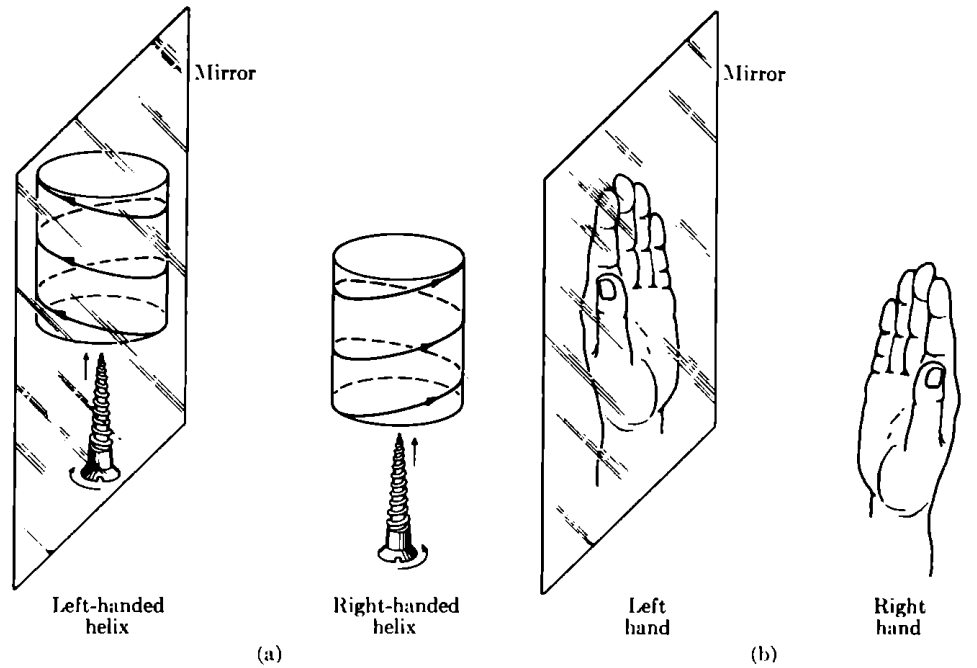


Fig. 20–38. Simmetria destra-sinistra. (a) L'immagine speculare di un'elica o di una vite destrorsa è sinistrorsa. (b) L'immagine speculare della mano destra è la mano sinistra.

Fig. 20–38. Right–left symmetry. (a) The mirror image of a right-handed helix or screw is left-handed. (b) The mirror image of the right hand is a left hand.

il piano originale del vettore elettrico (Fig. 20—37). Ne risulta così una rotazione del piano di polarizzazione dell'onda. Per molecole orientate a caso, si può dimostrare che l'effetto è ancora nello stesso senso, benchè la sua intensità dipenda dalla orientazione molecolare. Così l'attività ottica molecolare persiste in qualsiasi stato fisico o in soluzione. In alcuni cristalli tuttavia, l'effetto dipende dalla disposizione delle molecole; ma le singole molecole non hanno simmetria elicoidale, e perciò l'effetto scompare quando le molecole vengono disordinate.

the original plane of the electric vector (Fig. 20–37). Thus a rotation of the plane of polarization of the wave results. For randomly oriented molecules it can be proved that the effect is always in the same sense, although its magnitude depends on the molecular orientation. Thus molecular optical activity persists in any physical state or in solution. In some crystals, however, the effect depends on the molecular arrangement; but the individual molecules do not have a helicoidal symmetry, and therefore the effect disappears when the molecules are disarranged.

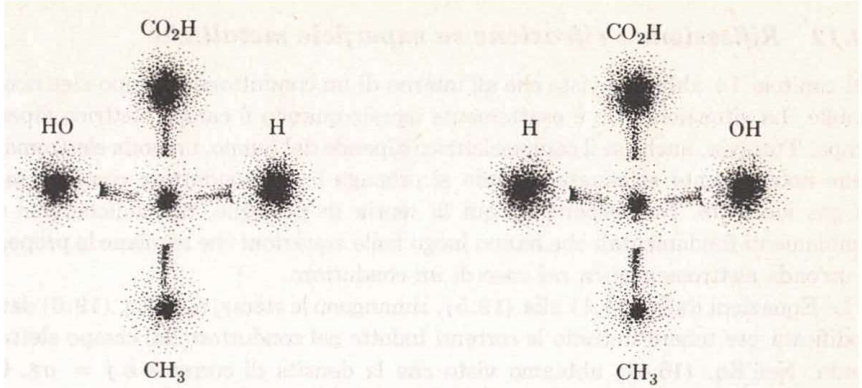


Fig. 20–39. Mirror-image forms of lactic acid.

Fig. 20—39. Forme speculari dell'acido lattico.

Lo studente può rendersi conto che ci sono due generi di elica, destrorsa e sinistrorsa (Fig. 20—38). Una è l'immagine speculare dell'altra, così come la mano sinistra è l'immagine speculare della mano destra. Un tal genere di simmetria viene detto *enantiomorfismo*. Alcune molecole si comportano come eliche destrorse mentre altre agiscono come sinistrorse. In un caso la rotazione del piano di polarizzazione è in una direzione, nell'altro caso nella direzione opposta. Questo spiega l'esistenza di sostanza destrorse e levogire.

Alcune sostanze contengono entrambi i generi di molecole speculari, una proprietà che viene detta *stereoisomerismo*. Per esempio, le molecole di acido lattico (CH_3—COH_2—CO_2H) possono esistere in entrambe le forme speculari illustrate in Fig. 20—39. Un campione di acido lattico che contenga una eguale quantità dei due tipi di molecole è otticamente inattivo, ma se c'è maggiore quantità di un genere che dell'altro, ne risulta una rotazione netta.

Nel caso del quarzo (SiO_2), le molecole sono tutte identiche, ma la loro disposizione spaziale nel cristallo può avere simmetria o destrorsa o sinistrorsa, come risulta evidente dall'aspetto esterno dei due tipi di cristalli di quarzo mostrati in Fig. 20—40, uno dei quali è sinistrorso e l'altro destrorso. Quando il cristallo viene fuso, la disposizione regolare delle molecole viene distrutta e l'attività ottica scompare.

Quando una sostanza le cui molecole sono otticamente attive, come ad esempio l'acido lattico, il levulosio, il destrosio, ecc., viene disciolta in acqua, la rotazione del piano di polarizzazione dipende dalla concentrazione. Tale risultato è ampiamente usato per determinare quantitativamente la percentuale della sostanza nella soluzione, per esempio la concentrazione di zucchero in uno sciroppo o nell'orina.

Alcune sostanze divengono otticamente attive quando viene in esse generata in qualche modo, una qualsiasi sorta di simmetria elicoidale. Uno dei metodi per far ciò è di applicare un forte campo magnetico statico lungo la direzione di propagazione. Questo è noto come *effetto Faraday*.

Fig. 20—40. Forme speculari di cristalli di quarzo.

The student may realize that there are two kinds of helix, right-handed and left-handed (Fig. 20–38). One is the mirror image of the other, as the left hand is the mirror image of the right hand. This kind of symmetry is called *enantiomorphism*. Some molecules act like right-handed helixes and others act like left-handed ones. In one case the rotation of the plane of polarization is in one direction and in the other case it is in the opposite direction. This explains the existence of dextro- and levo-rotatory substances.

Some substances contain both classes of mirror-image molecules, a property called *stereoisomerism*. For example, lactic-acid molecules (CH_3—COH_2—CO_2H) may exist in either one of two mirror-image forms, as illustrated in Fig. 20–39. A sample of lactic acid which contains equal amounts of both kinds of molecules is optically inactive, but if there is more of one kind than of the other, a net rotation results.

In the case of quartz (SiO_2), the molecules are all identical, but their space arrangement in the crystal has either a left-handed or a right-handed symmetry, as is apparent from the external appearance of the two kinds of quartz crystals shown in Fig. 20–40, one being levo and the other dextro. When the crystal is melted the molecular arrangement is destroyed and the optical activity disappears.

When a substance whose molecules are optically active, such as lactic acid, levulose, dextrose, etc., is dissolved in water, the rotation of the plane of polarization depends on the concentration. This result is widely used to determine quantitatively the amount of substance in the solution, such as the concentration of sugar in a syrup or in urine.

Some substances become optically active when, by some means, some sort of helicoidal symmetry is introduced. One method of doing this is to apply a strong static magnetic field along the direction of propagation. This is known as the *Faraday effect*.

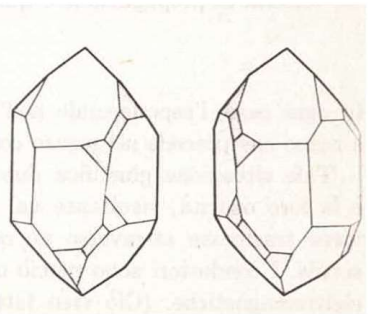


Fig. 20–40. Mirror-image forms of quartz crystal.

20.12 *Riflessione e rifrazione su superficie metalliche*

Nel capitolo 14 abbiamo visto che all'interno di un conduttore il campo elettrico statico è nullo. La situazione non è esattamente uguale quando il campo elettrico dipende dal tempo. Tuttavia, anche se il campo elettrico dipende dal tempo, un'onda elettromagnetica viene notevolmente attenuata quando si propaga in un conduttore come un metallo o un gas ionizzato. Non esporremo qui la teoria in dettaglio, ma indicheremo uno dei cambiamenti fondamentali che hanno luogo nelle equazioni che regolano la propagazione di un'onda elettromagnetica nel caso di un conduttore.

Le Equazioni dalla (19.1) alla (19.5), rimangono le stesse, ma l'Eq. (19.6) dev'essere modificata per tenere in conto le correnti indotte nel conduttore dal campo elettrico dell'onda. Nell'Eq. (16.49) abbiamo visto che la densità di corrente è $\boldsymbol{j} = \sigma\mathcal{E}$. Quando tale corrente viene incorporata nell'Eq. (19.6), con passaggi immediati, si ottiene per l'equazione soddisfatta dal campo elettrico

invece dell'equazione d'onda più semplice (19.7). Il nuovo fattore $\mu\sigma\ \partial\mathcal{E}/\partial t$, essendo una derivata prima rispetto al tempo, è molto simile al fattore di smorzamento $-\lambda\ dx/dt$ in un oscillatore smorzato, discusso nel Paragrafo 12.12. Perciò esso indica che l'onda si va smorzando mano a mano che penetra nel metallo. Così l'onda, allorchè penetra nel conduttore, diminuisce molto rapidamente di intensità. La soluzione dell'Eq. (20.27) può essere espressa nella forma

dove la velocità di propagazione $v = \omega/k$ e il coefficiente di smorzamento α sono espressi da complicate relazioni algebriche fra μ, ϵ, e σ. Quando la frequenza è così piccola che si può trascurare ω^2 e il materiale è un conduttore molto buono, cosicchè $\alpha \gg \epsilon\omega$, lo studente può verificare per sostituzione diretta dell'Eq. (20.28) nell'Eq. (20.27) che

La velocità di propagazione è quindi

In ogni caso, l'esponenziale nell'Eq. (20.28) indica che l'onda viene smorzata mano a mano che procede nel mezzo conduttore.

Tale situazione giustifica due fatti importanti relativi ai conduttori. Il primo fatto è la loro opacità, risultante dal forte assorbimento delle onde, per cui nessuna onda viene trasmessa attraverso un conduttore a meno che questo non sia un foglio molto sottile. I conduttori sono perciò ottimi per schermare una porzione di spazio dalle onde elettromagnetiche. (Ciò vien fatto, per esempio, circondando tale porzione di spazio con una griglia metallica.) Il secondo è la notevole proprietà di riflessione dei conduttori, che risulta dal fatto che soltanto una piccola frazione dell'energia dell'onda incidente penetra nel conduttore, e la maggior parte

20.12 *Reflection and Refraction at Metallic Surfaces*

In Chapter 14 we saw that inside a conductor a static electric field is zero. The situation is not entirely the same when the electric field is time dependent. However, even when the electric field is time dependent, an electromagnetic wave is greatly attenuated when it propagates in a conductor, such as a metal or an ionized gas. We shall not present the detailed theory here, but we shall indicate one of the fundamental changes that take place in the equations regulating the propagation of an electromagnetic wave in a conductor.

Equations (19.1) through (19.5) remain the same, but Eq. (19.6) must be modified to take into account the currents induced in the conductor by the electric field of the wave. From Eq. (16.49) we saw that the current density is $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{\mathcal{E}}$. When this current is incorporated into Eq. (19.6), a straightforward manipulation gives, for the equation satisfied by the electric field,

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial x^2} = \epsilon\mu\frac{\partial^2\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t^2} + \mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\partial t}, \tag{20.27}$$

instead of the simpler wave equation (19.7). The new term, $\mu\sigma\ \partial\boldsymbol{\mathcal{E}}/\partial t$, being a first-order time derivative, is similar to the damping term $-\lambda\ dx/dt$ in a damped oscillator, discussed in Section 12.12. Therefore it indicates that the wave is being damped while it progresses through the metal. Thus the wave, while it is penetrating the conductor, decreases very rapidly in intensity. The solution of Eq. (20.27) can be expressed in the form

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 e^{-\alpha x}\sin(kx - \omega t), \tag{20.28}$$

where the velocity of propagation $v = \omega/k$ and the damping coefficient α are expressed by some complicated algebraic relations among μ, ϵ, and σ. When the frequency is small so that ω^2 can be neglected and the material is a very good conductor, so that $\sigma \gg \epsilon\omega$, the student may verify by direct substitution of Eq. (20.28) in Eq. (20.27) that

$$k = \alpha \approx \sqrt{\tfrac{1}{2}\mu\sigma\omega}. \tag{20.29}$$

The velocity of propagation is then

$$v = \omega/k = \sqrt{2\omega/\mu\sigma}. \tag{20.30}$$

In any case, the exponential in Eq. (20.28) indicates that the wave is damped while it is progressing into the conducting medium.

This situation explains two important facts concerning conductors. One fact is their opacity, resulting from the strong absorption of the waves, so that no wave is transmitted through the conductor unless it is a very thin sheet. Conductors are therefore excellent for shielding a region from electromagnetic waves. (This is done, for example, by surrounding the region by a metal grid.) The other is the great reflectivity of conductors, which results from the fact that only a small fraction of the energy of the incident wave penetrates the conductor, and most of

Earth = Terra
Ionosphere = Ionosfera

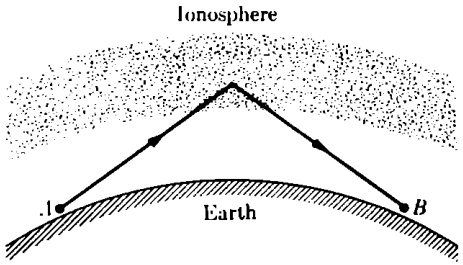


Fig. 20–41. Riflessione di radioonde da parte della ionosfera.

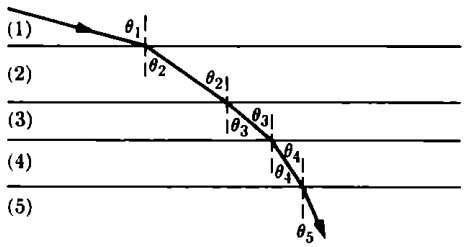


Fig. 20–42. Traiettoria di un raggio in un mezzo stratificato.

dell'energia va nell'onda riflessa. Una così elevata proprietà di riflessione è tipica dei metalli. Anche uno strato di gas ionizzato può comportarsi come un conduttore, riflettendo le onde elettromagnetiche che incidono su di esso. Tale principio viene utilizzato, per esempio, nelle radiocomunicazioni, per trasmettere segnali radio intorno alla terra. Il segnale viene riflesso indietro sulla terra allorchè raggiunge uno strato altamente ionizzato dell'atmosfera, detto *ionosfera*, che si trova a circa 100 km sulla superficie della terra. In tal modo, è possibile la comunicazione fra i punti A e B, comunicazione che non può essere ottenuta mediante un'onda che si propaghi in linea retta fra i punti stessi (Fig. 20–41).

20.13 Propagazione in un mezzo non omogeneo

I fenomeni di riflessione e rifrazione descritti nei paragrafi precedenti corrispondono alla situazione in cui un'onda passa da un mezzo omogeneo ad un altro. Tuttavia, in molti casi un'onda si propaga in un mezzo le cui proprietà variano da punto a punto. Per esempio, in una giornata calda gli strati più bassi dell'atmosfera sono molto più caldi di quelli più alti, e le onde sonore, come pure quelle luminose, subiscono una continua rifrazione.

Consideriamo la propagazione di un'onda in un mezzo stratificato (Fig. 20–42); cioè un mezzo composto di parecchi strati in ciascuno dei quali la velocità di propagazione è differente. Se un'onda raggiunge la prima superficie con un angolo di incidenza θ_1, le successive rifrazioni soddisfano alle condizioni

o

Consideriamo poi un mezzo nel quale l'indice di rifrazione dipenda da un'unica coordinata, diciamo y. Esso può essere considerato come un mezzo stratificato nel quale gli strati successivi siano molto sottili. Allora vale ancora l'Eq. (20.31), e possiamo scrivere

Fig. 20–41. Reflection of radio waves by the ionosphere.

Fig. 20–42. Path of a ray in a stratified medium.

the energy goes into the reflected wave. This high reflectivity is typical of metals. An ionized layer of gas can also act as a conductor, reflecting electromagnetic waves falling on it. This principle is used, for example, in radio communication, to transmit a radio signal around the earth. The signal is reflected back to the earth when it reaches a highly ionized layer in the atmosphere, called the *ionosphere*, which is about 100 km above the earth's surface. In this way communication is possible between points A and B, communication which cannot be achieved by a wave propagating in a straight line between the points (Fig. 20–41).

20.13 Propagation in a Nonhomogeneous Medium

The reflection and refraction phenomena described in the previous sections correspond to a situation in which a wave passes from one homogeneous medium to another. However, in many instances a wave propagates in a medium whose properties vary from point to point. For example, on a hot day the lower layers of air are much warmer than the upper ones, and sound waves as well as light waves suffer a continuous refraction.

Let us consider the propagation of a wave through a stratified medium (Fig. 20–42); that is, a medium composed of several layers in which the velocity of propagation is different. If a wave reaches the first surface with an angle of incidence θ_1, the successive refractions satisfy the conditions

$$\begin{aligned} n_1 \sin\theta_1 &= n_2 \sin\theta_2, \\ n_2 \sin\theta_2 &= n_3 \sin\theta_3, \\ \vdots &\qquad \vdots \end{aligned}$$

or

$$n \sin\theta = \text{const.} \tag{20.31}$$

Next let us consider a medium in which the index of refraction depends on one coordinate, let us say y. It can be considered as a stratified medium in which successive layers are very thin. Then Eq. (20.31) still holds, and we may write

$$n(y) \sin\theta = C, \tag{20.32}$$

dove C è una costante. Tale espressione fornisce l'angolo θ in ciascun punto del percorso del raggio, e mediante essa possiamo tracciare il percorso di un raggio attraverso un mezzo non omogeneo.

ESEMPIO 20.8. Ricavare il raggio di curvatura del percorso di un raggio luminoso quando l'onda si propaga in un mezzo con indice di rifrazione variabile.

Soluzione: Consideriamo due superficie d'onda S e S' (Fig. 20—43), separate nel tempo di un periodo. Allora la loro distanza lungo un qualsiasi raggio sarà di una lunghezza d'onda. Consideriamo due raggi R e R' molto vicini. Poichè la velocità di propagazione varia da punto a punto, anche la lunghezza d'onda è variabile, in quanto $\lambda = v/\nu = c/\nu n$. Siano λ e λ' le lunghezze d'onda lungo i raggi corrispondenti. Allora, dalla Fig. 20—43, vediamo che $\rho\theta = \lambda$ e $(\rho + d\rho)\theta = \lambda'$. Perciò $\theta\, d\rho = \lambda' - \lambda = d\lambda$. Ma $\theta = \lambda/\rho$, per cui

Fig. 20—43. Incurvamento dei raggi luminosi in un mezzo non omogeneo.

dato che $\ln \lambda = \ln c - \ln v - \ln n$, e sia c sia v sono costanti. L'Eq. (20.33) indica che il percorso è incurvato in modo tale che la sua concavità è rivolta nella direzione in cui l'indice di rifrazione cresce.

Bibliografia

where C is a constant. This expression gives the angle θ at every point on the ray's path, and from it we can trace the path of the ray through the inhomogeneous medium.

EXAMPLE 20.8. Obtain the radius of curvature of a ray when the wave propagates in a medium with variable index of refraction.

Solution: Let us consider two wave surfaces S and S' (Fig. 20–43), separated in time by one period. Then their separation in distance along any ray will be one wavelength. Consider two very close rays R and R'. Since the velocity of propagation varies from point to point, the wavelength is also variable, because $\lambda = v/\nu = c/\nu n$. Let λ and λ' be the wavelengths along the corresponding rays. Then, from Fig. 20–43, we see that $\rho\theta = \lambda$ and $(\rho + d\rho)\theta = \lambda'$. Then $\theta\, d\rho = \lambda' - \lambda = d\lambda$. But $\theta = \lambda/\rho$, so that

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}(\ln \lambda)$$

$$= -\frac{d}{d\rho}(\ln n), \qquad (20.33)$$

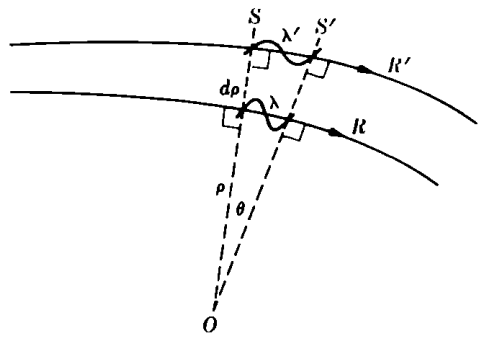


Fig. 20–43. Curvature of rays in a non-homogeneous medium.

since $\ln \lambda = \ln c - \ln \nu - \ln n$, and both c and ν are constant. Equation (20.33) indicates that the path is curved so that its concavity is toward the direction in which the index of refraction increases.

References

1. "Phase Change on Reflection from Isotropic Dielectrics," G. Friedmann and H. Sandhu, *Am. J. Phys.* **33**, 135 (1965)
2. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. New York: Dover, 1963, Chapters 1, 13, and 15
3. *Optics*, B. Rossi. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957, Chapters 1, 6, and 8
4. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz and F. J. Milford. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960, Sections 16–2 through 16–4
5. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 26, 31, and 33; Volume II, Chapters 30 through 33
6. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 265 (Descartes); page 280 (Bartholinus); page 283 (Huygens); page 315 (Malus); page 352 (Faraday)
7. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Sections 30.1 and 30.7

Problemi

20.1 Per costruire il raggio rifratto è stata proposta la seguente regola (Fig. 20–44): nel punto di incidenza si disegnano due circonferenze di raggi 1 e n (usando unità arbitrarie). Si prolunga il raggio incidente fino ad incontrare la circonferenza di raggio 1. Si disegna poi la perpendicolare alla superficie passante per tale punto, e si trova l'intersezione con la circonferenza di raggio n. Il raggio rifratto passa per questo punto. (a) Giustificare tale regola. (b) Applicarla al caso in cui $n = 1.5$ e l'angolo di incidenza i è di 60°. (c) Ripetere con $n = 0.80$ e un angolo di incidenza di 30°, e poi un altro di 60°. Verificare i risultati facendo uso della legge di Snell.

Figura 20–44

20.2 Un filo di rame di raggio 1 mm è attaccato a un filo di rame di raggio 0.8 mm. Trovare **T** e **R** nel punto di congiunzione per le onde che si propagano lungo il sistema dal primo al secondo filo.

20.3 Due fili di rame e di acciaio di ugual raggio vengono attaccati, in modo da formare una lunga corda. Trovare **T** e **R** nel punto di congiunzione per le onde che si propagano lungo la corda. Il raggio comune sia di 1 mm. Supposto che l'onda incidente abbia una frequenza di 10 Hz, e l'ampiezza sia 2 cm, e la forza valga 50 N, scrivere l'equazione per le onde incidente, riflessa, e trasmessa. (La densità del rame è 8.89×10^3 kg m^{-3} quella dell'acciaio 7.80×10^3 kg m^{-3}.)

20.4 Per la situazione discussa nell'Esempio 20.2, dimostrare che l'intensità dell'onda trasmessa più l'intensità dell'onda riflessa hanno somma uguale all'intensità dell'onda incidente. Qual'è il significato fisico di tale risultato?

Problems

20.1 The following rule has been proposed to construct the refracted ray (Fig. 20–44): At the point of incidence, two circles of radii 1 and n are drawn (using arbitrary units). The incident ray is extended until it intersects the circle of radius 1. A perpendicular to the surface is drawn through that point, and its intersection with the circle of radius n is found. The refracted ray passes through this point. (a) Justify this rule. (b) Apply it to the case when $n = 1.5$ and the angle of incidence i is 60°. (c) Repeat for $n = 0.80$ and an angle of incidence which is 30°, and another which is 60°. Verify your results by the use of Snell's law.

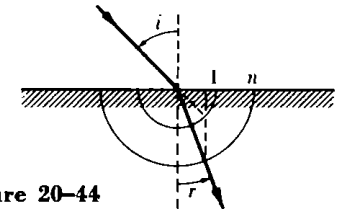


Figure 20–44

20.2 A copper wire of radius 1 mm is attached to a copper wire of radius 0.8 mm. Find **T** and **R** at the junction for waves propagated along the system from the first to the second wire.

20.3 Copper and steel wires of the same radii are joined, making a long string. Find **T** and **R** at the junction for waves propagated along the string. Let the common radius be 1 mm. Assuming that the incident wave has a frequency of 10 Hz, that the amplitude is 2 cm, and that the tension is 50 N, write the equations for the incident, reflected, and transmitted waves. (Density of copper is 8.89×10^3 kg m^{-3}, of steel 7.80×10^3 kg m^{-3}.)

20.4 For the situation discussed in Example 20.2, show that the intensity of the transmitted wave plus the intensity of the reflected wave add to the intensity of the incident wave. What is the physical meaning of this result?

20.5 Della luce polarizzata rettilineamente incide su di una lastra di vetro ($n = 1.5$) con un angolo di incidenza di 45°. Trovare i coefficienti di riflessione e rifrazione nel caso in cui il campo elettrico dell'onda incidente sia (a) nel piano di incidenza, (b) normale al piano di incidenza.

20.6 Un'onda elettromagnetica piana incide perpendicolarmente su di una superficie piana che separa un mezzo di indice di rifrazione n_1 da un mezzo di indice di rifrazione n_2. Servendosi dell'Eq. (20.25), dimostrare che i coefficienti di riflessione e rifrazione sono in tal caso $\mathbf{R} = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ e $\mathbf{T} = 2n_1/(n_1 + n_2)$. Si osservi che in questo caso non occorre distinguere fra le componenti π e σ. Rappresentare i campi elettrico e magnetico nelle onde incidente, riflessa, e rifratta sia con $n_1 < n_2$ che con $n_1 > n_2$.

20.7 (a) La luce incide perpendicolarmente su di una lastra di vetro ($n = 1.5$). Trovare i coefficienti di riflessione e di trasmissione. (b) Ripetere il calcolo nel caso in cui la luce passi dal vetro all'aria. (c) Discutere i cambiamenti di fase in entrambi i casi. [*Suggerimento:* usare i risultati del Problema 20.6.]

20.8 Con riferimento alla situazione descritta nel Problema 20.6, calcolare, usando l'Eq. (19.16), le intensità delle onde riflessa e rifratta e dimostrare che la loro somma è uguale all'intensità dell'onda incidente. [*Suggerimento:* si osservi che ora nell'Eq. (19.16) si deve sostituire c con la velocità $v = c/n$ nel mezzo, e che $\mathbf{E} = \epsilon\mathcal{E}^2$. E anche $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$.]

20.9 L'indice di rifrazione del vetro è 1.50. Calcolare gli angoli di incidenza e di rifrazione quando la luce riflessa da una superficie di vetro è completamente polarizzata.

20.10 L'angolo limite per la luce in una certa sostanza è di 45°. Qual'è l'angolo polarizzante?

20.11 (a) A quale angolo sopra l'orizzonte deve trovarsi il sole affinchè la sua luce riflessa dalla superficie di un lago calmo

20.5 Linearly polarized light falls on a glass plate ($n = 1.5$) with an angle of incidence of 45°. Find the coefficients of reflection and refraction if the electric field of the incident wave is (a) in the plane of incidence, (b) normal to the plane of incidence.

20.6 A plane electromagnetic wave falls perpendicularly on a plane surface separating a medium of index n_1 from a medium of index n_2. Using Eq. (20.25), show that the coefficients of reflection and refraction are in this case $\mathbf{R} = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ and $\mathbf{T} = 2n_1/(n_1 + n_2)$. Note that in this case we do not have to distinguish between π- and σ-components. Draw the electric and magnetic fields in the incident, reflected, and refracted waves when $n_1 < n_2$ and when $n_1 > n_2$.

20.7 (a) Light falls perpendicularly on a glass plate ($n = 1.5$). Find the coefficients of reflection and transmission. (b) Repeat the calculation if the light is passing from the glass into the air. (c) Discuss in each case the changes of phase. [*Hint:* Use the results of Problem 20.6.]

20.8 Referring to the situation described in Problem 20.6, compute, using Eq. (19.16), the intensities of the reflected and refracted waves and show that their sum is equal to the intensity of the incident wave. [*Hint:* Note that in Eq. (19.16) we must now replace c by the velocity $v = c/n$ in the medium, and that $\mathbf{E} = \epsilon\mathcal{E}^2$. Also $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$.]

20.9 The index of refraction of glass is 1.50. Compute the angles of incidence and of refraction when the light reflected from a glass interface is completely polarized.

20.10 The critical angle of light in a certain substance is 45°. What is the polarizing angle?

20.11 (a) At what angle above the horizontal must the sun be in order that sunlight reflected from the surface of a calm lake

sia completamente polarizzata? (b) Qual'è il piano del vettore $\mathcal{E}$ per la luce riflessa?

20.12 Un'onda luminosa piana, polarizzata rettilineamente, nell'aria incide su di un mezzo di indice di rifrazione n secondo l'angolo polarizzante. Il vettore elettrico dell'onda incidente giace nel piano di incidenza; la sua ampiezza di oscillazione è $\mathcal{E}_0$. Calcolare (a) l'intensità dell'onda incidente, (b) l'ampiezza $\mathcal{E}'_0$ dell'onda rifratta, e (c) l'intensità dell'onda rifratta. Confrontare (a) con (c) e spiegare il risultato.

20.13 Dimostrare che, per un'onda elettromagnetica, R_σ è positivo se $n_{21} < 1$ e negativo se $n_{21} > 1$. Analogamente, dimostrare che R_π è negativo (positivo) per angoli di incidenza minori (maggiori) dell'angolo polarizzante se $n_{21} < 1$ e positivo (negativo) se $n_{21} > 1$.

20.14 Se un'onda piana è polarizzata con il campo elettrico che forma un angolo α_i con il piano di incidenza, dimostrare che l'angolo che il campo elettrico forma con lo stesso piano nell'onda rifratta e riflessa

e

rispettivamente.

20.15 Un'onda luminosa piana polarizzata rettilineamente nell'aria ($n = 1$) incide su una superficie di acqua ($n = 1.33$). Determinare le ampiezze e le fasi delle onde rifratta e riflessa rispetto a quelle dell'onda incidente nei casi seguenti.

Angolo di incidenza	Angolo fra il piano di incidenza e il piano del campo elettrico
20°	0°
20°	90°
75°	0°
75°	90°

shall be completely polarized? (b) What is the plane of the $\mathcal{E}$ vector in the reflected light?

20.12 A plane linearly polarized light wave in air is incident on a medium of index n at the polarizing angle. The electric vector of the incident wave lies in the plane of incidence; its amplitude of oscillation is $\mathcal{E}_0$. Compute (a) the intensity of the incident wave, (b) the amplitude $\mathcal{E}'_0$ of the refracted wave, and (c) the intensity of the refracted wave. Compare (a) with (c) and explain your result.

20.13 Show that, for an electromagnetic wave, R_σ is positive if $n_{21} < 1$ and negative if $n_{21} > 1$. Similarly, show that R_π is negative (positive) for angles of incidence smaller (larger) than the polarizing angle when $n_{21} < 1$ and positive (negative) when $n_{21} > 1$.

20.14 If a plane wave is polarized with its electric field making an angle α_i with the plane of incidence, show that the angle the electric field makes with the same plane in the refracted and reflected wave is

$$\tan \alpha_r = (\mathsf{T}_\sigma/\mathsf{T}_\pi) \tan \alpha_i$$

and

$$\tan \alpha'_r = (\mathsf{R}_\sigma/\mathsf{R}_\pi) \tan \alpha_i,$$

respectively.

20.15 A plane linearly polarized light wave in air ($n = 1$) is incident on a water surface ($n = 1.33$). Determine the amplitudes and phases of the refracted and reflected waves relative to those of the incident wave for the following cases.

Angle of incidence	Angle between plane of incidence and plane of electric field
20°	0°
20°	90°
75°	0°
75°	90°

20.16 Un'onda luminosa piana polarizzata rettilineamente generata sott'acqua ($n = 1.33$) si rifrange alla superficie di separazione fra acqua e aria ($n = 1$). Determinare le ampiezze e le fasi delle onde rifratta e riflessa rispetto a quelle dell'onda incidente, nei casi seguenti.

Angolo di incidenza	Angolo fra il piano di incidenza e il piano del campo elettrico
20°	0°
20°	90°
40°	0°
40°	90°

20.17 Un fascio di luce polarizzata circolarmente in aria ($n = 1$) incide su di una superficie di vetro ($n = 1.52$) secondo un angolo di 45°. Descrivere in dettaglio lo stato di polarizzazione del fascio riflesso e del fascio rifratto.

Air = Aria
Coating = Rivestimento
Glass = Vetro

Figura 20–45

20.18 Una lastra di vetro (indice di rifrazione n_v) è rivestita di una sottile pellicola di plastica (indice di rifrazione n_p) (Fig. 20–45). Indicando l'indice di rifrazione dell'aria con n_a, dimostrare che, per incidenza normale, i coefficienti di riflessione sulla superficie di separazione fra aria e rivestimento e fra rivestimento e vetro sono uguali se $n_p = \sqrt{n_v n_a}$. Trovare il rapporto fra i coefficienti di riflessione quando l'angolo di incidenza è di 10° e n_v è 1.52.

20.19 Si considerino due mezzi trasparenti, (1) e (2), separati da una superficie piana (Fig. 20–46). Se R e T e sono i coefficienti di riflessione e rifrazione per un raggio incidente nel mezzo (1), e R' e T'

20.16 A plane linearly polarized light wave originating under water ($n = 1.33$) is refracted at the boundary surface between water and air ($n = 1$). Determine the amplitudes and phases of the refracted and reflected waves relative to those of the incident wave, for the following cases.

Angle of incidence	Angle between plane of incidence and plane of electric field
20°	0°
20°	90°
40°	0°
40°	90°

20.17 A beam of circularly polarized light in air ($n = 1$) is incident on a glass surface ($n = 1.52$) at an angle of 45°. Describe in detail the state of polarization of the reflected beam and of the refracted beam.

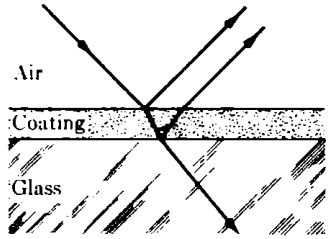


Figure 20–45

20.18 A glass plate (index n_g) is coated with a thin plastic film (index n_c) (Fig. 20–45). Designating the index of air by n_a, show that, at normal incidence, the reflection coefficients at the interface between air and coating and between coating and glass are equal if $n_c = \sqrt{n_g n_a}$. Find the ratio of the reflection coefficients when the angle of incidence is 10° and n_g is 1.52.

20.19 Consider two transparent media, (1) and (2), separated by a plane surface (Fig. 20–46). If R and T are the coefficients of reflection and refraction for a ray incident in medium (1), and R' and T' the

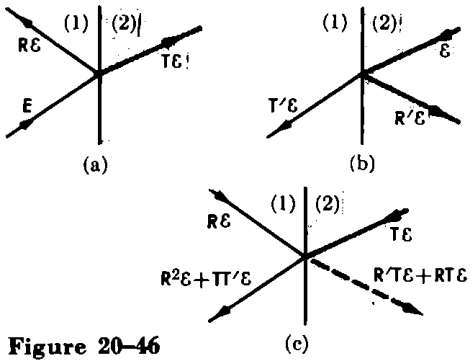


Figura 20–46

gli stessi coefficienti allorchè il raggio incidente è nel mezzo (2), dimostrare che $T'T = 1 - R^2$ e $R = -R'$. Sono queste le cosidette *relazioni di Stokes*. La seconda relazione indica che i coefficienti di riflessione sono di segno opposto, e se per una delle riflessioni non c'è cambiamento di fase, per l'altra ci dev'essere un cambiamento di fase π. [*Suggerimento:* Suppone che la direzione dei raggi RE e TE sia invertita, come è indicato in Fig. 20–46(c), e verificare che, in tal caso, il raggio finale nel mezzo (1) deve essere E e che nel mezzo (2) non deve esistere alcun raggio finale.]

20.20 Un polarizzatore ed un analizzatore sono orientati in modo tale che venga trasmesso il massimo flusso luminoso. A quale frazione del suo valore massimo viene ridotta l'intensità della luce trasmessa allorchè l'analizzatore viene ruotato di (a) 30°, (b) 45° (c) 60°, (d) 90°, (e) 120°, (f) 135°, (g) 150°, (h) 180°? Riportare su di un grafico I/I_{max} per un giro completo dell'analizzatore.

20.21 Un fascio parallelo di luce polarizzata rettilineamente di lunghezza d'onda 5.90×10^{-7} m (nel vuoto) incide su di un cristallo di calcite come in Fig. 20–26. Trovare le lunghezze d'onda delle onde ordinaria e straordinaria nel cristallo. Trovare anche la frequenza di ciascun raggio.

20.22 Un fascio di luce polarizzata in un piano incide perpendicolarmente su di una lastra di calcite (con i lati paralleli tagliati parallelamente all'asse ottico) con il vettore elettrico formante un angolo di 60° con l'asse ottico.

Figure 20–46

same coefficients when the ray is incident in medium (2), show that $T'T = 1 - R^2$ and $R = -R'$. These are called *Stokes' relations*. The second relation indicates that the reflection coefficients are of opposite sign, and if for one of the reflections there is no phase change, for the other there must be a phase change of π. [*Hint:* Assume that rays RE and TE are reversed in direction, as shown in Fig. 20–46(c), and recognize that in this case the final ray in medium (1) must be E and that no final ray must exist in medium (2).]

20.20 A polarizer and an analyzer are so oriented that the maximum amount of light is transmitted. To what fraction of its maximum value is the intensity of the transmitted light reduced when the analyzer is rotated through (a) 30°, (b) 45°, (c) 60°, (d) 90°, (e) 120°, (f) 135°, (g) 150°, (h) 180°? Plot I/I_{max} for a complete turn of the analyzer.

20.21 A parallel beam of linearly polarized light of wavelength 5.90×10^{-7} m (in vacuum) is incident on a calcite crystal as in Fig. 20–26. Find the wavelengths of the ordinary and extraordinary waves in the crystal. Also find the frequency of each ray.

20.22 A beam of plane polarized light falls perpendicularly on a calcite plate (with parallel sides cut parallel to the optical axis) with the electric vector making an angle of 60° with the optical axis. Trovare il rapporto delle ampiezze e delle intensità dei fasci ordinario e straordinario.

20.23 Trovare la spessore della lamina di calcite necessaria per produrre una differenza di cammino di (a) $\lambda/4$, (b) $\lambda/2$, (c) λ, fra i raggi ordinario e straordinario, per una lunghezza d'onda di 6×10^{-7} m.

20.24 Qual'è lo stato di polarizzazione della luce trasmessa da una *lamina quarto-d'onda* quando il vettore elettrico della luce incidente, polarizzata rettilineamente, forma un angolo di 30° con l'asse ottico?

20.25 Un *compensatore di Babinet* (Fig. 20–47) consiste in due cunei di quarzo che possono scorrere uno sull'altro. I cunei sono tagliati in modo tale che i loro assi ottici siano perpendicolari. Perciò il raggio ordinario in uno di essi è raggio straordinario nell'altro. Dimostrare che per qualsiasi raggio, la differenza di fase è $\delta = (2\pi/\lambda)(n_1 - n_2)(e - e')$, dove $e = AB$ e $e' = BC$. Perciò, se si fa scorrere un cuneo sull'altro, la differenza di fase può essere variata con continuità.

Figura 20–47

20.26 In un compensatore di Babinet, la larghezza di uno dei cunei è di 2 mm. Trovare la larghezza che deve avere l'altro per poter produrre una differenza di fase di $2\pi/3$ in entrambe le direzioni quando si usa luce di lunghezza d'onda 5.7×10^{-7} m.

20.27 In Fig. 20–48, A e C sono due polaroidi dei quali sono indicate le direzioni di trasmissione. B è un foglio di materiale birifrangente il cui asse ottico è verticale. Tutti e tre i fogli sono fra di loro paralleli. La luce non polarizzata entra da sinistra. Discutere

Find the ratio of the amplitudes and the intensities of the ordinary and extraordinary beams.

20.23 Find the thickness of a calcite plate needed to produce a phase difference of (a) $\lambda/4$, (b) $\lambda/2$, (c) λ, between the ordinary and the extraordinary rays, for a wavelength of 6×10^{-7} m.

20.24 What is the state of polarization of the light transmitted by a *quarter-wave plate* when the electric vector of the incident linearly polarized light makes an angle of 30° with the optic axis?

20.25 A *Babinet compensator* (Fig. 20–47) consists of two quartz wedges that can slide over each other. The wedges are so cut that their optical axes are perpendicular. Therefore the ordinary ray in one of them is the extraordinary ray in the other. Show that, for any ray, the phase difference is $\delta = (2\pi/\lambda)(n_1 - n_2)(e - e')$, where $e = AB$ and $e' = BC$. Therefore, if one slides one wedge along the other, the phase difference can be varied continuously.

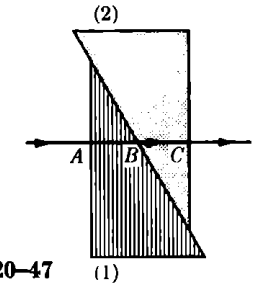


Figure 20–47

20.26 In a Babinet compensator, the width of one wedge is 2 mm. Find the width the other must have in order to produce a phase difference of $2\pi/3$ in either direction when using light with wavelength 5.7×10^{-7} m.

20.27 In Fig. 20–48, A and C are sheets of Polaroid whose transmission directions are as indicated. B is a sheet of doubly refractive material whose optical axis is vertical. All three sheets are parallel. Unpolarized light enters from the left. Discuss

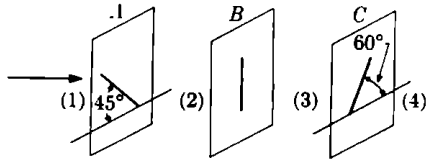


Figura 20–48

lo stato di polarizzazione della luce nei punti (2), (3), e (4).

20.28 La Fig. 20–49 rappresenta un *prisma di Wollaston* costituito di due prismi di quarzo incollati. L'asse ottico del prisma di destra è perpendicolare al foglio, mentre quello del prisma a sinistra è parallelo al foglio. La luce incidente è normale alla superficie e dà luogo a raggi ordinario e straordinario che viaggiano nel prisma di sinistra lungo lo stesso percorso, ma con velocità differente. Riprodurre la Fig. 20–49 e mostrare sul disegno come il raggio ordinario e il raggio straordinario vengono deviati nel passare nel prisma di destra e da questo nell'aria.

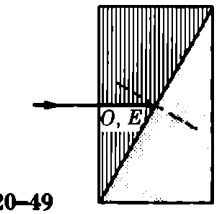


Figura 20–49

20.29 L'onda descritta nel Problema 19.4 incide perpendicolarmente su di un polarizzatore, il quale viene ruotato nel proprio piano, fino a che l'intensità trasmessa risulta massima. (a) In quale direzione si trova l'asse di trasmissione del polarizzatore? (b) In quale direzione si trova l'asse di trasmissione quando la trasmissione è minima? (c) Calcolare il rapporto delle intensità trasmesse nelle due posizioni determinate in (a) e (b).

20.30 Un fascio di luce bianca polarizzata rettilineamente incide perpendicolarmente su di una lastra di quarzo spessa 0.865 mm, tagliata parallelamente all'asse ottico. Il piano del campo elettrico forma un angolo di 45° con l'asse della lamina. Gli indici di rifrazione principali del quarzo per la luce al sodio sono elencati nella Tabella 20–2. Si trascuri la variazione di $n_1 - n_2$ con la lunghezza d'onda. (a) Quali lunghezze d'onda comprese fra 6.0×10^{-7} m e 7.0×10^{-7} m emergono dalla lamina polarizzate rettilineamente? (b) Quali lunghezze d'onda emergono polarizzate circolarmente? (c) Si supponga che il fascio emergente dalla lamina passi attraverso ad un analizzatore il cui asse di trasmissione sia perpendicolare al piano di vibrazione della luce incidente. Quali lunghezze d'onda mancheranno nel fascio trasmesso?

20.31 Un fascio di luce dopo aver attraversato un *prisma di Nicol* N_1, attraversa una cella contenente un mezzo diffondente. La cella viene osservata attraverso un altro prisma di Nicol, N_2, perpendicolarmente. Originariamente, i due prismi di Nicol vengono ruotati fino a che la luminanza del campo visto dall'osservatore è massima. (a) Il prisma N_2 viene ruotato di 90°. Si produce estinzione? (b) Il prisma N_1 viene ruotato ora di 90°. Il campo visto attraverso N_2 è chiaro o scuro? (c) Il prisma N_2 viene quindi riportato alla sua posizione originale. Il campo visto attraverso N_2 è chiaro o scuro?

20.32 È noto sperimentalmente che per ciascun grammo di zucchero sciolto in un cm^3 di acqua, la rotazione del piano di polarizzazione di un'onda elettromagnetica polarizzata rettilineamente è di +66.5° per cm di lunghezza. Un tubo lungo 30 cm contiene una soluzione di zucchero di 15 g ogni 100 cm^3 di soluzione. Trovare l'angolo di rotazione della luce polarizzata.

20.33 Trovare il contenuto di zucchero in un tubo cilindrico lungo 30 cm e con una sezione trasversale di 2 cm^2 se il piano di polarizzazione risulta ruotato di 39.7°. [*Suggerimento:* vedi il problema precedente.]

20.34 Valutare a quale profondità un'onda elettromagnetica è penetrata nel rame allorchè la sua ampiezza è diminuita a $1/e$ del suo valore sulla superficie, nel caso in cui la frequenza sia (a) nella regione delle microonde, 6×10^9 Hz, (b) nella regione visibile, 6×10^{14} Hz, (c) nella regione dei raggi x, 3×10^{18} Hz. Si assuma $\mu \approx \mu_0$.

Figure 20–48

the state of polarization of the light at points (2), (3), and (4).

20.28 Figure 20–49 represents a *Wollaston prism* made of two prisms of quartz cemented together. The optic axis of the right-hand prism is perpendicular to the page, whereas that of the left-hand prism is parallel. The incident light is normal to the surface and gives rise to ordinary and extraordinary rays which travel in the left-hand prism along the same path, but with different speeds. Copy Fig. 20–49 and show on your diagram how the ordinary and extraordinary rays are bent in going into the right-hand prism and thence into the air.

Figure 20–49

20.29 The wave described in Problem 19.4 is perpendicularly incident on a polarizer, which is rotated in its plane until the transmitted intensity is a maximum. (a) In which direction does the transmission axis of the polarizer lie? (b) In which direction does the transmission axis lie for minimum transmission? (c) Compute the ratio of the transmitted intensities for the positions found in (a) and (b).

20.30 A beam of white linearly polarized light is perpendicularly incident on a plate of quartz 0.865 mm thick, cut parallel to the optic axis. The plane of the electric field is at an angle of 45° to the axis of the plate. The principal indexes of refraction of quartz for sodium light are listed in Table 20–2. Disregard the variation of $n_1 - n_2$ with wavelength. (a) Which wavelengths between 6.0×10^{-7} m and 7.0×10^{-7} m emerge from the plate linearly polarized? (b) Which wavelengths emerge circularly polarized? (c) Suppose that the beam emerging from the plate passes through an analyzer whose transmission axis is perpendicular to the plane of vibration of the incident light. Which wavelengths are missing in the transmitted beam?

20.31 A beam of light, after passing through a *Nicol prism* N_1, traverses a cell containing a scattering medium. The cell is observed at right angles through another Nicol prism, N_2. Originally, the Nicol prisms are oriented until the brightness of the field seen by the observer is a maximum. (a) Prism N_2 is rotated through 90°. Is extinction produced? (b) Prism N_1 is now rotated through 90°. Is the field through N_2 bright or dark? (c) Prism N_2 is then restored to its original position. Is the field through N_2 bright or dark?

20.32 It is known experimentally that for each gram of sugar dissolved in one cm^3 of water, the rotation of the plane of polarization of a linearly polarized electromagnetic wave is +66.5° per cm of path. A tube 30 cm long contains a sugar solution with 15 gm of sugar per 100 cm^3 of solution. Find the angle of rotation of polarized light.

20.33 Find the amount of sugar in a cylindrical tube 30 cm long and 2 cm^2 in cross section if the plane of polarization is rotated 39.7°. [*Hint:* See preceding problem.]

20.34 Estimate how deeply an electromagnetic wave penetrates copper when its amplitude decreases to $1/e$ of its value at the surface, if the frequency is (a) in the microwave region, 6×10^9 Hz, (b) in the visible region, 6×10^{14} Hz, (c) in the x-ray region, 3×10^{18} Hz. Assume that $\mu \approx \mu_0$.

20.35 L'indice di rifrazione dell'aria è $n = 1 + 0.00024\rho$, dove ρ è la densità dell'aria

Zenith = Zenit
Apparent position of star = Posizione apparente della stella
True position of star = Posizione vera della stella

Figura 20–50

(in kg m^{-3}). Sia θ l'angolo di zenit effetivo di una stella e $\theta - \Delta\theta$ l'angolo di zenit apparente rispetto ad un osservatore che guarda la stella attraverso l'atmosfera (Fig. 20–50). (a) Scrivere l'equazione che dà $\Delta\theta$ in funzione dell'angolo di zenit reale θ, della densità ρ, della pressione atmosferica p, e della temperatura assoluta T. (b) Calcolare $\Delta\theta$ al livello del mare per una stella con $\theta = 45°$, assumendo una temperatura $T = 298°K$ (25°C).

20.35 The index of refraction of air is $n = 1 + 0.00024\rho$, where ρ is the density of air

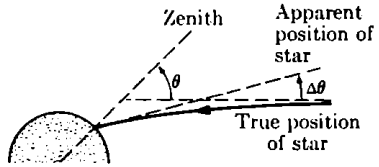


Figure 20–50

(in kg m^{-3}). Let θ be the true zenith angle of a star and $\theta - \Delta\theta$ the apparent zenith angle with respect to an observer looking at the star through the atmosphere (Fig. 20–50). (a) Write the equation giving $\Delta\theta$ as a function of the true zenith angle θ, the density ρ, the atmospheric pressure p, and the absolute temperature T. (b) Compute $\Delta\theta$ at sea level for a star with $\theta = 45°$, assuming a temperature $T = 298°K$ (25°C).

20.36 Un mezzo non omogeneo stratificato ha l'indice di rifrazione $n(y)$ variabile lungo la direzione Y. Dimostrare che l'equazione della traiettoria di un raggio, in accordo con l'Eq. (20.32), è

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} dy/\sqrt{n^2(y)/C^2 - 1}.$$

20.37 La traiettoria di un raggio in un mezzo non omogeneo è rappresentata da $x = A \sin(y/B)$. Calcolare l'indice di rifrazione n nello spazio compreso fra i piani $x = A$ e $x = -A$, facendo l'ipotesi che n dipenda soltanto da x e abbia il valore n_0 per $x = 0$.

20.38 L'indice di rifrazione di un mezzo è dato da $n = h + kx$. Determinare la traiettoria del raggio passante per l'origine degli assi coordinati e formante in tale punto un angolo ϕ_0 con l'asse X. Disegnare la traiettoria del raggio, assumendo $h = 1$, $k = 1$, e $\phi_0 = 45°$.

20.36 An inhomogeneous stratified medium has an index of refraction that varies in the Y-direction, that is, $n(y)$. Show that the equation of the path of a ray, satisfying Eq. (20.32), is

$$x = x_0 + \int_{y_0}^{y} dy/\sqrt{n^2(y)/C^2 - 1}.$$

20.37 The trajectory of a ray in a nonhomogeneous medium is represented by $x = A \sin(y/B)$. Compute the index of refraction n in the space between the planes $x = A$ and $x = -A$, assuming that n depends only on x and has the value n_0 at $x = 0$.

20.38 The index of refraction of a certain medium is given by $n = h + kx$. Compute the trajectory of the ray passing through the origin of the coordinate axes and forming at this point an angle ϕ_0 with the X-axis. Plot the trajectory of the ray, assuming that $h = 1$, $k = 1$, and $\phi_0 = 45°$.

21
GEOMETRIA DELLA PROPAGAZIONE PER ONDE

21.1 Introduzione
21.2 Riflessione su una superficie sferica
21.3 Rifrazione ad una superficie sferica
21.4 Lenti
21.5 Strumenti ottici
21.6 Il prisma
21.7 Dispersione
21.8 Aberrazione cromatica
21.9 Principio di Fermat del tempo stazionario

21
WAVE GEOMETRY

21.1 Introduction
21.2 Reflection at a Spherical Surface
21.3 Refraction at a Spherical Surface
21.4 Lenses
21.5 Optical Instruments
21.6 The Prism
21.7 Dispersion
21.8 Chromatic Aberration
21.9 Fermat's Principle of Stationary Time

21.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti abbiamo discusso alcuni fenomeni che avvengono quando un'onda passa da un mezzo a un altro in cui il modo di propagazione è diverso. Abbiamo analizzato non solo quello che accade al fronte d'onda, ma abbiamo anche introdotto il concetto di raggio, il quale è molto utile per le costruzioni geometriche.

In questo capitolo tratteremo più completamente i fenomeni di riflessione e rifrazione dal punto di vista geometrico, usando il concetto di raggio come strumento per descrivere i processi che avvengono alla superficie di discontinuità. Supporremo che i processi siano soltanto riflessioni e rifrazioni e che non avvengano altri cambiamenti nelle superfici d'onda. (Differiremo la trattazione della diffrazione e della diffusione fino al Capitolo 23.) Questo modo di considerare l'argomento è quello che possiamo chiamare *geometria della propagazione per onde* o *costruzione grafica della immagini*(N.T.). In particolare, per onde elettromagnetiche nelle regioni del visibile e vicine al visibile, esso costituisce l'*ottica geometrica*, che è una branca molto importante della fisica applicata.

Tale trattamento geometrico è adeguato fintantochè la superficie e le altre discontinuità incontrate dall'onda nella sua propagazione sono molto grandi rispetto

Fig. 21–1. Formazione di una immagine mediante uno stenoscopio. Le rette tracciate rappresentano i cammini dei raggi. La serie di fotografie indica come varia la nitidezza della immagine al decrescere del diametro del foro. Si noti che vi è un diametro ottimo per la nitidezza della immagine. (La fotografia è dovuta alla cortesia del Dr. N. Joel, Progetto Pilota UNESCO per l'insegnamento della fisica)

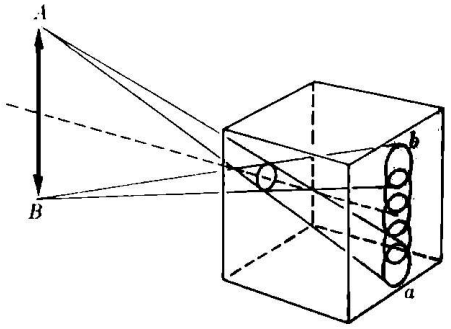
N.T. Intendiamo per "ray tracing" l'applicazione dei raggi luminosi alla teoria della formazione delle immagini.

21.1 Introduction

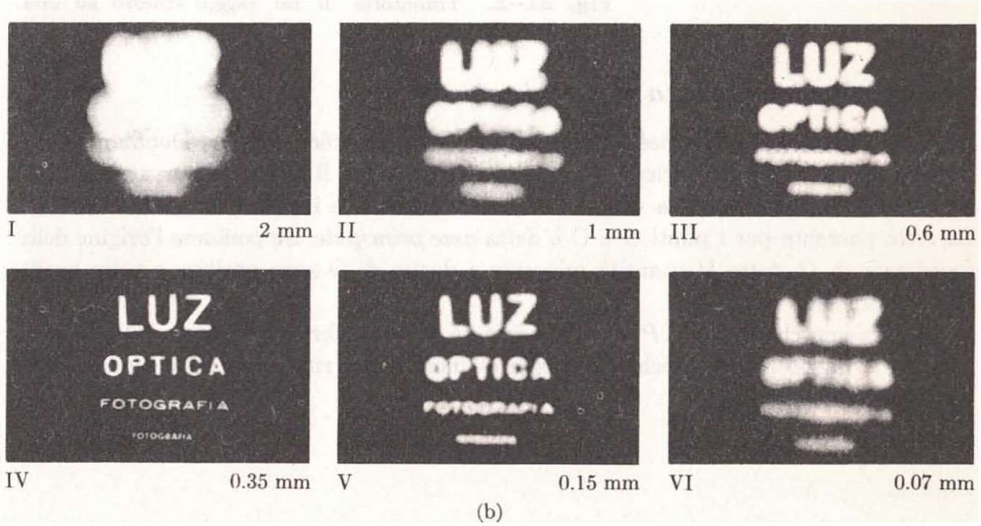
In previous chapters we discussed some phenomena that occur when a wave passes from one medium to another in which the propagation is different. We not only analyzed what happens to the wave front, but we introduced the concept of a ray as one which is very useful for geometrical constructions.

In this chapter we are going to elaborate more fully on the phenomena of reflection and refraction from the geometrical point of view, using the ray concept as the tool for describing the processes that occur at the surfaces of discontinuity. We shall also assume that the processes are only reflections and refractions and that no other changes occur at the wave surfaces. (We shall defer consideration of diffraction and scattering until Chapter 23.) This way of looking at the subject is what we may call *wave geometry*, or *ray tracing*. In particular for electromagnetic waves in the visible and near-visible regions, it constitutes *geometrical optics*, which is a very important branch of applied physics.

This geometrical treatment is adequate so long as the surfaces and other discontinuities encountered by the wave during its propagation are very large com-



(a)



(b)

Fig. 21–1. Image formation by a pinhole camera. The line drawing illustrates the ray paths. The series of photographs shows the change in the clarity of the image as the diameter of the hole is decreased. Note that there is an optimum diameter for image clarity. (Photograph courtesy of Dr. N. Joel, UNESCO Pilot Project for the teaching of physics)

alla lunghezza d'onda. Fintantochè questa condizione è soddisfatta, la nostra trattazione si applica ugualmente bene alle onde luminose, alle onde acustiche (specialmente ultrasoniche), alle onde generate in un terremoto, ecc. Tuttavia, nella maggior parte dei nostri esempi, considereremo onde luminose, perchè esse sono forse le più famigliari e importanti da questo punto di vista, e per questa ragione potremo considerare questo un capitolo di ottica geometrica.

Un esempio caratteristico dell'impiego dei raggi è l'immagine prodotta da uno stenoscopio (Fig. 21—1). Un tale dispositivo consiste in una scatola con un foro molto piccolo su una parete. Se un oggetto AB che emette onde è posto davanti ad esso, i raggi Bb ed Aa formeranno un'immagine ab sulla parete opposta. Questa immagine è ben definita quando il foro è molto piccolo, cosicchè soltanto una piccola frazione del fronte d'onda passa attraverso ad esso, e perciò, per ciascun punto dell'oggetto, vi è un punto corrispondente dell'immagine. Se il foro è troppo grande, l'immagine appare confusa perchè, a ciascun punto dell'oggetto, corrisponde una macchia nell'immagine. Inoltre, il foro non deve essere così piccolo che il suo raggio sia confrontabile con la lunghezza d'onda, perchè allora cominciano ad apparire gli effetti della diffrazione e l'immagine ab appare ancora confusa (come sarà discusso nel Capitolo 23).

pared with the wavelength. So long as this condition is fulfilled, our treatment applies equally well to light waves, acoustical waves (especially ultrasonic), earthquake waves, etc. However, in most of our examples we shall consider light waves, since they are perhaps the more familiar and important from this point of view, and for this reason we could also consider this a chapter on geometrical optics.

A characteristic example of the use of rays is the image produced by a pinhole camera (Fig. 21–1). Such a camera consists of a box with a very small hole in one side. If an object AB emitting waves is placed in front of it, the rays Bb and Aa will form an image ab on the opposite side. This image is well defined when the hole is very small, so that only a small fraction of the wave fronts pass through it, and therefore, for each point of the object, there is a corresponding point of the image. If the hole is too large, the image appears blurred because, to each point of the object, there corresponds a spot in the image. Further, the hole must not be so small that its radius is comparable with the wavelength, because then diffraction effects begin to appear and the image ab again appears blurred (as will be discussed in Chapter 23).

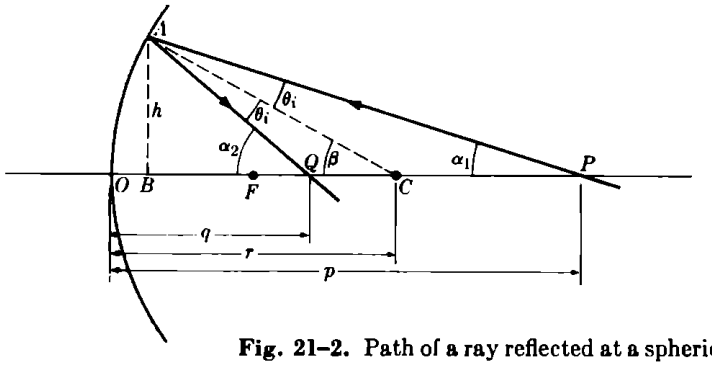


Fig. 21–2. Traiettoria di un raggio riflesso su una superficie sferica.

Fig. 21–2. Path of a ray reflected at a spherical surface.

21.2 *Riflessione su una superficie sferica*

Iniziamo considerando la riflessione di onde su una superficie sferica. Dobbiamo dapprima stabilire certe definizioni e convenzioni sui segni. Il centro di curvatura C è il centro della superficie sferica (Fig. 21—2) e il vertice O è il polo della calotta sferica. La retta passante per i punti O e C è detta *asse principale*. Se poniamo l'origine delle coordinate in O, tutte le quantità misurate a destra di O sono positive e tutte quelle alla sinistra sono negative.

Supponiamo che il punto P sia una sorgente di onde sferiche. Il raggio PA è riflesso secondo il raggio AQ e, poichè gli angoli di incidenza e riflessione sono uguali, dalla figura abbiamo che

e

e quindi

21.2 *Reflection at a Spherical Surface*

We begin by considering the reflection of waves at a spherical surface. We must first establish certain definitions and sign conventions. The center of curvature C is the center of the spherical surface (Fig. 21–2) and the vertex O is the pole of the spherical cap. The line passing through O and C is called the *principal axis*. If we take our origin of coordinates at O, all quantities measured to the right of O are positive and all those to the left are negative.

Suppose that point P is a source of spherical waves. The ray PA is reflected as the ray AQ and, since the angles of incidence and reflection are equal, we have from the figure that

$$\beta = \theta_i + \alpha_1 \qquad \text{and} \qquad \alpha_2 = \beta + \theta_i,$$

resulting in

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta. \tag{21.1}$$

Supponendo che gli angoli α_1, α_2, e β siano molto piccoli (cioè i raggi siano parassiali), possiamo scrivere con buona approssimazione

$$\alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{AB}{BP} \approx \frac{h}{p},$$
$$\alpha_2 \approx \tan \alpha_2 = \frac{AB}{BQ} \approx \frac{h}{q},$$
$$\beta \approx \tan \beta = \frac{AB}{BC} \approx \frac{h}{r}.$$

Sostituendo nell'Eq. (21.1) e semplificando il fattore comune h, otteniamo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}, \tag{21.2}$$

che è la *formula di Descartes per la riflessione su una superficie sferica*. Essa implica che, nei limiti delle approssimazioni usate nel ricavarla, tutti i raggi incidenti passanti per P passino per Q dopo la riflessione sulla superficie. Noi diciamo allora che Q *è l'immagine di* P.

Per il caso particolare in cui il raggio incidente è parallelo all'asse principale, il che equivale a porre l'oggetto a una distanza molto grande dallo specchio, abbiamo $p = \infty$. Allora l'Eq. (21.2) diventa $1/q = 2/r$ e l'immagine si forma nel punto F, a una distanza dallo specchio data da $q = r/2$. Il punto F è chiamato *fuoco* dello specchio sferico e la sua distanza dallo specchio è chiamata *distanza focale*, ed è indicata con f, cosicchè $f = r/2$. Allora l'Eq. (21.2) può scriversi nella forma

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \tag{21.3}$$

Poichè f può essere determinata sperimentalmente osservando il punto in cui convergono i raggi che sono paralleli all'asse principale, non è necessario conoscere il

Assuming that the angles α_1, α_2, and β are very small (i.e., the rays are paraxial), we may write with good approximation

Substituting in Eq. (21.1), and canceling the common factor h, we get

which is *Descartes' formula for reflection at a spherical surface*. It implies that, under the approximations used in its derivation, all incident rays passing through P will go through Q after reflection at the surface. We say then that Q *is the image of* P.

For the special case in which the incident ray is parallel to the principal axis, which is equivalent to placing the object at a very large distance from the mirror, we have $p = \infty$. Then Eq. (21.2) becomes $1/q = 2/r$ and the image falls at point F, a distance from the mirror given by $q = r/2$. Point F is called the *focus* of the spherical mirror, and its distance from the mirror is called the *focal length*, designated by f, so that $f = r/2$. Then Eq. (21.2) can be written in the form

Since f can be determined experimentally by observing the point of convergence of rays which are parallel to the principal axis, it is not necessary to know the

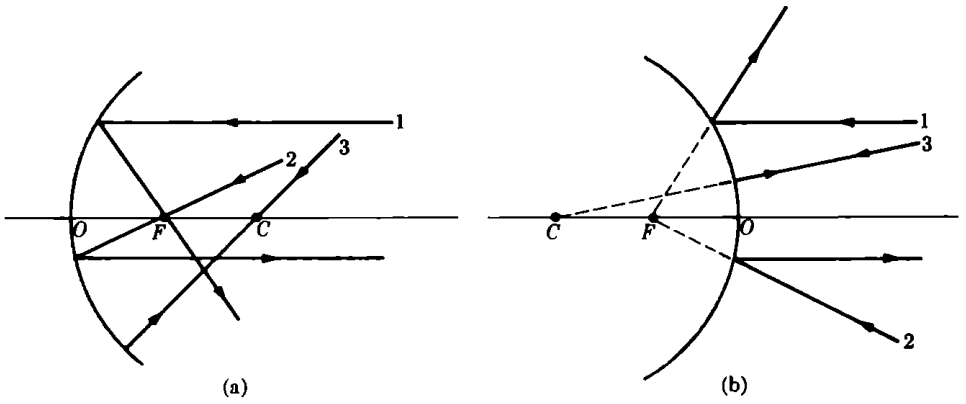


Fig. 21–3. Raggi principali nel caso di specchi sferici. (a) Concavo e (b) convesso.

Fig. 21–3. Principal rays in spherical mirrors. (a) Concave and (b) convex.

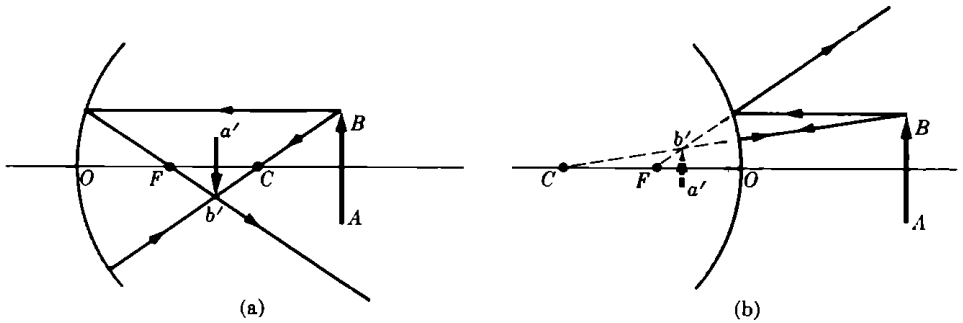


Fig. 21–4. Costruzione dell'immagine nel caso di specchi sferici. (a) Concavo e (b) convesso.

raggio r per applicare l'Eq. (21.3). Si noti che se $q = \infty$, allora $p = f$, cosicchè tutti i raggi incidenti che passano per il fuoco F sono riflessi parallelamente all'asse principale.

Secondo la nostra convenzione sui segni, le superficie concave hanno raggio positivo, mentre le superficie convesse hanno raggio negativo. Perciò i segni delle corrispondenti distanza focali sono rispettivamente positivi o negativi. La Fig. 21—3 mostra i cosidetti *raggi principali* per una superficie concava e una convessa. Il raggio 1 è un raggio parallelo, il 2 è un raggio focale, e il 3 è un raggio centrale che incide normalmente ($\theta_i = 0$). In Fig. 21—4 questi raggi vengono usati per illustrare la costruzione di un'immagine da parte di una superficie riflettente sferica. L'*oggetto* è AB e l'*immagine* è $a'b'$. In Fig. 21—4(a), l'immagine è *reale* (in quanto i raggi riflessi effettivamente si incontrano), e in Fig. 21—4(b) essa è *virtuale* (perchè sembra soltanto che i raggi si siano incontrati dietro lo specchio). La Tabella 21—1 elenca le convenzioni sui segni usate in questo testo.

Quando l'apertura di uno specchio è grande cosicchè esso riceve raggi di grande inclinazione, l'Eq. (21.3) non costituisce più una buona approssimazione. In tale caso, non c'è un ben definito punto immagine corrispondente a un punto oggetto, ma un numero infinito; quindi, l'immagine di un oggetto esteso appare sfocata. La Fig. 21—5 mostra

Fig. 21–4. Image construction in spherical mirrors. (a) Concave and (b) convex.

radius r in order to apply Eq. (21.3). Note that if $q = \infty$, then $p = f$, so that all incident rays passing through the focus F are reflected parallel to the principal axis.

Due to our sign convention, concave surfaces have a positive radius, while convex surfaces have a negative radius. Therefore the signs of the corresponding focal lengths are positive and negative, respectively. Figure 21–3 shows the so-called *principal rays* for a concave and a convex surface. Ray 1 is a parallel ray, 2 is a focal ray, and 3 is a central ray, which makes normal incidence ($\theta_i = 0$). In Fig. 21–4 these rays are used to illustrate the formation of an image by a spherical reflecting surface. The *object* is AB and the *image* is $a'b'$. In Fig. 21–4(a) the image is *real* (since the reflected rays do cross), and in Fig. 21–4(b) it is *virtual* (because the rays only seem to have crossed behind the mirror). Table 21–1 lists the sign conventions which are used in this text.

When the aperture of a mirror is large, so that it accepts rays of large inclination, Eq. (21.3) is no longer a good approximation. In such a case, there is not a well-defined point image corresponding to a point object, but an infinite number of them; hence the image of an extended object appears blurred. Figure 21–5 shows

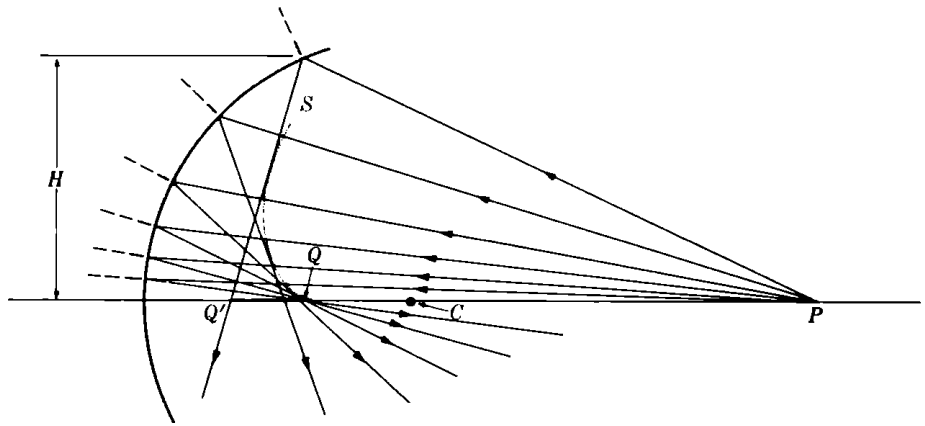


Fig. 21—5. Aberrazione sferica in uno specchio concavo.

Fig. 21–5. Spherical aberration in a concave mirror.

TABELLA 21–1 Convenzione sui segni per gli specchi sferici

	+	−
Raggio r	Concavo	Convesso
Distanza focale f	Convergente	Divergente
Oggetto p	Reale	Virtuale
Immagine q	Reale	Virtuale

i raggi provenienti dal punto P e riflessi sullo specchio. Vediamo che i raggi non si incontrano tutti nello stesso punto, ma su un segmento QQ' lungo l'asse, tale effetto è detto *aberrazione sferica*. La posizione del punto Q, che corrisponde ai raggi che formano un angolo molto piccolo con l'asse, è determinata dall'Eq. (21.3); Q' corrisponde ai raggi che formano una inclinazione massima. I raggi riflessi si incontrano anche lungo una superficie conica, che è indicata dalla linea marcata QS, e che è detta *caustica per riflessione*.

L'aberrazione sferica non può essere eliminata, ma con una appropriata realizzazione della superficie, essa può venire soppressa per certe posizioni chiamate *anastigmatiche*. Per un punto oggetto nel centro di uno specchio sferico, l'immagine è esattamente un punto (ancora nel centro) ed esso non ha aberrazione sferica. Perciò il centro di uno specchio sferico è una posizione *anastigmatica*. Le posizioni anastigmatiche possono essere modificate cambiando la forma della superficie. Per le proprietà della parabola, uno specchio parabolico per esempio non dà luogo ad aberrazioni per raggi che sono paralleli all'asse principale; essi devono passare tutti per il fuoco della parabola. Per questo nei telescopi vengono usati specchi parabolici, non soltanto per raggi la cui lunghezza d'onda è compresa nella ragione del visibile dello spettro elettromagnetico ma anche per raggi nella regione delle radiofrequenze, come nei radiotelescopi (Fig. 21—6).

Un radiotelescopio consiste in uno specchio parabolico metallico costituito da una reticella. Nel fuoco dello specchio viene posto un dipolo che costituisce l'antenna ricevente. I segnali ricevuti dall'antenna, che sono onde elettromagnetiche che si propagano in una direzione parallela all'asse dello specchio, vengono trasmesse al laboratorio per essere analizzati. Analogamente, uno specchio ellittico è anche anastigmatico per un oggetto posto in un fuoco dell'ellisse e la cui immagine cade esattamente nell'altro fuoco.

Oltre l'aberrazione sferica, vi sono altri difetti che si osservano nelle immagini prodotte per riflessione (o rifrazione) su superficie sferiche. Tuttavia, non li discuteremo, poichè essi fanno parte di argomenti piuttosto specializzati di ottica.

ESEMPIO 21.1. Discutere la formazione di una immagine formata da uno specchio di grande apertura.

Soluzione: Quando uno specchio sferico ha una grande apertura, e può contenere raggi di grande inclinazione, l'approssimazione fatta nel ricavare l'Eq. (21.2) non è più valida, poichè la sostituzione di tan α con α non sarà allora una approssimazione molto buona. Non è difficile ottenere un'altra espressione più precisa dell'Eq. (21.2). Quando applichiamo il teorema dei seni ai triangoli ACP e ACQ (Fig. 21—2), otteniamo

TABLE 21–1 Sign Conventions in Spherical Mirrors

	+	−
Radius r	Concave	Convex
Focus f	Convergent	Divergent
Object p	Real	Virtual
Image q	Real	Virtual

the rays coming from the point P and reflected at the mirror. We see that the rays do not all intersect at the same point, but on a segment QQ' along the axis, an effect called *spherical aberration*. The point Q, which corresponds to the rays that make a very small angle with the axis, is determined by Eq. (21.3); Q' corresponds to the rays which make a maximum inclination. The reflected rays also intersect along a conical surface, which is indicated by the heavy line QS, and which is called the *reflection caustic*.

Spherical aberration cannot be eliminated, but by proper design of the surface it can be suppressed for certain positions, called *anastigmatic*. For a point object at the center of a spherical mirror, the image is exactly a point (also at the center), and it has no spherical aberration. Therefore the center of a spherical mirror is an *anastigmatic* position. Anastigmatic positions can be modified by changing the shape of the surface. For example, because of the property of the parabola, a parabolic mirror produces no aberration for rays which are parallel to the principal axis; they must all pass through the focus of the parabola. This is why parabolic mirrors are used in telescopes, not only for receiving rays in the visible region of the electromagnetic spectrum but also for receiving rays in the radiofrequency region, as in radiotelescopes (Fig. 21–6).

A radiotelescope consists of a metallic parabolic mirror formed by a wire mesh. A dipole receiving antenna is placed at the focus of the mirror. The signals received by the antenna, corresponding to electromagnetic waves propagating in a direction parallel to the axis of the mirror, are transmitted to the laboratory for analysis. Similarly, an elliptical mirror is also anastigmatic for an object placed at one focus of the ellipse whose image falls exactly at the other focus.

There are other defects beside spherical aberration which we observe in the images produced by reflection (or refraction) at spherical surfaces. However, we shall not discuss them, since they belong to rather specialized branches of optics.

EXAMPLE 21.1. Discuss image formation for a mirror whose aperture is large.

Solution: When a spherical mirror has a large aperture, and can accept rays of large inclination, the approximation made in obtaining Eq. (21.2) is no longer valid, since the replacement of α by tan α would then not be a very good approximation. It is not difficult to obtain another expression more precise than Eq. (21.2). When we apply the law of sines to triangles ACP and ACQ (Fig. 21–2), we obtain

$$\frac{CP}{AP} = \frac{\sin\theta_i}{\sin(\pi - \beta)}, \qquad \frac{QC}{AQ} = \frac{\sin\theta_i}{\sin\beta}.$$

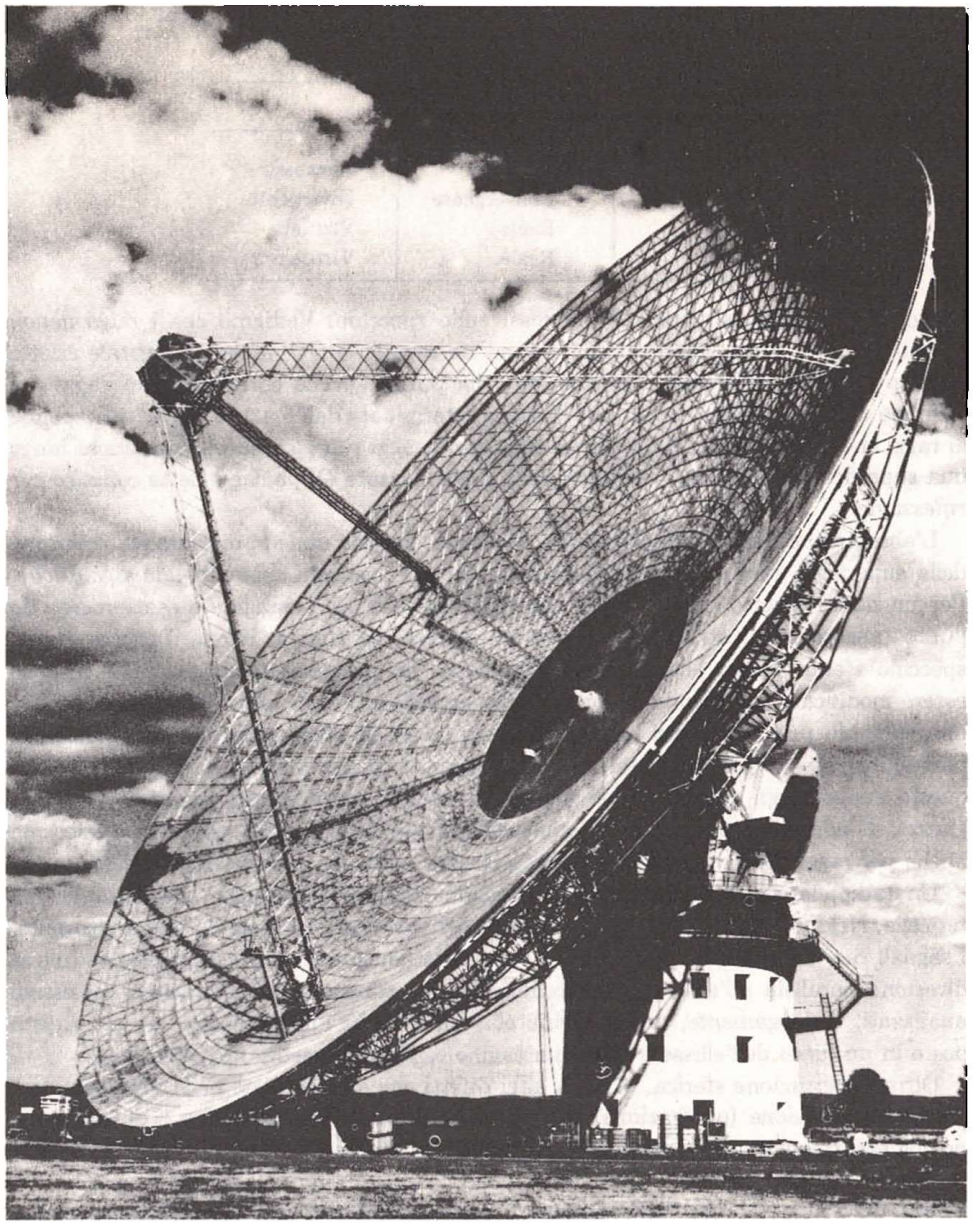


Fig. 21–6. Radiotelescopio riflettore di Parkes, New South Wales, Australia. Il riflettore ha un diametro di 210 ft (64 m). Il riflettore può ruotare intorno alla verticale come pure variare angolo di zenit, ed è orientabile verso la maggior parte del cielo visibile. Il telescopio è progettato per una prestazione ottima per la lunghezza d'onda di 21 cm corrispondente alla riga dell'idrogeno, anche se esso è ancora sensibile fino a lunghezze d'onda di pochi centimetri. La collocazione, a 210 miglia da Sydney, venne scelta in modo che l'interferenza elettrica fosse minima. (Fotografia dovuta alla cortesia dell'Australian News and Information Bureau)

Fig. 21–6. Reflecting radiotelescope at Parkes, New South Wales, Australia. The reflector is 210 ft (or 64 m) in diameter. The reflector can rotate about the vertical as well as change in zenith angle, and is steerable over most of the visible sky. The telescope is designed for optimum performance at the 21-cm hydrogen-line wavelength, although it is still sensitive down to wavelengths of a few centimeters. The location, 210 miles from Sydney, was chosen so that there would be minimum electrical interference. (Photograph courtesy of the Australian News and Information Bureau)

Allora, poichè sin $(\pi - \beta) = \sin \beta$, si ha

ossia

$$\frac{CP}{AP} = \frac{QC}{AQ} \quad \text{or} \quad \frac{p - r}{AP} = \frac{r - q}{AQ},$$

che può essere scritta nella forma

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\frac{p}{AP} = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\frac{q}{AQ}. \tag{21.4}$$

Se α_1 e α_2 sono molto piccoli, possiamo fare l'approssimazione $p = AP$ e $q = AQ$, ritrovando l'Eq. (21.2). Procedendo ulteriormente, dal triangolo ACP, abbiamo

$$\begin{aligned} AP^2 &= r^2 + (p - r)^2 + 2r(p - r)\cos\beta \\ &= p^2 - 2r(p - r)(1 - \cos\beta) \\ &= p^2 - 4r(p - r)\sin^2 \tfrac{1}{2}\beta \\ &= p^2\left[1 - 4\frac{r^2}{p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\sin^2 \tfrac{1}{2}\beta\right] \\ &\approx p^2\left[1 - \frac{h^2}{p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\right], \end{aligned}$$

dove nell'ultima riga è stata fatta l'approssimazione sin $\frac{1}{2}\beta \approx \frac{1}{2}\beta \approx h/2r$. Allora

$$\frac{p}{AP} = \left[1 - \frac{h^2}{p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\right]^{-1/2} = 1 + \frac{h^2}{2p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right), \tag{21.5}$$

dove è stata fatta l'approssimazione $(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x$, in base all'Eq. (M.28). Nello stesso modo, considerando il triangolo AQC, abbiamo

$$\frac{q}{AQ} = 1 + \frac{h^2}{2q}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right). \tag{21.6}$$

Allora, sostituendo nell'Eq. (21.4), otteniamo

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\left[1 + \frac{h^2}{2p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\right] = \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right)\left[1 + \frac{h^2}{2q}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\right].$$

Moltiplicando e radunando i termini, otteniamo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} + \frac{h^2}{2}\left[\frac{1}{p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2 + \frac{1}{q}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)^2\right].$$

Poichè il secondo termine al secondo membro è un termine correttivo, possiamo usare l'Eq. (21.2) per eliminare q in questo termine. Se ne deduce che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r} + \frac{h^2}{r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2. \tag{21.7}$$

La distanza h è determinata dall'inclinazione dei raggi, più grande è h più piccolo è q. Perciò tutti i raggi uscenti da un punto P (Fig. 21–5) sull'asse principale si incontrano, non nello stesso punto, ma su un segmento QQ', come indicato precedentemente.

The distance h is determined by the inclination of the rays, and the larger the h, the smaller the q. Therefore all rays emanating from a point P (Fig. 21–5) on the principal axis intersect, not at the same point, but on a segment QQ', as previously indicated.

Otteniamo la posizione del punto Q usando l'Eq. (21.2) o ponendo $h = 0$ nell'Eq. (21.7). Otteniamo la posizione di Q' facendo $h = H$, dove H è il raggio della base della superficie sferica.

ESEMPIO 21.2. Trovare una espressione per l'ingrandimento ottenuto mediante uno specchio sferico.

Soluzione: L'*ingrandimento* M di un sistema ottico è definito come il rapporto della dimensione dell'immagine a quella dell'oggetto. Cioè $M = ab/AB$. L'ingrandimento può essere positivo o negativo a seconda che l'immagine è diritta o capovolta rispetto all'oggetto. Dalla Fig. 21–7 vediamo che

dove il segno meno è dovuto al fatto che ab è negativo, in quanto l'immagine è capovolta; perciò, considerando che $\theta_i = \theta_r'$, abbiamo allora che

Fig. 21–7. Calcolo dell'ingrandimento prodotto da uno specchio sferico.

ESEMPIO 21.3. Uno specchio concavo ha un raggio di 0.600 m. Un oggetto è posto a 1.000 m dallo specchio. Trovare le immagini più vicina e più lontana formate dallo specchio, supponendo che la sua apertura sia 20°.

Soluzione: In questo caso abbiamo $r = +0.600$ m e $p = +1.000$ m. Perciò, per raggi parassiali, usando l'Eq. (21.2), abbiamo

ossia

I raggi con la massima inclinazione producono un'immagine ottenuta mediante l'Eq. (21.7), con $h = r \sin\beta$ e $\beta = \frac{1}{2}(20°) = 10°$. Quindi $h = 0.600 \sin 10° = 0.104$ m e $h^2 = 0.011$ m^2. Perciò

ossia $q = +0{,}427$ m. Perciò le immagini stanno su un piccolo segmento, di lunghezza circa 0.002 m = 2 mm, lungo l'asse principale.

21.3 *Rifrazione ad una superficie sferica*

Considereremo ora la rifrazione ad una superficie sferica che separa due mezzi i cui indici di rifrazione assoluti sono n_1 e n_2 (Fig. 21–8). Gli elementi geometrici fondamentali sono gli stessi definiti nel paragrafo precedente. Un raggio incidente come il raggio PA è rifratto lungo AD che, quando viene prolungato all'indietro nel primo mezzo incontra l'asse principale in Q. Dalla figura osserviamo che

We obtain the point Q by using Eq. (21.2) or by setting $h = 0$ in Eq. (21.7). We obtain Q' by making $h = H$, where H is the radius of the base of the spherical surface.

EXAMPLE 21.2. Obtain an expression for the magnification produced by a spherical mirror.

Solution: The *magnification* M of an optical system is defined as the ratio of the size of the image to that of the object. That is, $M = ab/AB$. The magnification may be positive or negative, depending on whether the image is erect or inverted with respect to the object. From Fig. 21–7 we see that

$$\tan\theta_i = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{p},$$

$$\tan\theta_r' = -\frac{ab}{Oa} = -\frac{ab}{q},$$

where the minus sign is due to the fact that ab is negative, since the image is inverted. Thus, considering that $\theta_i = \theta_r'$, we have then that

$$M = -q/p. \qquad (21.8)$$

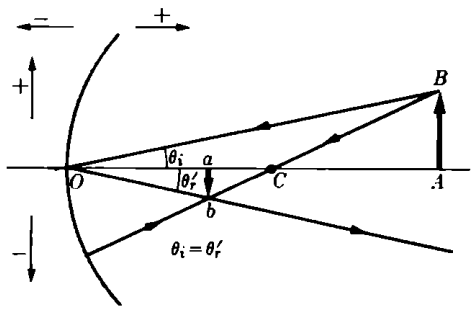


Fig. 21–7. Calculation of magnification by a spherical mirror.

EXAMPLE 21.3. A concave mirror has a radius of 0.600 m. An object is placed 1.000 m from the mirror. Find the closest and farthest images produced by the mirror, assuming that its aperture is 20°.

Solution: In this case we have $r = +0.600$ m and $p = +1.000$ m. Therefore, for paraxial rays, we have, using Eq. (21.2), that

$$\frac{1}{1.000} + \frac{1}{q} = \frac{2}{0.600} \quad \text{or} \quad q = +0.429 \text{ m}.$$

The rays with maximum inclination produce an image obtained by using Eq. (21.7), with $h = r \sin\beta$ and $\beta = \frac{1}{2}(20°) = 10°$. Hence $h = 0.600 \sin 10° = 0.104$ m and $h^2 = 0.011$. Thus

$$\frac{1}{1.000} + \frac{1}{q} = \frac{2}{0.600} + \frac{0.011}{0.600}\left(\frac{1}{0.600} - \frac{1}{1.000}\right)^2$$

or $q = +0.427$ m. Therefore the images occupy a small segment, of length about 0.002 m = 2 mm, along the principal axis.

21.3 *Refraction at a Spherical Surface*

Now we shall consider the refraction at a spherical surface separating two media whose absolute indexes of refraction are n_1 and n_2 (Fig. 21–8). The fundamental geometric elements are the same as defined in the previous section. An incident ray such as PA is refracted along AD which, when it is extended back into the first medium, intersects the principal axis at Q. From the figure we observe that

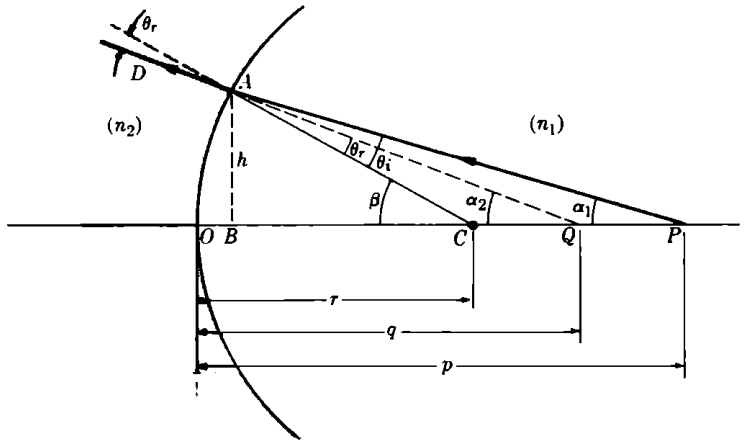


Fig. 21–8. Traiettoria di un raggio rifratto ad una superficie sferica.

Fig. 21–8. Path of a ray refracted at a spherical surface.

$\beta = \theta_i + \alpha_1$ e $\beta = \theta_r + \alpha_2$. Ora dalla legge di Snell, si ha $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$. Supponiamo, come abbiamo fatto nel Paragrafo precedente, che i raggi abbiano una inclinazione molto piccola. Gli angoli θ_i, θ_r, α_1, α_2, e β sono tutti molto piccoli; possiamo quindi scrivere $\sin\theta_i \approx \theta_i$ e $\sin\theta_r \approx \theta_r$, cosicchè la legge di Snell diventa $n_1\theta_i = n_2\theta_r$, ossia

$\beta = \theta_i + \alpha_1$ and $\beta = \theta_r + \alpha_2$. Now from Snell's law, $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$. We assume, as we did in the preceding section, that the rays have a very small inclination. Hence the angles θ_i, θ_r, α_1, α_2, and β are all very small, and we may write $\sin\theta_i \approx \theta_i$ and $\sin\theta_r \approx \theta_r$, so that Snell's law becomes $n_1\theta_i = n_2\theta_r$ or

$$n_1(\beta - \alpha_1) = n_2(\beta - \alpha_2). \tag{21.9}$$

Ora dalla Fig. 21–8 troviamo, come nel caso della riflessione, che

Now from Fig. 21–8 we find that, as in the case of reflection,

$$\alpha_1 \approx \frac{h}{p}, \qquad \alpha_2 \approx \frac{h}{q}, \qquad \beta \approx \frac{h}{r},$$

cosicchè, quando sostituiamo nella Eq. (21.9), semplifichiamo i fattori comuni, e riordiniamo i termini, otteniamo

so that, when we substitute in Eq. (21.9), cancel common factors, and rearrange terms, we get

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r}, \tag{21.10}$$

che è la *formula di Descartes per la rifrazione ad una superficie sferica.*

Il *fuoco oggetto* F_o, detto anche il *primo punto focale* di una superficie rifrangente sferica, è la posizione di un punto oggetto sull'asse principale tale che i raggi rifratti sono paralleli all'asse principale, e questo equivale ad avere all'infinito l'immagine del punto, ossia $q = \infty$. La distanza dell'oggetto dalla superficie sferica è chiamata la *prima distanza focale,*[N.T.] indicata con f_o. Ponendo $p = f_o$ e $q = \infty$ nella Eq. (21.10), abbiamo $n_1/f_o = (n_1 - n_2)/r$, cioè

which is *Descartes' formula for refraction at a spherical surface.*

The *object focus* F_o, also called the *first focal point* of a spherical refracting surface, is the position of a point object on the principal axis such that the refracted rays are parallel to the principal axis, which amounts to having the image of the point at infinity, or $q = \infty$. The distance of the object from the spherical surface is called the *object focal length,* designated by f_o. Setting $p = f_o$ and $q = \infty$ in Eq. (21.10), we have $n_1/f_o = (n_1 - n_2)/r$, or

$$f_o = \frac{n_1}{n_1 - n_2} r. \tag{21.11}$$

Analogamente, quando i raggi incidenti sono paralleli all'asse principale, che è equivalente ad avere l'oggetto a distanza molto grande dalla superficie sferica ($p = \infty$), i raggi rifratti passano per un punto F_i sull'asse principale detto

Similarly, when the incident rays are parallel to the principal axis, which is equivalent to having the object at a very large distance from the spherical surface ($p = \infty$), the refracted rays pass through a point F_i on the principal axis called

N.T. Il termine "object focal length" corrisponde al termine italiano "prima distanza focale" o "distanza focale nello spazio — oggetto." Analogamente, per il termine "image focal length."

TABELLA 21–2 Convenzione sui segni per una superficie rifrangente sferica

	+	−
Raggio r	Concava	Convessa
Distanza focale f_o	Convergente	Divergente
Oggetto p	Reale	Virtuale
Immagine q	Virtuale	Reale

il *fuoco immagine* o *secondo punto focale*. In questo caso, la distanza dell'immagine dalla superficie sferica è detta la *seconda distanza focale*, ed è indicata con f_i. Ponendo $p = \infty$ e $q = f_i$ nella Eq. (21.10), abbiamo $-n_2/f_i = (n_1 - n_2)/r$, cioè

Si noti che $f_o + f_i = r$. Combinando le Eq. (21.10) e (21.11) o (21.12), possiamo scrivere

ossia

che costituisce una espressione utile. La Fig. 21–9 mostra la costruzione dei raggi principali per il caso in cui $r > 0$ e $n_1 > n_2$. La costruzione dell'immagine di un oggetto, date quelle stesse condizioni, è indicata in Fig. 21–10. Lo studente può eseguire costruzioni analoghe per i casi rimanenti; cioè $r > 0$ e $n_1 < n_2$, $r < 0$ e $n_1 \gtrless n_2$. Quando f_o è positiva, il sistema è chiamato *convergente*, quando f_o è negativa esso è chiamato *divergente*. La Tabella 21–2 elenca le convenzioni sui segni usate in questo testo.

L'Eq. (21.10) indica anche che, per ciascun punto oggetto, vi è un unico punto immagine. Questo è accettabile fintanto che la superficie sferica, essendo di piccola apertura, riceve solo raggi di inclinazione molto piccola, cosicchè le nostre approssimazioni sono valide. Per superficie sferiche rifrangenti di grande apertura, la condizione è simile a quella incontrata in Fig. 21–5 per uno specchio sferico, e ne deriva lo stesso fenomeno dell'aberrazione sferica discussa precedentemente per gli specchi sferici.

TABLE 21–2 Sign Conventions for a Spherical Refracting Surface

	+	−
Radius r	Concave	Convex
Focus f_o	Convergent	Divergent
Object p	Real	Virtual
Image q	Virtual	Real

the *image focus* or *second focal point*. In this case the distance of the image from the spherical surface is called the *image focal length*, designated by f_i. Making $p = \infty$ and $q = f_i$ in Eq. (21.10), we have $-n_2/f_i = (n_1 - n_2)/r$, or

$$f_i = -\frac{n_2}{n_1 - n_2} r. \tag{21.12}$$

Note that $f_o + f_i = r$. By combining Eqs. (21.10) and (21.11) or (21.12), we may write

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1}{f_o} \qquad \left(\text{or } -\frac{n_2}{f_i}\right),$$

which is a useful expression. Figure 21–9 shows the construction of the principal rays for a case in which $r > 0$ and $n_1 > n_2$. The construction of the image of an object, given those same conditions, is shown in Fig. 21–10. The student may draw similar figures for the remaining cases; that is, $r > 0$ and $n_1 < n_2$, $r < 0$ and $n_1 \gtrless n_2$. When f_o is positive the system is called *convergent*, and when f_o is negative it is called *divergent*. Table 21–2 lists the sign conventions used in this text.

Equation (21.10) also indicates that, for each point object, there is a unique point image. This is acceptable so long as the spherical surface is of small aperture, admitting only rays of very small inclination, so that our approximations are valid. For refracting spherical surfaces of large aperture, the situation is similar to that encountered in Fig. 21–5 for a spherical mirror, and results in the same phenomenon of spherical aberration discussed previously for spherical mirrors.

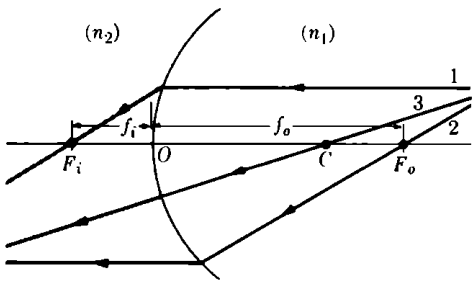


Fig. 21–9. Raggi principali nel caso di una superficie sferica.

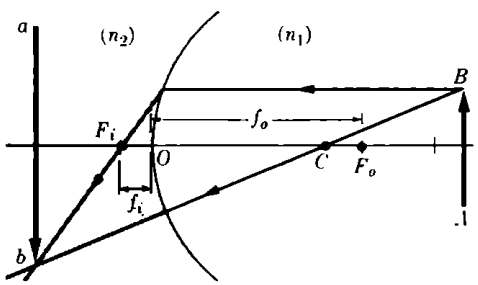


Fig. 21–10. Formazione dell'immagine per rifrazione ad una superficie sferica.

Fig. 21–9. Principal rays in a refracting spherical surface.

Fig. 21–10. Image formation by refraction in a spherical surface.

ESEMPIO 21.4. Discutere la formazione di un'immagine da parte di una superficie rifrangente di grande apertura.

Soluzione: Il procedimento in questo caso è molto simile a quello dell'Esempio 21.1 per uno specchio. Dai triangoli ACP e ACQ (Fig. 21–8), otteniamo

$$\frac{CP}{AP} = \frac{\sin\theta_i}{\sin(\pi - \beta)}, \qquad \frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin\theta_r}{\sin(\pi - \beta)}.$$

Risolvendo queste equazioni rispetto a $\sin\theta_i$ e $\sin\theta_r$ e sostituendo i loro valori nella legge di Snell, $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$, otteniamo

$$n_1 \frac{CP}{AP} = n_2 \frac{CQ}{AQ} \qquad \text{ossia} \qquad n_1 \frac{p - r}{AP} = n_2 \frac{q - r}{AQ}.$$

Questo può venir scritto nella forma

$$n_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\frac{p}{AP} = n_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\frac{q}{AQ}. \tag{21.13}$$

che deve essere confrontata con l'Eq. (21.4). Se α_1 e α_2 sono molto piccoli, possiamo fare l'approssimazione $p = AP$ e $q = AQ$, ritrovando l'Eq. (21.10). Procedendo ulteriormente, usiamo le Eq. (21.5) e (21.6) che costituiscono una approssimazione migliore. Allora

$$n_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\left[1 + \frac{h^2}{2p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)\right] = n_2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left[1 + \frac{h^2}{2q}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\right].$$

Moltiplicando e raccogliendo i termini simili, otteniamo

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} + \frac{h^2}{2}\left[\frac{n_1}{p}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2 - \frac{n_2}{q}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)^2\right].$$

Usando l'Eq. (21.10) per eliminare q nell'ultimo termine correttivo, otteniamo finalmente

$$\frac{n_1}{p} - \frac{n_2}{q} = \frac{n_1 - n_2}{r} + \frac{h^2}{2}\,\frac{n_1 - n_2}{n_2^2}\left[\frac{n_1^2}{r} - \frac{n_1(n_1 + n_2)}{p}\right]\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2. \tag{21.14}$$

Come nel caso di uno specchio sferico, la posizione dell'immagine dipende dal valore di h ossia dalla pendenza del raggio incidente. Perciò l'immagine di un punto non è un altro punto ma un segmento lungo l'asse principale.

ESEMPIO 21.5. Trovare una espressione per l'ingradimento ottenuto mediante una superficie rifrangente sferica.

Soluzione: Questo problema è analogo a quello dell'Esempio 21.2. Considerando la Fig. 21–11, in cui AB è un oggetto e ab la sua immagine (virtuale), abbiamo $M = ab/AB$. Abbiamo anche

$$\tan\theta_i = \frac{AB}{OA} = \frac{AB}{p}, \qquad \tan\theta_r = \frac{ab}{Oa} = \frac{ab}{q},$$

EXAMPLE 21.4. Discuss the formation of an image by a refracting surface of large aperture.

Solution: The procedure in this case is very similar to that of Example 21.1 for a mirror. From triangles ACP and ACQ (Fig. 21–8), we obtain

Solving these equations for $\sin\theta_i$ and $\sin\theta_r$ and substituting their values in Snell's law, $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$, we get

This may be written in the form

which must be compared with Eq. (21.4). If α_1 and α_2 are very small, we can make the approximation $p = AP$ and $q = AQ$, recovering Eq. (21.10). To go a step further, we use the better approximations of Eqs. (21.5) and (21.6). Then

Multiplying and grouping terms, we obtain

Using Eq. (21.10) to eliminate q in the last corrective term, we finally obtain

As in the case of a spherical mirror, the position of the image depends on the value of h or on the slope of the incident ray. Therefore the image of a point is not another point but a segment along the principal axis.

EXAMPLE 21.5. Obtain an expression for the magnification produced by a spherical refracting surface.

Solution: This problem is similar to that of Example 21.2. Considering Fig. 21–11, in which AB is an object and ab is its (virtual) image, we have that $M = ab/AB$. We also have

e perciò

$$M = \frac{q \tan \theta_r}{p \tan \theta_i} \approx \frac{q \sin \theta_r}{p \sin \theta_i},$$

dove l'ultima approssimazione è valida quando gli angoli sono piccoli e possiamo sostituire le tangenti con i seni. Allora, usando la legge di Snell, $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$, abbiamo

$$M = \frac{n_1 q}{n_2 p}.$$

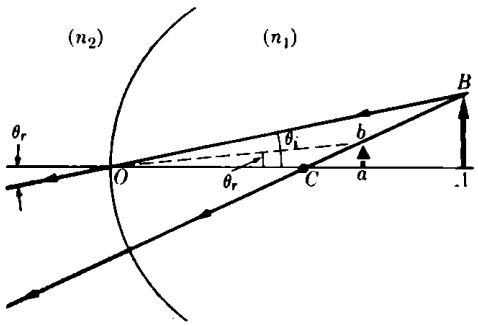


Fig. 21–11. Ingrandimento ottenuto per rifrazione.

ESEMPIO 21.6. Una superficie concava il cui raggio è 0.50 m separa un mezzo il cui indice di rifrazione è 1.20 da un altro mezzo il cui indice di rifrazione è 1.60. Un oggetto è posto nel primo mezzo a 0.80 m dalla superficie. Determinare le distanze focali, la posizione dell'immagine, e l'ingrandimento.

Soluzione: In questo caso $r = +0.50$ m, $n_1 = 1.20$, e $n_2 = 1.60$. Perciò, usando le Eq. (21.11) e (21.12), otteniamo

$$f_o = \frac{n_1 r}{n_1 - n_2} = -1.50 \text{ m}, \qquad f_i = -\frac{n_2 r}{n_1 - n_2} = +2.00 \text{ m}.$$

Il sistema è quindi divergente. Usando l'Eq. (21.10), troviamo che

$$\frac{1.20}{0.80} - \frac{1.60}{q} = \frac{1.20 - 1.60}{0.50} \qquad \text{ossia} \qquad q = +0.69 \text{ m}.$$

Il segno positivo indica che l'immagine è virtuale. Per l'ingrandimento usiamo il risultato dell'Esempio 21.5,

$$M = \frac{1.20 \times 0.69}{1.60 \times 0.80} = 0.65.$$

Poichè M è positivo, l'immagine è diritta; cioè essa ha la stessa direzione dell'oggetto.

21.4 Lenti

Una lente è un mezzo trasparente limitato da due superficie curve (di solito sferiche), sebbene una delle facce della lente possa essere piana. Un'onda incidente subisce perciò due rifrazioni nel passaggio attraverso la lente. Per semplicità supponiamo che il mezzo dalle due parti della lente sia lo stesso e abbia indice di rifrazione uno (come per l'aria), mentre l'indice di rifrazione della lente sia n. Inoltre considereremo soltanto lenti sottili, cioè lenti in cui lo spessore è molto piccolo rispetto ai raggi di curvatura.

L'asse principale è ora la retta determinata dai due centri C_1 e C_2 (Fig. 21–12). Consideriamo il raggio incidente PA che passa per P. Il raggio incidente è rifratto attraverso la prima superficie lungo il raggio AB. Se prolungato, il raggio AB passerebbe per il punto Q' che è, perciò, l'immagine di P formata dalla prima superficie

and therefore

$$M = \frac{q \tan \theta_r}{p \tan \theta_i} \approx \frac{q \sin \theta_r}{p \sin \theta_i},$$

where the last approximation is valid whenever the angles are small, and we can replace the tangents by sines. Then, using Snell's law, $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$, we have

$$M = \frac{n_1 q}{n_2 p}.$$

EXAMPLE 21.6. A concave surface whose radius is 0.50 m separates a medium whose index of refraction is 1.20 from another whose index is 1.60. An object is placed in the first medium at 0.80 m from the surface. Determine the focal lengths, the position of the image, and the magnification.

Fig. 21–11. Magnification by refraction.

Solution: In this case $r = +0.50$ m, $n_1 = 1.20$, and $n_2 = 1.60$. Therefore, using Eqs. (21.11) and (21.12), we obtain

$$f_o = \frac{n_1 r}{n_1 - n_2} = -1.50 \text{ m}, \qquad f_i = -\frac{n_2 r}{n_1 - n_2} = +2.00 \text{ m}.$$

The system is therefore divergent. Using Eq. (21.10), we find that

$$\frac{1.20}{0.80} - \frac{1.60}{q} = \frac{1.20 - 1.60}{0.50} \qquad \text{or} \qquad q = +0.69 \text{ m}.$$

The positive sign indicates that the image is virtual. For the magnification we use the result of Example 21.5,

$$M = \frac{1.20 \times 0.69}{1.60 \times 0.80} = 0.65.$$

Since M is positive, the image is erect; that is, it is in the same direction as the object.

21.4 Lenses

A lens is a transparent medium bounded by two curved (usually spherical) surfaces, although one of the faces of the lens may be plane. An incident wave therefore suffers two refractions in going through the lens. For simplicity let us assume that the medium on both sides of the lens is the same and is of index of refraction one (such as air), while the index of refraction of the lens is n. We shall also consider only thin lenses, i.e., lenses in which the thickness is very small compared with the radii.

The principal axis is now the line determined by the two centers C_1 and C_2 (Fig. 21–12). Consider the incident ray PA which passes through P. At the first surface the incident ray is refracted along ray AB. If extended, the ray AB would pass through Q', which is, therefore, the image of P produced by the first refracting

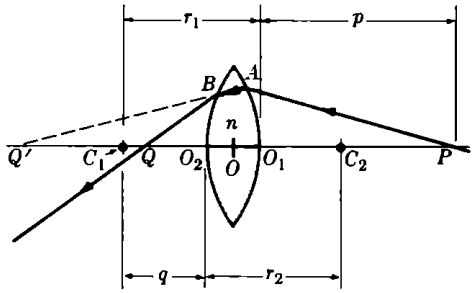


Fig. 21–12. Traiettoria di un raggio attraverso una lente sottile.

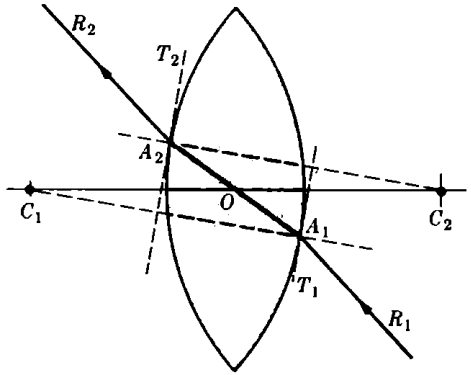


Fig. 21–13. Centro ottico di una lente.

rifrangente. La distanza q' di Q' da O_1 è ottenuta applicando l'Eq. (21.10); vale a dire,

In B, il raggio subisce una seconda rifrazione e diventa il raggio BQ. Allora diciamo che Q è l'immagine finale di P prodotta dal sistema delle due superficie rifrangenti che costituisce la lente. Ora, considerando la rifrazione in B, l'oggetto (virtuale) è Q' e l'immagine è Q, a una distanza q dalla lente. Perciò, applicando ancora l'Eq. (21.10), sostituendo p con q', abbiamo

Si noti che l'ordine degli indici di rifrazione è stato invertito perchè il raggio va dalla lente all'aria. A rigore, le distanze che appaiono nelle Eq. (21.15) e (21.16) devono, in ogni caso, essere misurate a partire da O_1 e O_2, cosicchè nella Eq. (21.16), scriveremo $q' + t$ invece di q', dove $t = O_2O_1$ è lo spessore della lente. Ma poichè la lente è molto sottile possiamo trascurare t, il che è equivalente a misurare tutte le distanze da una origine comune O. Combinando le Eq. (21.15) e (21.16) per eliminare q', troviamo

che è la *formula di Descartes per una lente sottile*.

Il punto O in Fig. 21–12 è scelto in modo che esso coincida con il *centro ottico* della lente. Il centro ottico è definito come un punto tale che un qualsiasi raggio passante per esso, esce in una direzione parallela al raggio incidente. Per vedere che un tale punto esiste, consideriamo, nella lente di Fig. 21–13, due raggi paralleli C_1A_1 e C_2A_2. I corrispondenti piani tangenti T_1 e T_2 sono anche paralleli. Per un raggio come R_1A_1, la cui direzione è tale che il raggio rifratto sia A_1A_2, il raggio emergente A_2R_2 risulta

Fig. 21–12. Path of a ray through a thin lens.

Fig. 21–13. Optical center of a lens.

surface. The distance q' of Q' from O_1 is obtained by applying Eq. (21.10); that is,

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{q'} = \frac{1 - n}{r_1}. \tag{21.15}$$

At B the ray suffers a second refraction and becomes ray BQ. Then we say that Q is the final image of P produced by the system of the two refracting surfaces which constitute the lens. Now, regarding the refraction at B, the object (virtual) is Q' and the image is Q, at a distance q from the lens. Therefore, again applying Eq. (21.10), with p replaced by q', we have

$$\frac{n}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{n - 1}{r_2}. \tag{21.16}$$

Note that the order of the indexes of refraction has been reversed because the ray goes from the lens into the air. Strictly speaking, the distances appearing in Eqs. (21.15) and (21.16) must be measured from O_1 and O_2 in each case, so that in Eq. (21.16) we should write $q' + t$ instead of q', where $t = O_2O_1$ is the thickness of the lens. But since the lens is very thin we may neglect t, which is equivalent to measuring all distances from a common origin O. Combining Eqs. (21.15) and (21.16) to eliminate q', we find that

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right), \tag{21.17}$$

which is *Descartes' formula for a thin lens.*

The point O in Fig. 21–12 is chosen so that it coincides with the *optical center* of the lens. The optical center is a point defined such that any ray passing through it emerges in a direction parallel to the incident ray. To see that such a point exists, consider, in the lens of Fig. 21–13, two parallel radii C_1A_1 and C_2A_2. The corresponding tangent planes T_1 and T_2 are also parallel. For ray R_1A_1, whose direction is such that the refracted ray is A_1A_2, the emergent ray A_2R_2 is parallel

parallelo a A_1R_1. Per la similitudine dei triangoli C_1A_1O e C_2A_2O, vediamo che il punto O si trova in una posizione tale che

quindi la sua posizione è indipendente dal particolare raggio scelto. Perciò tutti i raggi incidenti che, internamente alla lente, passano per il punto O emergono senza deviazione angolare.

Come nel caso di una sola superficie rifrangente, il *fuoco oggetto* F_o, o primo punto focale di una lente, è la posizione dell'oggetto per ia quale i raggi dopo aver attraversato la lente, emergono paralleli all'asse principale ($q = \infty$). La distanza di F_o dalla lente è detta *prima distanza focale*, ed è indicata con f. Allora, ponendo $p = f$ e $q = \infty$ nell'Eq. (21.17), otteniamo la prima distanza focale mediante

che è talvolta detta *equazione dei costruttori di lenti*. Combinando le Eq. (21.17) e (21.18), abbiamo

Tale espressione può essere vantaggiosa in quanto, se determiniamo sperimentalmente f, possiamo usare una lente senza conoscere necessariamente il suo indice di rifrazione o i suoi raggi di curvatura.

Per un raggio incidente che è parallelo all'asse principale ($p = \infty$), il raggio uscente passa per un punto F_i avente $q = -f$ detto *fuoco immagine*, o secondo punto focale. Perciò, in una lente sottile, i due fuochi sono disposti simmetricamente dalle due parti della lente. Se f è positiva, la lente è detta *convergente*, se è negativa, *divergente*. Le convenzioni sui segni sono le stesse di quelle date nella Tabella 21—2 per una superficie rifrangente sferica.

Agli effetti della costruzione delle immagini, possiamo rappresentare una lente sottile con un piano perpendicolare all'asse principale passante per O. La Fig. 21—14 indica la costruzione

to A_1R_1. From the similarity of triangles C_1A_1O and C_2A_2O, we see that the point O is so positioned that

$$\frac{C_1O}{OC_2} = \frac{C_1A_1}{A_2C_2} = -\frac{r_1}{r_2},$$

and therefore its position is independent of the particular ray chosen. Therefore all incident rays whose internal ray passes through point O emerge without angular deviation.

As in the case of a single refracting surface, the *object focus* F_o, or first focal point, of a lens is the position of the object for which the rays emerge parallel to the principal axis ($q = \infty$) after traversing the lens. The distance of F_o from the lens is called the *object focal length*, designated by f. Then, setting $p = f$ and $q = \infty$ in Eq. (21.17), we obtain the object focal length as

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right), \tag{21.18}$$

which is sometimes called the *lensmaker's equation*. Combining Eqs. (21.17) and (21.18), we have

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f}. \tag{21.19}$$

This expression gives us a certain advantage, in that, if we determine f experimentally, we may use a lens without necessarily knowing its index of refraction or its radii.

For an incident ray that is parallel to the principal axis ($p = \infty$), the emergent ray passes through a point F_i having $q = -f$ and called the *image focus*, or second focal point. Therefore, in a thin lens, the two foci are symmetrically located on both sides. If f is positive the lens is called *convergent*, and if it is negative, *divergent*. The sign conventions are the same as those given in Table 21-2 for a spherical refracting surface.

For purposes of ray tracing, we may represent a thin lens by a plane perpendicular to the principal axis passing through O. Figure 21-14 shows the construction

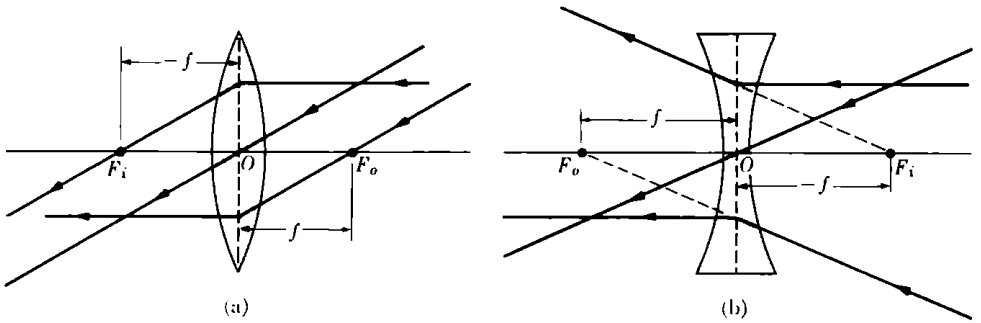


Fig. 21—14. Raggi principali per (a) una lente convergente (b) una lente divergente.

Fig. 21-14. Principal rays for (a) convergent and (b) divergent lenses.

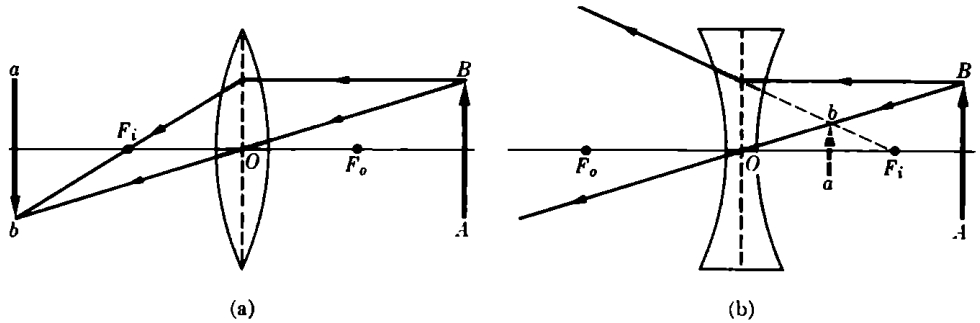


Fig. 21–15. Formazione dell'immagine nel caso di una lente (a) convergente, e (b) divergente.

Fig. 21–15. Image formation in a lens. (a) Convergent and (b) divergent.

Refraction caustic = Caustica per rifrazione

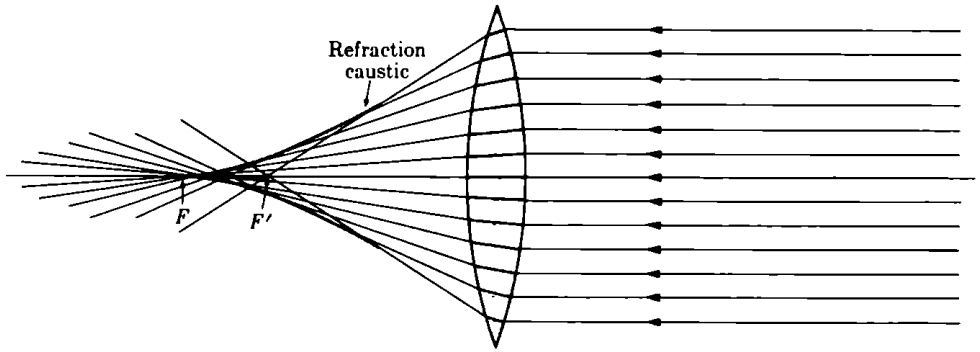


Fig. 21–16. Aberrazione sferica di una lente.

Fig. 21–16. Spherical aberration of a lens.

dei raggi principali per una lente convergente e una lente divergente, e in Fig. 21–15, tali raggi sono stati impiegati per costruire l'immagine di un oggetto nei due casi.

La teoria che abbiamo sviluppato è ancora valida fintantochè i raggi hanno una inclinazione molto piccola, cosicchè l'aberrazione sferica è trascurabile. Per lenti aventi un grande diametro, l'immagine di un punto non è un punto, ma un segmento dell'asse principale. In particolare, raggi incidenti che sono paralleli all'asse principale si incontrano in punti differenti, a seconda della loro distanza dall'asse. L'aberrazione sferica è allora misurata dalla differenza $f' - f$ tra la distanza focale per un raggio marginale e quella per un raggio assiale (Fig. 21–16). I raggi rifratti si intersecano su una superficie conica detta *caustica per rifrazione*.

ESEMPIO 21.7. Trovare una espressione per l'ingrandimento ottenuto mediante una lente.

Soluzione: Come precedentemente, l'ingrandimento è definito come $M = ab/AB$. Ma dalla Fig. 21–17, se O è il centro ottico della lente, abbiamo che $\tan \alpha = AB/OA$ e $\tan \alpha = ab/Oa$. Entrambe le relazioni sono algebricamente corrette; cioè in valore e segno. Perciò $ab/AB = Oa/OA$, ossia

of the principal rays for a convergent and a divergent lens, and in Fig. 21–15 these rays have been used for the construction of the image of an object in two cases.

Again the theory we have developed is correct so long as the rays have a very small inclination, so that spherical aberration is negligible. For lenses having a large diameter, the image of a point is not a point, but a line segment of the principal axis. In particular, incident rays which are parallel to the principal axis intersect at different points, depending on their distance from that axis. Spherical aberration is measured then by the difference $f' - f$ between the focal distance for a marginal ray and for an axial ray (Fig. 21–16). The refracted rays intersect over a conical surface called the *refraction caustic*.

EXAMPLE 21.7. Obtain an expression for the magnification produced by a lens.

Solution: As before, the magnification is defined as $M = ab/AB$. But from Fig. 21–17, if O is the optical center of the lens, we have that $\tan \alpha = AB/OA$ and $\tan \alpha = ab/Oa$. Both relations are correct algebraically; i.e., in magnitude and sign. Therefore $ab/AB = Oa/OA$, or

$$M = q/p.$$

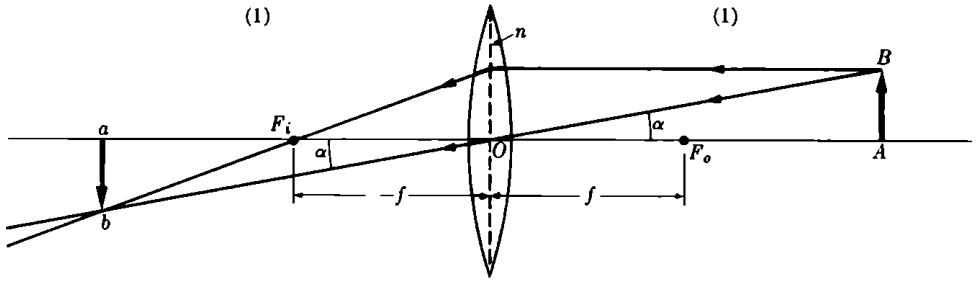


Fig. 21–17. Ingrandimento prodotto da una lente.

Fig. 21–17. Magnification produced by a lens.

Questa relazione avrebbe potuto essere ottenuta usando il risultato dell'Esempio 21.5 per una superficie rifrangente sferica, poichè, con riferimento alla Fig. 21–12, l'ingrandimento ottenuto nella rifrazione alla prima superficie è $M_1 = q'/np$, mentre l'ingrandimento ottenuto nella rifrazione alla seconda superficie è $M_2 = nq/q'$. Perciò, l'ingrandimento totale vale

This relation could have been obtained by using the result of Example 21.5 for a spherical refracting surface, since, referring to Fig. 21–12, the magnification produced by the refraction at the first surface is $M_1 = q'/np$, while the magnification produced by the refraction at the second surface is $M_2 = nq/q'$. Therefore the total magnification is

$$M = M_1 M_2 = \frac{q'}{np} \times \frac{nq}{q} = \frac{q}{p}.$$

ESEMPIO 21.8. Una lente sferica ha due superficie convesse di raggio 0.80 m e 1.20 m. Il suo indice di rifrazione è $n = 1.50$. Trovare la sua distanza focale e la posizione dell'immagine di un punto posto a 2.00 m dalla lente.

EXAMPLE 21.8. A spherical lens has two convex surfaces of radii 0.80 m and 1.20 m. Its index of refraction is $n = 1.50$. Find its focal length and the position of the image of a point 2.00 m from the lens.

Soluzione: Secondo le convenzioni sui segni della Tabella 21–2, poichè la prima superficie appare convessa e la seconda concava se viste dalla parte dell'oggetto che è posto a destra (vedere Fig. 21–12), si deve scrivere $r_1 = O_1C_1 = -0.80$ m, $r_2 = +1.20$ m. Perciò, usando l'Eq. (21.18), abbiamo

Solution: According to the sign conventions of Table 21–2, since the first surface looks convex and the second concave as seen from the side of the object which is placed on the right (see Fig. 21–12), we must write $r_1 = O_1C_1 = -0.80$ m, $r_2 = +1.20$ m. Therefore, using Eq. (21.18), we have

ossia

$$\frac{1}{f} = (1.50 - 1)\left(\frac{1}{1.20} - \frac{1}{-0.80}\right) \quad \text{or} \quad f = +0.96 \text{ m}.$$

Il fatto che f sia positiva indica che questa lente è convergente. Per individuare la posizione della immagine usiamo l'Eq. (21.19) con $p = 2.00$ m e il valore ottenuto di f, che dà

The fact that f is positive indicates that this lens is a convergent one. To obtain the position of the image we use Eq. (21.19) with $p = 2.00$ m and the above value of f, which yields

ossia

$$\frac{1}{2.00} - \frac{1}{q} = \frac{1}{0.96} \quad \text{or} \quad q = -1.81 \text{ m}.$$

Il segno negativo di q indica che l'immagine è reale e perciò essa si forma dalla parte sinistra della lente. Infine, l'ingrandimento vale

The negative sign of q indicates that the image is real, and thus it falls on the left side of the lens. Finally the magnification is

$$M = q/p = -0.905.$$

Essendo negativo, l'immagine sarà capovolta, e, poichè M è minore di uno, l'immagine sarà un po' più piccola dell'oggetto.

In view of the negative sign, the image must be inverted, and, since M is less than one, the image will be slightly smaller than the object.

ESEMPIO 21.9. Determinare le posizioni dei fuochi di un sistema di due lenti sottili poste a una distanza t.

EXAMPLE 21.9. Determine the positions of the foci of a system of two thin lenses separated the distance t.

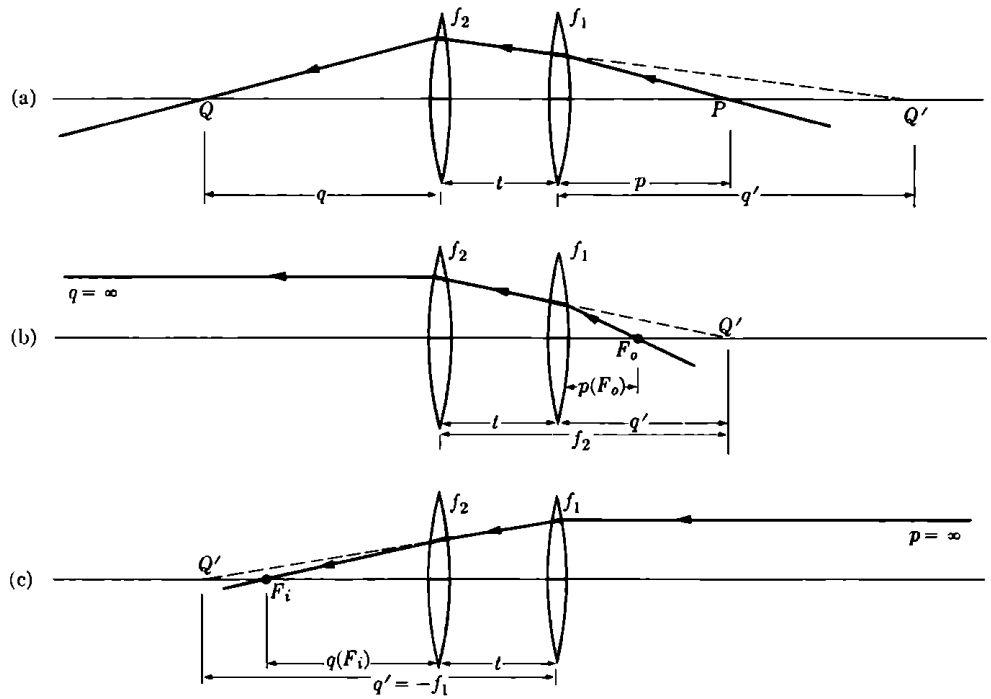


Fig. 21–18. Sistema di due lenti sottili.

Fig. 21–18. System of two thin lenses.

Soluzione: Il sistema di lenti sottili illustrato nella Fig. 21–18 mostra, in (a) il cammino di un raggio passante per il punto P. L'immagine di P prodotta dalla prima lente è Q'. Indichiamo con p la distanza dell'oggetto dalla prima lente. Allora la posizione di Q' è determinata da

Solution: The system of thin lenses illustrated in Fig. 21–18 shows, in (a), the path of a ray passing through point P. The image of P produced by the first lens is Q'. Let us call p the distance of the object from the first lens. Then the position of Q' is determined by

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q'} = \frac{1}{f_1}.$$

Il punto Q' si comporta come un oggetto rispetto alla seconda lente, che ne forma una immagine finale in Q. Poichè la distanza di Q' dalla seconda lente è $q' + t$, abbiamo che

Point Q' acts as an object with respect to the second lens, which produces a final image at Q. Since the distance of Q' from the second lens is $q' + t$, we have that

$$\frac{1}{q' + t} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2},$$

dove q è la distanza dell'immagine finale dalla seconda lente. Il precedente sistema di equazioni ci permette di ottenere la posizione dell'immagine corrispondente a una qualsiasi posizione dell'oggetto.

Il fuoco oggetto F_o (Fig. 21–18b) del sistema di lenti è la posizione dell'oggetto per la quale l'immagine Q è all'infinito ($q = \infty$). Indicando con $p(F_o)$ la distanza di F_o dalla prima lente, dalla seconda relazione abbiamo che $q' = f_2 - t$, che, se sostituita nella prima relazione, dà

where q is the distance of the final image from the second lens. The above set of equations allows us to obtain the position of the image corresponding to any position of the object.

The object focus F_o (Fig. 21–18b) of the lens system is the position of the object for which the image Q is at infinity ($q = \infty$). Designating the distance from F_o to the first lens by $p(F_o)$, we have from the second relation that $q' = f_2 - t$, which, when substituted in the first relation, gives

$$p(F_o) = \frac{f_1(f_2 - t)}{f_1 + f_2 - t}.$$

Analogamente, per la posizione del fuoco immagine F_i (Fig. 21–18c), indicata con $q(F_i)$, poniamo $p = \infty$, ottenendo come risultato

Similarly, for the position of the image focus F_i (Fig. 21–18c), designated by $q(F_i)$, we make $p = \infty$, resulting in

$$q(F_i) = -\frac{f_2(f_1 - t)}{f_1 + f_2 - t}.$$

Un caso importante si ha quando le due lenti sono a contatto, cosicchè t può essere trascurato. Allora l'equazione che lega q' e q diventa

An important situation occurs when the two lenses are in contact, so that t can be neglected. Then the equation relating q' and q becomes

$$\frac{1}{q'} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2},$$

che, combinata con la prima equazione, dà

which, combined with the first equation, becomes

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Tale equazione mostra che un sistema di lenti sottili a contatto equivale a una sola lente di distanze focale F data da

This shows that a set of thin lenses in contact is equivalent to a single lens of focal length F given by

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}.$$

Si può ottenere lo stesso risultato ponendo $t = 0$ nell'espressione di $p(F)$.

The same result can be obtained by making $t = 0$ in the expression for $p(F_o)$.

21.5 *Strumenti ottici*

La costruzione grafica delle immagini nei sistemi di lenti e specchi è importante specialmente per lo studio degli strumenti ottici. Ne discuteremo brevemente due dei più importanti: il microscopio e il cannocchiale.

(a) ***Il microscopio.*** Un microscopio è un sistema di lenti che forma una immagine virtuale ingrandita di un oggetto piccolo. Il microscopio più semplice è una lente convergente,

21.5 *Optical Instruments*

Ray tracing in lens and mirror systems is especially important for the design of optical instruments. We shall briefly discuss two of the more important ones: the microscope and the telescope.

(a) ***The microscope.*** A microscope is a lens system producing an enlarged virtual image of a small object. The simplest microscope is a convergent lens,

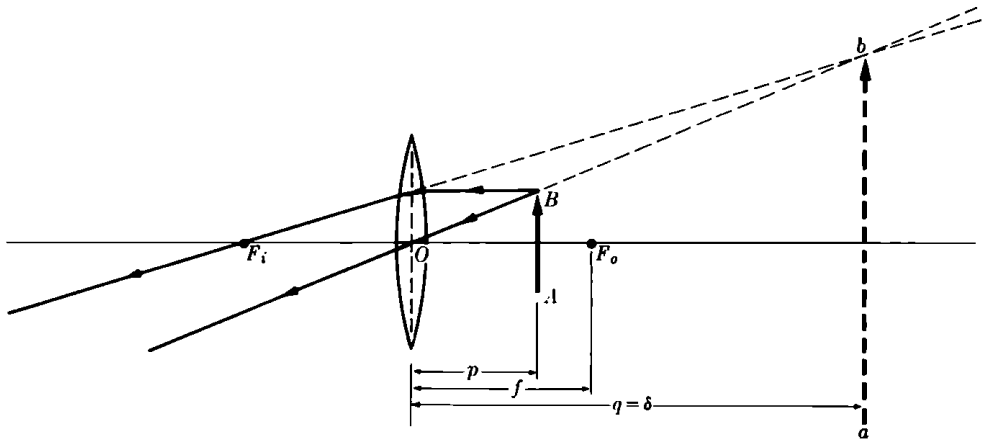


Fig. 21–19. Costruzione grafica dei raggi per una lente d'ingrandimento.

Fig. 21–19. Ray tracing in a magnifying glass.

Eyepiece = Oculare
Objective = Obiettivo

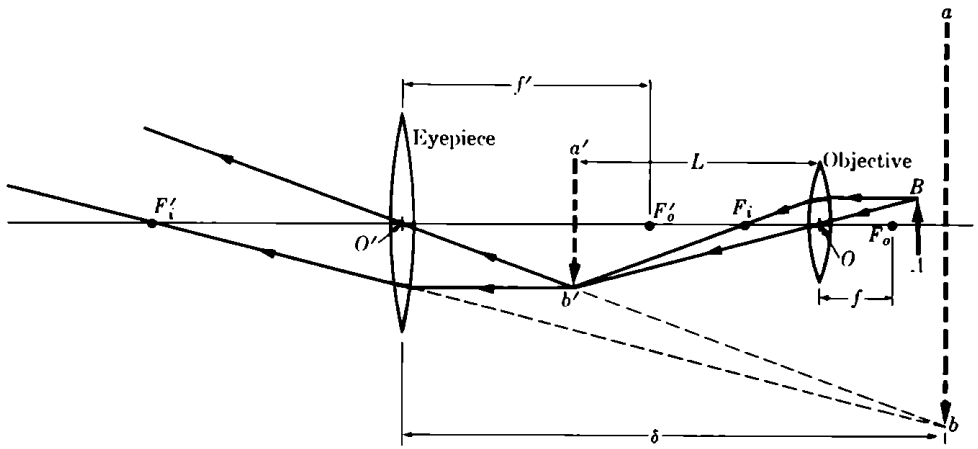


Fig. 21–20. Costruzione grafica dei raggi per un microscopio composto.

Fig. 21–20. Ray tracing in a compound microscope.

detta comunemente *lente di ingrandimento*. L'oggetto AB (Fig. 21–19) è posto tra la lente e il fuoco F_o, cosicchè l'immagine è virtuale e si forma a una distanza q uguale alla distanza minima della visione distinta, δ, che per una persona normale è circa 25 cm o 10 pollici. Poichè p è quasi uguale a f, in particolare se f è molto piccola, per l'ingrandimento possiamo scrivere

commonly called a *magnifying glass*. The object AB (Fig. 21–19) is placed between the lens and the focus F_o, so that the image is virtual and falls at a distance q equal to the minimal distance of distinct vision, δ, which for a normal person is about 25 cm or 10 inches. Since p is almost equal to f, particularly if f is very small, we may write for the magnification,

$$M = \frac{q}{p} \approx \frac{\delta}{f}. \tag{21.20}$$

Il *microscopio composto* è più elaborato (Fig. 21–20). Esso consiste di due lenti convergenti, ciascuna di piccola distanza focale, dette *obiettivo* e *oculare*. La distanza focale f dell'obiettivo è molto più piccola della distanza focale f' dell'oculare. Sia f che f' sono molto più piccole della distanza tra l'obiettivo e l'oculare. L'oggetto AB è posto a una distanza dall'obiettivo un poco più grande di f. L'obiettivo forma una prima immagine reale $a'b'$ che si comporta come un oggetto per l'oculare. L'immagine $a'b'$ deve essere a una distanza dall'oculare un poco minore di f'. L'immagine finale, ab, è virtuale, capovolta, e molto più grande rispetto all'oggetto. L'oggetto AB è posto in modo che ab sia a una distanza dall'oculare uguale alla distanza minima della visione distinta, δ (circa 25 cm). Questa condizione si ottiene con l'operazione detta di *messa a fuoco*, che consiste nello spostare l'intero microscopio rispetto all'oggetto. L'ingrandimento dell'obiettivo è

The *compound microscope* is more elaborate (Fig. 21–20). It consists of two convergent lenses, each of a small focal length, called the *objective* and the *eyepiece*. The focal length f of the objective is much smaller than the focal length f' of the eyepiece. Both f and f' are much smaller than the distance between the objective and the eyepiece. The object AB is placed at a distance from the objective slightly greater than f. The objective forms a real first image $a'b'$, which acts as an object for the eyepiece. The image $a'b'$ must be at a distance from the eyepiece slightly less than f'. The final image, ab, is virtual, inverted, and much larger than the object. The object AB is so placed that ab is at a distance from the eyepiece equal to the minimal distance of distinct vision, δ (about 25 cm). This condition is attained by the operation called *focusing*, which consists in moving the whole microscope relative to the object. The magnification due to the objective is

$$M_O = \frac{a'b'}{AB} \approx \frac{L}{f},$$

e quello dell'oculare è

and that of the eyepiece is

$$M_E = \frac{ab}{a'b'} \approx \frac{\delta}{f'}.$$

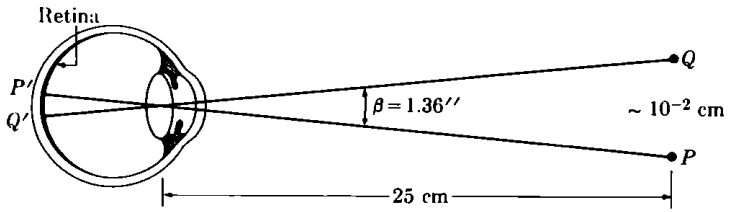


Fig. 21–21. Potere separatore dell'occhio.

Fig. 21–21. Resolving power of the eye.

Perciò l'ingrandimento totale vale

$$M = M_O M_E = \frac{ab}{AB} = \frac{\delta L}{ff'}.$$ (21.21)

Nei microscopi usuali, L è praticamente la distanza tra l'obiettivo e l'oculare.

L'ingrandimento utile in un microscopio è limitato dal suo *potere separatore*; cioè, la minima distanza tra due punti dell'oggetto che possono essere visti distinti nell'immagine. Il potere separatore è a sua volta determinato dalla diffrazione nell'obiettivo. Un calcolo dettagliato, che qui non riporteremo, esprime il potere separatore secondo la

$$R = \frac{\lambda}{2n \sin \theta},$$ (21.22)

dove λ è la lunghezza d'onda, n l'indice di rifrazione del mezzo in cui è immerso l'oggetto, e θ l'angolo che un raggio marginale fa con l'asse del microscopio. In generale, $2n \sin \theta$ è circa tre, cosicchè $R \approx \frac{1}{3}\lambda$. D'altra parte, il potere separatore dell'occhio è circa 10^{-2} cm per un oggetto a circa 25 cm (Fig. 21–21). Perciò il massimo ingrandimento utile è

$$M = \frac{10^{-2}\text{ cm}}{\frac{1}{3}\lambda} \approx \frac{3 \times 10^{-2}\text{ cm}}{\lambda}.$$

Per esempio, per luce avente $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ cm, valore che sta circa nella zona centrale dello spettro visibile, M è circa 600. Con una radiazione di lunghezza d'onda minore, l'ingrandimento può venire migliorato, ma allora si può cadere fuori dallo spettro visibile.

(b) ***Il cannocchiale.*** Un altro importante strumento ottico è il cannocchiale. In un cannocchiale, o *telescopio a rifrazione*,[N.T.] usato per osservare oggetti molto lontani, l'obiettivo (Fig. 21–22) è una lente convergente di distanza focale molto grande, talvolta di parecchi metri. Poichè l'oggetto AB è molto lontano, la sua immagine $a'b'$, viene formata dall'obiettivo, nel suo fuoco F_o. Abbiamo indicato soltanto i raggi centrali Bb' e Aa', essendo questi sufficienti in quanto conosciamo la posizione dell'immagine. L'oculare è ancora una lente convergente, ma di una distanza focale f' molto più piccola. Essa è posta in modo che l'immagine intermedia $a'b'$ cada tra O' e F'_0 e l'immagine finale ab cada alla distanza minima della visione distinta. La messa a fuoco avviene

N.T. E consuetudine chiamare "cannocchiale" il telescopio a rifrazione o rifrattore. Il nome di telescopio viene riservato al telescopio a riflessione o reflettore.

Therefore the total magnification is

In an actual microscope, L is practically the same as the distance between the objective and the eyepiece.

The useful magnification in a microscope is limited by its *resolving power;* that is, the minimum distance between two points in the object that can be seen as distinct in the image. This resolving power is in turn determined by the diffraction at the objective. A detailed calculation, which will not be reproduced here, gives the resolving power as

where λ is the wavelength, n the index of refraction of the medium in which the object is immersed, and θ the angle a marginal ray makes with the axis of the microscope. In general $2n \sin \theta$ is about three, so that $R \approx \frac{1}{3}\lambda$. On the other hand, the resolving power of the eye is about 10^{-2} cm for an object at about 25 cm (Fig. 21–21). Therefore the maximum useful magnification is

For example, for light with $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ cm, which is about the center of the visible spectrum, M is about 600. With radiation of shorter wavelength, the magnification may be improved, but then it may fall outside the visible spectrum.

(b) ***The telescope.*** Another important optical instrument is the telescope. In the *refracting telescope*, used to observe very distant objects, the objective (Fig. 21–22) is a convergent lens having a very large focal length f, sometimes of several meters. Since the object AB is very distant, its image $a'b'$, produced by the objective, falls at its focus F_o. We have indicated only the central rays Bb' and Aa', since that is all that is necessary because we know the position of the image. The eyepiece is also a convergent lens, but of a much smaller focal length f'. It is so placed that the intermediate image $a'b'$ falls within O' and F'_o and the final image ab falls at the minimum distance of distinct vision. Focusing is performed

Eyepiece = Oculare
Objective = Obiettivo
Rays from distant object = Raggi provenienti da un oggetto lontano

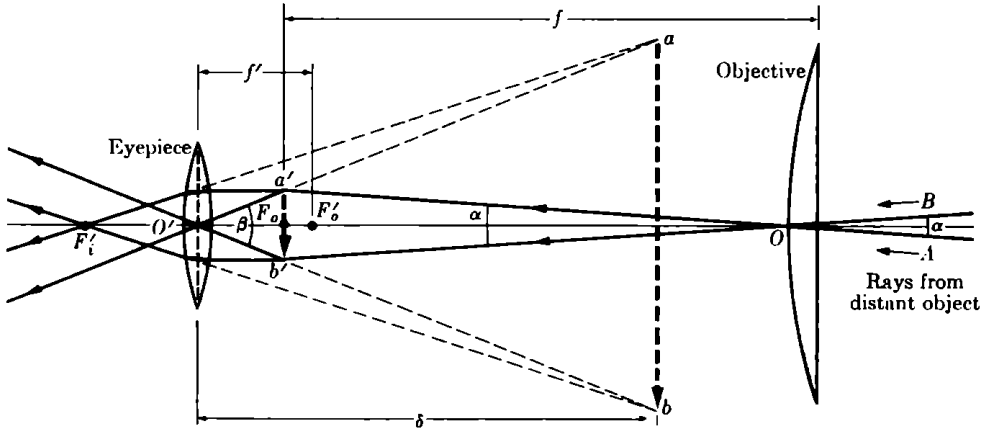


Fig. 21–22. Costruzione grafica dei raggi per un cannocchiale.

Fig. 21–22. Ray tracing in a refracting telescope.

spostando soltanto l'oculare in quanto, in questo caso, nulla si ottiene spostando l'obiettivo.

L'ingrandimento ottenuto con questo strumento non va riferito alle dimensioni lineari, in quanto l'immagine è sempre più piccola dell'oggetto. Si definisce allora l'ingrandimento *visuale* o *angolare*, cioè il rapporto fra l'angolo sotteso dall'immagine e l'angolo β sotteso dall'oggetto. Questo si scrive come

by moving the eyepiece lens only, since nothing is gained in this case by moving the objective lens.

The magnification produced by this instrument is not a linear one, because the image is always smaller than the object. Instead one defines an *angular* magnification; i.e., the ratio between the angle β subtended by the image and the angle α subtended by the object. This is written as

$$M = \beta/\alpha. \tag{21.23}$$

Essendo l'immagine vicina, l'angolo β è maggiore dell'angolo α, e questo è proprio quanto dà la sensazione dell'ingrandimento. Secondo la Fig. 21–22, considerando che gli angoli α e β sono piccoli, possiamo scrivere

Because of the proximity of the image, the angle β is much larger than α, and this is what creates the sensation of magnification. From Fig. 21–22, considering that angles α and β are small, we may write

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{a'b'}{f}, \qquad \beta \approx \tan\beta \approx \frac{a'b'}{f'},$$

perchè la distanza da $a'b'$ a O' è praticamente f'. Sostituendo nella Eq. (21.23), otteniamo

because the distance from $a'b'$ to O' is practically f'. Substituting into Eq. (21.23), we get

$$M = f/f'. \tag{21.24}$$

Perciò, per ottenere un ingrandimento elevato, la distanza focale dell'obiettivo deve essere molto grande e quella dell'oculare molto piccola. Praticamente la lunghezza dello strumento è determinata dalla distanza focale f dell'obiettivo.

L'ingrandimento di un cannocchiale astronomico è limitato dai poteri separatori dell'obiettivo e dell'occhio dell'osservatore. Per un obiettivo il cui diametro è D, il potere separatore (cioè il minimo angolo sotteso da due punti dell'oggetto che appaiono come distinti o differenti, nell'immagine $a'b'$) è, come sarà dimostrato nell'Eq. (23.12),

Therefore, to obtain a large amplification, the focal length of the objective must be very large and that of the eyepiece very small. Practically, the length of the instrument is determined by the focal length f of the objective.

The magnification of an astronomical telescope is limited by the resolving power of the objective and of the eye of the observer. For an objective whose diameter is D, the resolving power (i.e., the minimum angle subtended by two points of the object that appear as distinct or different in the image $a'b'$) is, as will be shown in Eq. (23.12),

$$\alpha \approx 1.22\,\frac{\lambda}{D}. \tag{21.25}$$

D'altra parte, il potere separatore dell'occhio (Fig. 21—21), definito in termini di separazione angolare è dato da

$$\beta = \frac{10^{-2}\text{ cm}}{25\text{ cm}} = 4 \times 10^{-4}\text{ rad} = 1.36''.$$

Perciò il massimo ingrandimento utile di un cannocchiale è

$$M = \frac{4 \times 10^{-4} D}{1.22\lambda} \approx 3.3 \times 10^{-4}\,\frac{D}{\lambda}. \tag{21.26}$$

Un ingrandimento maggiore significa o un valore minore di α, il che implica minore dettaglio nell'immagine, o un valore maggiore di β, con ciò non si rivela essenzialmente nessun nuovo dettaglio nell'immagine finale ab, poichè tale dettaglio non era presente nell'immagine intermedia $a'b'$. Per esempio, per luce di $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m, abbiamo $M \approx 660D$, dove D è in metri. Aumentando il diametro D dell'obiettivo, possiamo aumentare l'ingrandimento. Per esempio, per il cannocchiale Yerkes, che è il più grande cannocchiale esistente, D è circa 1 m, e quindi ne risulta un ingrandimento di circa 660 diametri e un potere separatore di 10^{-2} secondi di arco.

Nel telescopio *a riflessione*, l'obiettivo è uno specchio parabolico concavo che forma nel suo fuoco una immagine corretta dalla aberrazione sferica. Il più grande telescopio a riflessione si trova a Monte Palomar. Esso ha un diametro di circa 5 metri e un ingrandimento dell'ordine di 3500.

Gli strumenti ottici sono molto più complessi della versione semplificata che abbiamo presentato, principalmente per l'esigenza di formare un'immagine esente il più possibile dalle aberrazioni. Per questa ragione gli oculari sono composti di parecchie lenti e gli obiettivi del microscopio sono sistemi molto complessi di lenti.

21.6 *Il prisma*

Un prisma è un mezzo limitato da due superfici piane che formano un angolo A (Fig. 21—23). Supponiamo che il mezzo abbia un indice di rifrazione n e che esso sia immerso in un mezzo avente indice di rifrazione uno, ad esempio, l'aria. Un raggio incidente come PQ subisce due rifrazioni ed esce deviato di un angolo δ rispetto alla direzione incidente. Dalla figura si vede facilmente che valgono le seguenti relazioni

$$\sin i = n \sin r, \tag{21.27}$$

$$\sin i' = n \sin r', \tag{21.28}$$

$$r + r' = A, \tag{21.29}$$

$$\delta = i + i' - A. \tag{21.30}$$

La prima e la seconda equazione sono semplicemente la legge di Snell applicata alle rifrazioni in Q e R. La terza segue

Fig. 21—23. Traiettoria di un raggio attraverso un prisma.

On the other hand, the resolving power of the eye (Fig. 21-21), expressed in terms of an angle, is equal to

Therefore the maximum useful magnification of a telescope is

A larger magnification means either a smaller value of α, which implies less detail in the image, or a larger value of β, which essentially does not reveal any new detail in the final image ab since the detail was not present in the intermediate image $a'b'$. For example, for light of $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m, we have $M \approx 660D$, where D is in meters. By increasing the diameter D of the objective, we can therefore increase the magnification. For example, for the Yerkes telescope, which is the largest existing refracting telescope, D is about 1 m, resulting in a magnification of about 660 diameters and a resolving power of 10^{-2} second of arc.

In the *reflecting* telescope, the objective is a concave parabolic mirror forming at its focus an image free from spherical aberration. The largest reflecting telescope is at Mount Palomar. It has a diameter of about 5 m and a magnification of the order of 3500.

Optical instruments are much more complex than the simplified version we have presented, mainly because of the necessity for producing an image as free of aberrations as possible. For that reason eyepieces are composed of several lenses and microscope objectives are very complex lens systems.

21.6 *The Prism*

A prism is a medium bounded by two plane surfaces making an angle A (Fig. 21-23). We assume that the medium has an index of refraction n and that it is surrounded by a medium having unity index, such as air. An incident ray such as PQ suffers two refractions and emerges deviated an angle δ relative to the incident direction. From the figure it is easily seen that the following relations hold:

The first and second equations are simply Snell's law applied to the refractions at Q and R. The third follows when

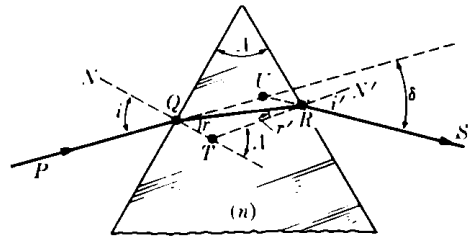


Fig. 21-23. Path of a ray through a prism.

dalla considerazione del triangolo QTR, e la quarta dalla considerazione del triangolo QRU. Le prime tre equazioni servono a tracciare il cammino del raggio e l'ultima ci permette di trovare la deviazione.

Vi è un cammino particolare per il quale la deviazione ha un valore minimo. Questo si ottiene ponendo $d\delta/di = 0$. Dall'Eq. (21.30), abbiamo

e per $d\delta/di = 0$, dobbiamo avere

Dalle Eq. (21.28) e (21.29), abbiamo

Perciò

Poichè i quattro angoli i, r, i', e r' sono minori di $\frac{1}{2}\pi$ e soddisfano le condizioni simmetriche (21.27) e (21.28), le Equazioni (21.31) e (21.32) possono essere simultaneamente soddisfatte solo se $i = i'$ e $r = r'$, che richiede che sia

dove δ_{min} è il valore della deviazione minima. Si noti che in questo caso il cammino del raggio è simmetrico rispetto alle due facce del prisma. Introducendo l'Eq. (21.33) nell'Eq. (21.27), otteniamo

che è una formula comoda per la misura dell'indice di rifrazione di una sostanza, quando si determini sperimentalmente δ_{min} in un prisma di noto angolo A.

21.7 *Dispersione*

Quando un'onda è rifratta in un mezzo dispersivo il cui indice di rifrazione dipende dalla frequenza (o lunghezza d'onda), anche l'angolo di rifrazione dipenderà dalla frequenza o dalla lunghezza d'onda. Se l'onda incidente, invece di essere armonica (o monocromatica) è composta di parecchie frequenze o lunghezze d'onda sovrapposte, ciascuna lunghezza d'onda componente sarà rifratta con un diverso angolo, fenomeno che è detto *dispersione*. (Abbiamo introdotto l'argomento relativo alla dispersione di onde elettromagnetiche nel Paragrafo 19.13.)

Ricordiamo allo studente che i colori sono associati a intervalli di lunghezze d'onda. Perciò, quando la luce bianca viene rifratta dall'aria in un altro mezzo come acqua o vetro, viene scomposta nei vari colori. Se un pezzo di vetro ha la forma di una

we use triangle QTR, and the fourth when we use triangle QRU. The first three equations serve to trace the path of the ray and the last allows us to find the deviation.

There is one particular path for which the deviation has a minimum value. This is obtained by making $d\delta/di = 0$. From Eq. (21.30), we have

$$\frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di},$$

and for $d\delta/di = 0$ we must have

$$\frac{di'}{di} = -1. \tag{21.31}$$

From Eq. (21.28) and (21.29), we have

$$\cos i\, di = n \cos r\, dr, \qquad \cos i'\, di' = n \cos r'\, dr', \qquad dr = -dr'.$$

Therefore

$$\frac{di'}{di} = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r}. \tag{21.32}$$

Since the four angles i, r, i', and r' are smaller than $\frac{1}{2}\pi$ and satisfy the symmetric conditions (21.27) and (21.28), Eqs. (21.31) and (21.32) can be satisfied simultaneously only if $i = i'$ and $r = r'$, which requires that

$$i = \tfrac{1}{2}(\delta_{min} + A), \qquad r = \tfrac{1}{2}A, \tag{21.33}$$

where δ_{min} is the value of the minimum deviation. Note that in this case the path of the ray is symmetric with respect to the two faces of the prism. Introducing Eq. (21.33) in Eq. (21.27), we obtain

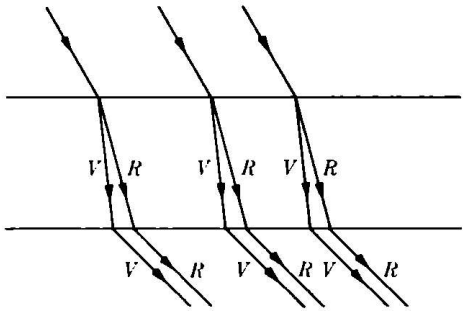
$$n = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(\delta_{min} + A)}{\sin \tfrac{1}{2}A}, \tag{21.34}$$

which is a convenient formula for measuring the index of refraction of a substance by finding δ_{min} experimentally in a prism of known angle A.

21.7 *Dispersion*

When a wave is refracted into a dispersive medium whose index of refraction depends on the frequency (or wavelength), the angle of refraction will also depend on the frequency or wavelength. If the incident wave, instead of being harmonic (or monochromatic) is composed of several frequencies or wavelengths superposed, each component wavelength will be refracted through a different angle, a phenomenon called *dispersion*. (We introduced the subject of dispersion of electromagnetic waves in matter in Section 19.13.)

We remind the student that colors are associated with wavelength intervals. Therefore white light is decomposed into colors when refracted from air into another substance such as water or glass. If a piece of glass is in the form of a



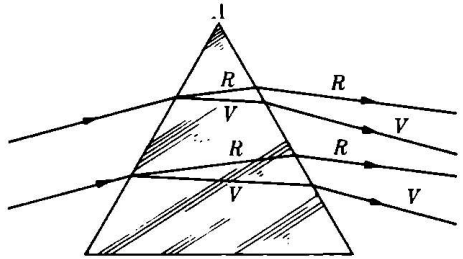


Fig. 21–24. Dispersione quando la luce passa attraverso una lastra a facce piane e parallele.

Fig. 21–25. Dispersione quando la luce passa attraverso un prisma.

lastra a facce parallele, i raggi che emergono sono paralleli e i diversi colori sono ancora sovrapposti (Fig. 21–24), e non si osserva dispersione tranne che ai bordi estremi dell'immagine. Comunque questo effetto non è di solito rilevante.

Ma se la luce passa attraverso un prisma (Fig. 21–25), i raggi emergenti non sono paralleli per i diversi colori e la dispersione è più marcata, specialmente ai bordi. Per questa ragione i prismi sono ampiamente usati negli strumenti detti *spettroscopi* per analizzare la luce. Un tipo semplice di spettroscopio è illustrato in Fig. 21–26. Un fascio di luce emessa da una sorgente S viene limitato da una fenditura e reso parallelo dalla lente L. Dopo aver subito dispersione nel prisma i raggi di vario colore passano attraverso un'altra lente L'. Poichè tutti i raggi dello stesso colore (o lunghezza d'onda) sono paralleli, essi convergono nello stesso punto dello schermo. Ma i raggi che differiscono nel colore (o lunghezza d'onda) non sono paralleli; perciò colori differenti sono focalizzati su differenti punti dello schermo. I vari colori o lunghezze d'onda della luce emessa dalla sorgente S appaiono distribuiti sullo schermo in quello che è detto lo *spettro* della luce proveniente da S. Se la deviazione δ varia fortemente con la lunghezza d'onda λ, i colori appaiono ampiamente separati sullo schermo. Per ciascuna lunghezza d'onda appare sullo schermo una riga che è l'immagine della fenditura.

Slit = Fenditura
Screen = Schermo
Red = Rosso
Violet = Violetto

Fig. 21–26. Principio dello spettroscopio a prisma.

Fig. 21–24. Dispersion when light passes through a plate with parallel sides.

Fig. 21–25. Dispersion when light passes through a prism.

plate with parallel sides, the rays which emerge are parallel and the different colors are superposed again (Fig. 21–24), and no dispersion is observed except at the very edges of the image. Even so, this effect is not normally noticeable.

But if the light passes through a prism (Fig. 21–25), the emerging rays are not parallel for the different colors and the dispersion is more noticeable, especially at the edges. For that reason prisms are widely used for analyzing light in instruments called *spectroscopes*. A simple type of spectroscope is illustrated in Fig. 21–26. Light emitted by a source S limited by a slit is transformed into parallel rays by the lens L. After being dispersed by the prism the rays of different colors pass through another lens L'. Since all rays of the same color (or wavelength) are parallel, they are focused on the same point of the screen. But rays which differ in color (or wavelength) are not parallel; therefore different colors are focused on different points of the screen. The different colors or wavelengths emitted by the source S appear displayed on the screen in what is called the *spectrum* of the light coming from S. If the deviation δ varies rapidly with the wavelength λ, the colors appear widely spaced on the screen. To each wavelength there appears on the screen a line that is the image of the slit.

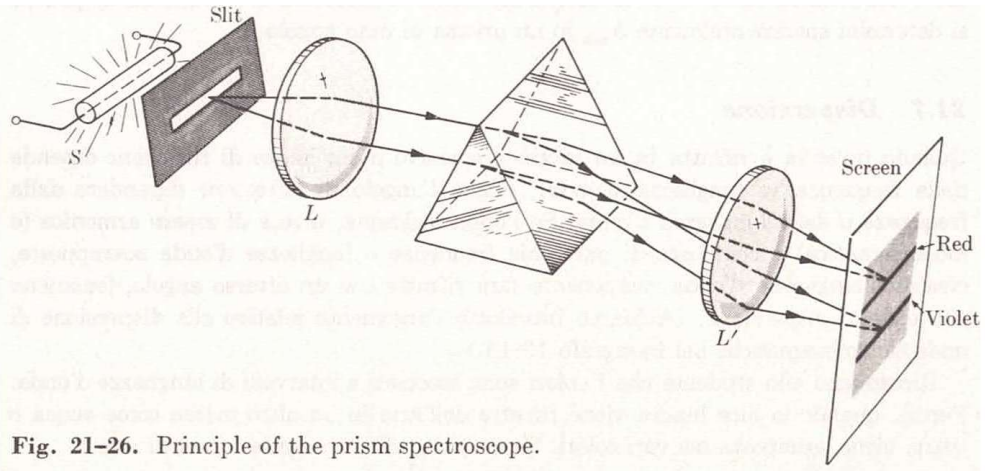


Fig. 21–26. Principle of the prism spectroscope.

In un prisma la dispersione è definita dalla

The dispersion in a prism is defined by

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn}\frac{dn}{d\lambda}. \tag{21.35}$$

Il fattore $d\delta/dn$ dipende principalmente dalla geometria del sistema, mentre il fattore $dn/d\lambda$ dipende dal materiale costituente il prisma. Differenziando le Equazioni della (21.27) alla (21.30) rispetto all'indice di rifrazione n, troviamo che

The factor $d\delta/dn$ depends primarily on the geometry of the system, while the factor $dn/d\lambda$ depends on the material composing the prism. Differentiating Eqs. (21.27) through (21.30) with respect to the index of refraction n, we find that

$$0 = \sin r + n \cos r \frac{dr}{dn},$$

$$\cos i' \frac{di'}{dn} = \sin r' + n \cos r' \frac{dr'}{dn},$$

$$\frac{dr}{dn} + \frac{dr'}{dn} = 0,$$

and

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{di'}{dn}.$$

e

Se combiniamo questi quattro risultati e usiamo l'Eq. (21.29), otteniamo finalmente

If we combine these four results and use Eq. (21.29), we finally get

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{di'}{dn} = \frac{\sin A}{\cos i' \cos r}.$$

Se il prisma è posto in deviazione minima, abbiamo

If the prism is arranged for average minimum deviation, we have

$$\frac{d\delta}{dn} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A)}.$$

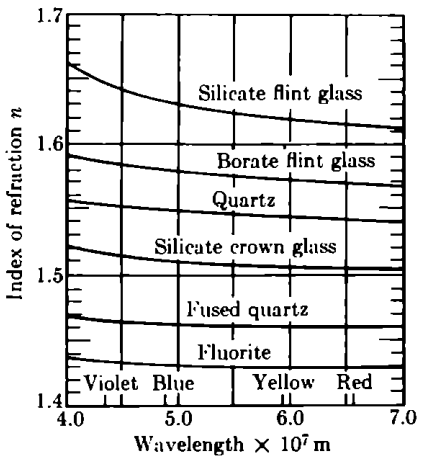


Fig. 21–27. Variazione dell'indice di rifrazione con la lunghezza di onda, nella regione del visibile, per alcuni materiali.

Fig. 21–27. Variation of refractive index with wavelength, in the visible region, for some materials.

Il secondo fattore $dn/d\lambda$ nell'Eq. (21.35) dipende dalla natura delle onde e dal mezzo. Per le onde elettromagnetiche in generale e per la luce in particolare, una soddisfacente espressione approssimata per l'indice di rifrazione in funzione della lunghezza d'onda è data dalla *formula di Cauchy*,

The second factor $dn/d\lambda$ in Eq. (21.35) depends on the nature of the waves and the medium. For electromagnetic waves in general, and for light in particular, a satisfactory approximate expression for the index of refraction as a function of the wavelength is given by *Cauchy's formula*,

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}, \tag{21.36}$$

dove A e B sono costanti caratteristiche di ciascun mezzo (vedere Esempio 21.10). La variazione di n al variare di λ per i vari materiali trasparenti nella regione dello spettro visibile è mostrata in Fig. 21—27. Dalla Eq. (21.36) otteniamo

where A and B are constants characteristic of each substance (see Example 21.10). The variation of n with λ for various materials transparent in the optical region is shown in Fig. 21–27. From Eq. (21.36) we obtain

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}.$$

La dispersione in un prisma è allora

The dispersion in a prism is then

$$D = \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}A}{\cos \frac{1}{2}(\delta_{\min} + A)}\left(-\frac{2B}{\lambda^3}\right). \tag{21.37}$$

Il segno meno significa che la deviazione diminuisce al crescere della lunghezza d'onda, quindi il rosso è deviato meno del violetto.

ESEMPIO 21.10. Giustificazione della formula di Cauchy.

Soluzione: Nell'Eq. (19.58) abbiamo ottenuto un'espressione che metteva in relazione l'indice di rifrazione in funzione della frequenza delle onde elettromagnetiche e le frequenze caratteristiche della sostanza. Supponendo per semplicità che vi sia soltanto una frequenza atomica ω_0,[N.T.] e che $\omega \ll \omega_0$, otteniamo

cosicchè, usando lo sviluppo binomiale (M.28), otteniamo

E, poichè $\omega = 2\pi c/\lambda$, abbiamo

dove

e

Suggeriamo allo studente di valutare l'ordine di grandezza di A e B.

21.8 *Aberrazione cromatica*

Quando luce composta di parecchie lunghezze d'onda (come la luce bianca) passa attraverso una lente, essa subisce dispersione e i bordi dell'immagine formata dalla lente appaiono colorati. Questo effetto è detto *aberrazione cromatica*. È facile capire la ragione di questo effetto se ammettiamo che una lente è equivalente a due prismi uniti alle loro basi (per una lente convergente) o ai loro vertici (per una lente divergente).

Una lente ha un fuoco per ciascun colore o lunghezza d'onda. Questo si vede dalla Eq. (21.18), in quanto f è determinata dall'indice di rifrazione n, e n dipende dalla lunghezza d'onda. Per mezzi trasparenti il cui indice di rifrazione nella regione del visibile diminuisce al crescere della lunghezza d'onda (vedere Fig. 21–27), il violetto ha una distanza focale minore di quella del rosso. In Fig. 21–28, è mostrata l'aberrazione cromatica di una lente convergente e una divergente per un tale mezzo.

N.T. Nella fisica moderna, ω_0 è detta frequenza atomica ma essa è in realtà una pulsazione atomica.

The negative sign means that the deviation decreases when the wavelength increases, so that the red is deviated less than the violet.

EXAMPLE 21.10. Justification of Cauchy's formula.

Solution: In Eq. (19.58) we obtained an expression which related the index of refraction as a function of the frequency of the electromagnetic waves and the characteristic frequencies of the substance. Assuming for simplicity that there is only one atomic frequency ω_0 and that $\omega \ll \omega_0$, we obtain

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

so that, using the binomial expansion (M.28), we get

$$n = \left(1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)^{1/2} = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$
$$= 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m\omega_0^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}$$
$$= 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m\omega_0^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right).$$

And, since $\omega = 2\pi c/\lambda$, we have

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2},$$

where

$$A = 1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m\omega_0^2} \quad \text{and} \quad B = \frac{2\pi^2 c^2 Ne^2}{\epsilon_0 m\omega_0^4}.$$

We suggest that the student determine the order of magnitude of A and B.

21.8 *Chromatic Aberration*

When light composed of several wavelengths (such as white light) passes through a lens, it suffers dispersion, and the edges of the image produced by the lens appear colored. This effect is called *chromatic aberration*. It is easy to understand the reason for this effect if we recognize that a lens is equivalent to two prisms attached at their bases (for a convergent lens) or their vertexes (for a divergent lens).

A lens has a focus for each color or wavelength. This is seen from Eq. (21.18), since f is determined by the index of refraction n, and n depends on the wavelength. For transparent substances whose index of refraction decreases with increasing wavelength in the visible region (see Fig. 21–27), violet has a shorter focal length than red. In Fig. 21–28, the chromatic aberration of a convergent and a divergent lens is shown for such a material.

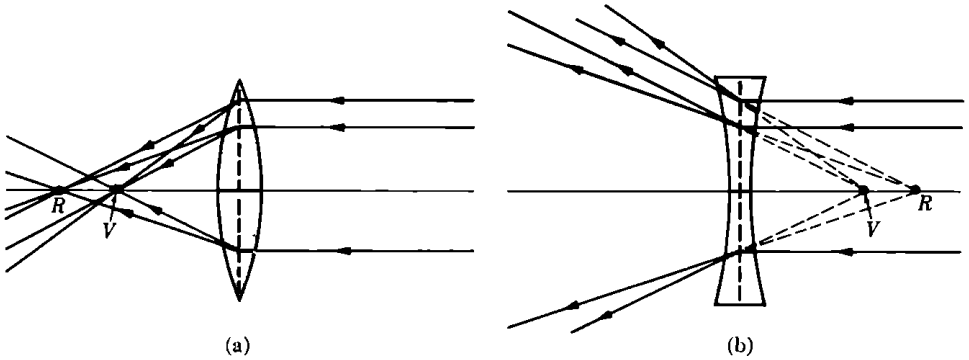


Fig. 21–28. Aberrazione cromatica nelle lenti. (a) Lente convergente, a (b) lente divergente.

In una lente, l'aberrazione cromatica è definita dalla differenza $f_C - f_F$ tra le distanze focali corrispondenti alle lunghezze d'onda 6.563×10^{-7} m, e 4.862×10^{-7} m, dell'idrogeno, e indicate come righe C e F di Fraunhofer. Allora, usando l'Eq. (21.18), abbiamo

e

e quindi

Ora la riga D di Fraunhofer, con lunghezza d'onda 5.890×10^{-7} m, corrisponde approssimativamente all'indice di rifrazione medio, indicato con n_D. Allora

Usando questa espressione, possiamo eliminare nelle Eq. (21.38) i raggi di curvatura della lente e scrivere

Ma il primo membro può scriversi come

poichè, approssimativamente, $f_C f_F \approx f_D^2$. Perciò l'aberrazione cromatica longitudinale della lente è

Fig. 21–28. Chromatic aberration in lenses. (a) Convergent and (b) divergent lens.

The chromatic aberration in a lens is defined by the difference $f_C - f_F$ between the focal distances corresponding to the wavelengths 6.563×10^{-7} m and 4.862×10^{-7} m, emitted by hydrogen and designated as the C- and F- Fraunhofer lines. Then, using Eq. (21.18), we have

$$\frac{1}{f_C} = (n_C - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \quad \text{and} \quad \frac{1}{f_F} = (n_F - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

and thus

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = (n_F - n_C)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right). \tag{21.38}$$

Now the Fraunhofer D-line, with wavelength 5.890×10^{-7} m, corresponds approximately to the average index of refraction, designated by n_D. Then

$$\frac{1}{f_D} = (n_D - 1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Using the above expression, we may eliminate the dependence of Eq. (21.38) on the radii of the lens and write

$$\frac{1}{f_F} - \frac{1}{f_C} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}\frac{1}{f_D}.$$

But the left-hand side may be written as

$$\frac{f_C - f_F}{f_C f_F} \approx \frac{f_C - f_F}{f_D^2},$$

since, approximately, $f_C f_F \approx f_D^2$. Therefore the longitudinal chromatic aberration of the lens is

$$A = f_C - f_F = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} f_D. \tag{21.39}$$

TABELLA 21–3 Indici di rifrazione e potere dispersivo

Riga di Fraunhofer	C	D	F	Potere Dispersivo, ω
Lunghezza d'onda $\times 10^7$ m	6.563	5.890	4.862	
Vetro crown	1.514	1.517	1.524	0.0193
Vetro flint	1.622	1.627	1.639	0.0271
Alcool	1.361	1.363	1.367	0.0165
Benzene	1.497	1.503	1.514	0.0338
Acqua	1.332	1.334	1.338	0.0180

La grandezza

è detta *potere dispersivo* del materiale. La Tabella 21–3 dà gli indici di rifrazione di alcuni materiali trasparenti per le righe C, D, e F di Fraunhofer.

Il tipo di aberrazione cromatica trattato finora per le lenti è detto *longitudinale* perchè esso è misurato lungo l'asse principale. Vi è anche una aberrazione cromatica *trasversale*. Consideriamo un oggetto AB posto davanti a una lente L (Fig. 21–29). A meno che la luce proveniente dall'oggetto sia monocromatica, essa subirà dispersione nel suo passaggio attraverso la lente e, invece di una immagine, si formerà una serie di immagini di dimensioni differenti, una per ciascuna lunghezza d'onda o colore. La figura indica soltanto le immagini estreme corrispondenti al rosso e al violetto e la loro separazione è stata fortemente esagerata. A causa di questa dispersione laterale, i bordi delle immagini appaiono colorati. L'aberrazione cromatica trasversale può esprimersi in funzione dei diversi ingrandimenti per le righe C e F.

ESEMPIO 21.11. Discussione sulle lenti acromatiche.

Soluzione: L'aberrazione cromatica può essere ridotta o anche eliminata combinando lenti di materiali differenti, dando luogo a quello che è detto un *sistema acromatico*. Per vedere come questo possa venir realizzato, supponiamo di avere il sistema di lenti di Fig. 21–30, dove, per esempio, la lente L è fatta di vetro crown e la lente L' di vetro flint. Indichiamo con f e f' le loro rispettive distanze focali e ω e ω' i loro rispettivi poteri dispersivi. L'aberrazione cromatica della lente

Longitudinal chromatic aberration = Aberrazione cromatica longitudinale
Transverse chromatic aberration = Aberrazione cromatica trasversale

Fig. 21–29. Aberrazione cromatica longitudinale e trasversale in una lente.

TABLE 21–3 Indexes of Refraction and Dispersive Power

Fraunhofer line	C	D	F	Dispersive power, ω
Wavelength $\times 10^7$ m	6.563	5.890	4.862	
Crown glass	1.514	1.517	1.524	0.0193
Flint glass	1.622	1.627	1.639	0.0271
Alcohol	1.361	1.363	1.367	0.0165
Benzene	1.497	1.503	1.514	0.0338
Water	1.332	1.334	1.338	0.0180

The quantity

$$\omega = \frac{f_C - f_F}{f_D} = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} \tag{21.40}$$

is called the *dispersive power* of the material. Table 21–3 gives the indexes of refraction of some transparent materials at the C-, D-, and F- Fraunhofer lines.

The kind of chromatic aberration we have discussed so far for lenses is called *longitudinal* because it is measured along the principal axis. There is also a *transverse* chromatic aberration. Consider an object AB in front of a lens L (Fig. 21–29). Unless the light from the object is monochromatic, it will be dispersed as it goes through the lens and, instead of one image, a series of images differing in size will be formed, one for each wavelength or color. The figure shows only the extreme images corresponding to red and violet, and their separation has been greatly exaggerated. Because of this lateral dispersion, the edges of the images will appear colored. Transverse chromatic aberration can be expressed in terms of the different magnification for the C- and F-lines.

EXAMPLE 21.11. Discussion of achromatic lenses.

Solution: Chromatic aberration can be reduced or even eliminated by combining lenses of different materials, resulting in what is called an *achromatic system*. To see how this can be done, suppose we have the lens system in Fig. 21–30, where, for example, lens L is made of crown glass and lens L' of flint glass. Call f and f' their respective focal lengths and ω and ω' their respective dispersive powers. Lens L would have the chromatic aberra-

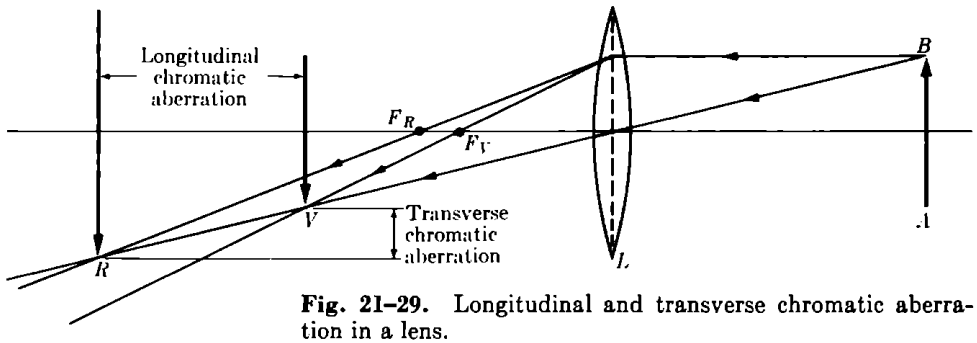


Fig. 21–29. Longitudinal and transverse chromatic aberration in a lens.

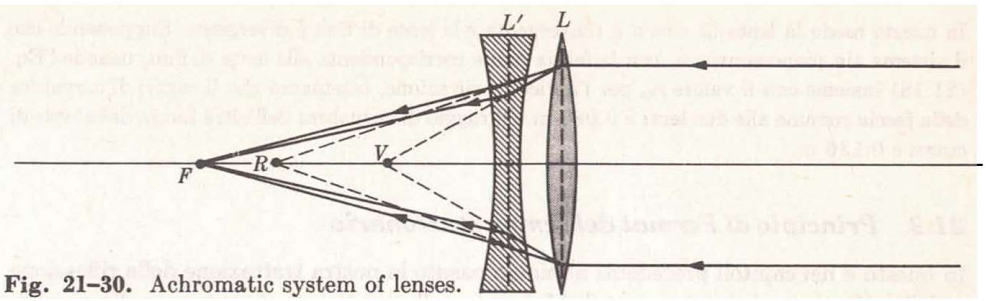


Fig. 21–30. Sistema di lenti acromatico.

Fig. 21–30. Achromatic system of lenses.

sarebbe definita dal segmento VR. Ma se la lente divergente L' è convenientemente scelta, i raggi di tutte le lunghezze d'onda convergeranno nel fuoco F. Per vedere come questo viene ottenuto, ricordiamo dall'Esempio 21.9 che per ciascuna lunghezza d'onda

tion indicated by the segment VR. But if the divergent lens L' is properly designed, rays of all wavelengths should focus at F. To see how this is done, we recall from Example 21.9 that for each wavelength

$$\frac{1}{F_C} = \frac{1}{f_C} + \frac{1}{f'_C}, \qquad \frac{1}{F_F} = \frac{1}{f_F} + \frac{1}{f'_F},$$

dove F_C e F_F sono le corrispondenti distanze focali della combinazione di lenti. Perciò, sottraendo membro a membro queste due equazioni e ricordando che $F_C F_F \approx F_D^2$, ecc., abbiamo

where F_C and F_F are the corresponding focal lengths of the lens combination. Therefore, subtracting these two equations and remembering that $F_C F_F \approx F_D^2$, etc., we have

$$\frac{F_C - F_F}{F_D^2} = \frac{f_C - f_F}{f_D^2} + \frac{f'_C - f'_F}{f'^2_D} = \frac{\omega}{f_D} + \frac{\omega}{f'_D}.$$

Quando non vi è aberrazione cromatica longitudinale, dobbiamo avere $F_C - F_D = 0$, cosicchè

When there is no longitudinal chromatic aberration, we must have $F_C - F_D = 0$, so that

$$\frac{\omega}{f_D} + \frac{\omega'}{f'_D} = 0. \tag{21.41}$$

Poichè ω e ω' sono positivi, concludiamo che f_D e f'_D sono di segno opposto. Quindi una lente è convergente e l'altra deve essere divergente.

Since ω and ω' are positive, we conclude that f_D and f'_D are of opposite signs. So one lens is convergent and the other must be divergent.

ESEMPIO 21.12. Progettare una lente acromatica avente una distanza focale di 0.350 m e fatta di due lenti, una di vetro crown e l'altra di vetro flint.

EXAMPLE 21.12. Design an achromatic lens having a focal length of 0.350 m and made of two lenses, one of crown glass and the other of flint glass.

Soluzione: Dai dati della Tabella 21–3, risulta che il potere dispersivo ω del vetro crown è 0.0193 e quello del vetro flint è 0.0271. Perciò la condizione di acromaticità imposta dall'Eq. (21.41) è espressa da

Solution: From the data of Table 21–3, we have that the dispersive power ω of crown glass is 0.0193 and that of flint glass is 0.0271. Therefore the requirement of achromaticity imposed by Eq. (21.41) is expressed by

$$\frac{0.0193}{f_1} + \frac{0.0271}{f_2} = 0 \qquad \text{or} \qquad \frac{f_2}{f_1} = -1.402.$$

ossia

Facendo uso del risultato dell'Esempio 21.9, con $F = +0.35$ m, una seconda condizione viene espressa da

A second requirement, using the result of Example 21.9 with $F = +0.35$ m, is met by

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{0.350}.$$

Combinando le due equazioni, otteniamo allora

Combining the two equations, we then get

$$f_1 = +0.1007 \text{ m}, \qquad f_2 = -0.1414 \text{ m}.$$

In questo modo la lente di crown è convergente e la lente di flint è divergente. Supponendo che il sistema sia piano-convesso, con la faccia piana corrispondente alla lente di flint, usando l'Eq. (21.18) insieme con il valore n_D per l'indice di rifrazione, otteniamo che il raggio di curvatura della faccia comune alle due lenti è 0.089 m e il raggio di curvatura dell'altra faccia della lente di crown è 0.126 m.

21.9 *Principio di Fermat del tempo stazionario*

In questo e nei capitoli precedenti abbiamo basato la nostra trattazione della riflessione e della rifrazione sia sul teorema di Malus sia sulle condizioni al contorno sulla superficie di separazione tra i due mezzi. Nella geometria della propagazione per onde, tuttavia, vi è un terzo principio, non collegato direttamente agli altri due, che fornisce il cammino di un raggio in un mezzo non omogeneo. Esso fu suggerito dal matematico francese Pierre de Fermat (1601—1665). Il *principio di Fermat* può essere enunciato nel modo seguente:

> *Nel passare da un punto a un altro il raggio sceglie la traiettoria per la quale il tempo di propagazione ha un valore minimo.*

Consideriamo, per esempio, un mezzo stratificato come quello preso in considerazione nel Paragrafo 20.13. La traiettoria effettiva è calcolata usando l'Eq. (20.32) ed è rappresentata dalla spezzata (1) in Fig. 21—31(a). Un'altra traiettoria arbitraria è indicata dalla spezzata (2). Questa non è una traiettoria fisica, poichè la legge di Snell non è soddisfatta sulla superficie di separazione. Possiamo calcolare i tempi impiegati dal raggio di luce per procedere lungo la traiettoria fisica (1) e la traiettoria arbitraria (2) se conosciamo la lunghezza di ciascun segmento del percorso e la velocità di propagazione in ciascun mezzo. Il principio di Fermat impone che il tempo per percorrere l'effettiva traiettoria fisica sia minore del tempo necessario per percorrere una qualunque traiettoria vicina non fisica; cioè $t_1 < t_2$. Se, invece di un mezzo stratificato, abbiamo un mezzo non omogeneo (Fig. 21—31b), in cui (1) è l'effettiva traiettoria fisica del raggio e (2) è una traiettoria vicina non fisica arbitraria, allora il principio di Fermat richiede che sia $t_1 < t_2$.

Ovviamente il tempo richiesto dal raggio per andare da A a B lungo un percorso è una funzione del percorso stesso; cioè $t_{AB} = f$ (percorso). Questo è un nuovo tipo di dipendenza funzionale,

Thus the crown lens is convergent and the flint lens is divergent. Assuming that the system is plano-convex, with the plane face corresponding to the flint lens, we have, using Eq. (21.18) with the value n_D for the index of refraction, that the radius of the face that is common to the two lenses is 0.089 m and the radius of the other face of the crown lens is 0.126 m.

21.9 *Fermat's Principle of Stationary Time*

In this and the preceding chapters we have based our discussion of reflection and refraction either on Malus' theorem or on the boundary conditions at the surface of separation between the two media. In wave geometry, however, there is a third principle, not directly related to the other two, which yields the path of a ray in an inhomogeneous medium. It was suggested by the French mathematician Pierre de Fermat (1601–1665). *Fermat's principle* can be stated in the following way:

> *In traveling from one point to another the ray chooses the path for which the propagation time has a minimum value.*

Let us consider, for example, a stratified medium like the one discussed in Section 20.13. The actual path is computed by using Eq. (20.32) and is shown by line (1) in Fig. 21–31(a). Another arbitrary path is indicated by line (2). This is not a physical path, since Snell's law is not satisfied at the boundary between two surfaces. We may compute the times required by the light ray to follow the physical path (1) and the arbitrary path (2) if we know the length of each segment of the path and the velocity of propagation in each medium. Fermat's principle requires that the time for the actual physical path to be traversed be smaller than the time needed to traverse any arbitrary and nonphysical neighboring path; that is, $t_1 < t_2$. If we have, instead of a stratified medium, an inhomogeneous medium (Fig. 21–31b), in which (1) is the actual physical path of the ray and (2) is an arbitrary nonphysical neighboring path, then Fermat's principle requires that $t_1 < t_2$.

Obviously the time required by the ray to go from A to B along a path is a function of the path; that is, $t_{AB} = f(\text{path})$. This is a new type of functional depend-

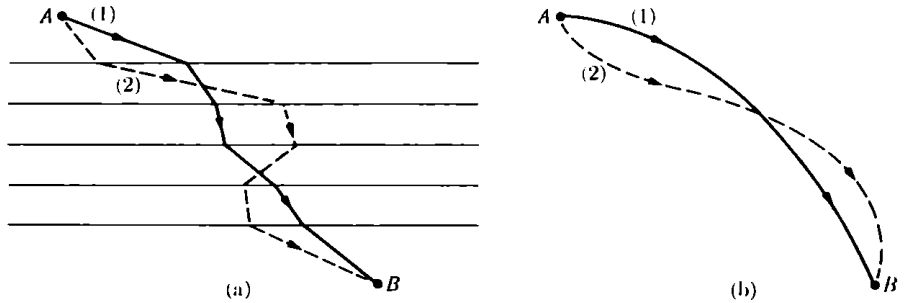


Fig. 21—31. Confronto tra la traiettoria fisica della luce tra due punti e una traiettoria vicina, ma non fisica.

Fig. 21–31. Comparison of the physical path of light between two points with a near, but unphysical, path.

nel senso che le variabili nella funzione f non sono le coordinate di un punto, ma i parametri che definiscono una traiettoria che unisce A e B. La richiesta che t_{AB} sia un minimo può essere formulata dicendo che è $dt_{AB} = 0$ per una piccola variazione nei valori dei parametri corrispondenti alla traiettoria fisica. Una tecnica matematica specifica, nota come *calcolo delle variazioni*, ci permette di trovare i valori dei parametri della traiettoria che soddisfa alla $dt_{AB} = 0$, e in questo modo possiamo determinare la traiettoria del raggio.

Non insisteremo ulteriormente su come il principio di Fermat possa essere usato per tracciare il percorso di un raggio in un mezzo non omogeneo ma verificheremo soltanto che esso è compatibile con la legge di Snell. Consideriamo la Fig. 21–32, in cui una superficie S separa due mezzi di indici di rifrazione n_1 e n_2. Un raggio che va da A a C segue la traiettoria ABC. Allora, ricordando che $v = c/n$, Eq. (19.56), il tempo necessario perchè la luce percorra questa traiettoria è

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} = \frac{1}{c}(n_1 r_1 + n_2 r_2).$$

Il principio di Fermat richiede che sia

$$dt = \frac{1}{c}(n_1\, dr_1 + n_2\, dr_2) = 0, \tag{21.42}$$

Figura 21–32

dove dt è la variazione in t per le traiettorie vicine come $AB'C$, che produce le corrispondenti variazioni dr_1 e dr_2 in r_1 e r_2, rispettivamente. Ora, ricordando che $r^2 = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$, abbiamo $r\,dr = \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}$ ossia $dr = (\boldsymbol{r}/r)\cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r}$, dove $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}/r$ è il versore nella direzione di $\boldsymbol{r}$. Perciò $dr_1 = \boldsymbol{u}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1$ e $dr_2 = \boldsymbol{u}_2\cdot d\boldsymbol{r}_2$. Ma $r_1 + r_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \text{cost.}$ Perciò $dr_1 + dr_2 = 0$ ossia $dr_2 = -dr_1$, cosicchè $dr_2 = -\boldsymbol{u}_2\cdot d\boldsymbol{r}_1$. Allora l'Eq. (21.42) dà (elimimando il fattore costante $1/c$)

$$(n_1\boldsymbol{u}_1 - n_2\boldsymbol{u}_2)\cdot d\boldsymbol{r}_1 = 0. \tag{21.43}$$

Ora, come indicato in Fig. 21–32, il vettore $d\boldsymbol{r}_1$, è nel piano tangente a S in B. Ciò significa, secondo l'Eq. (21.43), che il vettore $n_1\boldsymbol{u}_1 - n_2\boldsymbol{u}_2$ è parallelo alla normale $\boldsymbol{u}_N$ a S in B, e ciò implica che il raggio incidente, il raggio rifratto e la normale alla superficie stiano tutti in un piano, che è la prima legge formulata nel Paragrafo 20.4. Dal Paragrafo 3.9, ricordiamo che se due vettori sono paralleli il loro prodotto vettoriale è zero, cosicchè

$$(n_1\boldsymbol{u}_1 - n_2\boldsymbol{u}_2)\times\boldsymbol{u}_N = 0 \quad \text{or} \quad n_1\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_N = n_2\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_N. \tag{21.44}$$

Poichè tutti i vettori impiegati precedentemente sono unitari, l'Eq. (21.44) implica (per i moduli) che sia $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$, che è la legge di Snell, Eq. (20.4).

ence, in the sense that the variables in the function f are not the coordinates of a point, but the parameters defining a path joining A and B. The requirement that t_{AB} be a minimum can be stated by saying that $dt_{AB} = 0$ for a small change in the values of the parameters corresponding to the physical path. A special mathematical technique known as the *calculus of variations* allows us to find the values of the parameters of the path satisfying $dt_{AB} = 0$, and in this way we can determine the path of the ray.

We shall not elaborate further on how Fermat's principle can be used to trace the path of a ray in an inhomogeneous medium, but only verify that it is compatible with Snell's law. Consider Fig. 21–32, in which a surface S separates two media of indexes of refraction n_1 and n_2. A ray which travels from A to C follows the path ABC. Then, recalling that $v = c/n$, Eq. (19.56), the time needed for light to traverse this path is

$$t = \frac{r_1}{v_1} + \frac{r_2}{v_2} = \frac{1}{c}(n_1 r_1 + n_2 r_2).$$

Fermat's principle requires that

$$dt = \frac{1}{c}(n_1\, dr_1 + n_2\, dr_2) = 0, \tag{21.42}$$

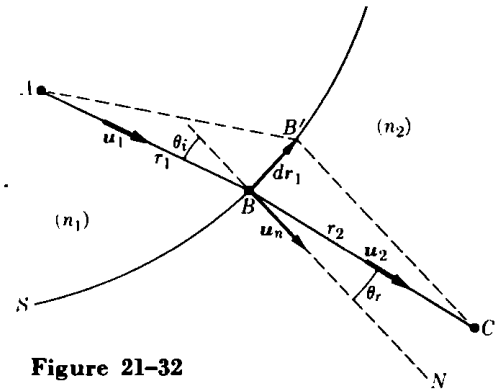


Figure 21–32

where dt is the change in t for neighboring paths such as $AB'C$, producing the corresponding changes dr_1 and dr_2 in r_1 and r_2, respectively. Now, remembering that $r^2 = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$, we have $r\,dr = \boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}$ or $dr = (\boldsymbol{r}/r)\cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{r}$, where $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}/r$ is the unit vector in the direction of $\boldsymbol{r}$. Therefore $dr_1 = \boldsymbol{u}_1\cdot d\boldsymbol{r}_1$ and $dr_2 = \boldsymbol{u}_2\cdot d\boldsymbol{r}_2$. But $r_1 + r_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \text{const.}$ Therefore $dr_1 + dr_2 = 0$ or $dr_2 = -dr_1$, so that $dr_2 = -\boldsymbol{u}_2\cdot d\boldsymbol{r}_1$. Then Eq. (21.42) gives (eliminating the constant factor $1/c$)

$$(n_1\boldsymbol{u}_1 - n_2\boldsymbol{u}_2)\cdot d\boldsymbol{r}_1 = 0. \tag{21.43}$$

Now the vector $d\boldsymbol{r}_1$, as indicated in Fig. 21–32, is in the plane tangent to S at B. That means, according to Eq. (21.43), that the vector $n_1\boldsymbol{u}_1 - n_2\boldsymbol{u}_2$ is parallel to the normal $\boldsymbol{u}_N$ to S at B, implying that the incident ray, the refracted ray and the normal to the surface are all in one plane, which is the first law stated in Section 20.4. From Section 3.9, we remember that if two vectors are parallel their vector product is zero, so that

$$(n_1\boldsymbol{u}_1 - n_2\boldsymbol{u}_2)\times\boldsymbol{u}_N = 0 \quad \text{or} \quad n_1\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_N = n_2\boldsymbol{u}_2\times\boldsymbol{u}_N. \tag{21.44}$$

Since all the vectors in the above are unitary, Eq. (21.44) implies (in magnitudes) that $n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r$, which is Snell's law, Eq. (20.4).

ESEMPIO 21.13. Usare il principio di Fermat per discutere la riflessione su una superficie sferica.

Soluzione: Se abbiamo una sorgente puntiforme P (Fig. 21–33) davanti ad una superficie riflettente e desideriamo formare un'immagine in Q, la forma della superficie deve essere tale che, secondo il principio di Fermat, tutti i raggi impieghino lo stesso per andare da P a Q. (Si noti che questo è anche richiesto dal teorema di Malus.) Il tempo necessario perchè un raggio percorra l'asse principale è

Per un raggio incidente sulla superficie in A, abbiamo che

e deve essere $t = t'$, almeno come prima approssimazione. Si noti che questo è impossibile se la superficie è piana (come OY) perchè, se A fosse su OY, allora sarebbe sempre $AP > OP$ e $AQ > OQ$, e quindi $t' > t$. Ma, incurvando la superficie, si possono ottenere sia AP che AQ in modo che risulti $t = t'$. Vediamo se ciò è possibile con una superficie sferica. La condizione $t = t'$ richiede che

Dal triangolo ABP, abbiamo

Ma se A è sufficientemente prossimo ad O, abbiamo che AP è leggermente maggiore e BP leggermente minore di OP. Perciò, con buona approssimazione possiamo scrivere $AP + BP \approx 2OP = 2p$. Quindi

Analogamente,

Sostituendo queste equazioni nell'Eq. (21.47), troviamo che

o anche

Ma ancora dal triangolo ABC, trascurando OB^2 rispetto a r^2, abbiamo $OB = h^2/2r$, e questo è accettabile dal momento che A è prossimo ad O (tutti i raggi sono parassiali). Perciò, se sostituendo nell'Eq. (21.48) e semplifichiamo il fattore comune $\frac{1}{2}h^2$, otteniamo

Questa è la formula di Descartes, che nel Paragrafo 21.2 abbiamo ricavato con un metodo diverso.

EXAMPLE 21.13. Use Fermat's principle to discuss reflection at a spherical surface.

Solution: If we have a point source P (Fig. 21–33) in front of a reflecting surface and we want to produce an image at Q, the shape of the surface must be such that, according to Fermat's principle, all rays require the same amount of time to travel from P to Q. (Note that this is also required by Malus' theorem.) The time necessary for a ray to travel along the principal axis is

$$t = \frac{1}{c}(OP + OQ). \tag{21.45}$$

For a ray incident on the surface at A, we have that

$$t' = \frac{1}{c}(AP + AQ), \tag{21.46}$$

and we must require that $t = t'$, at least in the first order of approximation. Note that this is impossible if the surface is plane (such as OY) because, if A were on OY, then always $AP > OP$ and $AQ > OQ$, resulting in $t' > t$. But, by curving the surface, both AP and AQ may be adjusted so that $t = t'$ holds. Let us see if this is possible with a spherical surface. Condition $t = t'$ requires that

$$AP + AQ = OP + OQ. \tag{21.47}$$

From triangle ABP, we have

$$h^2 = AP^2 - BP^2 = (AP - BP)(AP + BP).$$

But if A is sufficiently close to O, we have that AP is slightly larger than OP and BP slightly smaller. Therefore we may write as a good approximation $AP + BP \approx 2OP = 2p$. Therefore

$$AP = BP + \frac{h^2}{2p}.$$

Similarly,

$$AQ = BQ + \frac{h^2}{2q}.$$

Substituting these equations into Eq. (21.47), we find that

$$\left(BP + \frac{h^2}{2p}\right) + \left(BQ + \frac{h^2}{2q}\right) = OP + OQ$$

or

$$\frac{h^2}{2p} + \frac{h^2}{2q} = (OP - BP) + (OQ - BQ) = 2OB. \tag{21.48}$$

But again from triangle ABC, we have that $OB = h^2/2r$, if we neglect OB^2 compared with r^2, which is acceptable so long as A is close to O (all rays are paraxial). Therefore, if we substitute in Eq. (21.48) and eliminate the common factor $\frac{1}{2}h^2$, we get

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{r}.$$

This is Descartes' formula, which we derived by a different method in Section 21.2.

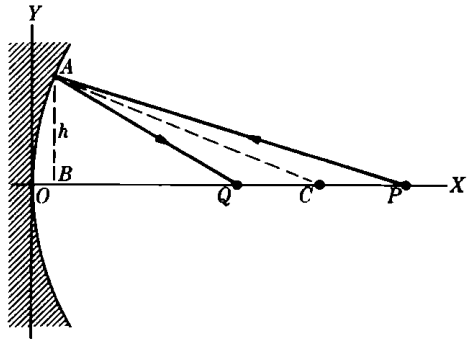


Figura 21–33

Fig. 21–34. Specchio ellittico.

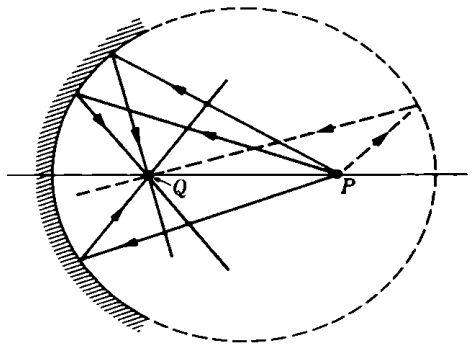


Figure 21-33

Fig. 21-34. Elliptical mirror.

Un ulteriore passo potrebbe essere quello di vedere se, con una conveniente superficie, è possibile soddisfare rigorosamente l'Eq. (21.47), almeno per una coppia di punti P e Q. Notiamo che in questo caso l'Eq. (21.47) sarebbe equivalente alla $AP + AQ = \text{cost}$. Questa è l'equazione di un ellissoide di rivoluzione i cui fuochi sono in P e in Q, come indicato nella Fig. 21–34, ed è la forma della superficie riflettente per la quale l'immagine di P è rigorosamente Q (cioè, non vi è aberrazione sferica per questa coppia di punti). Per tutti gli altri punti vi è aberrazione sferica, l'ammontare della quale dipende dalla distanza del punto da questi due punti scelti.

A step further would be to see if, by means of a suitable surface, we could satisfy Eq. (21.47) rigorously, at least for a pair of points P and Q. We note that in this case Eq. (21.47) would be equivalent to $AP + AQ = \text{const}$. This is the equation of an ellipsoid of revolution whose foci are at P and Q, as indicated in Fig. 21–34, and is the shape of the reflecting surface for which the image of P is rigorously Q (that is, there is no spherical aberration for this pair of points). For all other points there is spherical aberration, the amount of which depends on the distance of the point from these two chosen points.

Bibliografia

References

1. "Ground-Based Astronomy," *Physics Today*, February 1965, page 19
2. "The 210-Foot Radio Telescope at Parkes," E. Bowen, *The Physics Teacher* **4,** 99 (1966)
3. "Radio Astronomy," G. Swenson, Jr., *The Physics Teacher* **2,** 271 (1964)
4. "Present-Day Photographic Lenses and Their Characteristics," G. Wallington, *The Physics Teacher* **2,** 381 (1964)
5. "A Lens Forms Too Many Images!" A. King and N. Winsor, *Am. J. Phys.* **32,** 895 (1964)
6. "Experiments in Color Vision," E. Land, *Sci. Am.*, May 1959, page 84
7. "Fermat's Principle and Geometrical Optics," J. Shaw, *Am. J. Phys.* **33,** 40 (1965)
8. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. New York: Dover Press, 1963, Chapters 3, 7, and 8
9. *Optics*, B. Rossi. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957, Chapter 2
10. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapters 26 and 27
11. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 278 (Fermat); page 298 (Newton); page 381 (Christiansen); page 382 (Kundt)

Problemi

21.1 Dimostrare che quando uno specchio piano viene ruotato di un angolo α, il raggio riflesso ruota di un angolo doppio; cioè $\beta = 2\alpha$ in Fig. 21–35.

Figura 21–35

21.2 Dimostrare che se uno specchio piano viene spostato parallelamente a se stesso di una distanza x lungo la normale, l'immagine si sposta di una distanza $2x$.

21.3 Uno specchio concavo ha un raggio di curvatura di 1.00 m. Trovare la posizione dell'immagine di un oggetto e l'ingrandimento se l'oggetto è a una distanza dallo specchio uguale a (a) 1.40 m, (b) 1.00 m, (c) 0.80 m, (d) 0.50 m, e (e) 0.30 m. Si consideri anche un oggetto virtuale alla distanza di 0.60 m.

21.4 Uno specchio convesso ha un raggio di curvatura di 1.00 m. Trovare la posizione dell'immagine di un oggetto e l'ingrandimento se la distanza tra l'oggetto e lo specchio è 0.60 m. Si consideri anche un oggetto virtuale a una distanza di (a) 0.30 m, e (b) 0.80 m.

21.5 Determinare la distanza focale di uno specchio sferico e il tipo dello specchio se, a un oggetto posto a 1.20 m da esso corrisponde una immagine che è (a) reale e a 0.80 m dallo specchio, (b) virtuale e a 3.20 m dallo specchio, (c) virtuale e a 0.60 m dallo specchio, (d) reale e ingrandita due volte, (e) virtuale e ingrandita due volte, (f) reale e ridotta a 1/3, e (g) virtuale e ridotta a 1/3.

21.6 Uno specchio sferico concavo ha un raggio di curvatura di 1.60 m. Trovare la posizione dell'oggetto se l'immagine è (a) reale e ingrandita tre volte, (b) reale e ridotta a 1/3, e (c) virtuale e ingrandita tre volte. Ripetere lo stesso problema per uno specchio convesso.

21.7 Uno specchio concavo per barba ha una distanza focale di 15 cm. Trovare la distanza ottima di una persona dallo specchio se la distanza della visione distinta è 25 cm. Quanto vale l'ingrandimento?

21.8 Uno specchio concavo forma una immagine reale capovolta ingrandita tre volte rispetto all'oggetto e a una distanza di 28 cm dall'oggetto stesso. Trovare la distanza focale dello specchio.

21.9 Quando un oggetto, che è inizialmente a 60 cm da uno specchio concavo, si sposta di 10 cm verso lo specchio, la distanza tra l'oggetto e la sua immagine diventa due volte e mezza più grande. Determinare la distanza focale dello specchio.

21.10 L'*aberrazione sferica* di uno specchio (sferico) è definita come la differenza tra la distanza focale f per un raggio vicino all'asse dello specchio e la distanza focale f' per un raggio vicino al bordo. Dimostrare che $f - f' \approx H^2/2r$, dove H è il raggio della base dello specchio.

21.11 Uno specchio concavo ha un raggio di curvatura di 10 cm. La base dello specchio ha un raggio di 8 cm. Trovare l'aberrazione sferica dello specchio e confrontarla con la sua distanza focale.

21.12 Un oggetto si sposta verso uno specchio sferico con una velocità costante v. Trovare la velocità dell'immagine in funzione della distanza p. Riportare su un grafico la velocità dell'immagine in funzione di p. Ripetere il problema per una lente sferica.

21.13 Dimostrare che se u_1 e u_2 sono le distanze di un oggetto e della sua immagine dal centro di uno specchio sferico, vale la relazione $1/u_1 + 1/u_2 = -2/r$. Dimostrare che, in questo caso, l'ingrandimento è dato da $M = u_2/u_1$.

21.14 Se x_1 e x_2 sono le distanze dell'oggetto e della sua immagine misurate dal fuoco di uno specchio sferico, dimostrare che l'Eq. (21.3) dà $x_1x_2 = f^2$. Tale equazione è detta

Problems

21.1 Show that when a plane mirror is rotated an angle α, the reflected ray rotates through an angle twice as large; that is, $\beta = 2\alpha$ in Fig. 21–35.

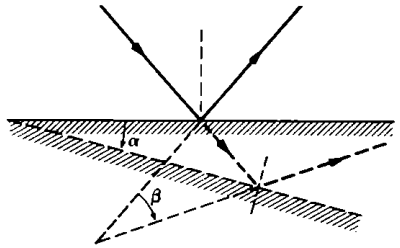


Figure 21–35

21.2 Show that if a plane mirror is displaced parallel to itself a distance x along the normal, the image moves a distance $2x$.

21.3 A concave mirror has a radius of 1.00 m. Find the position of the image of an object and the magnification if the object is at a distance from the mirror equal to (a) 1.40 m, (b) 1.00 m, (c) 0.80 m, (d) 0.50 m, and (e) 0.30 m. Consider also a virtual object at a distance of 0.60 m.

21.4 A convex mirror has a radius of 1.00 m. Find the position of the image of an object and the magnification if the distance from the object to the mirror is 0.60 m. Also consider a virtual object at a distance of (a) 0.30 m, and (b) 0.80 m.

21.5 Determine the focal length and the nature of a spherical mirror if, to an object placed 1.20 m from the mirror, there corresponds an image that is (a) real and at 0.80 m from the mirror, (b) virtual and at 3.20 m from the mirror, (c) virtual and at 0.60 m from the mirror, (d) real and twice as large, (e) virtual and twice as large, (f) real and one-third as large, and (g) virtual and one-third as large.

21.6 A concave spherical mirror has a radius of 1.60 m. Find the position of the object if the image is (a) real and three times larger, (b) real and one-third as large, and (c) virtual and three times larger. Repeat the same problem for a mirror which is convex.

21.7 A concave shaving mirror has a focal length of 15 cm. Find the optimum distance of a person from the mirror if the distance of distinct vision is 25 cm. What is the magnification?

21.8 A concave mirror produces a real, inverted image three times larger than the object and at a distance of 28 cm from the object. Find the focal length of the mirror.

21.9 When an object which is initially 60 cm from a concave mirror moves 10 cm closer to it, the separation between the object and its image becomes five-halves larger. Determine the focal length of the mirror.

21.10 The *spherical aberration* of a (spherical) mirror is defined as the difference between the focal length f for a ray close to the mirror's axis and the focal length f' for a ray close to the edge. Show that $f - f' \approx H^2/2r$, where H is the radius of the mirror's base.

21.11 A concave mirror has a radius of 10 cm. The base of the mirror has a radius of 8 cm. Find the spherical aberration of the mirror and compare with its focal length.

21.12 An object moves toward a spherical mirror with a constant velocity v. Find the velocity of the image as a function of the distance p. Plot the velocity of the image versus p. Repeat the problem for a spherical lens.

21.13 Show that if u_1 and u_2 are the distances of an object and its image from the center of a spherical mirror, the relation $1/u_1 + 1/u_2 = -2/r$ holds. Show that in this case the magnification is given by $M = u_2/u_1$.

21.14 If x_1 and x_2 are the distances of the object and its image, measured from the focus of a spherical mirror, show that Eq. (21.3) gives $x_1x_2 = f^2$. This is called *New-*

equazione di Newton. Si può concludere allora che l'oggetto e la sua immagine stanno sempre dalla stessa parte del fuoco? [*Suggerimento:* si noti che $x_1 = FP = OP - OF$, e analogamente per x_2.]

21.15 Dimostrare che l'Eq. (21.4) è indipendente dall'angolo β. Cioè, $p/AP = q/AQ$, se $1/p + 1/q = 1/r$, tranne che nel caso banale in cui l'oggetto si trovi al centro dello specchio. Dimostrare che l'Eq. (21.4) implica l'Eq. (21.2). Questa condizione è compatibile con l'Eq. (21.2)? Che cosa si può concludere?

21.16 Data la distanza focale f di uno specchio sferico e l'ingrandimento M, dimostrare che le posizioni dell'oggetto e dell'immagine sono $p = f(M - 1)/M$ e $q = -f(M - 1)$.

21.17 Dimostrare che tutti i raggi paralleli all'asse di uno specchio parabolico (Fig. 21–36) passano, dopo riflessione, per il fuoco indipendentemente dalla loro distanza dall'asse.

Figura 21–36

21.18 Un mezzo trasparente è limitato da una superficie sferica concava di raggio di curvatura uguale a 0.60 m. Il suo indice di rifrazione è 1.5. Determinare le distanze focali. Determinare la posizione dell'immagine e l'ingrandimento di un oggetto posto a distanza dalla superficie di (a) 2.40 m, (b) 1.60 m, e (c) 0.60 m. Ripetere il problema per una superficie convessa.

21.19 Una sfera di vetro di diametro 2 cm contiene una piccola bolla d'aria a una distanza di 0.5 cm dal centro. Trovare la posizione e l'ingrandimento dell'immagine della bolla, vista da una persona che osservi dall'una e dall'altra delle due direzioni opposte lungo la linea che collega il centro della sfera con la bolla. L'indice di rifrazione del vetro è 1.50.

21.20 Una sfera trasparente di indice di rifrazione n relativo all'aria ha raggio r. Un oggetto è posto a una distanza $4r$ dal centro della sfera. Trovare la posizione della sua immagine finale. Tracciare il cammino di un raggio attraverso la sfera.

21.21 Una sbarretta trasparente lunga 40 cm è piana ad un estremo ed è arrotondata a forma di superficie semisferica di raggio 12 cm all'altro estremo. Un oggetto è posto sull'asse della sbarretta a 10 cm dall'estremo semisferico. (a) Qual'è la posizione dell'immagine finale? (b) Quanto vale il suo ingrandimento? Sia 1.50 l'indice di rifrazione.

21.22 Entrambi gli estremi di una sbarretta di vetro di diametro 10 cm, di indice di rifrazione 1.50, sono molati a forma di superficie semisferiche convesse di raggio 5 cm all'estremo destro e di raggio 10 cm all'estremo sinistro. La distanza tra i vertici della sbarretta è 60 cm. Una freccia lunga 1 mm normale all'asse e a 20 cm alla destra del primo vertice, costituisce l'oggetto per la prima superficie. (a) Qual'è l'oggetto per la seconda superficie? (b) Qual'è la distanza di tale oggetto dalla seconda superficie? (c) Tale oggetto è reale o virtuale? (d) Qual'è la posizione dell'immagine formata dalla seconda superficie? (e) Quanto vale l'altezza dell'immagine finale?

21.23 La sbarretta del Problema 21.22 viene accorciata fino a che vi sia una distanza di 10 cm tra i suoi vertici; le curvature dei suoi estremi rimangono le stesse. (a) Qual'è la distanza dell'oggetto per la seconda superficie? (b) L'oggetto è reale o virtuale? Diritto o capovolto rispetto all'oggetto effettivo? (c) Quanto vale l'altezza dell'immagine finale?

21.24 Una sbarretta di vetro cilindrica di indice di rifrazione 1.5 termina con due superficie sferiche convesse, con raggio di curvatura di 10 e 20 cm, rispettivamente (Fig. 21–37).

ton's equation. Can you conclude then that the object and its image are always on the same side of the focus? [*Hint:* Note that $x_1 = FP = OP - OF$, and similarly for x_2.]

21.15 Show that Eq. (21.4) is independent of angle β. That is, $p/AP = q/AQ$, if $1/p + 1/q = 1/r$, except in the trivial case when the object is at the center of the mirror. Show that this also implies Eq. (21.2). Is this condition compatible with Eq. (21.2)? What do you conclude?

21.16 Given the focal length f of a spherical mirror and the magnification M, show that the positions of the object and the image are $p = f(M - 1)/M$ and $q = -f(M - 1)$.

21.17 Prove that all rays parallel to the axis of a parabolic mirror (Fig. 21–36) pass through the focus after the reflection, irrespective of their distances from the axis.

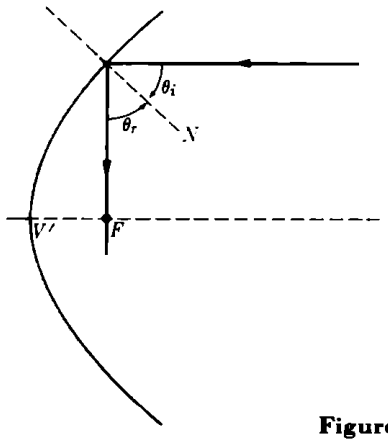


Figure 21–36

21.18 A transparent substance is limited by a concave spherical surface of radius equal to 0.60 m. Its index of refraction is 1.5. Determine the focal lengths. Determine the position of the image and the magnification of an object placed at a distance from the surface equal to (a) 2.40 m, (b) 1.60 m, and (c) 0.60 m. Repeat the problem for a surface which is convex.

21.19 A glass sphere 2 cm in diameter contains a small air bubble at a distance of 0.5 cm from the center. Find the position and magnification of the image of the bubble, as seen by a person looking from one or the other of the two opposite directions along the line connecting the center of the sphere with the bubble. The index of refraction of the glass is 1.50.

21.20 A transparent sphere of index of refraction n relative to air has a radius r. An object is placed at a distance $4r$ from the center of the sphere. Find the position of its final image. Plot the path of a ray through the sphere.

21.21 A transparent rod 40 cm long is cut flat at one end and rounded to a hemispherical surface of 12 cm radius at the other end. An object is placed on the axis of the rod, 10 cm from the hemispherical end. (a) What is the position of the final image? (b) What is its magnification? Assume the refractive index to be 1.50.

21.22 Both ends of a glass rod 10 cm in diameter, of index 1.50, are ground and polished to convex hemispherical surfaces of radius 5 cm at the right end and radius 10 cm at the left end. The length of the rod between vertexes is 60 cm. An arrow 1 mm long, at right angles to the axis and 20 cm to the right of the first vertex, constitutes the object for the first surface. (a) What constitutes the object for the second surface? (b) What is the object distance for the second surface? (c) Is this object real or virtual? (d) What is the position of the image formed by the second surface? (e) What is the height of the final image?

21.23 The rod in Problem 21.22 is shortened until there is a distance of 10 cm between its vertexes; the curvatures of its ends remain the same. (a) What is the object distance for the second surface? (b) Is the object real or virtual? Erect or inverted, with respect to the original object? (c) What is the height of the final image?

21.24 A cylindrical glass rod of index of refraction 1.5 is terminated by two convex spherical surfaces, with radii of curvature of 10 and 20 cm, respectively (Fig. 21–37).

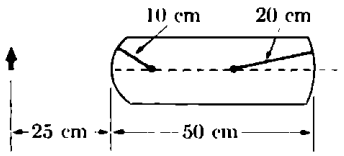


Figura 21–37

Figure 21–37

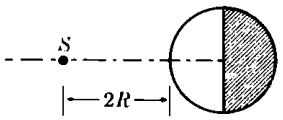


Figura 21–38

Figure 21–38

La lunghezza, tra i vertici, della sbarra è 50 cm. Una freccia lunga 1 mm sta di fronte alla prima superficie sferica normalmente all'asse del cilindro a 25 cm dal vertice. Determinare (a) la posizione e la dimensione dell'immagine della freccia formata dalla prima superficie, e (b) la posizione e la dimensione dell'immagine della freccia formata da entrambe le superficie. Specificare se le immagini sono reali o virtuali.

21.25 Determinare i punti focali del sistema descritto nel Problema 21.24; risolvere graficamente questo problema.

21.26 Una sbarretta di vetro di indice di rifrazione 1.50 è molata ai due estremi a forma di superficie semisferiche di raggio 5 cm. Quando un oggetto è posto sull'asse della sbarretta e a 20 cm da un estremo, l'immagine reale finale si forma a 40 cm dall'estremo opposto. Qual'è la lunghezza della sbarra?

21.27 Una sfera di vetro di raggio R e indice di rifrazione 1.50 è argentata su metà della superficie come indicato in Fig. 21–38. Un piccolo oggetto è posto sulla retta passante per il centro della sfera e il polo della semisfera a una distanza $2R$ dal polo della semisfera non argentata. Trovare la posizione dell'immagine finale dopo che siano avvenute tutte le rifrazioni e le riflessioni.

21.28 Si consideri una sfera di vetro di raggio R e indice di rifrazione n, tagliata con un piano passante per un punto S a una distanza x dal centro O e perpendicolare a OS (Fig.

The length of the rod between vertexes is 50 cm. An arrow 1 mm long lies in front of the first spherical surface, at right angles to the axis of the cylinder and 25 cm from the vertex. Compute (a) the position and the length of the image of the arrow formed by the first surface, and (b) the position and the length of the image of the arrow formed by both surfaces. Specify whether the images are real or virtual.

21.25 Determine the focal points of the system described in Problem 21.24; solve this problem graphically.

21.26 A glass rod of refractive index 1.50 is ground and polished at both ends to hemispherical surfaces of 5 cm radius. When an object is placed on the axis of the rod and 20 cm from one end, the final real image is formed 40 cm from the opposite end. What is the length of the rod?

21.27 A solid glass sphere of radius R and index 1.50 is silvered over one hemisphere, as in Fig. 21–38. A small object is located on the line passing through the center of the sphere and the pole of the hemisphere, at a distance $2R$ from the pole of the unsilvered hemisphere. Find the position of the final image after all refractions and reflections have taken place.

21.28 Consider a glass sphere of radius R and index of refraction n, cut by a plane through a point S at a distance x from the center O and perpendicular to OS (Fig.

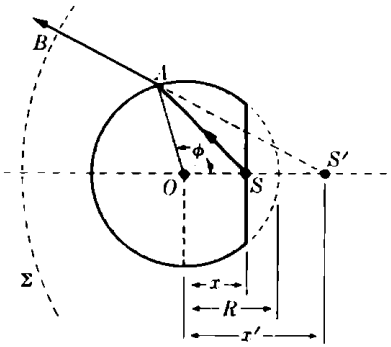


Figura 21–39

Figure 21–39

21–39). Dimostrare che se $x = R/n$, tutti i raggi di una sorgente puntiforme in S entranti nella sfera di vetro, usciranno dalla sfera lungo rette passanti per un punto S', collimato con O e S a una distanza $x' = nR$ da O. [*Suggerimento:* Dimostrare che il raggio rifratto, quando viene prolungato all'indietro, passa per S' per tutti i valori di ϕ e i valori dati di x e x'.]

21.29 Dimostrare che per rifrazione su una superficie sferica, l'Eq. (21.13) è indipendente dall'angolo β se $1/p + 1/q = 1/r$, e che questo implica la validità dell'Eq. (21.10). Dimostrare in seguito che la posizione anastigmatica dell'oggetto è data da $p = (n_1 + n_2)r/n_1$. Qual'è la posizione dell'immagine?

21.30 Una sostanza avente la forma di una semisfera di raggio R e indice di rifrazione n_2 è immersa in un mezzo di indice di rifrazione n_1, come indicato in Fig. 21–40. Un oggetto è posto sull'asse a una distanza x_1 dal centro. Dimostrare che se l'immagine è a una distanza x_2 dal centro, allora $n_1^2/x_1 - n_2^2/x_2 = n_2(n_2 - n_1)/R$.

21.31 Dimostrare che, per una superficie rifrangente sferica che separa due sostanze di

21–39). Show that if $x = R/n$, all rays entering the glass sphere from a point source at S will emerge from the sphere along lines diverging from a point S', collinear with O and S at a distance $x' = nR$ from O. [*Hint:* Show that the refracted ray, when extended backward, passes through S' for all values of ϕ and the given values of x and x'.]

21.29 Show that for refraction on a spherical surface, Eq. (21.13) is independent of angle β if $1/p + 1/q = 1/r$, and that this implies the validity of Eq. (21.10). Show then that the anastigmatic position of the object is $p = (n_1 + n_2)r/n_1$. What is the position of the image?

21.30 A substance in the shape of a hemisphere of radius R and index of refraction n_2 is immersed in a medium of index of refraction n_1, as shown in Fig. 21–40. An object is placed at a distance x_1 from the center, and on the axis. Show that if the image is at a distance x_2 from the center, then $n_1^2/x_1 - n_2^2/x_2 = n_2(n_2 - n_1)/R$.

21.31 Show that, for a spherical refracting surface separating two substances of in-

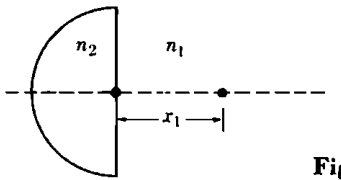


Figura 21–40

Figure 21–40

indici di rifrazione n_1 e n_2 vale la relazione $x_1x_2 = f_of_i$, dove x_1 è la distanza dell'oggetto dal primo fuoco e x_2 la distanza dell'immagine dal secondo fuoco.

21.32 Dimostrare che per rifrazione su una superficie sferica vale la seguente relazione: $n_1y_1 \sin \alpha_1 = n_2y_2 \sin \alpha_2$, dove α_1 e α_1 sono gli angoli indicati in Fig. 21–8 e y_1 e y_2 sono le dimensioni dell'oggetto e della sua immagine. Perciò, per un raggio che attraversa parecchie superficie rifrangenti aventi tutte i loro centri sulla stessa retta, vale la relazione $ny \sin \alpha =$ cost. Essa è detta *legge di Helmholtz*. [*Suggerimento:* Con riferimento alla Fig. 21–8, applicare la legge dei seni combinata con la legge di Snell e la relazione ottenuta dalla similitudine dei triangoli *Cab* e *CAB* in Fig. 21–11.]

21.33 Disegnare le varie possibili lenti sottili che si possono ottenere combinando due superficie i cui raggi di curvatura sono, in valore assoluto, 10 cm e 20 cm. Quali sono convergenti e quali divergenti? Trovare la distanza focale di ciascuna lente se fatte di vetro di indice di rifrazione 1.50.

21.34 Una lente biconvessa ha un indice di rifrazione 1.5 e i suoi raggi di curvatura sono 0.20 m e 0.30 m. Trovare la distanza focale. Determinare la posizione e l'ingrandimento dell'immagine di un oggetto che si trova a una distanza dalla lente uguale a (a) 0.80 m, (b) 0.48 m, (c) 0.40 m, (d) 0.24 m, e (e) 0.20 m. Si consideri anche il caso di un oggetto virtuale che si trova a 0.20 m dietro la lente.

21.35 Una lente biconcava ha un indice di rifrazione 1.5 e i suoi raggi di curvatura sono 0.20 m e 0.30 m. (a) Trovare la distanza focale. (b) Determinare la posizione e l'ingrandimento dell'immagine di un oggetto che si trova a 0.20 m dalla lente. Si consideri anche un oggetto virtuale a una distanza di (c) 0.40 m, e (d) 0.20 m.

21.36 Un sistema di lenti è composto di due lenti convergenti con distanze focali 30 cm e 60 cm. Determinare la posizione della intersezione di un raggio, inizialmente parallelo all'asse ottico[N.T.] con l'asse stesso in funzione della distanza tra le lenti. Si considerino i casi in cui la distanza tra le lenti è (a) 20 cm, (b) 50 cm, (c) 90 cm, e (d) 120 cm. Ripetere il problema nel caso in cui la prima lente è divergente.

N.T. Diciamo asse ottico la retta passante per i centri di curvatura delle superficie rifrangenti.

21.37 Una lente forma una immagine di un oggetto su uno schermo posto a 12 cm dalla lente. Quando la lente si allontana dall'oggetto, lo schermo si deve avvicinare all'oggetto in modo che esso risulti a fuoco. Qual'è la distanza focale della lente?

21.38 Un oggetto è posto a 18 cm da uno schermo. (a) In quali punti tra oggetto e schermo può venire posta una lente di distanza focale 4 cm, per ottenere un'immagine sullo schermo? (b) Quanto è l'ingrandimento dell'immagine per queste posizioni della lente?

21.39 Una lente convergente ha una distanza focale uguale a 0.40 m. Determinare la posizione di un oggetto e la natura dell'immagine se l'ingrandimento è (a) −0.6, (b) − 1.5, (c) − 1, (d) 3, e (e) 0.8.

21.40 Una lente convergente ha una distanza focale di 0.60 m. Trovare la posizione di un oggetto che dia luogo a un'immagine (a) reale e ingrandita tre volte, (b) reale e ridotta a 1/3, (c) virtuale e ingrandita tre volte.

21.41 Determinare la distanza focale e la natura di una lente che, per un oggetto a 1.20 m dalla lente, dia luogo a un'immagine che è (a) reale e a 0.80 m dalla lente, (b) virtuale e a 3.20 m dalla lente, (c) virtuale e a 0.60 m dalla lente, (d) reale e ingrandita due volte, (e) virtuale e ingrandita due volte, (f) reale e ridotta a 1/3, e (g) virtuale e ridotta a 1/3.

21.42 Una lente sottile di indice di rifrazione n_2 è circondata da due mezzi, di indici di rifrazione n_1 e n_3, rispettivamente. Dimostrare che l'equazione che mette in relazione le posizioni dell'oggetto e dell'immagine è $n_1/p - n_3/q = (n_1 - n_2)/r_1 + (n_2 - n_3)/r_2$.

21.43 Un serbatoio riempito di acqua ha su una parete una apertura coperta da una lente biconvessa di indice di rifrazione 1.5 e raggio di curvatura eguale a 30 cm. Trovare le distanze focali considerando un raggio parallelo all'asse incidente sulla lente sia dall'interno del serbatoio che dall'esterno. Determinare la

21.32 Show that for refraction at a spherical surface the following relation holds: $n_1y_1 \sin \alpha_1 = n_2y_2 \sin \alpha_2$, where α_1 and α_2 are as shown in Fig. 21–8 and y_1 and y_2 are the sizes of the object and its image. Therefore, for a ray passing through several refracting surfaces, all having their centers on the same line, the relation $ny \sin \alpha =$ const holds. It is called the *Helmholtz law*. [*Hint:* Referring to Fig. 21–8, apply the law of sines combined with Snell's law and the relation obtained from the similarity of triangle *Cab* and *CAB* in Fig. 21–11.]

21.33 Sketch the various possible thin lenses obtainable by combining two surfaces whose radii of curvature are, in absolute magnitude, 10 cm and 20 cm. Which are converging and which are diverging? Find the focal length of each lens if each is made of glass of index 1.50.

21.34 A double convex lens has an index of refraction of 1.5 and its radii are 0.20 m and 0.30 m. Find the focal length. Determine the position of the image and the magnification of an object which is at a distance from the lens equal to (a) 0.80 m, (b) 0.48 m, (c) 0.40 m, (d) 0.24 m, and (e) 0.20 m. Consider also the case of a virtual object which is 0.20 m behind the lens.

21.35 A double concave lens has an index of refraction of 1.5 and its radii are 0.20 m and 0.30 m. (a) Find the focal length. (b) Determine the position of the image and the magnification of an object which is 0.20 m from the lens. Consider also a virtual object at a distance of (c) 0.40 m, and (d) 0.20 m.

21.36 A lens system is composed of two convergent lenses with focal lengths 30 cm and 60 cm. Discuss the position of the intersection with the common axis of a ray initially parallel to the axis as a function of the distance between the lenses. Consider the cases in which the separation is (a) 20 cm, (b) 50 cm, (c) 90 cm, and (d) 120 cm. Repeat the problem if the first lens is divergent.

21.37 A lens casts an image of an object on a screen placed 12 cm from the lens. When the lens is moved 2 cm farther from the object, the screen must be moved 2 cm closer to the object in order to bring it into focus. What is the focal length of the lens?

21.38 An object is placed 18 cm from a screen. (a) At what points between object and screen may a lens whose focal length is 4 cm be placed to obtain an image on the screen? (b) What is the magnification of the image for these positions of the lens?

21.39 A convergent lens has a focal length equal to 0.40 m. Determine the position of an object and the nature of the image if the magnification is (a) −0.6, (b) −1.5, (c) −1, (d) 3, and (e) 0.8.

21.40 A convergent lens has a focal length of 0.60. Find the position of the object to produce an image (a) real and three times larger, (b) real and one-third as large, (c) virtual and three times larger.

21.41 Determine the focal length and the nature of a lens that, for an object at 1.20 m from the lens, produces an image that is (a) real and 0.80 m from the lens, (b) virtual and 3.20 m from the lens, (c) virtual and 0.60 m from the lens, (d) real and twice as large, (e) virtual and twice as large, (f) real and one-third as large, and (g) virtual and one-third as large.

21.42 A thin lens of index of refraction n_2 is surrounded by two media, of indexes of refraction n_1 and n_3, respectively. Show that the equation relating the position of the object and of the image is $n_1/p - n_3/q = (n_1 - n_2)/r_1 + (n_2 - n_3)/r_2$.

21.43 A tank filled with water has an opening in one wall covered by a double convex lens of index of refraction 1.5 and radius equal to 30 cm. Find the focal length of a ray which approaches the lens parallel to the axis from inside the tank and from outside the tank. Determine the

posizione dell'immagine di una sorgente di luce posta nell'interno della vasca a (a) 30 cm, e (b) 45 cm dalla lente. L'indice di rifrazione dell'acqua è 1.33.

21.44 Una lente sottile equiconvessa fatta di vetro di indice di rifrazione 1.50 ha una distanza focale in aria di 30 cm. La lente è fissata in un'apertura ad un estremo di una vasca riempita di acqua (indice di rifrazione: 1.33). All'estremità della vasca, opposta alla lente, vi è uno specchio piano, distante 80 cm dalla lente. Trovare la posizione dell'immagine formata dal sistema lente-acqua-specchio di un oggetto posto sull'asse della lente, a 90 cm a destra della lente. L'immagine è reale o virtuale? Diritta o capovolta?

21.45 Dimostrare che per una lente sferica vale la $x_1x_2 = -f^2$, dove x_1 è la distanza dell'oggetto dal primo fuoco e x_2 è la distanza dell'immagine dal secondo fuoco.

21.46 Usando l'espressione (21.14) per valutare la rifrazione a ciascuna superficie di una lente sferica, dimostrare che la distanza focale è data da

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{h^2}{2}\frac{n-1}{n^2} \times \left[\left(\frac{1}{r_2} + \frac{n+1}{f}\right)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{f}\right)^2 - \frac{1}{r_1^3}\right],$$

dove f è fornita dalla Eq. (21.18). Valutare da questo risultato il valore della *aberrazione sferica* della lente, definita come la differenza delle distanze focali per un raggio vicino all'asse e un raggio vicino al bordo della lente.

21.47 Una lente biconvessa ha un indice di rifrazione 1.5. Le due superficie hanno lo stesso raggio di curvatura, uguale a 10 cm. La lente ha un raggio di 8 cm. Trovare la distanza focale e l'aberrazione sferica. Ripetere il problema per una lente biconcava.

21.48 Raggi provenienti da una lente convergono in un punto immagine P, come in Fig. 21–41. Che spessore t di vetro, di indice di rifrazione 1.50, deve essere interposto, come indicato in figura, in modo che l'immagine si formi in P'?

21.49 Riportare in un grafico q in funzione di p per (a) uno specchio sferico che soddisfa l'Eq. (21.3), e (b) una lente sferica che soddisfa l'Eq. (21.19). Verificare che in ciascun caso ne risulta una iperbole equilatera. Riportare graficamente anche l'ingrandimento in funzione di p in ciascun caso.

21.50 Un prisma ha indice di rifrazione 1.5 e un angolo di 60°. (a) Determinare la deviazione di un raggio incidente con un angolo di 40°. (b) Trovare la deviazione minima e il corrispondente angolo di incidenza.

21.51 La deviazione minima di un prisma è 30°. L'angolo del prisma è 50°. Trovare il suo indice di rifrazione e l'angolo di incidenza in deviazione minima.

21.52 Dimostrare che per rifrazione dovuta a un prisma vale la

$$\sin\tfrac{1}{2}(\delta + A) = n \sin\tfrac{1}{2}A \frac{\cos\tfrac{1}{2}(r - r')}{\cos\tfrac{1}{2}(i - i')}.$$

Dimostrare anche che $\cos\frac{1}{2}(r - r')$ non è mai minore di $\cos\frac{1}{2}(i - i')$. Concludere dunque che la condizione per la deviazione minima è $i = i'$.

21.53 Dimostrare che se l'angolo di un prisma è molto piccolo e i raggi incidono quasi perpendicolarmente su una delle facce, la deviazione vale $\delta = (n-1)A$.

21.54 Se un raggio raggiunge la seconda superficie di un prisma sotto un angolo maggiore dell'angolo limite, si ha riflessione totale, e il raggio è riflesso indietro invece di uscire dal prisma. Questo principio viene usato in molti strumenti ottici. Dimostrare che se $n > 1$, la condizione che almeno un raggio emerga è che sia $A \leq 2\lambda$, dove λ è l'angolo limite. Discutere quindi l'intervallo dei valori dell'angolo di incidenza i se il raggio deve emergere dall'altra parte. Questo intervallo è dato dall'angolo α mostrato in Fig. 21–42.

Figura 21–41

position of the image of a light source located inside the tank at (a) 30 cm, and (b) 45 cm from the lens. The index of refraction for water is 1.33.

21.44 An equiconvex thin lens made of glass of index 1.50 has a focal length in air of 30 cm. The lens is sealed into an opening in one end of a tank filled with water (index = 1.33). At the end of the tank opposite the lens is a plane mirror, 80 cm distant from the lens. Find the position of the image formed by the lens-water-tank on the lens axis and 90 cm to the left of the lens. Is the image real or virtual? Erect or inverted?

21.45 Show that for a spherical lens $x_1x_2 = -f^2$, where x_1 is the distance of the object from the first focus and x_2 is the distance of the image from the second focus.

21.46 Using expression (21.14) for computing the refraction at each surface of a spherical lens, show that the focal length is given by

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{h^2}{2}\frac{n-1}{n^2} \times \left[\left(\frac{1}{r_2} + \frac{n+1}{f}\right)\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{f}\right)^2 - \frac{1}{r_1^3}\right],$$

where f is given by Eq. (21.18). Estimate from this result the value of the *spherical aberration* of the lens, defined as the difference in focal length for a ray close to the axis and a ray close to the edge of the lens.

21.47 A double-convex lens has an index of refraction of 1.5. The two surfaces have the same radius, equal to 10 cm. The lens has a radius of 8 cm. Find the focal distance and the spherical aberration. Repeat the problem for a lens which is double concave.

21.48 Rays from a lens converge at a point image P, as in Fig. 21–41. What thickness t of glass of index 1.50 must be interposed, as in the figure, in order that the image will be formed at P'?

21.49 Plot q as a function of p for (a) a spherical mirror satisfying Eq. (21.3), and (b) a spherical lens satisfying Eq. (21.19). Verify that in each case an equilateral hyperbola results. Also plot the magnification as a function of p in each case.

21.50 A prism has an index of refraction of 1.5 and an angle of 60°. (a) Determine the deviation of a ray incident at an angle of 40°. (b) Find the minimum deviation and the corresponding angle of incidence.

21.51 The minimum deviation of a prism is 30°. The angle of the prism is 50°. Find its index of refraction and the angle of incidence for minimum deviation.

21.52 Show that for refraction due to a prism,

$$\sin\tfrac{1}{2}(\delta + A) = n \sin\tfrac{1}{2}A \frac{\cos\tfrac{1}{2}(r - r')}{\cos\tfrac{1}{2}(i - i')}.$$

Show also that $\cos\frac{1}{2}(r - r')$ is never smaller than $\cos\frac{1}{2}(i - i')$. Conclude then that the condition for minimum deviation is $i = i'$.

21.53 Show that if the angle of a prism is very small and the incident rays fall almost perpendicular to one of the faces, the deviation is $\delta = (n-1)A$.

21.54 If a ray reaches the second surface of a prism at an angle larger than the critical angle, total reflection occurs and the ray is reflected back instead of passing out of the prism. This principle is used in many optical instruments. Show that if $n > 1$, the condition that at least one ray emerge is that $A \leq 2\lambda$, where λ is the critical angle. Then discuss the range of values of the angle of incidence i if the ray is to emerge on the other side. This range is given by the angle α shown in Fig. 21–42.

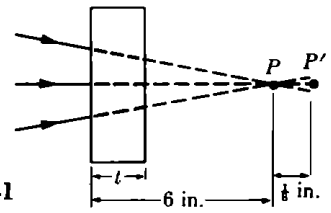


Figure 21–41

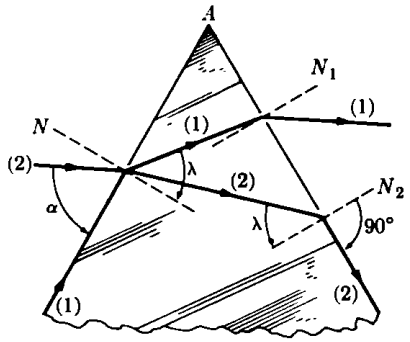


Figura 21–42

Verificare che esso è dato da $\cos \alpha = n \sin (A - \lambda)$. Discutere la variazione di α con A.

21.55 Applicare la discussione del problema precedente al caso di un prisma avente un angolo rifrangente di 45° e un indice di rifrazione 1.5. Ottenere il valore di α. Discutere il cammino di un raggio che incide perpendicolarmente su una delle facce. Si consideri anche il caso in cui l'angolo del prisma è 35°.

21.56 Dai dati della Tabella 21–3, ottenere i coefficienti A e B che appaiono nella formula di Cauchy per l'indice di rifrazione del vetro crown.

21.57 Usando il risultato del problema precedente, determinare la separazione angolare corrispondente alle righe C e F di Fraunhofer in un prisma di vetro di crown avente un angolo di 50° se l'angolo di incidenza è 30°.

21.58 Un sistema di lenti è composto da due lenti a contatto, una piana concava di vetro flint e un'altra biconvessa di vetro crown. Il raggio di curvatura della faccia comune è 0.20 m e il raggio di curvatura dell'altra faccia della lente di crown è 0.12 m. Trovare la distanza focale del sistema e l'aberrazione cromatica.

21.59 L'oculare di uno strumento ottico è composto in due lenti convergenti identiche di distanza focale 5 cm ciascuna, distanti 2.5 cm. Trovare la posizione di ciascun fuoco del sistema misurato a partire dalla lente più vicina.

21.60 L'obiettivo di un microscopio ha una distanza focale di 4 mm. L'immagine formata da questo obiettivo è a 180 mm dal suo secondo punto focale. L'oculare ha una distanza focale di 31.25 mm. (a) Quanto vale l'ingrandimento del microscopio? (b) Ad occhio nudo, si possono distinguere due punti separati se essi sono distanti circa 0.1 mm. Qual'è la minima separazione che si può percepire con l'aiuto di tale microscopio?

21.61 Il diametro della luna è 3.5×10^3 km e la sua distanza della terra è 3.8×10^5 km. Trovare il diametro angolare dell'immagine della luna formata da un cannocchiale se la distanza focale dell'obiettivo è 4 m e quella dell'oculare 10 cm.

21.62 Con riferimento alla Fig. 21–39, dimostrare che il tempo impiegato dal raggio per andare da S a un qualunque punto sulla superficie d'onda Σ è indipendente da ϕ ed è uguale a $S'B/c$, dove $S'B$ è il raggio di curvatura di Σ.

Figure 21–42

Prove that it is given by $\cos \alpha = n \sin (A - \lambda)$. Discuss the variation of α with A.

21.55 Apply the discussion of the preceding problem to the case of a prism having a refracting angle of 45° and an index of refraction of 1.5. Obtain the value of α. Discuss the path of a ray that falls perpendicular to one of the faces. Consider also the case when the prism's angle is 35°.

21.56 From the data of Table 21–3, obtain the coefficients A and B appearing in Cauchy's formula for the index of refraction in the case of crown glass.

21.57 Using the result of the preceding problem, determine the angular separation corresponding to the C- and F- Fraunhofer lines in a crown-glass prism having an angle of 50° if the angle of incidence is 30°.

21.58 A lens system is composed of two lenses in contact, one plano-concave of flint glass and another double convex of crown glass. The radius of the common face is 0.20 m and the radius of the other face of the crown lens is 0.12 m. Find the focal length of the system and the chromatic aberration.

21.59 The ocular (or eyepiece) of an optical instrument is composed of two identical convergent lenses of focal length 5 cm each, separated by 2.5 cm. Find the position of the foci of the system as measured from the closer lens.

21.60 The objective of a microscope has a focal length of 4 mm. The image formed by this objective is 180 mm from its second focal point. The eyepiece has a focal length of 31.25 mm. (a) What is the magnification of the microscope? (b) The unaided eye can distinguish two points as being separate if they are about 0.1 mm apart. What is the minimum separation that can be perceived with the aid of this microscope?

21.61 The diameter of the moon is 3.5×10^3 km and its distance from the earth is 3.8×10^5 km. Find the angular diameter of the image of the moon formed by a telescope if the focal length of the objective is 4 m and that of the eyepiece 10 cm.

21.62 Referring to Fig. 21–39, show that the time taken by the ray to go from S to any point on the wave surface Σ is independent of ϕ and is equal to $S'B/c$, where $S'B$ is the radius of Σ.

22
INTERFERENZA

22.1 Introduzione

22.2 Interferenza fra onde prodotte da due sorgenti coerenti

22.3 Interferenza fra più sorgenti coerenti

22.4 Onde stazionarie in una dimensione

22.5 Onde stazionarie ed equazione dell'onda

22.6 Onde elettromagnetiche stazionarie

22.7 Onde stazionarie in due dimensioni

22.8 Onde stazionarie in tre dimensioni: cavità risonanti

22.9 Guide d'onda

22
INTERFERENCE

22.1 Introduction

22.2 Interference of Waves Produced by Two Synchronous Sources

22.3 Interference of Several Synchronous Sources

22.4 Standing Waves in One Dimension

22.5 Standing Waves and the Wave Equation

22.6 Standing Electromagnetic Waves

22.7 Standing Waves in Two Dimensions

22.8 Standing Waves in Three Dimensions; Resonating Cavities

22.9 Wave Guides

22.1 *Introduzione*

Una caratteristica importantissima del moto per onde è il fenomeno dell'interferenza. Esso ha luogo quando due o più moti ondosi coincidono nello spazio e nel tempo. Nel Capitolo 12 abbiamo discusso la sovrapposizione di due moti armonici semplici; la teoria sviluppata allora può essere applicata direttamente al nostro attuale problema nel caso di onde armoniche o monocromatiche.* Una regione nella quale avviene l'interferenza è quella in cui le onde incidenti e riflesse coincidono. In effetti, è questo uno dei metodi più comuni per produrre l'interferenza. Un altro esempio importante di interferenza si trova quando il moto delle onde è vincolato ad una regione di spazio limitata, come ad esempio una corda con i due estremi fissi, o un liquido in un canale, o un'onda elettromagnetica in una cavità matallica. Allora l'interferenza dà origine a *onde stazionarie*.

Per poter applicare le formule sviluppate nel Capitolo 12, scriveremo per un'onda monocromatica che si muove nella direzione $+X$

e per una che si muove nella direzione $-X$

in luogo delle Equazioni (18.5) e (18.9). Ciò implica soltanto un cambiamento di segno, ed è, almeno fino a che rispettiamo tale convenzione, un procedimento corretto, come già si era indicato alla fine del Paragrafo 18.2 nell'Eq. (18.10) e lo si è applicato nell'Esempio 20.2.

Come si è indicato nei capitoli precedenti, la teoria qui sviluppata si può applicare a qualsiasi tipo di moto per onde, ma i nostri esempi e le applicazioni si riferiranno in generale alle onde elettromagnetiche.

22.2 *Interferenza fra onde prodotte da due sorgenti coerenti*

Consideriamo due sorgenti puntiformi S_1 e S_2 (Fig. 22–1), che vibrino in fase con la stessa pulsazione ω e ampiezze ξ_{01} e ξ_{02}. Le relative onde sferiche sono

e

dove r_1 e r_2 sono le distanze di un punto qualsiasi rispettivamente da S_1 e S_2. Si osservi che, benchè le due sorgenti siano identiche, esse non producono la medesima ampiezza in P se r_1 e r_2 sono differenti, dato che, come sappiamo dal Paragrafo 18.11, l'ampiezza di un'onda sferica decresce secondo una legge del tipo $1/r$.

*Si consiglia allo studente, prima di studiare questo capitolo, di ritornare al Capitolo 12 e rileggere dal Paragrafo 12.7 fino al 12.9.

22.1 Introduction

A very important characteristic of wave motion is the phenomenon of interference. This occurs when two or more wave motions coincide in space and time. In Chapter 12 we discussed the superposition of two simple harmonic motions; the theory developed there can be applied directly to our present problem for the case of harmonic or monochromatic waves.* One place in which interference occurs is the region in which reflected and incident waves coincide. In fact, this is one of the most common methods of producing interference. Another important example of interference is found in a wave motion which is confined to a limited region of space, such as a string with its two ends fixed, or a liquid in a channel, or an electromagnetic wave in a metallic cavity. The interference then gives rise to *standing waves.*

In order to apply the formulas developed in Chapter 12, we shall write for a harmonic wave moving in the $+X$-direction

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - kx), \tag{22.1}$$

and for one moving in the $-X$-direction

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t + kx), \tag{22.2}$$

instead of Eqs. (18.5) and (18.9). This involves only a change of sign and, so long as we are consistent, it is a correct procedure, as was indicated at the end of Section 18.2 in Eq. (18.10) and as used in Example 20.2.

As we mentioned in previous chapters, the theory developed here is applicable to any kind of wave motion, but in general our examples and applications will refer to electromagnetic waves.

22.2 Interference of Waves Produced by Two Synchronous Sources

Let us consider two point sources S_1 and S_2 (Fig. 22–1), which oscillate in phase with the same angular frequency ω and amplitudes ξ_{01} and ξ_{02}. Their respective spherical waves are

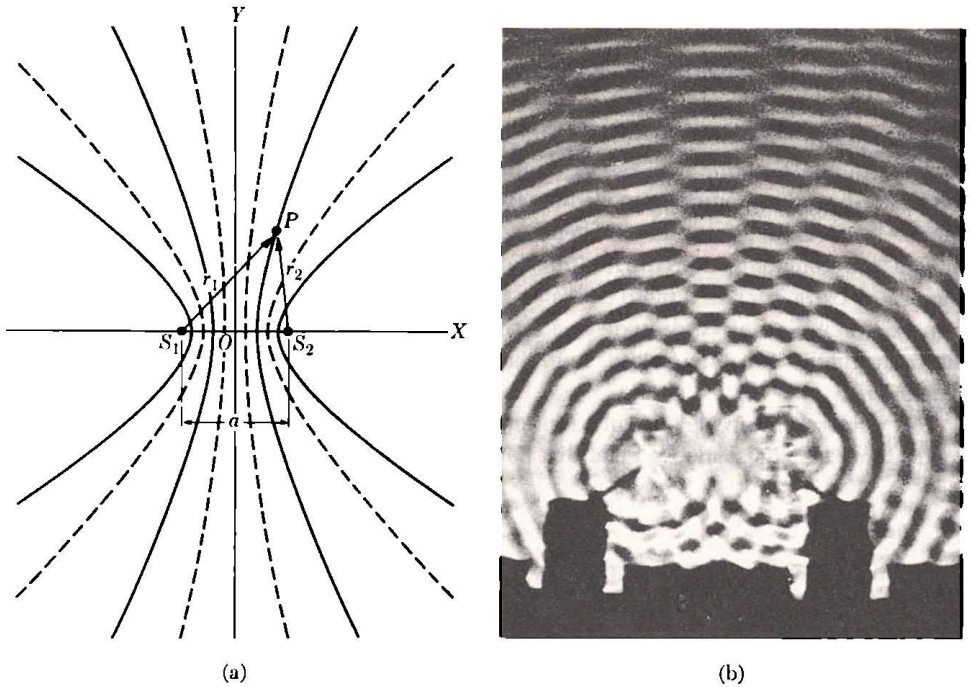
$$\xi_1 = \xi_{01} \sin(\omega t - kr_1) \tag{22.3}$$

and

$$\xi_2 = \xi_{02} \sin(\omega t - kr_2), \tag{22.4}$$

where r_1 and r_2 are the distances from any point to S_1 and S_2, respectively. Note that, although the two sources are identical, they do not produce the same amplitude at P if r_1 and r_2 are different, because, as we know from Section 18.11, the amplitude of a spherical wave falls according to a $1/r$ law.

* It is suggested that, before he studies this chapter, the student return to Chapter 12 and re-read Sections 12.7 through 12.9.



(a) (b)

Fig. 22–1. (a) Linee nodali e ventrali risultanti dall'interferenza delle onde prodotte da due sorgenti identiche. (b) Figura di interferenza effettiva delle onde sulla superficie dell'acqua. (La fotografiia è dovuta alla cortesia della Educational Services, Inc.)

Fig. 22–1. (a) Nodal and ventral lines resulting from interference of waves produced by two identical sources. (b) Actual interference pattern of waves on the surface of water. (Photograph courtesy of Educational Services, Inc.)

Supponiamo che ξ sia una grandezza di tipo scalare, come per esempio una perturbazione di pressione. Se ξ corrisponde a una grandezza vettoriale, assumiamo che ξ_1 e ξ_2 siano nella medesima direzione cosicchè la composizione delle due onde possa essere trattata in forma scalare. Se confrontiamo le Eq. (22.3) e (22.4) con l'Eq. (12.1) [cioè, $\xi = A \sin(\omega t + \alpha)$], le quantità kr_1 e kr_2 giocano lo stesso ruolo delle fasi iniziali. La differenza di fase fra i due moti ondosi in un punto qualsiasi P è (se ricordiamo che $k = 2\pi/\lambda$)

Suppose that ξ is a scalar property, such as a pressure disturbance. If ξ corresponds to a vector quantity, we assume that ξ_1 and ξ_2 are in the same direction so that the combination of the two waves can be treated in a scalar manner. When we compare Eqs. (22.3) and (22.4) with Eq. (12.1) [that is, $\xi = A \sin(\omega t + \alpha)$], the quantities kr_1 and kr_2 play the same role as initial phases. Then the phase difference between the two wave motions at any point P (if we remember that $k = 2\pi/\lambda$) is

$$\delta = kr_1 - kr_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2). \tag{22.5}$$

Usando la tecnica dei vettori rotanti, che è stata spiegata nel Paragrafo 12.7, i due moti per onde che interferiscono possono essere rappresentati da vettori che ruotano, di lunghezze ξ_{01} e ξ_{02} rispettivamente, formanti angoli $\alpha_1 = kr_1$ e $\alpha_2 = kr_2$ con l'asse X (Fig. 22–2). L'ampiezza ξ_0 e la fase α del moto ondoso risultante sono forniti dalla loro risultante vettoriale. Perciò, possiamo esprimere l'ampiezza della perturbazione risultante in P come

When we use the technique of rotating vectors, which was explained in Section 12.7, the two interfering wave motions can be represented by rotating vectors, of length ξ_{01} and ξ_{02}, respectively, which make angles $\alpha_1 = kr_1$ and $\alpha_2 = kr_2$ with the X-axis (Fig. 22–2). The amplitude ξ_0 and phase α of the resulting wave motion are given by their vector resultant. Therefore we may express the amplitude of the resulting disturbance at P by

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos\delta}. \tag{22.6}$$

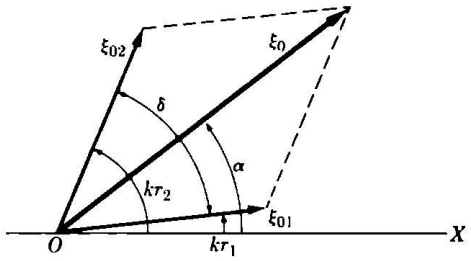


Fig. 22–2. Ampiezza risultante di due onde interferenti. L'asse X è stato assunto come retta di riferimento.

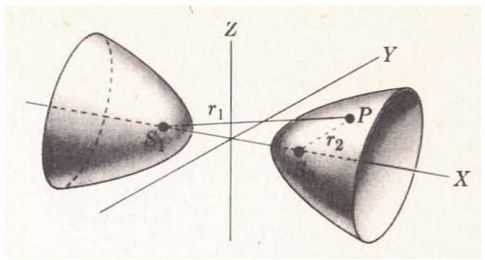


Fig. 22–3. Superficie a differenza di fase costante per onde sferiche prodotte da due sorgenti puntiformi coerenti S_1 e S_2.

Dall'Eq. (22.6), vediamo che ξ varia fra i valori $\xi_{01} + \xi_{02}$ e $\xi_{01} - \xi_{02}$, a seconda che

ossia

dove n è un numero intero positivo o negativo. Nel primo caso il moto delle due onde viene esaltato al massimo, e si ha *interferenza costruttiva*; nel secondo caso è attenuato al massimo, e si ha *interferenza distruttiva*. Vale a dire,

construttive interference = interferenza costruttiva
destructive interference = interferenza distruttiva

Usando l'Eq. (22.5), possiamo dunque scrivere

cioè

Ma $r_1 - r_2 =$ costante definisce una iperbole i cui fuochi sono S_1 e S_2, o meglio, dato che il problema è in realtà spaziale, tale equazione definisce una superficie iperboloidica di rotazione, come quella di Fig. 22–3. Perciò, in base all'Eq. (22.8), concludiamo che nei punti delle superficie iperboloidiche le cui equazioni sono $r_1 - r_2 = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \pm 3\lambda, \ldots$, le due onde interferiscono con esaltazione. Tali superficie vengono dette *superficie ventrali* o *antinodali*. Nei punti delle superficie iperboloidiche le cui equazioni sono $r_1 - r_2 = \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \ldots$, le due onde interferiscono con attenuazione. Tali superficie vengono dette *superficie nodali*. Ne risulta quindi una successione di superficie ventrali e nodali che si alternano. L'intersezione di tali superficie con un piano contenente l'asse X sono le iperboli disegnate in Fig. 22–1.

Fig. 22–2. Resultant amplitude of two interfering waves. The X-axis has been taken as the reference line.

Fig. 22–3. Surfaces of constant phase difference for spherical waves produced by two coherent point sources S_1 and S_2.

From Eq. (22.6), we see that ξ falls between the values $\xi_{01} + \xi_{02}$ and $\xi_{01} - \xi_{02}$, depending on whether

$$\cos\delta = +1 \text{ or } -1 \qquad \text{or} \qquad \delta = 2n\pi \text{ or } (2n+1)\pi,$$

where n is either a positive or a negative integer. In the first case we have maximum reinforcement of the two wave motions, or *constructive interference*, and in the second case maximum attenuation, or *destructive interference*. That is,

$$\delta = \begin{cases} 2n\pi & \text{constructive interference,} \\ (2n+1)\pi & \text{destructive interference.} \end{cases}$$

Using Eq. (22.5), we may then write

$$\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \begin{cases} 2n\pi & \text{constructive interference,} \\ (2n+1)\pi & \text{destructive interference,} \end{cases} \tag{22.7}$$

or

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} n\lambda & \text{constructive interference,} \\ (2n+1)\dfrac{\lambda}{2} & \text{destructive interference.} \end{cases} \tag{22.8}$$

But $r_1 - r_2 =$ const defines a hyperbola whose foci are S_1 and S_2, or, since the problem is actually in space, this equation defines hyperbolic surfaces of revolution, such as those in Fig. 22–3. Therefore we conclude from Eq. (22.8) that at the hyperbolic surfaces whose equations are $r_1 - r_2 = \pm\lambda, \pm 2\lambda, \pm 3\lambda, \ldots$, the two wave motions interfere with reinforcement. These surfaces are called *ventral* or *antinodal surfaces*. At the hyperbolic surfaces whose equations are $r_1 - r_2 = \pm\frac{1}{2}\lambda, \pm\frac{3}{2}\lambda, \ldots$, the two wave motions interfere with attenuation. These surfaces are called *nodal surfaces*. The overall pattern is thus a succession of alternate ventral and nodal surfaces. The intersections of these surfaces with a plane passing through the X-axis are the hyperbolas illustrated in Fig. 22–1.

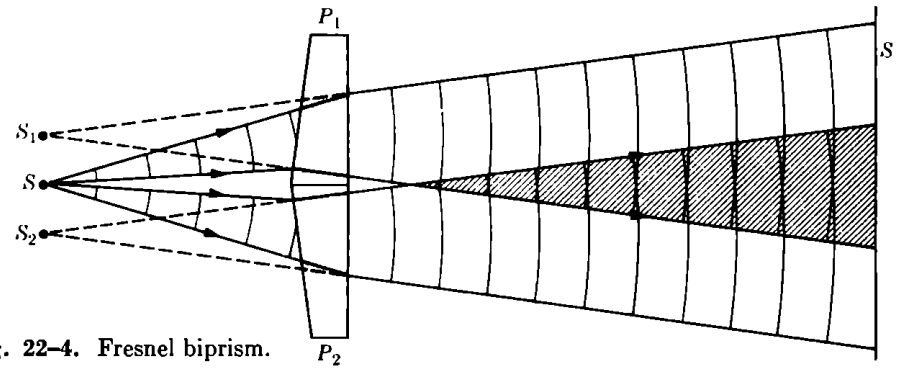


Fig. 22–4. Biprisma di Fresnel.

Fig. 22–4. Fresnel biprism.

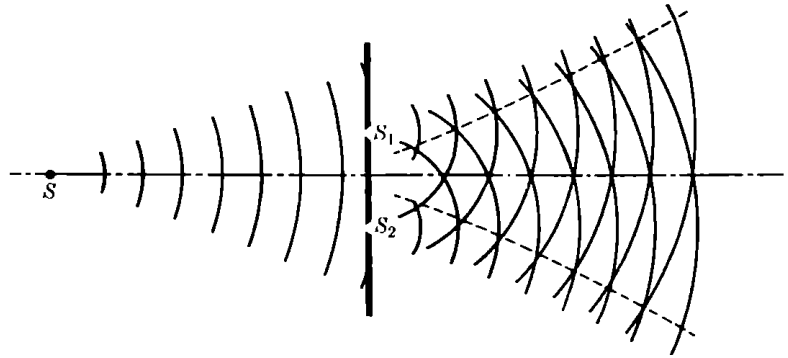


Fig. 22–5. Interferenza di due sorgenti coerenti. Esperimento della doppia fenditura di Young.

La situazione descritta è tale che, in ciascun punto dello spazio, il moto ondoso risultante ha un'ampiezza caratteristica data dall'Eq. (22.6), cosicchè

dove α è come indicato in Fig. 22—2. Perciò quanto risulta dall'interferenza non si presenta come un'onda in moto progressivo ma come uno stato *stazionario* nel quale, in ciascun punto dello spazio, il moto ha ampiezza costante. La ragione di questo è che le due sorgenti vibrano con la stessa frequenza e mantengono una differenza di fase costante, motivo questo per il quale vengono dette *coerenti*. Ma se le sorgenti non hanno la medesima frequenza, o la loro differenza di fase varia in modo irregolare nel tempo, non si osserva nessuna figura di interferenza stazionaria, e si dice che le sorgenti sono *incoerenti*. Ciò è quanto avviene per le sorgenti di luce composte dello stesso tipo di atomi, le quali emettono luce della medesima frequenza. Poichè sono molti gli atomi che partecipano al fenomeno in ciascuna sorgente, ed essi non vibrano in fase, non viene osservata alcuna figura di interferenza definita.

Per superare tale difficoltà e produrre due fasci di luce coerenti, sono stati progettati molti dispositivi. Uno molto comune è il biprisma di Fresnel, illustrato nella Fig. 22—4. Esso è composto di due prismi, P_1 e P_2. La luce proveniente dalla

Fig. 22–5. The interference of two coherent sources. Young's double-slit experiment.

The situation described is such that, at each point of space, the resulting wave motion has a characteristic amplitude, given by Eq. (22.6), so that

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t - \alpha),$$

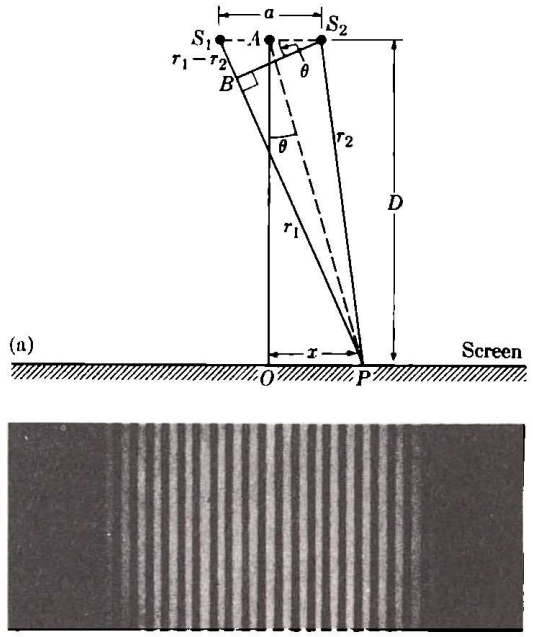
where α is as indicated in Fig. 22–2. Therefore the result of the interference does not have the appearance of a progressive wave motion but a *stationary* situation in which, at each point of space, the motion has a fixed amplitude. The reason for this is that the two sources oscillate with the same frequency and maintain a constant phase difference, and hence are said to be *coherent*. But if the sources are not of the same frequency, or if their phase difference changes erratically with time, no stationary interference pattern is observed, and the sources are said to be *incoherent*. This is what happens with light sources composed of the same kind of atoms, which emit light of the same frequency. Since there are many atoms involved in each source and they do not oscillate in phase, no definite interference pattern is observed.

To circumvent this difficulty and produce two coherent beams of light, several devices have been designed. A very common one is Fresnel's biprism, illustrated in Fig. 22–4. It is composed of two prisms, P_1 and P_2. Light coming from the

Fig. 22–6. (a) Diagramma schematico per determinare l'intensità del moto ondoso risultante su di uno schermo dovuto all'interferenza di due sorgenti coerenti. (b) Fotografia delle frange di interferenza prodotte su di uno schermo da una coppia di fenditure illuminate da una sorgente puntiforme di luce monocromatica. Si osservi che c'è un affievolimento delle frange in prossimità dei bordi, dovuto alla perdita di coerenza.

Screen = Schermo.

Fig. 22–6. (a) Schematic diagram for determining the intensity of the resultant wave motion on a screen due to the interference of two coherent sources. (b) Photograph of the interference fringes produced on a screen by a pair of slits illuminated by a point monochromatic light source. Note that there is a fading of the fringes near the edges, due to the loss of coherence.



sorgente S viene rifratta in ciascun prisma e separata in due fasci coerenti che apparentemente provengono dalle due sorgenti coerenti S_1 e S_2. Queste sono le immagini di S prodotte da ciascun prisma. La coerenza in tal caso è assicurata perchè i due fasci provengono dalla stessa sorgente. I fasci interferiscono nella zona tratteggiata. Per differenze di fase grandi, non si ha più coerenza, perchè i fasci che interferiscono vengono prodotti dalla sorgente in due istanti ampiamente separati, cosicchè, dal punto di vista microscopico, la sorgente non è la medesima in entrambi gli istanti, e le fasi non sono costanti.

Un artificio ancora più semplice è quello usato da Thomas Young (1773–1829), il quale, nei suoi primi esperimenti sull'interferenza della luce, dimostrò in modo definitivo che la luce era un fenomeno ondulatorio. Il suo dispositivo (Fig. 22–5) consisteva in due piccoli fori o fenditure molto accostati, S_1 e S_2, praticati in uno schermo con una sorgente luminosa S posta dietro. In base al principio di Huygens, S_1 e S_2 si comportano come sorgenti secondarie e coerenti le cui onde interferiscono a destra dello schermo.

Nel caso della luce, la figura di interferenza viene osservata su di uno schermo disposto parallelamente alle due sorgenti S_1 e S_2, come è indicato nella Fig. 22–6(a). Sullo schermo appare una serie di frange alternativamente luminose e scure, come quelle mostrare dalla Fig. 22–6(b), dovute all'intersezione dello schermo con le superficie iperboloidiche ventrali e nodali. Per altre zone dello spettro elettromagnetico, vengono usati tipi differenti di rivelatori per osservare le figure di interferenza.

Se la distanza a delle due sorgenti S_1 e S_2 è piccola rispetto alla distanza D, possiamo trascurare la piccola differenza fra r_1 e r_2, e assumere che le ampiezze ξ_{01} e ξ_{02} siano praticamente uguali. Si può allora riscrivere l'Eq. (22.6) come

source S is refracted in each prism and separated into two coherent beams that apparently proceed from two coherent sources, S_1 and S_2. These are the images of S produced by each prism. The coherency is assured in this case because the two beams proceed from the same source. The beams interfere in the shaded region. For large phase differences, the coherence is destroyed, because the interfering beams are produced by the source at two widely separated times so that, microscopically speaking, the source is not the same at both times and the phases are not constant.

An even simpler device is the one used by Thomas Young (1773–1829), who, in his early experiments on light interference, proved conclusively that light was a wave phenomenon. His arrangement (Fig. 22–5) consisted of two small closely spaced holes or slits, S_1 and S_2, in a screen with a light source S placed behind it. According to Huygens' principle, S_1 and S_2 behave as secondary and coherent sources whose waves interfere on the right-hand side of the screen.

In the case of light, the interference pattern is observed on a screen placed parallel to the two sources S_1 and S_2, as indicated in Fig. 22–6(a). A series of alternate bright and dark fringes appear on the screen, as shown in Fig. 22–6(b), due to the intersection of the screen with the hyperbolic ventral and nodal surfaces. For other regions of the electromagnetic spectrum, different kinds of detectors are used to observe the interference pattern.

If the separation a of the sources S_1 and S_2 is small compared with the distance D, we may neglect the small difference between r_1 and r_2 and assume the amplitudes ξ_{01} and ξ_{02} are practically equal. We may then rewrite Eq. (22.6) as

$$\xi_0 = \xi_{01}\sqrt{2(1 + \cos\delta)} = 2\xi_{01}\cos\tfrac{1}{2}\delta.$$

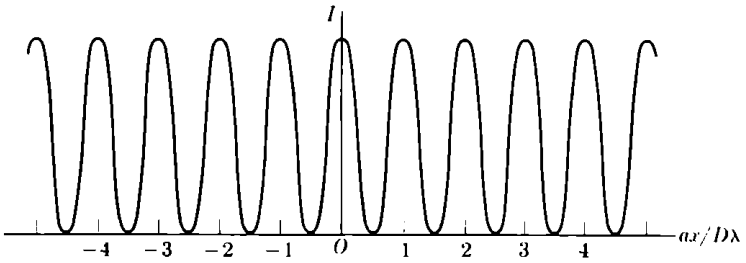


Fig. 22–7. Distribuzione dell'intensità nella figura di interferenza prodotta da due sorgenti coerenti.

Ora, dal disegno della Fig. 22–6, considerando che θ è un angolo piccolo, tale che $\sin\theta \approx \tan\theta = x/D$, si ricava $r_1 - r_2 = S_1B = a\sin\theta = ax/D$, e quindi

L'intensità del moto ondoso risultante nei punti dello schermo è proporzionale a ξ_0^2. Perciò

dove I_0 è l'intensità per $\theta = 0$. Tale distribuzione di intensità di tipo $\cos^2$ è illustrata nella Fig. 22–7. I punti di intensità massima corrispondono a

ossia

e anche a

ossia

dove n è un numero intero positivo o negativo. La separazione fra due frange luminose successive è $\Delta x = (D/a)\lambda$. Perciò, misurando Δx, D, e a, si può ottenere la lunghezza d'onda λ. In effetti questo è uno dei metodi classici per la misura delle lunghezze d'onda.

ESEMPIO 22.1. In un esperimento simile a quello di Young, le due fenditure sono separate da una distanza di 0.8 mm. Le fenditure sono illuminate con luce monocromatica della lunghezza d'onda di 5.9×10^{-7} m, e la figura di interferenza viene osservata su di un secondo schermo, il quale si trova alla distanza di 0.50 m dalle fenditure. Determinare la separazione fra due frange successive, chiare o scure.

Soluzione: Le grandezze che compaiono nell'Eq. (22.11) sono, in questo caso, $a = 0.8$ mm $= 8 \times 10^{-4}$ m, $D = 5 \times 10^{-1}$ m, e $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m. Perciò le posizioni delle frange luminose sono individuate da $x = n(D\lambda/a) = 3.7 \times 10^{-4}n$ m $= 0.37n$ mm. Le frange devono, in generale, essere osservate mediante una lente di ingrandimento. La separazione fra due frange chiare successive è di 0.37 mm, che è la stessa distanza che separa due frange scure.

Fig. 22–7. Intensity distribution in the interference pattern produced by two coherent sources.

Now, from the geometry of Fig. 22–6, considering that θ is a small angle, so that $\sin\theta \approx \tan\theta = x/D$, we have $r_1 - r_2 = S_1B = a\sin\theta = ax/D$, and hence

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\theta = \frac{2\pi ax}{D\lambda}. \tag{22.9}$$

The intensity of the resulting motion on the points of the screen is proportional to ξ_0^2. Therefore

$$I = I_0\cos^2\left(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right) = I_0\cos^2\left(\frac{\pi ax}{D\lambda}\right), \tag{22.10}$$

where I_0 is the intensity for $\theta = 0$. This $\cos^2$ intensity distribution is illustrated in Fig. 22–7. The points of maximum intensity correspond to

$$\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda} = n\pi \quad \text{or} \quad a\sin\theta = n\lambda,$$

and also to

$$\frac{\pi ax}{D\lambda} = n\pi \quad \text{or} \quad x = \frac{nD}{a}\lambda, \tag{22.11}$$

where n is a positive or negative integer. The separation between two successive bright fringes is $\Delta x = (D/a)\lambda$. Therefore by measuring Δx, D, and a, one may obtain the wavelength λ. This is, in fact, one of the standard methods of measuring wavelengths.

EXAMPLE 22.1. In an experiment similar to Young's, the two slits are separated a distance of 0.8 mm. The slits are illuminated with monochromatic light of wavelength 5.9×10^{-7} m, and the interference pattern is observed on a second screen, which is at a distance of 0.50 m from the slits. Determine the separation between two successive bright or dark fringes.

Solution: The quantities appearing in Eq. (22.11) are, in this case, $a = 0.8$ mm $= 8 \times 10^{-4}$ m, $D = 5 \times 10^{-1}$ m, and $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m. Therefore the positions of the bright fringes are $x = n(D\lambda/a) = 3.7 \times 10^{-4}n$ m $= 0.37n$ mm. In general, the fringes have to be observed with a magnifying glass. The separation between successive bright fringes is 0.37 mm, which is the same as the separation between two dark fringes.

ESEMPIO 22.2. Discutere la figura di interferenza di due sorgenti incoerenti della stessa frequenza.

Soluzione: L'incoerenza, in un caso come questo, è dovuta a una differenza di fase variabile. Perciò scriviamo, in luogo delle Equazioni (22.3) e (22.4),

dove ϕ è la differenza di fase addizionale, che varia nel tempo in modo casuale. La differenza di fase è quindi $\delta = 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda + \phi$, e l'ampiezza risultante nel punto di interferenza è

Ora però ξ_0 non è costante nel tempo, a causa delle variazioni in ϕ. Occorre perciò determinare, in suo luogo, $(\xi_0^2)_{\text{med}}$. Ma, dato che le variazioni di ϕ sono casuali, abbiamo che

ave = med

Perciò

ave = med

e, essendo l'intensità proporzionale al quadrato dell'ampiezza,

ave = med

L'intensità media risultante è dunque la somma delle singole intensità, e non si osserva alcuna fluttuazione di intensità. L'intensità media è la stessa in tutti i punti. Ecco perchè, per esempio, non osserviamo frange di interferenza da due lampadine, in quanto le differenze di fase dei rispettivi atomi che irradiano sono distribuite a caso.

22.3 *Interferenza fra più sorgenti coerenti*

Consideriamo ora il caso di molte sorgenti coerenti ed identiche disposte lungo una retta, come è illustrato nella Fig. 22–8. Per semplificare la nostra discussione, possiamo ammettere di osservare il moto ondulatorio risultante ad una distanza molto grande rispetto alla distanza che separa le sorgenti, cosicchè i raggi che interferiscono siano praticamente paralleli. Fra raggi successivi esiste una differenza di fase costante data da

Per ottenere l'ampiezza risultante nella direzione di osservazione, individuata

Fig. 22–8. Serie di sorgenti coerenti allineate e uniformemente distanziate.

EXAMPLE 22.2. Discuss the interference pattern of two incoherent sources of the same frequency.

Solution: The incoherence in this case is due to a variable phase difference. Therefore we write, instead of Eqs. (22.3) and (22.4),

$$\xi_1 = \xi_{01} \sin(\omega t - kr_1 - \phi), \qquad \xi_2 = \xi_{02} \sin(\omega t - kr_2),$$

where ϕ is the additional phase difference that varies with time in a random manner. Then the phase difference is $\delta = 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda + \phi$, and the resulting amplitude at the point of interference is

$$\xi_0^2 = \xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \phi\right].$$

But now ξ_0 is not constant in time because of the changes in ϕ. Therefore we must find instead $(\xi_0^2)_{\text{ave}}$. But due to the random variations in ϕ, we have that

$$\left\{\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) + \phi\right]\right\}_{\text{ave}} = 0.$$

Therefore

$$(\xi_0^2)_{\text{ave}} = \xi_{01}^2 + \xi_{02}^2$$

and, since the intensity is proportional to the square of the amplitude,

$$I_{\text{ave}} = I_1 + I_2.$$

Therefore the resultant average intensity is the sum of the individual intensities, and no fluctuations of intensity are observed. The average intensity is the same at all points. This is why, for example, we do not observe interference fringes from two electric bulbs, since the phase differences of their respective radiating atoms are distributed at random.

22.3 *Interference of Several Synchronous Sources*

Let us now consider the case of several synchronous and identical sources arranged linearly, as illustrated in Fig. 22–8. To simplify our discussion we may assume that we observe the resulting wave motion at a distance very large compared with the separation of the sources, so that effectively the interfering rays are parallel. Between successive rays there is a constant phase difference given by

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta. \qquad (22.12)$$

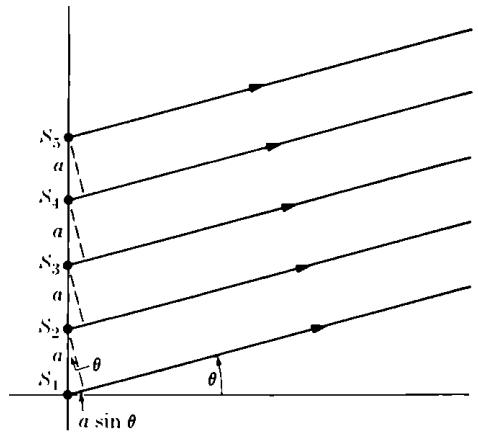


Fig. 22–8. Linear series of equally spaced coherent sources.

To obtain the resulting amplitude for the direction of observation, given by

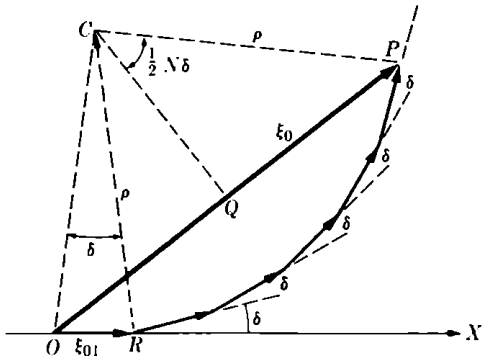


Fig. 22–9. Ampiezza risultante in un punto arbitrario dovuta all'interferenza delle onde generate da sorgenti coerenti allineate e uniformemente distanziate.

Fig. 22–10. Ampiezza risultante dall'interferenza di sorgenti allineate e ugualmente distanziate in un punto in cui la differenza di fase è nulla.

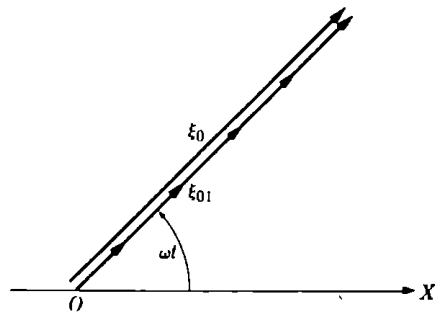


Fig. 22–9. Resultant amplitude at an arbitrary point due to the interference of waves generated by equally spaced linear coherent sources.

Fig. 22–10. Resultant amplitude of interference of equally spaced linear sources at a point of zero phase difference.

dall'angolo θ, dobbiamo valutare il vettore somma dei vettori rotanti corrispondenti a ciascuna sorgente. Se tutte le sorgenti sono identiche, i loro vettori rotanti hanno tutti la medesima lunghezza ξ_{01}, e i vettori successivi sono deviati dello stesso angolo δ, come è indicato nella Fig. 22–9. Detto N il numero delle sorgenti, abbiamo dunque un poligono regolare di N lati con centro in C e raggio ρ, e l'angolo OCP è $N\delta$. Dal triangolo COP, deriviamo che

the angle θ, we must evaluate the vector sum of the corresponding rotating vectors for each source. If all the sources are alike, their rotating vectors all have the same length ξ_{01}, and successive vectors are deviated by the same angle δ, as indicated in Fig. 22–9. Designating the number of sources by N, we then have an N-sided regular polygon having a center C and a radius ρ, and the angle OCP is $N\delta$. From triangle COP, we see that

$$\xi_0 = OP = 2QP = 2\rho \sin \tfrac{1}{2}N\delta.$$

Analogamente, dal triangolo COR, corrispondente a un solo lato del poligono, ricaviamo

Similarly, from triangle COR, which corresponds to one side of the polygon, we have

$$\xi_{01} = 2\rho \sin \tfrac{1}{2}\delta.$$

Dividendo le due relazioni membro a membro per eliminare ρ, otteniamo

Dividing the two relations to eliminate ρ, we obtain

$$\xi_0 = \xi_{01} \frac{\sin \frac{1}{2}N\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta}. \tag{22.13}$$

Per $N = 2$, abbiamo $\xi_0 = 2\xi_{01} \cos \frac{1}{2}\delta$, in accordo col risultato precedente per due sorgenti uguali, ricavato nel Paragrafo 22.2. Essendo l'intensità delle onde risultanti proporzionale a ξ_0^2, essa è dunque

For $N = 2$, we get $\xi_0 = 2\xi_{01} \cos \frac{1}{2}\delta$, in agreement with the previous result for two equal sources derived in Section 22.2. The intensity of resulting waves, since it is proportional to ξ_0^2, is then

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{1}{2}N\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta}\right)^2 = I_0 \left[\frac{\sin (N\pi a \sin \theta/\lambda)}{\sin (\pi a \sin \theta/\lambda)}\right]^2, \tag{22.14}$$

dove I_0 è l'intensità di ciascuna sorgente, proporzionale a ξ_{01}^2. L'espressione (22.14) ha dei massimi molto pronunciati, uguali a $N^2 I_0$, per $\delta = 2n\pi$, cioè

where I_0 is the intensity of each source proportional to ξ_{01}^2. Expression (22.14) has very pronounced maxima, equal to $N^2 I_0$, for $\delta = 2n\pi$, or

$$a \sin \theta = n\lambda. \tag{22.15}$$

Ciò perchè $\sin N\alpha / \sin \alpha = \pm N$ per $\alpha = n\pi$, e nel nostro caso $\alpha = \frac{1}{2}\delta$. Il valore di I è dunque $I = N^2 I_0$. Tale risultato è comprensibile dalla Fig. 22–9

This is because $\sin N\alpha / \sin \alpha = \pm N$ for $\alpha = n\pi$, and in our case $\alpha = \frac{1}{2}\delta$. The value of I is then $I = N^2 I_0$. This result is understandable from Fig. 22–9 be-

N very large = N molto grande

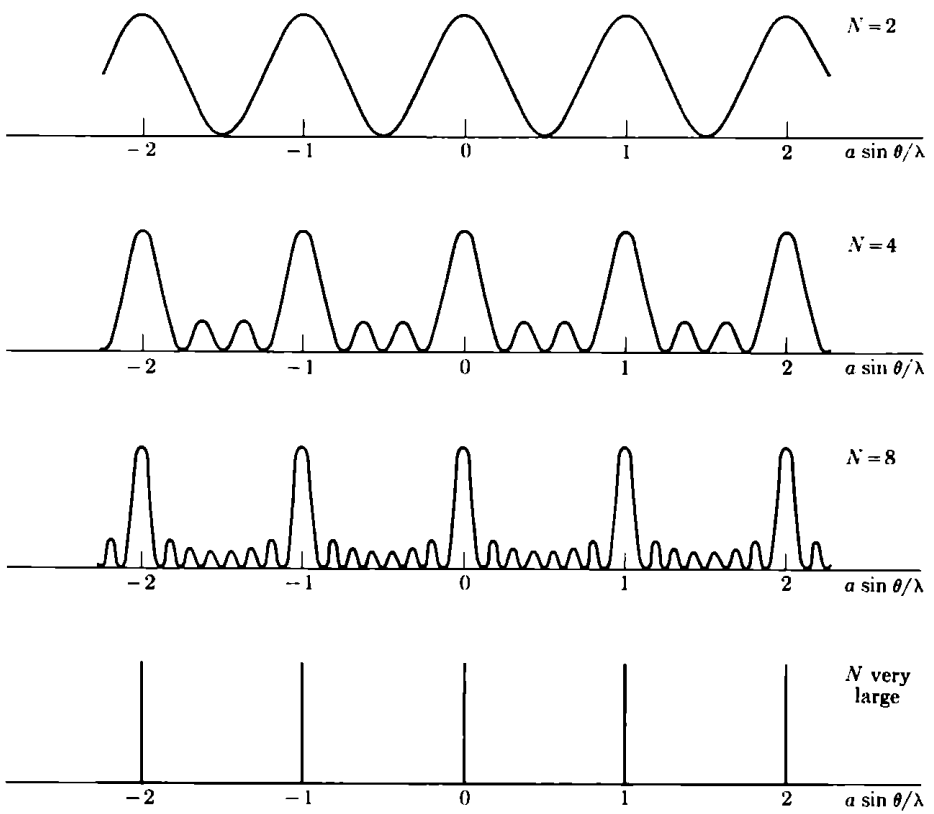


Fig. 22–11. Intensità della figura di interferenza per 2, 4, 8, e moltissime sorgenti. La spaziatura fra le sorgenti a è mantenuta costante.

Fig. 22–11. Intensity of the interference pattern for 2, 4, 8, and very many sources. The source spacing a is kept constant.

in quanto, quando $\delta = 2n\pi$, i vettori ξ_{01} di tutte le sorgenti sono paralleli, come è rappresentato in Fig. 22–10, e l'ampiezza risultante è $\xi_0 = N\,\xi_{01}$, in accordo con l'Eq. (22.13). L'espressione (22.15) è in accordo con l'Eq. (22.11) ricavata per due sorgenti sotto ipotesi analoghe. L'intensità è nulla per $\frac{1}{2}N\,\delta = n'\pi$, cioè

dove n' va da 1 a $N - 1$, da $N + 1$ a $2N - 1$, ecc., dato che $n' = 0, N, 2N, \ldots$, sono esclusi in quanto l'Eq. (22.16) si trasformerebbe allora nell'Eq. (22.15). Fra due minimi ci deve sempre essere un massimo. Perciò ne concludiamo che ci sono anche $N - 2$ massimi addizionali fra i massimi principali dati dall'Eq. (22.15). Le loro ampiezze sono tuttavia relativamente molto più piccole, specialmente se N è grande. I massimi principali corrispondono alle direzioni per cui le onde emesse da sorgenti adiacenti sono in fase.

I diagrammi di I/I_0 in funzione di δ sono disegnati nella Fig. 22–11 per $N = 2, 4, 8,$ e molto grande. Vediamo che allorchè N cresce, il sistema diviene altamente direzionale,

cause, when $\delta = 2n\pi$, all source vectors ξ_{01} are parallel, as indicated in Fig. 22–10, and the resulting amplitude is $\xi_0 = N\xi_{01}$, in agreement with Eq. (22.13). Expression (22.15) agrees with Eq. (22.11) derived for two sources, under similar assumptions. The intensity is zero for $\frac{1}{2}N\delta = n'\pi$, or

$$a \sin \theta = \frac{n'\lambda}{N}, \tag{22.16}$$

where n' goes from 1 to $N - 1$, $N + 1$ to $2N - 1$, etc., since $n' = 0, N, 2N, \ldots$, are excluded, because then Eq. (22.16) would transform into Eq. (22.15). Between two minima there must always be a maximum. Therefore we conclude that there are also $N - 2$ additional maxima between the principal maxima given by Eq. (22.15). Their amplitudes are, however, relatively much smaller, especially if N is large. The principal maxima correspond to the directions for which the waves emitted by adjacent sources are in phase.

The graph of I/I_0 in terms of δ is shown in Fig. 22–11 for $N = 2, 4, 8,$ and very large. We see that when we increase N the system becomes highly directional,

Sources = Sorgenti

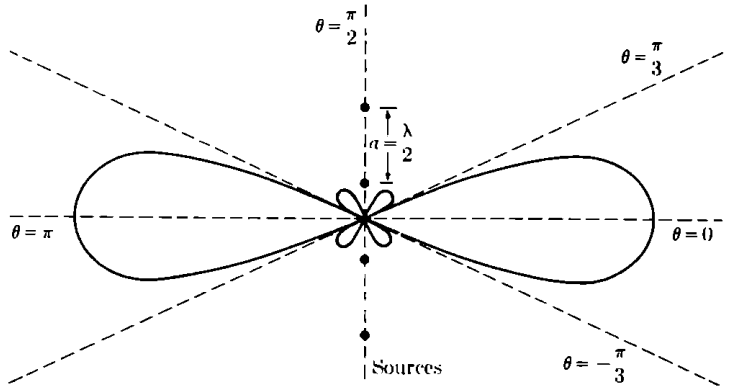


Fig. 22–12. Distribuzione angolare dell'intensità nella figura di interferenza per onde generate da quattro sorgenti coerenti allineate distanziate una dall'altra di mezza lunghezza d'onda.

Fig. 22–12. Angular distribution of intensity in the interference pattern for waves generated by four coherent linear sources spaced a half wavelength apart.

poichè il moto ondulatorio risultante è importante soltanto per strette bande di valori di δ, o per strette bande di valori dell'angolo θ.

Tali risultati sono ampiamente usati nelle stazioni trasmittenti o riceventi, quando si desidera un effetto direzionale. In tal caso, si dispongono molte antenne in modo tale che l'intensità della radiazione emessa (o ricevuta) sia massima soltanto per certe direzioni, fornite dall'Eq. (22.15). Per esempio, per quattro antenne allineate, separate di $a = \lambda/2$, l'Eq. (22.15) dà $\sin\theta = 2n$. Quindi, per i massimi principali è possibile soltanto $n = 0$, cui corrispondono $\theta = 0$ e π. Per gli zeri, o piani nodali, l'Eq. (22.16) dà $\sin\theta = \frac{1}{2}n'$, che consente $n' = \pm 1$ e ± 2, cioè $\theta = \pm\pi/3$ e $\pm\pi/2$. Tale situazione è illustrata dal diagramma polare della Fig. 22–12, nel quale l'intensità è riportata in funzione dell'angolo. Tale disposizione di antenna trasmette e riceve quindi preferenzialmente in una direzione perpendicolare alla retta congiungente le sorgenti, e si dice perciò che è una *disposizione "broadside"*. Lo stesso effetto direzionale viene usato nei radiotelescopi. Molte antenne paraboliche vengono disposte a distanze uguali lungo una linea retta, con gli assi paralleli. Assegnate la spaziatura e l'orientazione degli assi, la lunghezza d'onda delle onde radio ricevute è determinata dall'Eq. (22.15). (Vedere problema 22.16.)

since the resulting wave motion is important only for narrow bands of values of δ, or for narrow bands of values of the angle θ.

These results are widely used in broadcasting or receiving stations when a directional effect is desired. In this case several antennas are arranged in such a form that the intensity of the radiation emitted (or received) is maximum only for certain directions, given by Eq. (22.15). For example, for four linear antennas separated by $a = \lambda/2$, Eq. (22.15) gives $\sin\theta = 2n$. Then only $n = 0$ is possible for the principal maxima, giving $\theta = 0$ and π. For the zeros, or nodal planes, Eq. (22.16) gives $\sin\theta = \frac{1}{2}n'$, allowing for $n' = \pm 1$ and ± 2 or $\theta = \pm\pi/3$ and $\pm\pi/2$. The situation is illustrated in the polar diagram of Fig. 22–12, where the intensity is plotted in terms of the angle. This antenna arrangement then transmits and receives preferentially in a direction perpendicular to the line joining the sources, and is therefore called a *broadside array*. The same directional effect is used in radio telescopes. Several parabolic antennas are placed at equal distances along a straight line, with their axes parallel. For a given spacing and orientation of the axes, the wavelength of the radio waves received is determined by Eq. (22.15). (See Problem 22.16.)

ESEMPIO 22.3. Discutere l'interferenza per riflessione o per trasmissione con pellicole sottili.

Soluzione: La discussione del paragrafo precedente può essere estesa al caso di luce riflessa o trasmessa da pellicole sottili. Consideriamo (Fig. 22–13) una pellicola sottile di spessore a e delle onde piane incidenti su di essa con un angolo di incidenza θ_i. Una parte di un raggio come ad esempio AB viene riflessa lungo BG, mentre una parte è rifratta lungo BC. Il raggio BC a sua volta è in parte riflesso in C lungo CD e in parte trasmesso lungo CH. Il raggio CD viene ancora parzialmente riflesso in D lungo DK, sovrapponendosi così al raggio rifratto di FD e una parte viene trasmessa lungo DE, e si sovrappone al raggio riflesso di FD. Analogamente, il raggio riflesso BG contiene anche contributi da molti raggi alla sua sinistra. Perciò si hanno fenomeni di interferenza sia lungo i raggi riflessi sia lungo i raggi rifratti. La situazione è quindi del tutto simile al caso illustrato nel

EXAMPLE 22.3. Discuss interference by reflection from or transmission through thin films.

Solution: The discussion of the previous section can be applied to the case of light reflected or transmitted by thin films. Let us consider (Fig. 22–13) a thin film of thickness a and plane waves falling on it at an angle of incidence θ_i. Part of a ray such as AB is reflected along BG, and part is refracted along BC. Ray BC in turn is partly reflected at C along CD and partly transmitted along CH. Ray CD again is partly reflected at D along DK, being superposed on the refracted ray of FD and partly transmitted along DE, superposed with the reflected ray of FD. Similarly the reflected ray BG also contains contributions from several rays to the left. Therefore interference phenomena occur along the reflected and refracted rays. The situation is then similar to the case illustrated in

Paragrafo 22.3, con N molto grande, ma con una importante differenza: i raggi che interferiscono non hanno tutti la medesima intensità, perchè ciascuna riflessione o rifrazione successiva fa diminuire l'intensità.

Se trascuriamo tale variazione di intensità, i massimi dell'interferenza per riflessione o rifrazione si hanno quando la differenza di fase δ fra raggi successivi soddisfa l'equazione $\delta = 2n\pi$. Per calcolare δ nel caso di interferenza per riflessione, consideriamo i raggi AB e FD. Tracciato il fronte d'onda BB', si osserva che la differenza di fase lungo DE è dovuta alla differenza nei tempi necessari per seguire i percorsi $B'D$ e BCD. Ora dalla figura vediamo che $B'D = BD \sin\theta_i$ e $BD = 2a \tan\theta_r$. Perciò

dato che per la legge di Snell $\sin\theta_i = n \sin\theta_r$. Pure $BCD = 2BC = 2a/\cos\theta_r$. Quindi $t_1 = B'D/c = 2an \sin^2\theta_r/c \cos\theta_r$ e $t_2 = BCD/v = 2an/c \cos\theta_r$, poichè $v = c/n$. La differenza fra i tempi è

e la differenza di fase, dato che $\lambda = 2\pi c/\omega$, è

Fig. 22–13. Interferenza per riflessione o rifrazione attraverso una pellicola sottile.

Ma questa non è l'intera differenza di fase perchè, come abbiamo visto nel Paragrafo 20.7, in alcuni casi per riflessione si ha una differenza di fase addizionale di π. Ciò avviene, per esempio, nel caso di onde elettromagnetiche, quando della luce polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza passa da un mezzo nel quale la velocità è maggiore ad uno in cui è più piccola. Così in questo caso, se $n > 1$, c'è una differenza di fase di π per il raggio FD quando questo viene riflesso in D, ma non per il raggio BC quando si riflette in C; l'opposto accade se $n < 1$. Dobbiamo dunque scrivere in entrambi i casi

e, ponendo $\delta = 2N\pi$, dove N è un numero intero, otteniamo

(massima riflessione, minima trasmissione),

come condizione di interferenza con esaltazione delle onde riflesse. Lo studente può verificare con calcoli analoghi che per l'onda trasmessa lungo DK la condizione di massima intensità è

(massima trasmissione, minima riflessione).

Lo sfasamento di π in questo caso non ha luogo, in quanto il raggio ha subìto due riflessioni interne. L'Eq. (22.17) fornisce anche la condizione per la trasmissione minima,

Section 22.3, with N very large, but with an important difference: Interference rays do not all have the same intensity because each successive reflection or refraction decreases the intensity.

If we neglect this change in intensity, the maxima for interference by reflection or refraction occur when the phase difference δ between successive rays satisfies the equation $\delta = 2n\pi$. To compute δ for interference by reflection, let us consider rays AB and FD. Drawing the wave front BB', the phase difference along DE is due to the different times required for following paths $B'D$ and BCD. Now from the figure we see that $B'D = BD \sin\theta_i$ and $BD = 2a \tan\theta_r$. Therefore

$$B'D = 2a \tan\theta_r \sin\theta_i = \frac{2an \sin^2\theta_r}{\cos\theta_r},$$

because by Snell's law $\sin\theta_i = n \sin\theta_r$. Also $BCD = 2BC = 2a/\cos\theta_r$. Then $t_1 = B'D/c = 2an \sin^2\theta_r/c \cos\theta_r$ and $t_2 = BCD/v = 2an/c \cos\theta_r$, because $v = c/n$. The time difference is

$$t_2 - t_1 = \frac{2an \cos\theta_r}{c}$$

and the phase difference, since $\lambda = 2\pi c/\omega$, is

$$\delta = \omega(t_2 - t_1) = \frac{2a\omega n \cos\theta_r}{c} = \frac{4\pi an \cos\theta_r}{\lambda}.$$

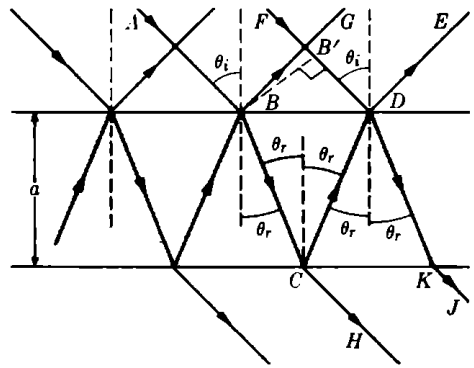


Fig. 22–13. Interference by reflection or refraction through a thin film.

This may not be the entire phase difference because, as we saw in Section 20.7, sometimes on reflection there is an additional phase difference of π. This occurs, for example, in the case of electromagnetic waves, when light polarized perpendicular to the plane of incidence goes from a medium where the velocity is larger to another where it is smaller. So in this case, if $n > 1$, there is a phase shift of π for ray FD when it is reflected at D, but not for ray BC when it is reflected at C; and the reverse occurs when $n < 1$. Thus in either case we must write

$$\delta = \frac{4\pi an \cos\theta_r}{\lambda} + \pi$$

and, setting $\delta = 2N\pi$, where N is an integer, we get

$$2an \cos\theta_r = \tfrac{1}{2}(2N - 1)\lambda$$

(maximum reflection, minimum transmission), (22.17)

as the condition for interference by reinforcement in the reflected waves. The student may verify by similar calculations that for the transmitted wave along DK the condition for maximum intensity is

$$2an \cos\theta_r = N\lambda$$

(maximum transmission, minimum reflection). (22.18)

The phase shift of π does not occur in this case, because the ray has undergone two internal reflections. Equation (22.17) also gives the condition for minimum transmission

Layer of air of variable thickness = Strato di aria di spessore variabile
Plano-convex lens = Lente pianoconvessa
Glass plate = Lastra di vetro

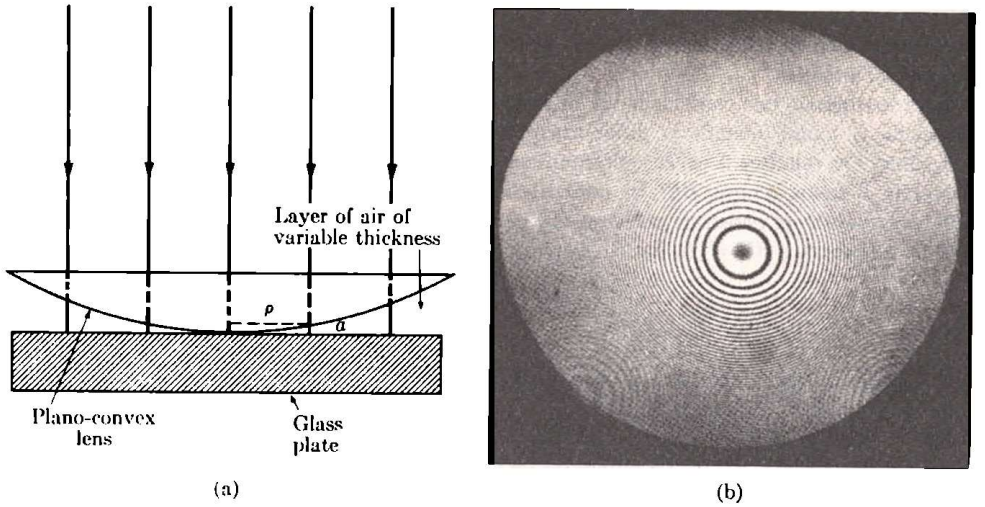


Fig. 22–14. Anelli di Newton, formati per interferenza nella pellicola di aria fra una superficie convessa e una piana. (a) Diagramma schematico. (b) Fotografia degli anelli. (Cortese concessione della Bausch e Lomb Optical Co.)

Fig. 22–14. Newton's rings, formed by interference in the air film between a convex and a plane surface. (a) Schematic diagram. (b) Photograph of rings. (Courtesy Bausch and Lomb Optical Co.)

e l'Eq. (22.18) fornisce la condizione per la riflessione minima. È interessante osservare infine che il colore che osserviamo in riflessione non è lo stesso colore che vediamo per trasmissione. Essi sono determinati in ciascun caso dalle lunghezze d'onda che soddisfano le Eq. (22.17) o (22.18).

Se la luce incidente non è monocromatica, le Equazioni (22.17) e (22.18) forniscono valori diversi di θ_r, e quindi di θ_i, per ciascuna λ. Ciò spiega i colori che si osservano nelle sottili pellicole di olio sulla superficie dell'acqua. Ancora, se la pellicola è di spessore variabile, le condizioni (22.17) e (22.18) non sono soddisfatte in tutti i punti per una data lunghezza d'onda; e ciò produce, nel caso di luce monocromatica, una successione di frange chiare e scure, e nel caso di luce bianca, una successione di frange colorate. Si può facilmente osservare questo ponendo una lente piano-convessa su di una lastra piana di vetro, come mostra la Fig. 22–14(a). Lo spazio compreso fra la lente e la lastra di vetro costituisce uno strato di aria di spessore variabile. La figura di interferenza che ne risulta consiste in una serie di anelli colorati concentrici, noti come *anelli di Newton*, come in Fig. 22–14(b).

ESEMPIO 22.4. Una data pellicola ha indice di rifrazione 1.42. Determinare il suo spessore minimo se essa deve apparire scura (a) per riflessione, (b) per trasmissione, allorchè la si illumina con luce al sodio (lunghezza d'onda 5.9×10^{-7} m).

Soluzione: Dalle Equazioni (22.17) e (22.18) vediamo che il minimo valore di a si ha quando è massimo il valore di $\cos \theta_r$; vale a dire, per $\theta_r = 0°$ e quindi anche $\theta_i = 0°$. Tale situazione corrisponde a incidenza normale. In tal caso (con $N = 1$), le condizioni divengono $a = \lambda/4n$ per trasmissione nulla e $a = \lambda/2n$ per riflessione nulla. Così i valori corrispondenti sono $a = 1.04 \times 10^{-7}$ m e $a = 2.08 \times 10^{-7}$ m. Dato che la distanza fra gli atomi è dell'ordine di 10^{-9} m, lo spessore minimo della pellicola è in entrambi i casi solo di alcune centinaia di diametri atomici.

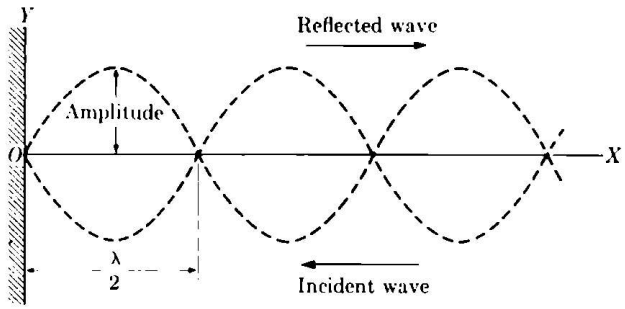
and Eq. (22.18) gives the condition for minimum reflection. It is interesting to note, then, that the color we observe because of reflection is not the same as the color we observe because of transmission. These are determined in each case by the wavelengths satisfying Eqs. (22.17) or (22.18).

If the incident light is not monochromatic, Eqs. (22.17) and (22.18) give different values of θ_r, and then θ_i, for each λ. This explains the colors we observe in thin oil films on water surfaces. Also, if the film is of variable thickness, conditions (22.17) and (22.18) are not fulfilled at all points for a given wavelength; this results, in the case of monochromatic light, in a succession of dark and bright bands, and in the case of white light, it results in a succession of colored bands. This can easily be seen by placing a plano-convex lens on a plane glass plate, as shown in Fig. 22–14(a). The space between the lens and the glass plate is a layer of air, of varying thickness. The resulting interference pattern consists of a series of concentric colored rings, known as *Newton's rings*, shown in Fig. 22–14(b).

EXAMPLE 22.4. A given film has an index of refraction of 1.42. Determine its minimum thickness if it is to appear black by (a) reflection, (b) transmission, when illuminated with sodium light (wavelength 5.9×10^{-7} m).

Solution: From Eqs. (22.17) and (22.18) we see that the minimum value of a occurs at the maximum value of $\cos \theta_r$; that is, for $\theta_r = 0°$ and thus also $\theta_i = 0°$. This situation corresponds to normal incidence. In this case (with $N = 1$), the conditions become $a = \lambda/4n$ for no transmission and $a = \lambda/2n$ for no reflection. So the corresponding values are $a = 1.04 \times 10^{-7}$ m and $a = 2.08 \times 10^{-7}$ m. Since the separation between atoms is of the order of 10^{-9} m, the minimum film thickness in each case is only a few hundred atomic layers.

Amplitude = Ampiezza
Reflected wave = Onda riflessa
Incident wave = Onda incidente



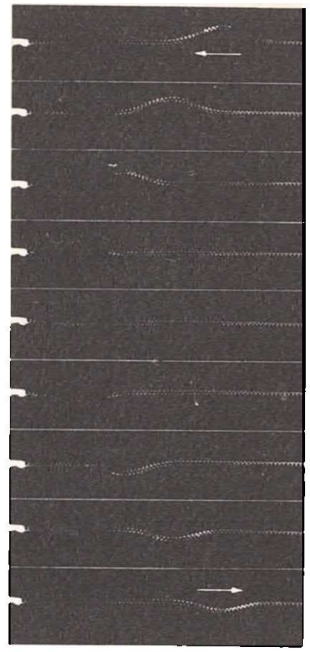


Fig. 22–15. Cambiamento di fase di un'onda riflessa in una corda con un estremo fisso. (La fotografia è dovuta alla cortesia della Educational Services, Inc.)

Fig. 22–15. Change in phase of a reflected wave on a string having one end fixed. (Photograph courtesy Educational Services, Inc.)

22.4 *Onde stazionarie in una dimensione*

Nell'Esempio 20.2 abbiamo discusso le onde trasmesse e riflesse in una corda che aveva una discontinuità ad un certo punto, come ad esempio una variazione di diametro o di materiale. Consideriamo ora il caso in cui uno degli estremi è fisso, come è rappresentato in Fig. 22–15, in cui l'estremo O è il punto fisso. Un'onda trasversale incidente in moto verso sinistra e avente equazione $\xi = \xi_0 \sin(\omega t + kx)$ si riflette in O, producendo una nuova onda che si propaga verso destra e avente come equazione $\xi = \xi_0' \sin(\omega t - kx)$. Lo spostamento in un punto qualsiasi della corda è il risultato dell'interferenza o sovrapposizione delle due onde, cioè

In O abbiamo $x = 0$, cosicchè

Ma O è fisso, ciò che significa che $\xi_{(x=0)} = 0$ ad ogni istante. Ciò richiede che sia $\xi_0' = -\xi_0$. In altre parole, l'onda subisce un cambiamento di fase di π quando si riflette all'estremità fissa. Abbiamo incontrato un tale cambiamento di fase già molte volte in precedenza (Esempi 20.2 e 20.3). La variazione di fase si può vedere nella serie di fotografie della Fig. 22–15, la quale mostra un impulso che incide e viene riflesso. L'Eq. (22.19) diventa dunque

22.4 *Standing Waves in One Dimension*

In Example 20.2 we discussed transmitted and reflected waves on a string which had a discontinuity at a certain point, such as a change in diameter or in material. Let us now consider the situation when one end is fixed, as indicated in Fig. 22–15, where the end O is the fixed point. An incident transverse wave moving to the left and having the equation $\xi = \xi_0 \sin(\omega t + kx)$ is reflected at O, producing a new wave propagating to the right and having as its equation $\xi = \xi_0' \sin(\omega t - kx)$. The displacement at any point of the string is the result of the interference or superposition of the two waves, that is,

$$\xi = \xi_0 \sin(\omega t + kx) + \xi_0' \sin(\omega t - kx). \tag{22.19}$$

At O we have $x = 0$, so that

$$\xi_{(x=0)} = (\xi_0 + \xi_0') \sin \omega t.$$

But O is fixed, which means that $\xi_{(x=0)} = 0$ at all times. This requires that $\xi_0' = -\xi_0$. In other words, the wave undergoes a phase change of π when it is reflected at the fixed end. We have encountered this phase change many times before (Examples 20.2 and 20.3). The phase change may be seen in the series of photographs of Fig. 22–15, which show an incident and a reflected pulse. Then Eq. (22.19) becomes

$$\xi = \xi_0[\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)].$$

In base alla relazione trigonometrica (M.7), $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, otteniamo

L'espressione $\omega t \pm kx$ non compare più e l'Eq. (22.20) non rappresenta un'onda che si sposta. Di fatto essa rappresenta un semplice moto armonico la cui ampiezza varia da punto a punto ed è data da

Tale ampiezza è stata indicata con le linee tratteggiate in Fig. 22–15. L'ampiezza è nulla per $kx = n\pi$, dove n è un numero intero. Tale risultato può essere scritto anche come

Questi punti sono detti *nodi*. I nodi successivi sono separati da una distanza di $\frac{1}{2}\lambda$. Se ricordiamo l'espressione (18.30), $v = \sqrt{T/m}$, per la velocità di propagazione delle onde lungo una corda sottoposta a una forza T e avente una massa ad unità di lunghezza m, la lunghezza d'onda è definita dalla

ed è arbitraria dal momento che la pulsazione ω è a sua volta arbitraria.

Supponiamo ora di imporre una *seconda* condizione: che il punto $x = L$, che può essere l'altra estremità della corda, sia anch'esso fisso. Ciò significa che $x = L$ è un nodo e deve soddisfare alla condizione $kL = n\pi$. Ossia, se usiamo l'Eq. (22.22),

oppure

Questa seconda condizione limita automaticamente le lunghezze d'onda delle onde che possono propagarsi lungo tale corda ai valori dati dall'Eq. (22.24), e di conseguenza, in base all'Eq. (22.23), le frequenze di oscillazione sono a loro volta limitate ai valori

dove

And by trigonometric relation (M.7), $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \frac{1}{2} \times (\alpha + \beta)$, we obtain

$$\xi = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t. \tag{22.20}$$

The expressions $\omega t \pm kx$ no longer appear and Eq. (22.20) does not represent a traveling wave. It effectively represents a simple harmonic motion whose amplitude varies from point to point, and is given by

$$A = 2\xi_0 \sin kx. \tag{22.21}$$

This amplitude has been indicated by the dashed lines in Fig. 22–15. The amplitude is zero for $kx = n\pi$, where n is an integer. This result may also be written as

$$x = \tfrac{1}{2}n\lambda. \tag{22.22}$$

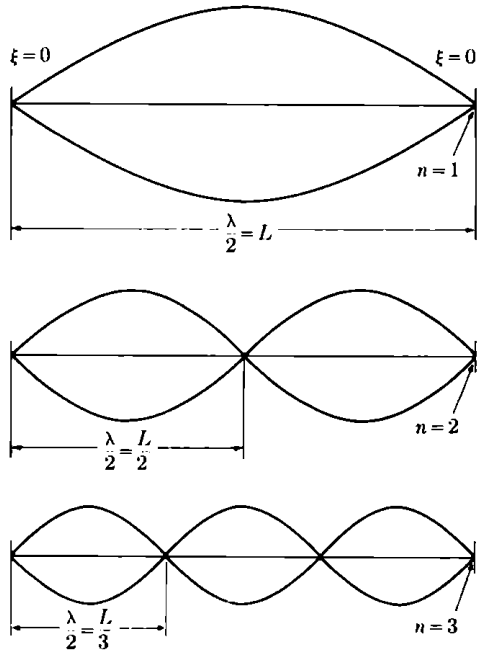


Fig. 22–16. Standing transverse wave on a string with both ends fixed.

These points are called *nodes*. Successive nodes are separated by the distance $\frac{1}{2}\lambda$. When we remember expression (18.30), $v = \sqrt{T/m}$, for the velocity of propagation of waves along a string subject to a tension T and having a mass m per unit length, the wavelength is determined by

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{\frac{T}{m}}, \tag{22.23}$$

and is arbitrary so long as the angular frequency ω is also arbitrary.

Suppose now that we impose a *second* condition: that the point $x = L$, which may be the other end of the string, is also fixed. That means that $x = L$ is a node and must satisfy the condition $kL = n\pi$. Or, if we use Eq. (22.22),

$$L = \tfrac{1}{2}n\lambda \qquad \text{or} \qquad \lambda = \frac{2L}{n} = 2L, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}, \cdots \tag{22.24}$$

This second condition automatically limits the wavelengths of the waves which can travel on this string to the values given by Eq. (22.24), and in turn, in view of Eq. (22.23), the frequencies of oscillations are also limited to the values

$$\nu_n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}} = \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \ldots, \tag{22.25}$$

where

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

Fig. 22–16. Onde trasversali stazionarie su di una corda con entrambi gli estremi fissi.

è detta la *frequenza fondamentale*. Le frequenze di oscillazione possibili (dette *armoniche*) sono dunque tutte multipli della fondamentale. Possiamo dire che le frequenze e le lunghezze d'onda sono *quantizzate*, e che la quantizzazione è l'effetto delle condizioni al contorno imposte alle due estremità della corda. È questa una situazione che si verifica in molti problemi fisici, come avremo spesso occasione di vedere più avanti.

La Fig. 22–16 indica la distribuzione delle ampiezze per i primi tre modi di vibrazione ($n = 1, 2, 3$). I nodi o punti di ampiezza nulla sono individuati per mezzo dell'Eq. (22.22). I punti di massima ampiezza sono i *ventri*. La distanza fra i ventri successivi è ancora $\frac{1}{2}\lambda$. Ovviamente, la distanza che separa un nodo e un ventre è $\lambda/4$. Osserviamo che mentre nei nodi $\xi = 0$, nei ventri $\partial\xi/\partial x = 0$, dato che l'ampiezza qui è massima.

ESEMPIO 22.5. Un filo di acciaio è lungo 40 cm ed ha un diametro di 1 mm. Dato che la frequenza della vibrazione fondamentale è di 440 s^{-1}, corrispondente al tono musicale A (cioè La) nella scala diatonica, chiave di C, trovare la forza a cui è sottoposta. (Si assuma che la densità del filo sia $\rho = 7.86 \times 10^3$ kg m^{-3}.)

Soluzione: La massa ad unità di lunghezza è $m = \pi r^2\rho$. Usando

e

otteniamo $m = 6.15 \times 10^{-3}$ kg m^{-1}. Risolvendo l'Eq. (22.25) rispetto alla forza T, e ponendo $n = 1$ dato che vogliamo il tono fondamentale, otteniamo $T = 4L^2m\nu_1^2$. Ponendo

e introducendo il valore di m che abbiamo calcolato, otteniamo infine

ossia

Lo studente può ora comprendere come gli strumenti musicali a corda vengano accordati variando opportunamente la forza (o la lunghezza) delle loro corde.

22.5 *Onde stazionarie ed equazione dell'onda*

Nel Capitolo 18, abbiamo discusso l'equazione dell'onda che governa la propagazione di un'onda; vale a dire,

e abbiamo dimostrato che la sua soluzione generale è della forma

Trattandosi di un'onda che si propaga in una direzione, noi usiamo o $f_1(x - vt)$ oppure $f_2(x + vt)$, ma non entrambe. Tuttavia, abbiamo visto che quando un'onda si riflette in un punto, ne risultano due onde che viaggiano in direzioni opposte, e si deve perciò usare

is called the *fundamental frequency*. Thus the possible frequencies of oscillation (called *harmonics*) are all multiples of the fundamental. We may say that the frequencies and wavelengths are *quantized*, and that the quantization is the result of the boundary conditions imposed at both ends of the string. This is a situation that appears in many physical problems, as we shall frequently have occasion to see later on.

Figure 22–16 indicates the amplitude distribution for the first three modes of vibration ($n = 1, 2, 3$). The nodes or points of zero amplitude are determined by means of Eq. (22.22). The points of maximum amplitude are the *antinodes*. The distance between successive antinodes is also $\frac{1}{2}\lambda$. Of course the separation between a node and an antinode is $\lambda/4$. Observe that while $\xi = 0$ at the nodes, $\partial\xi/\partial x = 0$ at the antinodes, since the amplitude is maximum.

EXAMPLE 22.5. A steel string has a length of 40 cm and a diameter of 1 mm. Given that its fundamental vibration is 440 s^{-1}, corresponding to the musical tone A (or La) in the diatonic scale, key of C, find its tension. (Assume that the density of the string is $\rho = 7.86 \times 10^3$ kg m^{-3}.)

Solution: The mass per unit length is $m = \pi r^2\rho$. Using

$$r = 5 \times 10^{-4} \text{ m} \quad \text{and} \quad \rho = 7.86 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

we get $m = 6.15 \times 10^{-3}$ kg m^{-1}. Solving Eq. (22.25) for the tension T, setting $n = 1$ since we want the fundamental tone, we obtain $T = 4L^2m\nu_1^2$. Setting

$$L = 40 \text{ cm} = 0.40 \text{ m}, \qquad \nu_1 = 440 \text{ s}^{-1},$$

and introducing the value of m that we calculated, we finally obtain

$$T = 762.0 \text{ N} \quad \text{or} \quad 171.2 \text{ lbf}.$$

As the student may now realize, stringed musical instruments are tuned by adjusting the tensions (or lengths) of their strings.

22.5 *Standing Waves and the Wave Equation*

In Chapter 18 we discussed the wave equation regulating the propagation of a wave; that is,

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \tag{22.26}$$

and we proved that its general solution is of the form

$$\xi = f_1(x - vt) + f_2(x + vt). \tag{22.27}$$

When we discuss a wave propagating in one direction, we use either $f_1(x - vt)$ or $f_2(x + vt)$, but not both. However, we have seen that when a wave is reflected at one point, the result is two waves traveling in opposite directions, and Eq. (22.27)

l'Eq. (22.27). Ciò è quanto abbiamo fatto nell'Eq. (22.19) per il caso di una corda con un estremo fisso; in quel caso abbiamo ottenuto l'Eq. (22.20) per il moto dell'onda risultante. La caratteristica importante dell'Eq. (22.20) (cioè, $\xi = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t$) è che le variabili x e t sono separate, e ne risulta una ampiezza variabile lungo la corda, ma fissa per ciascun punto. Questa è la caratteristica delle onde stazionarie. Dobbiamo dunque prendere in esame la possibilità della formulazione più generale di un'onda stazionaria armonica. La nostra richiesta può essere soddisfatta da una espressione della forma

dove $f(x)$ è l'ampiezza dell'onda nel punto x. Poichè ξ dev'essere una soluzione dell'Eq. (22.26), dobbiamo sostituire ξ data dall'Eq. (22.28) nell'Eq. (22.26) per determinare le proprietà richieste per l'ampiezza $f(x)$ delle onde stazionarie. Ora, per differenziazione, troviamo che

e

Perciò, sostituendo tali valori nell'Eq. (22.26) e semplificando il fattore comune $\sin \omega t$, otteniamo

o anche, essendo $k = \omega/v$,

È questa dunque l'equazione differenziale che dev'essere soddisfatta dall'ampiezza $f(x)$ se l'onda stazionaria data dall'Eq. (22.28) dev'essere una soluzione dell'equazione d'onda. La soluzione generale dell'Eq. (22.29), come lo studente può verificare per sostituzione diretta, è

dove A e B sono delle costanti arbitrarie. Perciò l'Eq. (22.28) diventa

Naturalmente, avremmo potuto usare $\cos \omega t$ invece di $\sin \omega t$, con lo stesso risultato. In altre parole, la fase del fattore dipendente dal tempo è irrilevante per la nostra discussione.

Le costanti nell'Eq. (22.31) sono determinate dalle condizioni imposte al contorno. Illustriamo questo mediante il problema della corda con gli estremi fissi discusso nel Paragrafo precedente. Le condizioni sono che $\xi = 0$ per $x = 0$ e $x = L$. Ponendo $x = 0$ nell'Eq. (22.31), abbiamo

must be used. This is what we did in Eq. (22.19) for the case of a string with one end fixed; we then obtained Eq. (22.20) for the resultant wave motion. The important feature of Eq. (22.20) (that is, $\xi = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t$) is that the x and t variables are separated, resulting in a variable amplitude along the string, but fixed for each point. This is the characteristic of standing waves. We must then explore the possibility of a more general formulation of a harmonic standing wave. Our requirement can be met by an expression of the form

$$\xi = f(x) \sin \omega t, \tag{22.28}$$

where $f(x)$ is the amplitude of the wave at point x. Since ξ must be a solution of Eq. (22.26), we must substitute ξ as given in Eq. (22.28) into Eq. (22.26) to determine the requirements on the amplitude $f(x)$ for standing waves. Now, by differentiation, we find that

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx^2} \sin \omega t \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 f(x) \sin \omega t.$$

Therefore, substituting these values in Eq. (22.26) and canceling the common factor $\sin \omega t$, we obtain

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} f$$

or, since $k = \omega/v$,

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0. \tag{22.29}$$

This is then the differential equation which must be satisfied by the amplitude $f(x)$ if the standing wave given by Eq. (22.28) is to be a solution of the wave equation. The general solution of Eq. (22.29), as the student may verify by direct substitution, is

$$f(x) = A \sin kx + B \cos kx, \tag{22.30}$$

where A and B are arbitrary constants. Therefore Eq. (22.28) becomes

$$\xi = (A \sin kx + B \cos kx) \sin \omega t. \tag{22.31}$$

Of course, we could have used $\cos \omega t$ instead of $\sin \omega t$, with the same result. In other words, the phase of the time factor is irrelevant for our discussion.

The constants in Eq. (22.31) are determined by the conditions imposed at the boundaries. Let us illustrate this with the problem of the string with fixed ends discussed in the preceding section. The conditions are that $\xi = 0$ for $x = 0$ and $x = L$. Setting $x = 0$ in Eq. (22.31), we have

$$\xi_{(x=0)} = B \sin \omega t = 0.$$

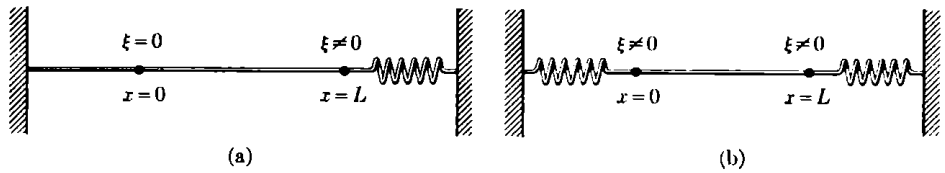


Figure 22–17

Therefore $B = 0$, and Eq. (22.31) reduces to

$$\xi = A \sin kx \sin \omega t. \tag{22.32}$$

Now if we set $x = L$, Eq. (22.32) yields

$$\xi_{(x=L)} = A \sin kL \sin \omega t = 0.$$

But now we cannot set $A = 0$, because that would make $\xi = 0$ everywhere; i.e., we would not have any wave at all. Thus our only choice is to set $\sin kL = 0$, which requires that

$$kL = n\pi \qquad \text{or} \qquad \lambda = 2L/n, \tag{22.33}$$

where n is an integer, in agreement with Eq. (22.24).

Obviously if, instead of imposing the condition that $\xi = 0$ at the ends, we impose other conditions because the physical situation at the ends is different, as in the strings illustrated in Fig. 22–17, we shall end up with a solution different from Eqs. (22.32) and (22.33).

It is instructive to consider two other simple examples, related to standing waves in the air inside a pipe, such as an organ pipe. Let us consider first a tube open at both ends (Fig. 22–18). Air is blown in at one end through the mouthpiece, and standing waves are produced because of the reflection occurring at the other end. The fundamental difference between this case and the previous one is that both ends are free, and therefore ξ has a maximum value at these ends; in other words, there is an antinode at each end. Our boundary conditions, corresponding to antinodes at both ends, are now ξ = maximum, or $\partial\xi/\partial x = 0$ at $x = 0$ and $x = L$. From Eq. (22.31), we have

$$\partial\xi/\partial x = k(A \cos kx - B \sin kx) \sin \omega t. \tag{22.34}$$

Setting $x = 0$, we obtain

$$(\partial\xi/\partial x)_{x=0} = kA \sin \omega t = 0,$$

so that $A = 0$. Then Eq. (22.34) becomes

$$\partial\xi/\partial x = -kB \sin kx \sin \omega t.$$

If we now set $x = L$, we have

$$(\partial\xi/\partial x)_{x=L} = -kB \sin kL \sin \omega t = 0.$$

Figura 22–17

Perciò $B = 0$, e l'Eq. (22.31) si semplifica nella

Ora se poniamo $x = L$, l'Eq. (22.32) fornisce

Ma ora non possiamo ricavare $A = 0$, perchè questo renderebbe ovunque $\xi = 0$; cioè non avremmo onda alcuna. Così l'unica nostra scelta è imporre $\sin kL = 0$, ciò che implica che

ossia

dove n è un numero intero, in accordo con l'Eq. (22.24).

Ovviamente, se invece di imporre la condizione che sia $\xi = 0$ agli estremi, imponessimo altre condizioni, essendo lo stato fisico agli estremi diverso, come per le corde rappresentate in Fig. 22–17, ci troveremmo infine con una soluzione diversa dalle Equazioni (22.32) e (22.33).

È istruttivo prendere in considerazione due altri semplici esempi, relativi alle onde stazionarie nell'aria dentro a un tubo, come ad esempio una canna d'organo. Consideriamo dapprima un tubo aperto ad entrambi gli estremi (Fig. 22–18). L'aria è soffiata dentro a un estremo attraverso l'imboccatura, e si producono onde stazionarie a causa della riflessione[N.T.] che ha luogo all'altro estremo. La differenza fondamentale fra questo caso e quello precedente è che entrambi gli estremi sono aperti, e perciò ξ ha un valore massimo in tali punti; in altre parole, c'è un ventre in ciascun estremo. Le nostre condizioni al contorno, corrispondenti a ventri ad entrambi gli estremi, sono ora ξ = massimo, cioè $\partial\xi/\partial x = 0$ per $x = 0$ e $x = L$. Dall'Eq. (22.31), ricaviamo

Ponendo $x = 0$, otteniamo

per cui $A = 0$. L'Eq. (22.34) diventa quindi

Se noi ora introduciamo $x = L$, otteniamo

N.T. Si tenga presente che si ha riflessione anche se il tubo è aperto.

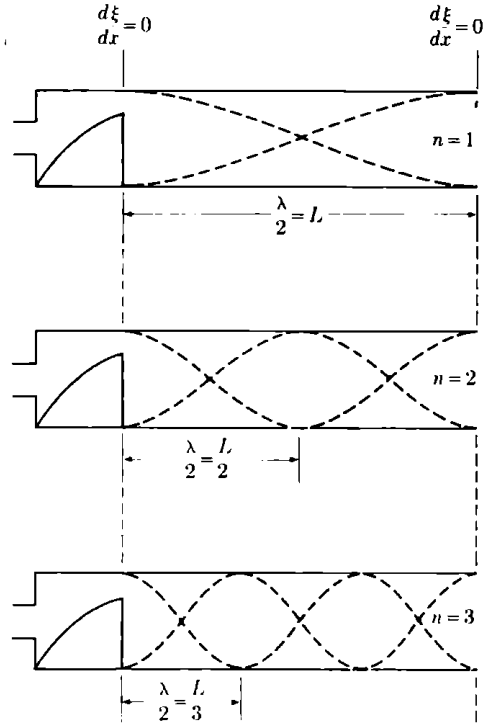


Fig. 22–18. Onde di pressione stazionarie in una colonna d'aria con entrambi gli estremi aperti.

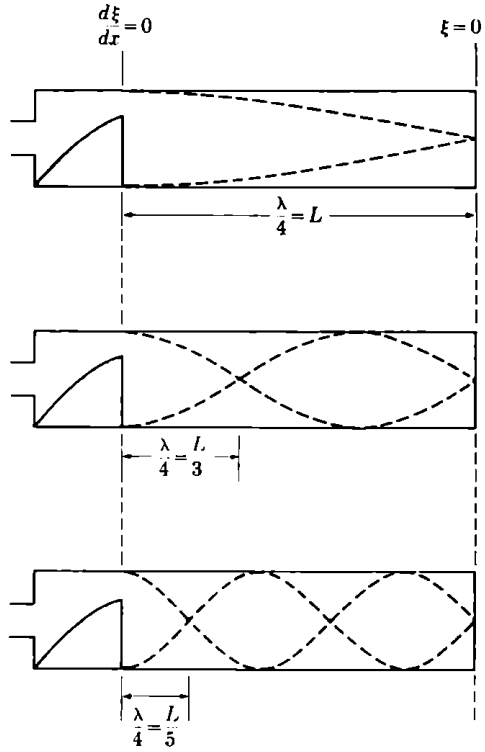


Fig. 22–19. Onde di pressione stazionarie in una colonna d'aria con un estremo chiuso.

Ora, come nel caso della corda, non possiamo porre $B = 0$, perchè allora non avremmo onda alcuna, e la nostra sola scelta è $\sin kL = 0$, che ancora ci dà

ossia

Tale equazione è identica alla (22.33). Le frequenze delle onde stazionarie sono

con $n = 1, 2, 3, \ldots$, e perciò le frequenze permesse sono tutte le armoniche corrispondenti al tono o frequenza fondamentale $\nu_1 = v/2L$. Dall'Eq. (22.31) osserviamo che in tal caso, con $A = 0$, $\xi = B \cos kx \sin \omega t$. In Fig. 22–18 le linee tratteggiate indicano la distribuzione delle ampiezze nei casi $n = 1$, 2, e 3. Ne concludiamo dunque che le oscillazioni di una colonna d'aria aperta ad entrambi gli estremi sono equivalenti a quelle di una corda con entrambi gli estremi fissi, ma le posizioni dei nodi e dei ventri sono scambiate.

Come secondo esempio, consideriamo un tubo chiuso all'estremo opposto all'imboccatura (Fig. 22–19). Le condizioni fisiche in tale estremo sono mutate, mentre nell'imboccatura rimangono le stesse del caso precedente. Perciò

Fig. 22–18. Standing pressure wave in an air column with both ends open.

Fig. 22–19. Standing pressure wave in an air column with one end closed.

Now, as in the case of the string, we cannot make $B = 0$, because then we would have no wave at all, and our only choice is $\sin kL = 0$, which again gives us

$$kL = n\pi \quad \text{or} \quad \lambda = 2L/n. \tag{22.35}$$

This is identical to Eq. (22.33). The frequencies of the standing waves are

$$\nu_n = v/\lambda = n(v/2L) = \nu_1, 2\nu_1, 3\nu_1, \ldots, \tag{22.36}$$

with $n = 1, 2, 3, \ldots$, and therefore the allowed frequencies comprise all the harmonics corresponding to a fundamental tone of frequency $\nu_1 = v/2L$. From Eq. (22.31) we see that in this case, with $A = 0$, $\xi = B \cos kx \sin \omega t$. In Fig. 22–18 the dashed lines indicate the amplitude distribution for the cases $n = 1$, 2, and 3. We conclude then that the oscillations of an air column open at both ends are equivalent to those of a string with both ends fixed, but the positions of the nodes and antinodes are interchanged.

As our second example, let us consider a tube closed at the end opposite to the mouthpiece (Fig. 22–19). The physical conditions at that end have changed, while at the mouthpiece they remain the same as in the preceding case. Therefore at

nell'imboccatura dobbiamo avere ancora un ventre, cioè $\partial\xi/\partial x = 0$ per $x = 0$, ma all'estremo chiuso ($x = L$) dobbiamo avere un nodo, cioè $\xi = 0$ per $x = L$. La prima condizione, in $x = 0$, richiede, come nell'esempio precedente, che sia $A = 0$, cosicchè l'Eq. (22.31) diventa

the mouthpiece we must have again an antinode, or $\partial\xi/\partial x = 0$ at $x = 0$, but at the closed end ($x = L$) we must have a node, or $\xi = 0$ at $x = L$. The first condition, at $x = 0$, requires, as in the previous example, that $A = 0$, so that Eq. (22.31) becomes

$$\xi = B \cos kx \sin \omega t.$$

Applicando la condizione al contorno all'estremo chiuso, $x = L$, otteniamo

Applying the boundary condition at the closed end, $x = L$, we obtain

$$\xi_{(x=L)} = B \cos kL \sin \omega t = 0.$$

Ciò richiede che sia $\cos kL = 0$. In altre parole

This requires that $\cos kL = 0$. In other words,

ossia

$$kL = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{or} \qquad \lambda = \frac{4L}{2n + 1}, \tag{22.37}$$

con la corrispondente frequenza

with the corresponding frequency

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = (2n + 1)\frac{v}{4L} = \nu_1,\ 3\nu_1,\ 5\nu_1,\ \ldots \tag{22.38}$$

I modi di vibrazione sono ora differenti da quelli dati dalle Equazioni (22.35) e (22.36), corrispondenti a un tubo aperto ad entrambi gli estremi. La Fig. 22–19 mostra i nodi e i ventri nel caso aperto-chiuso per $n = 0$, 1, e 2. La caratteristica più importante è che un tubo chiuso ad un estremo può vibrare soltanto con armoniche multiple *dispari* della fondamentale $\nu_1 = v/4L$. A parità di lunghezza, la frequenza fondamentale di un tubo chiuso è metà di quella di un tubo aperto.

The modes of vibration are now different from those given by Eqs. (22.35) and (22.36), corresponding to a tube open at both ends. Figure 22–19 shows the nodes and ventral segments for the open-closed case for $n = 0$, 1, and 2. The most important feature is that a tube closed at one end can vibrate only with *odd* harmonics of the fundamental $\nu_1 = v/4L$. For equal lengths, the fundamental frequency of a closed tube is one-half that of an open tube.

Una soluzione dell'equazione d'onda del tipo (22.31) corrisponde ad un'onda armonica stazionaria di pulsazione ω. In generale, tuttavia, la perturbazione emessa inizialmente non corrisponde a una frequenza particolare. Per poter determinare le lunghezze d'onda e le frequenze interessate, si deve allora fare un'analisi di Fourier della perturbazione iniziale. In un istante successivo qualsiasi, tale perturbazione risulta

A solution of the wave equation of type (22.31) corresponds to a standing harmonic wave of angular frequency ω. In general, however, the disturbance set up initially does not correspond to a particular frequency. In order to determine the wavelengths and frequencies involved, one must then make a Fourier analysis of the initial disturbance. The disturbance at any later time is

$$\xi = \sum_{\omega} (A \sin kx + B \cos kx) \sin \omega t, \tag{22.39}$$

dove $k = \omega/c$ e i coefficienti A e B si determinano mediante l'analisi di Fourier. L'Eq. (22.39) non rappresenta però un'onda stazionaria nel senso definito prima (cioè, un'onda la cui ampiezza dipende dalla posizione) poichè, a causa del segno di sommatoria, le variabili di tempo e di posizione non sono completamente separate.

where $k = \omega/c$ and the coefficients A and B are determined from the Fourier analysis. But Eq. (22.39) does not represent a standing wave in the sense defined before (i.e., a wave whose amplitude depends on the position) because, due to the summation sign, the time and position variables are not completely separated.

ESEMPIO 22.6. Una molla di massa m_0, lunghezza L, e costante elastica κ è sospesa ad un punto fisso e porta sospesa una massa M attaccata alla sua estremità libera. La massa è spostata verticalmente dalla sua posizione di equilibrio e quindi lasciata andare. Determinare la sua frequenza di oscillazione.

EXAMPLE 22.6. A spring of mass m_0, length L, and elastic constanst κ is supended from a fixed point and has a bob of mass M attached to the free end. The bob is displaced vertically from its equilibrium position and then released. Determine its frequency of oscillation.

Soluzione: Questo problema è simile a quello discusso nel Paragrafo 12.3, e saremmo tentati di dire che la pulsazione è $\omega = \sqrt{\kappa/M}$, che è ciò che abbiamo fatto in quell'esempio (qui indichiamo la costante elastica della molla con κ per evitare confusioni con il numero d'onda, indicato con k). Tuttavia troveremo ora che tale frequenza

Solution: This problem is similar to that discussed in Section 12.3, and we would be tempted to say that the angular frequency is $\omega = \sqrt{\kappa/M}$, which is what we did in that example (here we denote the elastic constant of the spring by κ to avoid confusion with the wave number, designated by k). However, now we shall find that this frequency is

è quella esatta soltanto quando la massa della molla è trascurabile rispetto alla massa del pendolo. Dalla Fig. 22–20, osserviamo che quando sospendiamo la massa M, la molla si allunga fino a che la forza verso l'alto che essa produce su M equilibra il peso di M. Se M viene ora posto in oscillazione, nella molla vengono prodotte delle onde, che si muovono su e giù, dando luogo ad onde stazionarie. Le frequenza di oscillazione di M è determinata dalla frequenza delle onde stazionarie prodottesi nella molla. Indichiamo con ξ lo spostamento di ciascuna sezione della molla. La condizione al contorno all'estremo fisso, $x = 0$, è $\xi = 0$. Ciò richiede che sia $B = 0$ nell'Eq. (22.31) cosicchè lo spostamento di ciascuna sezione della molla è dato da

All'estremo libero della molla, M viene accelerato dalla forza della molla allungata, che, in base all'Esempio 18.5, vale $-K(\partial\xi/\partial x)_{x=L}$, dove $K = \kappa L$ è il modulo elastico della molla definito come nell'esempio citato. Il segno meno compare in quanto la direzione positiva della ξ è verso il basso mentre la forza è verso l'alto (cioè negativa) quando $\partial\xi/\partial x$ è positiva. Perciò l'equazione del moto di M è

Tale equazione fornisce le condizioni al contorno all'estremo libero della molla. Essa può essere scritta (usando l'espressione di ξ data precedentemente) come

Ponendo $k = \omega/v$ e ricordando che $m = m_0/L$ è la massa ad unità di lunghezza della molla e $v = \sqrt{K/m}$ in base al risultato ottenuto nell'Esempio 18.5, abbiamo

Figura 22–20

È questa un'equazione del tipo $\theta \tan \theta =$ cost., la quale determina i valori possibili della pulsazione ω. Si tratta di un'equazione trascendente che non può essere risolta con gli ordinari metodi algebrici. Tuttavia, se la molla è molto leggera, cosicchè v risulti molto grande, possiamo usare l'approssimazione $\tan\theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \ldots$, che è valida per θ molto piccolo [vedere Eq. (M.27)]. Il primo membro dell'equazione diviene allora

Ricordando che $K = \kappa L$, e quindi $v = \sqrt{K/m} = L\sqrt{\kappa/m_0}$, abbiamo $\omega L/v = \omega\sqrt{m_0/\kappa}$, cosicchè

ossia

In prima approssimazione, se m_0 è molto piccola, possiamo trascurare il secondo termine dentro alle parentesi, e ne risulta $\omega^2 = \kappa/M$ o $\omega = \sqrt{\kappa/M}$, che è lo stesso valore da noi usato nel

correct only when the mass of the spring is negligible compared with the mass of the bob. From Fig. 22–20, we see that when we hang the bob M, the spring stretches until the upward force it produces on M balances the weight of M. If M is now set into oscillation, waves are produced in the spring, traveling up and down, resulting in standing waves. The frequency of oscillation of M is determined by the frequency of the standing waves produced in the spring. Let us designate the displacement of each section of the spring by ξ. The boundary condition at the fixed end, $x = 0$, is $\xi = 0$. This requires that $B = 0$ in Eq. (22.31) so that the displacement of every section of the spring is given by

$$\xi = A \sin kx \sin \omega t.$$

At the free end of the spring, M is accelerated by the force of the stretched spring, which, according to Example 18.5, is $-K(\partial\xi/\partial x)_{x=L}$, where $K = \kappa L$ is the elastic modulus of the spring, as defined in that example. The negative sign appears because the positive direction for ξ is downward and the force is upward (or negative) when $\partial\xi/\partial x$ is positive. Therefore the equation of motion of M is

$$M\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right)_{x=L} = -K\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)_{x=L}$$

This equation gives the boundary condition at the free end of the spring. The above equation may be written (using the expression for ξ given before) as

$$-M\omega^2 \sin kL = -Kk \cos kL.$$

Setting $k = \omega/v$ and recalling that $m = m_0/L$ is the mass of the spring per unit length and $v = \sqrt{K/m}$ according to the result obtained in Example 18.5, we have

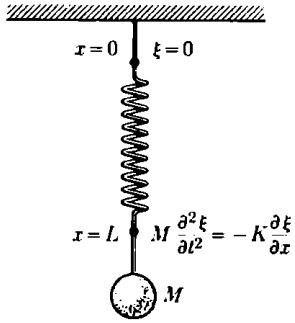


Figure 22–20

$$\frac{\omega L}{v}\tan\frac{\omega L}{v} = \frac{KL}{Mv^2} = \frac{mL}{M} = \frac{m_0}{M}.$$

This is an equation of the type $\theta \tan\theta =$ const, which determines the possible values of the angular frequency ω. It is a transcendental equation and cannot be solved by ordinary algebraic methods. However, when the spring is very light so that v is very large, we may use the approximation $\tan\theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \cdots$, which is valid when θ is very small [see Eq. (M.27)]. Then the left-hand side of the equation becomes

$$\frac{\omega L}{v}\left[\frac{\omega L}{v} + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega L}{v}\right)^3 + \cdots\right] = \left(\frac{\omega L}{v}\right)^2\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega L}{v}\right)^2 + \cdots\right].$$

Recalling that $K = \kappa L$, and thus $v = \sqrt{K/m} = L\sqrt{\kappa/m_0}$, we have $\omega L/v = \omega\sqrt{m_0/\kappa}$, so that

$$\frac{\omega^2 m_0}{\kappa}\left(1 + \frac{\omega^2 m_0}{3\kappa} + \cdots\right) = \frac{m_0}{M}$$

or

$$\omega^2\left(1 + \frac{\omega^2 m_0}{3\kappa} + \cdots\right) = \frac{\kappa}{M}.$$

As a first approximation, if m_0 is very small, we may neglect the second term inside the parentheses, resulting in $\omega^2 = \kappa/M$ or $\omega = \sqrt{\kappa/M}$, which is the value we used in Sec-

Paragrafo 12.3. In seconda approssimazione, introduciamo tale valore di ω nel secondo termine nelle parentesi, ottenendo

ossia

Perciò l'effetto della molla sulla pulsazione ω è equivalente a un aumento della massa del corpo di un terzo della massa della molla. Tale espressione fornisce la frequenza fondamentale; ma, in più, ci sono dei toni superiori che non sono multipli interi di quello fondamentale. (Vedere Problema 22.43.)

22.6 *Onde elettromagnetiche stazionarie*

I fenomeni di interferenza e di diffrazione sono così caratteristici delle onde che la loro presenza è sempre stata accettata dai fisici come una prova conclusiva del fatto che un processo possa essere interpretato come un fenomeno ondulatorio. Per tale motivo, allorchè nel diciassettesimo secolo Young, Grimaldi, ed altri osservarono l'interferenza e la diffrazione nelle loro ricerche sulla luce, la teoria ondulatoria della luce fu accettata generalmente. In quel tempo, le onde elettromagnetiche non erano note, e si presunse che la luce fosse un'onda elastica in un mezzo impalpabile, detto etere, che permeava tutta la materia. Non fu che verso la fine del diciannovesimo secolo che Maxwell predisse l'esistenza delle onde elettromagnetiche, e Hertz, per mezzo di esperimenti di interferenza che davano origine ad onde elettromagnetiche stazionarie, verificò sperimentalmente l'esistenza di onde elettromagnetiche nella regione delle radiofrequenze. Più tardi fu misurata la loro velocità e si trovò che era uguale a quella della luce. E si trovò che anche la riflessione, rifrazione, e polarizzazione delle onde elettromagnetiche sono simili a quelle della luce. La conclusione ovvia fu di identificare la luce con le onde elettromagnetiche di certe frequenze. In quel tempo l'ottica cessò, a tutti i fini e gli effetti, di essere una branca indipendente della fisica e divenne semplicemente un capitolo della teoria elettromagnetica.

Electric field = Campo elettrico
Magnetic field = Campo magnetico
Incident wave = Onda incidente
Reflected wave = Onda riflessa

Fig. 22–21. Onde elettromagnetiche stazionarie prodotte per reflessione su di una superficie conduttrice.

tion 12.3. As a second approximation, we introduce this value of ω in the second term in the parentheses, resulting in

$$\omega^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{m_0}{M}+\cdots\right)=\frac{\kappa}{M} \qquad \text{or} \qquad \omega=\sqrt{\frac{\kappa}{M+\frac{1}{3}m_0}}.$$

Therefore the effect of the spring on the angular frequency ω is equivalent to increasing the mass of the body by one-third the mass of the spring. This expression gives the fundamental frequency; but, in addition, there are overtones that are not integral multiples of the fundamental. (See Problem 22.43.)

22.6 *Standing Electromagnetic Waves*

Interference and diffraction phenomena are so characteristic of waves that their presence has always been accepted by physicists as conclusive proof that a process can be interpreted as a wave motion. For that reason, when in the seventeenth century Young, Grimaldi, and others observed interference and diffraction in their research on light, the wave theory of light became generally accepted. At that time electromagnetic waves were not known, and light was assumed to be an elastic wave in a subtle medium, called ether, that pervaded all matter. It was not until the end of the nineteenth century that Maxwell predicted the existence of electromagnetic waves, and Hertz, by means of interference experiments which gave rise to standing electromagnetic waves, experimentally verified the existence of electromagnetic waves in the radiofrequency range. Later their velocity was measured and found to be equal to that of light. The reflection, refraction, and polarization of electromagnetic waves was also found to be similar to those of light. The obvious conclusion was to identify light with electromagnetic waves of certain frequencies. At that time optics, to all intents and purposes, ceased to be an independent branch of physics and became simply a chapter of electromagnetic theory.

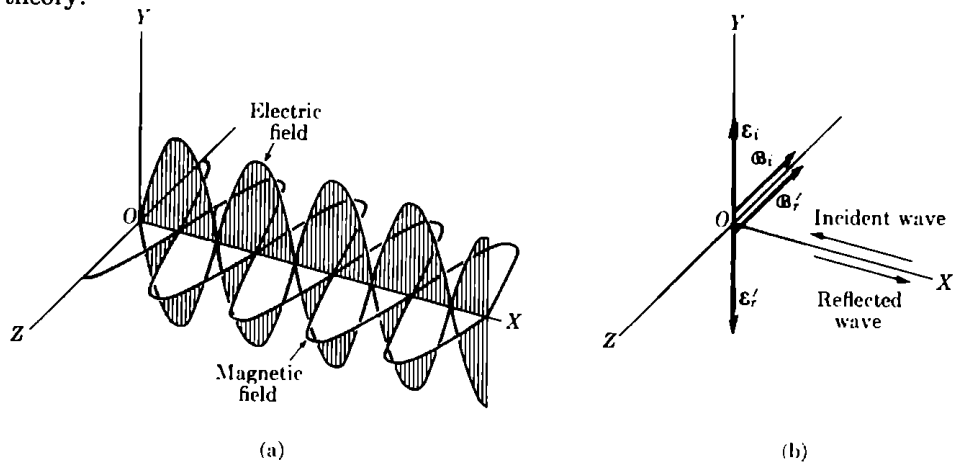


Fig. 22–21. Standing electromagnetic waves produced by reflection from a conducting surface.

Per comprendere la formazione di onde elettromagnetiche stazionarie, supponiamo che le onde prodotte da un dipolo elettrico oscillante incidano perpendicolarmente sulla superficie piana di un conduttore perfetto (Fig. 22–21). Scegliendo l'asse X come direzione di propagazione, e gli assi Y e Z paralleli ai campi elettrico e magnetico, rispettivamente, abbiamo un'onda polarizzata in un piano, con il campo elettrico che oscilla nel piano XY. Il campo elettrico è dunque parallelo alla superficie del conduttore. Ma sulla superficie di un conduttore perfetto, il campo elettrico dev'essere perpendicolare al conduttore stesso; cioè, il campo elettrico non può avere componenti tangenziali (vedi Paragrafo 16.5). L'unico modo per rendere tale condizione compatibile con l'orientazione del campo elettrico dell'onda incidente è richiedere che il campo elettrico risultante $\mathcal{E}$ sia nullo sulla superficie del conduttore. Ciò significa che il campo elettrico dell'onda riflessa sulla superficie del conduttore dev'essere uguale e opposto a quello dell'onda incidente, dando così $\mathcal{E} = 0$ per $x = 0$. Tale condizione è equivalente, dal punto di vista matematico, alla condizione per la riflessione delle onde in una corda con un estremo fisso, discussa nel Paragrafo 22.5. Poichè la formulazione matematica è la stessa, possiamo usare l'Eq. (22.20) per scrivere un'espressione per il campo elettrico risultante,

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 \sin kx \sin \omega t.$$

Il campo magnetico oscilla nel piano XZ. Usando l'Eq. (19.4), troviamo che il campo magnetico è espresso da

$$\mathcal{B} = 2\mathcal{B}_0 \cos kx \cos \omega t,$$

con $\mathcal{B}_0 = \mathcal{E}_0 k/\omega = \mathcal{E}_0/c$. Perciò c'è una differenza di fase di $\frac{1}{2}\lambda$ nella dipendenza spaziale e di $\frac{1}{2}P$ nella dipendenza del tempo dei due campi. Dall'espressione matematica per $\mathcal{B}$, osserviamo che il campo magnetico ha la massima ampiezza sulla superficie. Ciò si può vedere anche dalle condizioni al contorno sulla superficie: facendo riferimento alla Fig. 22–21(b), osserviamo che se il campo elettrico dell'onda incidente è diretto lungo l'asse Y nel verso positivo, il campo magnetico dev'essere diretto lungo l'asse Z nel verso negativo, secondo la orientazione relativa dei due campi rispetto alla direzione di propagazione delle onde incidenti, che è lungo l'asse X nel verso negativo. Affinchè sulla superficie si abbia un campo elettrico risultante nullo, il campo elettrico dell'onda riflessa dev'essere diretto lungo l'asse Y nel verso negativo, e dato che l'onda riflessa si propaga lungo l'asse X, il campo magnetico dev'essere diretto lungo l'asse Z nel verso negativo. Così, benchè i campi elettrici interferiscano distruttivamente sulla superficie, i campi magnetici vi interferiscono costruttivamente.

Le ampiezze dei campi elettrico e magnetico dell'onda risultante ad una distanza x dalla superficie sono $2\mathcal{E}_0 \sin kx$ e $2\mathcal{B}_0 \cos kx$. Esse sono rappresentate dalle curve ombreggiate della Fig. 22–21(a). Nei punti in cui $kx = n\pi$, cioè $x = \frac{1}{2}n\lambda$, il campo elettrico è nullo e il campo magnetico è massimo. Nei punti in cui $kx = (n + \frac{1}{2})\pi$, cioè $x = (2n + 1)\lambda/4$, il campo elettrico ha il valore massimo mentre il campo magnetico è nullo.

È istruttivo vedere come Heinrich Hertz, nel 1888, con le sue apparecchiature rudimentali, verificò tali previsioni teoriche. Sul lato sinistro

To understand the formation of standing electromagnetic waves, assume that the waves produced by an oscillating electric dipole are falling with perpendicular incidence on the plane surface of a perfect conductor (Fig. 22–21). Taking the X-axis as the direction of propagation and the Y- and Z-axes as being parallel to the electric and the magnetic fields, respectively, we have a wave that is plane polarized, with the electric field oscillating in the XY-plane. The electric field is then parallel to the surface of the conductor. But at the surface of a perfect conductor the electric field must be perpendicular to the conductor; that is, the electric field cannot have a tangential component (see Section 16.5). The only way to make this condition compatible with the orientation of the electric field in the incident wave is by requiring that the resultant electric field $\mathcal{E}$ be zero at the surface of the conductor. This means that the electric field of the reflected wave at the surface must be equal and opposite to that of the incident wave, thus giving $\mathcal{E} = 0$ for $x = 0$. This condition is mathematically equivalent to the condition for the reflection of waves in a string with one end fixed, discussed in Section 22.5. Since the mathematics is the same, we may use Eq. (22.20) to write an expression for the resultant electric field,

The magnetic field oscillates in the XZ-plane. Using Eq. (19.4), we find that the magnetic field is expressed by

with $\mathcal{B}_0 = \mathcal{E}_0 k/\omega = \mathcal{E}_0/c$. Therefore there is a phase difference of $\frac{1}{2}\lambda$ in the space variations and of $\frac{1}{2}P$ in the time variations of the two fields. From the mathematical expression for $\mathcal{B}$, note that the magnetic field has maximum amplitude at the surface. This can also be seen from the boundary condition at the surface: referring to Fig. 22–21(b), we see that if the electric field of the incident wave is along the $+Y$-axis, the magnetic field must be along the $-Z$-axis, according to the relative orientation of the two fields with respect to the direction of propagation of the incident waves, which is along the $-X$-axis. For a zero resultant electric field to exist at the surface, the electric field of the reflected wave must be along the $-Y$-axis, and since the reflected wave propagates along the X-axis, the magnetic field must be along the $-Z$-axis. Thus, although the electric fields interfere destructively at the surface, the magnetic fields interfere constructively there.

The amplitudes of the electric and magnetic fields of the resulting wave at a distance x from the surface are $2\mathcal{E}_0 \sin kx$ and $2\mathcal{B}_0 \cos kx$. They are denoted by the shaded lines in Fig. 22–21(a). At the points where $kx = n\pi$ or $x = \frac{1}{2}n\lambda$, the electric field is zero and the magnetic field is maximum. At the points where $kx = (n + \frac{1}{2})\pi$ or $x = (2n + 1)\lambda/4$, the electric field has a maximum value but the magnetic field is zero.

It is instructive to see how Heinrich Hertz, in 1888, with his primitive equipment, verified these theoretical predictions. Hertz' oscillator is shown on the left

Reflecting surface = Superficie riflettente

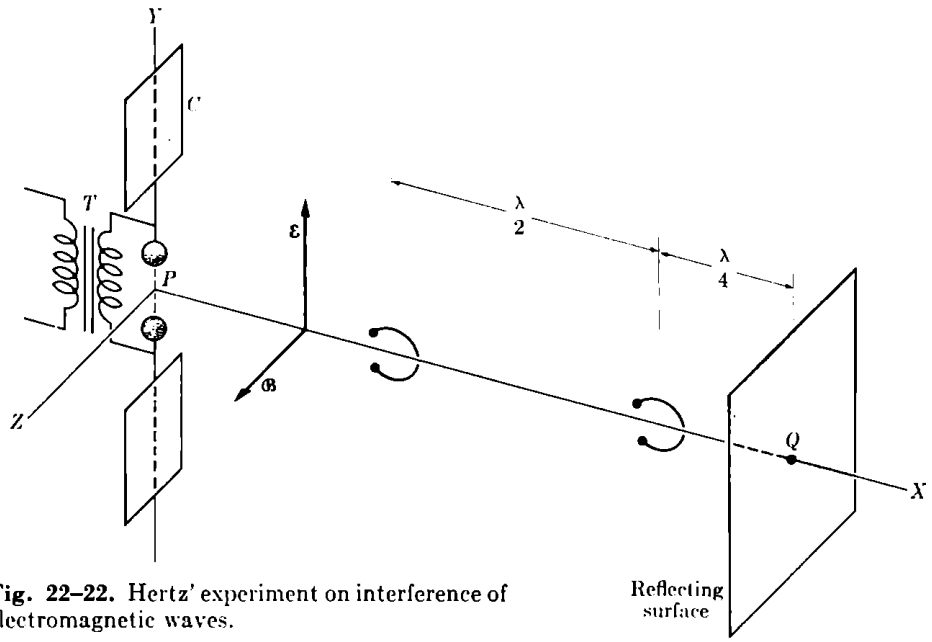


Fig. 22–22. Esperimento di Hertz sull'interferenza delle onde elettromagnetiche.

Fig. 22–22. Hertz' experiment on interference of electromagnetic waves.

della Fig. 22–22 è mostrato l'oscillatore di Hertz. Il trasformatore T carica le lamine metalliche C e C'. Tali armature si scaricano attraverso lo spazio P che diventa il dipolo oscillante. Sono anche indicate le direzioni dei campi $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{B}$. Per rivelare le onde, Hertz usò un corto filo piegato a forma di anello, ma con un piccolo taglio. Si dice che tale dispositivo è un *risuonatore*. Il diametro del risuonatore usato in questo genere di esperimento dev'essere molto piccolo rispetto alla lunghezza d'onda delle onde. Se il risuonatore è disposto con il suo piano perpendicolare al campo magnetico dell'onda, il campo magnetico stesso, variando, induce una fem nel risuonatore, e ne risulta una scintilla ai suoi estremi. D'altra parte, se il piano del risuonatore è parallelo al campo magnetico, non vi è fem indotta e non si osservano scintille nel taglio.

Per produrre onde elettromagnetiche stazionarie, Hertz dispose una superficie riflettente (fatta di un buon conduttore) in Q. In tal caso, quando il risuonatore è in un nodo del campo magnetico, qualunque sia la sua orientazione, non rivelerà fem indotte (nè scintille). In un ventre del campo magnetico, tuttavia, la produzione di scintille è massima quando il risuonatore è orientato perpendicolarmente al campo magnetico. Muovendo il risuonatore lungo la linea PQ, Hertz trovò la posizione dei nodi e dei ventri e la direzione del campo magnetico. I risultati ottenuti da Hertz coincidevano con l'analisi teorica che abbiamo fornita. Misurando la distanza fra due nodi successivi, Hertz potè calcolare la lunghezza d'onda λ, e dato che conosceva la frequenza ν dell'oscillatore, potè calcolare la velocità c delle onde elettromagnetiche usando l'equazione $c = \lambda\nu$. Fu con questi mezzi che Hertz ottenne il primo valore sperimentale per la velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche.

in Fig. 22–22. The transformer T charges the metallic plates C and C'. These plates discharge through the gap P which becomes the dipole oscillator. The directions of the $\mathfrak{E}$- and $\mathfrak{B}$-fields are also shown. To observe the waves, Hertz used a short wire, bent in circular shape, but with a small gap. This device is called a *resonator*. The diameter of the resonator used in this kind of experiment must be very small compared with the wavelength of the waves. If the resonator is placed with its plane perpendicular to the magnetic field of the wave, the varying magnetic field induces an emf in the resonator, resulting in sparks at its gap. On the other hand, if the plane of the resonator is parallel to the magnetic field, no emf is induced and no sparks are observed at the gap.

To produce standing electromagnetic waves, Hertz placed a reflecting surface (made of a good conductor) at Q. In such a case, when the resonator is at a node of the magnetic field, no matter what its orientation, it will show no induced emf (or sparks). At an antinode of the magnetic field, however, the sparking is greatest when the resonator is oriented perpendicular to the magnetic field. By moving the resonator along the line PQ, Hertz found the position of the nodes and antinodes and the direction of the magnetic field. The results obtained by Hertz coincided with the theoretical analysis we have given. By measuring the distance between two successive nodes, Hertz could calculate the wavelength λ, and since he knew the frequency ν of the oscillator, he could calculate the velocity c of the electromagnetic waves by using the equation $c = \lambda\nu$. It was by this means that Hertz obtained the first experimental value for the velocity of propagation of electromagnetic waves.

22.7 *Onde stazionarie in due dimensioni*

Consideriamo ora una membrana rettangolare tesa su di un telaio in modo tale che i suoi bordi siano fissi. Se la superficie della membrana viene sollecitata, si producono delle onde, le quali si propagano in tutte le direzioni e vengono riflesse ai bordi, dando luogo a interferenza. Consideriamo il caso particolare in cui nella membrana siano generate soltanto onde piane di un'unica frequenza. Supponiamo inoltre che tali onde si propaghino parallelamente ad uno dei due lati, come è indicato in Fig. 22—23. Invece di nodi e ventri otteniamo linee nodali e antinodali o ventrali, indicate nella Fig. 22—23 con n e v. Nella Fig. 22—23(a), la membrana è fissata a sinistra ($x = 0$) e a destra ($x = a$), ma gli altri due lati sono liberi. Le onde si propagano lungo l'asse X sia verso sinistra sia verso destra, dando luogo a un sistema di linee nodali e antinodali parallele all'asse Y. In $x = 0$ e $x = a$, dobbiamo avere linee nodali. Perciò la condizione per onde stazionarie è simile all'Eq. (22.33); cioè

ossia

Le frequenze corrispondenti sono

dove v è la velocità di propagazione delle onde lungo la superficie della membrana come data nell'Esempio 18.12. Tali onde sono descritte da un'espressione simile all'Eq. (22.32),

dato che il problema dal punto di vista matematico è identico. L'aggiunta della seconda dimensione non ha cambiato le nostre condizioni al contorno, che sono ancora $\xi = 0$ per $x = 0$

Direction of propagation = Direzione di propagazione

22.7 *Standing Waves in Two Dimensions*

Let us now consider a rectangular membrane stretched over a frame so that its edges are fixed. If the surface of the membrane is disturbed, waves are produced, which propagate in all directions and are reflected at the edges, resulting in interference. Consider the special case when plane waves of only one frequency are generated in the membrane. Assume further that these waves propagate parallel to either side, as indicated in Fig. 22–23. Instead of nodes and antinodes we get nodal lines and antinodal or ventral lines, designated by n and v in Fig. 22–23. In Fig. 22–23(a), the membrane is fixed at the left ($x = 0$) and the right ($x = a$), but the other two sides are free. The waves propagate along the X-axis, both to the left and to the right, resulting in a system of nodal and antinodal lines parallel to the Y-axis. At $x = 0$ and $x = a$ we must have nodal lines. Therefore the condition for standing waves is similar to Eq. (22.33); that is,

$$ka = n\pi \quad \text{or} \quad \lambda = 2a/n. \tag{22.40}$$

The corresponding frequencies are

$$\nu = v/\lambda = n(v/2a), \tag{22.41}$$

where v is the velocity of propagation of the waves along the surface of the membrane, as given in Example 18.12. These waves are described by an expression similar to Eq. (22.32),

$$\xi = A \sin kx \sin \omega t, \tag{22.42}$$

since the problem is mathematically the same. The addition of the second dimension has not changed our boundary conditions, which are still $\xi = 0$ for $x = 0$

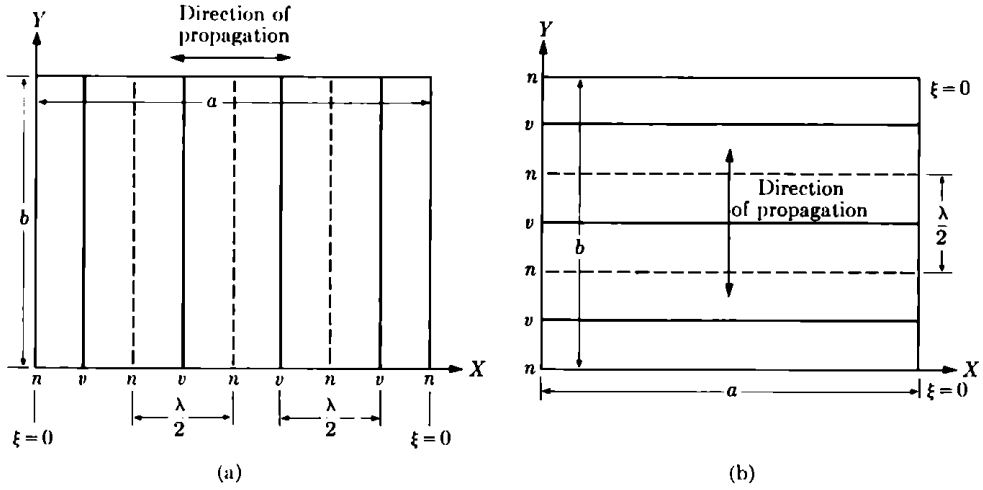


Fig. 22–23. Onde stazionarie su di un membrana.

Fig. 22–23. Standing waves on a membrane.

e $x = a$. La simmetria suggerisce che la coordinata y non gioca alcun ruolo, fintantochè la membrana non sia fissata lungo i lati paralleli alla direzione di propagazione.

In Fig. 22—23(b) la membrana è fissata in basso ($y = 0$) e in alto ($y = b$). Per le onde che si propagano parallelamente all'asse Y le linee nodali e antinodali sono parallele all'asse X. La condizione perchè si realizzino onde stazionarie è simile all'Eq. (22.40), con a sostituito da b, e fornisce

ossia

con frequenze

che sono differenti da quelle date dall'Eq. (22.41) per onde parallele all'asse X. L'equazione delle onde stazionarie è

Fig. 22–24. Riflessioni successive di un'onda su di una membrana rettangolare.

Consideriamo successivamente una membrana con tutti e quattro i lati fissi e delle onde piane che si muovono in una direzione arbitraria lungo la sua superficie. Innanzitutto, ricordiamo che un'onda piana in due dimensioni, ponendo $z = 0$ nell'Eq. (18.46), è espressa da

dove abbiamo seguito la nostra convenzione attuale di scrivere per primo il fattore di tempo. Le quantità k_1 e k_2 sono le componenti di un vettore $\boldsymbol{k}$ parallelo alla direzione di propagazione nel piano XY e di lunghezza $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$. Quindi

Per un raggio iniziale PQ (Fig. 22—24), caratterizzato dalle componenti k_1, k_2, si ha un raggio riflesso QR caratterizzato da k_1, $-k_2$. Da R a S il raggio è caratterizzato da $-k_1$, $-k_2$. E da S in poi, il raggio è caratterizzato dalle componenti $-k_1, k_2$. Nelle riflessioni successive di tale raggio, non compare alcuna nuova combinazione di k_1 e k_2. Ne concludiamo dunque che lungo la membrana c'è un sistema di quattro onde, dovute alle riflessioni sui quattro lati. (Questo è differente dal problema ad una sola dimensione, in cui compaiono soltanto due onde.) Queste quattro onde devono interferire in modo tale che per $x = 0$ e a, e $y = 0$ e b, il valore risultante di ξ sia nullo. Un calcolo algebrico diretto dimostra (come vedremo nell'Esempio 22.7) che i valori di k_1 e k_2 soddisfano alle condizioni

ossia

e

ossia

and $x = a$. Symmetry suggests that the coordinate y plays no role, so long as the membrane is not fixed along the sides parallel to the direction of propagation.

In Fig. 22-23(b) the membrane is fixed at the bottom ($y = 0$) and at the top ($y = b$). For waves propagating parallel to the Y-axis the nodal and antinodal lines are parallel to the X-axis. The condition for standing waves is similar to Eq. (22.40), with a replaced by b, yielding

$$kb = n\pi \quad \text{or} \quad \lambda = 2b/n, \tag{22.43}$$

with frequencies

$$\nu = v/\lambda = n(v/2b), \tag{22.44}$$

which are different from those given in Eq. (22.41) for waves parallel to the X-axis. The equation of the standing waves is

$$\xi = A \sin ky \sin \omega t.$$

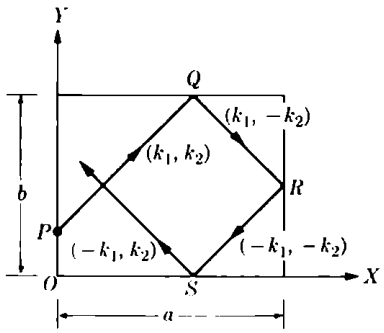


Fig. 22–24. Successive reflections of a wave in a rectangular membrane.

Next let us consider a membrane with all four sides fixed and plane waves traveling in an arbitrary direction along its surface. First we recall that a plane wave in two dimensions, making $z = 0$ in Eq. (18.46), is expressed by

$$\xi = \xi_0 \sin [\omega t - (k_1 x + k_2 y)],$$

where we have followed our present convention of writing the time factor first. The quantities k_1 and k_2 are the components of a vector $\boldsymbol{k}$ parallel to the direction of propagation in the XY-plane and of length $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$. Then

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \tag{22.45}$$

For an initial ray PQ (Fig. 22-24), characterized by the components k_1, k_2, there is a reflected ray QR characterized by k_1, $-k_2$. From R to S the ray is characterized by $-k_1$, $-k_2$. And from S on, the ray is characterized by the components $-k_1$, k_2. In the successive reflections of this ray, no new combinations of k_1 and k_2 appear. We conclude then that along the membrane there is a system of four waves, due to reflection at the four sides. (This is different from one-dimensional problems, in which only two waves appear.) These four waves must interfere in such a way that at $x = 0$ and a, and $y = 0$ and b, the resultant value of ξ is zero. A direct algebraic procedure shows (as we shall see in Example 22.7) that the values of k_1 and k_2 satisfy the conditions

$$k_1 a = n_1 \pi \quad \text{or} \quad k_1 = \frac{n_1 \pi}{a},$$

and (22.46)

$$k_2 b = n_2 \pi \quad \text{or} \quad k_2 = \frac{n_2 \pi}{b},$$

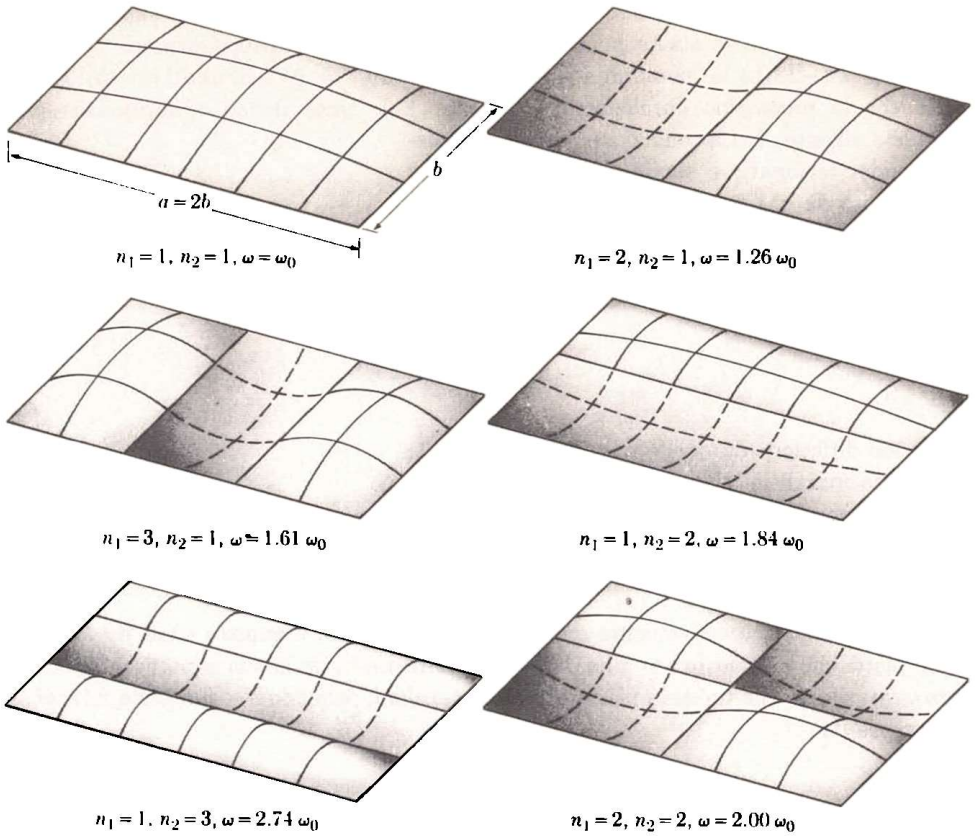


Fig. 22–25. Alcuni fra i primi modi di vibrazione di una membrana rettangolare, con l'indicazione delle linee nodali. La frequenza di ciascun modo è data in funzione della frequenza fondamentale $\omega_0 = \pi v/b$.

dove n_1 e n_2 sono numeri interi. In base all'Eq. (22.45), abbiamo dunque

e per le frequenze possibili, abbiamo

Si può osservare che ora le frequenze possibili non sono più multipli interi di una frequenza fondamentale, ma seguono una legge meno regolare. Le lunghezze d'onda possibili sono date da

Fig. 22–25. First few modes of vibration of a rectangular membrane, showing nodal lines. The frequency of each mode is given in terms of the fundamental frequency $\omega_0 = \pi v/b$.

where n_1 and n_2 are integers. Then, by Eq. (22.45), we have

$$k = \pi\sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}, \tag{22.47}$$

and for the possible frequencies we have

$$\nu = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}. \tag{22.48}$$

We may note now that the possible frequencies are no longer integers of a fundamental frequency, but follow a more irregular sequence. The possible wavelengths are given by

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}}. \tag{22.49}$$

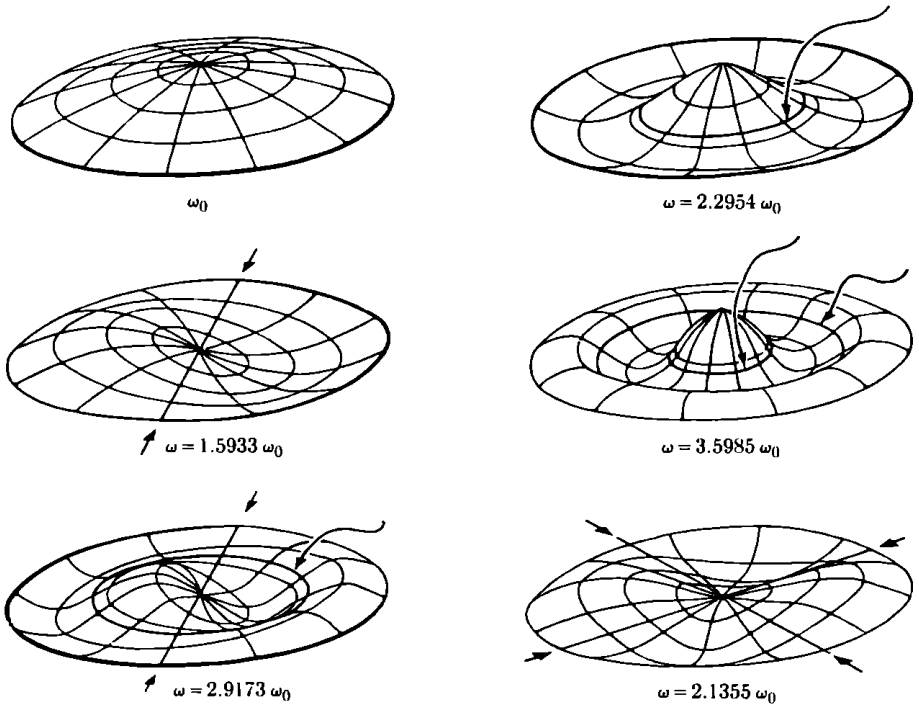


Fig. 22–26. Alcuni modi di vibrazione possibili di una membrana circolare. Le linee nodali sono indicate con delle frecce. La frequenza di ciascun modo è data in funzione della frequenza fondamentale ω_0.

Fig. 22–26. Some possible modes of vibration of a circular membrane. Nodal lines are indicated by arrows. The frequency of each mode is given in terms of the fundamental frequency ω_0.

La disposizione delle linee nodali, ottenuta mediante l'uso dell'Eq. (22.49), è data da $k_1x = n_1'\pi$ e $k_2y = n_2'\pi$, dove n_1' e n_2' sono numeri interi minori di n_1 e n_2, rispettivamente, e forma i tracciati rettangolari mostrati in Fig. 22–25.

Il problema di una membrana circolare è matematicamente più complicato; tuttavia, una volta di più troviamo che soltanto certe frequenze sono possibili. La simmetria suggerisce che le linee nodali sono ora circonferenze e raggi, come è rappresentato in Fig. 22–26 per alcuni dei modi possibili.

ESEMPIO 22.7. Ricavare le condizioni (22.46).

Soluzione: Abbiamo fatto vedere che su di una membrana c'è una sovrapposizione di quattro onde corrispondenti alle quattro possibili combinazioni di $\pm k_1$ e $\pm k_2$. Il sistema delle quattro onde dà una ξ risultante, secondo la

che è l'equivalente dell'Eq. (22.19) per una sola dimensione. Ora in tutti i punti per cui $x = 0$,

The pattern of nodal lines, obtained by use of Eq. (22.49), is given by $k_1x = n_1'\pi$ and $k_2y = n_2'\pi$, where n_1' and n_2' are integers smaller than n_1 and n_2, respectively, and form the rectangular patterns shown in Fig. 22–25.

The problem of a circular membrane is more complex mathematically; however, once more we find that only certain frequencies are possible. Symmetry suggests that the nodal lines are now circles and radii, as indicated in Fig. 22–26 for some of the possible modes.

EXAMPLE 22.7. Derive conditions (22.46).

Solution: We have indicated that on the membrane there is a superposition of four waves corresponding to the four possible combinations of $\pm k_1$ and $\pm k_2$. The system of four waves gives a resultant ξ, according to

$$\begin{aligned}\xi = \quad & \xi_0 \sin[\omega t - (k_1x + k_2y)] \\ & + \xi_0' \sin[\omega t - (k_1x - k_2y)] \\ & + \xi_0'' \sin[\omega t - (-k_1x - k_2y)] \\ & + \xi_0''' \sin[\omega t - (-k_1x + k_2y)],\end{aligned} \tag{22.50}$$

which is the equivalent of Eq. (22.19) for one dimension. Now at all points where $x = 0$,

dobbiamo avere $\xi = 0$. Sostituendo $x = 0$ nell'Eq. (22.50) e raggruppando i termini equivalenti, possiamo scrivere

la quale richiede che sia

Analogamente, in tutti i punti per cui $y = 0$, dobbiamo avere $\xi = 0$, cosicchè l'Eq. (22.50) fornisce

la quale richiede che sia

Combinando le Equazioni (22.51) e (22.52), troviamo la

che dà il cambiamento di fase appropriato a ciascuna riflessione, in accordo con il risultato analogo nel caso della corda. Perciò l'Eq. (22.50) diventa

Trasformando ciascuna delle due righe della formula precedente in un prodotto, mediante l'Eq. (M.12), abbiamo

Trasformando ancora la differenza dei due coseni in un prodotto, otteniamo

che è l'equivalente in due dimensioni dell'Eq. (22.20). Il segno meno davanti è irrilevante e non ha alcun significato particolare. Possiamo verificare la nostra prima condizione al contorno ponendo $x = 0$ oppure $y = 0$, e osservando che si ottiene $\xi = 0$, che è quanto si richiedeva.

Dobbiamo ora provare il secondo insieme di condizioni al contorno; cioè, $\xi = 0$ per $x = a$ o $y = b$. Tali condizioni impongono che sia o $\sin k_1 a = 0$, oppure $\sin k_2 b = 0$, da cui consegue $k_1 a = n_1 \pi$ e $k_2 b = n_2 \pi$. E queste sono le condizioni (22.46).

22.8 *Onde stazionarie in tre dimensioni; cavità risonanti*

Il problema delle onde stazionarie in tre dimensioni è una semplice estensione del caso a due dimensioni. Consideriamo una cavità rettangolare di lati a, b, e c, che abbia pareti perfettamente riflettenti (Fig. 22–27) cosicchè sia $\xi = 0$ su tutte e sei le facce. Un'onda piana nello spazio è caratterizzata da un vettore $\boldsymbol{k}$, perpendicolare al piano dell'onda, con tre componenti, k_1, k_2, e k_3, lungo i tre assi. Quando un'onda viene prodotta

we must have $\xi = 0$. Setting $x = 0$ in Eq. (22.50) and grouping equivalent terms, we may write

$$\xi = (\xi_0 + \xi_0''') \sin(\omega t - k_2 y) + (\xi_0' + \xi_0'') \sin(\omega t + k_2 y) = 0,$$

which requires that

$$\xi_0 + \xi_0''' = 0, \qquad \xi_0' + \xi_0'' = 0. \tag{22.51}$$

Similarly, at all points where $y = 0$, we must have $\xi = 0$, so that Eq. (22.50) yields

$$\xi = (\xi_0 + \xi_0') \sin(\omega t - k_1 x) + (\xi_0'' + \xi_0''') \sin(\omega t + k_1 x) = 0,$$

which requires that

$$\xi_0 + \xi_0' = 0, \qquad \xi_0'' + \xi_0''' = 0. \tag{22.52}$$

Combining Eqs. (22.51) and (22.52), we find that

$$\xi_0 = -\xi_0' = \xi_0'' = -\xi_0''',$$

which gives the appropriate phase changes at each reflection, in agreement with the similar result in the case of a string. Therefore Eq. (22.50) becomes

$$\begin{aligned}\xi = \xi_0 \{ &\sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] - \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)] \\ &+ \sin[\omega t - (-k_1 x - k_2 y)] - \sin[\omega t - (-k_1 x + k_2 y)]\}.\end{aligned}$$

Transforming each line of the above formula into a product, using Eq. (M.12), we have

$$\begin{aligned}\xi &= 2\xi_0[-\sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x) + \sin k_2 y \cos(\omega t + k_1 x)] \\ &= 2\xi_0 \sin k_2 y[-\cos(\omega t - k_1 x) + \cos(\omega t + k_1 x)].\end{aligned}$$

Again transforming the difference of the two cosines into a product, we obtain

$$\xi = -4\xi_0 \sin k_1 x \sin k_2 y \sin \omega t, \tag{22.53}$$

which is the two-dimensional equivalent of Eq. (22.20). The minus sign in front is irrelevant and has no special meaning. We may check our first boundary condition by setting $x = 0$ or $y = 0$, and observing that we get $\xi = 0$, which was our requirement.

We must now verify the second set of boundary conditions; that is, $\xi = 0$ for $x = a$ or $y = b$. These conditions require that either $\sin k_1 a = 0$ or $\sin k_2 b = 0$, resulting in $k_1 a = n_1 \pi$ and $k_2 b = n_2 \pi$. These are the conditions (22.46).

22.8 *Standing Waves in Three Dimensions; Resonating Cavities*

The problem of standing waves in three dimensions is a simple extension of the case for two dimensions. Consider a rectangular cavity of sides a, b, and c, which has perfectly reflecting walls (Fig. 22–27) so that $\xi = 0$ at all six faces. A plane wave in space is characterized by a vector $\boldsymbol{k}$, perpendicular to the plane of the wave, with three components, k_1, k_2, and k_3, along the three axes. When a wave is pro-

all'interno della cavità, essa viene riflessa successivamente da tutte e sei le facce, e ne risulta stabilito un insieme di otto onde, derivanti da tutte le possibili combinazioni differenti fra $\pm k_1$, $\pm k_2$, e $\pm k_3$. L'interferenza o sovrapposizione di queste otto onde dà origine a onde stazionarie se le componenti k_1, k_2, e k_3 di $\boldsymbol{k}$ hanno valori appropriati. In analogia con l'Eq. (22.46), tali valori sono

ossia

$$k_1 a = n_1 \pi, \qquad k_2 b = n_2 \pi, \qquad k_3 c = n_3 \pi,$$

o

$$k_1 = n_1 \pi / a, \qquad k_2 = n_2 \pi / b, \qquad k_3 = n_3 \pi / c, \tag{22.54}$$

dove n_1, n_2, e n_3 sono numeri interi. Dato che $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$, possiamo scrivere

$$k = \pi \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}}, \tag{22.55}$$

e le frequenze possibili delle onde stazionarie nella cavità sono

$$\nu = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}}. \tag{22.56}$$

Una cavità come quella rappresentata in Fig. 22–27 perciò risuonerà, intrattenendo onde stazionarie delle frequenze date dall'Eq. (22.56).

Figura 22–27

Nel caso di una cavità sferica o cilindrica, la trattazione matematica è più complicata, ma ancora troviamo che solo certe frequenze sono permesse.

I risultati che abbiamo ottenuto per le onde stazionarie delle cavità trovano molte applicazioni. In acustica, per esempio, le cavità risonanti vengono usate per l'analisi dei suoni. Le cavità risonanti per onde elettromagnetiche hanno pareti fatte di materiali che sono buoni conduttori elettrici, cosicchè le pareti stesse siano i migliori riflettori possibili. Tali cavità possono intrattenere onde elettromagnetiche stazionarie di frequenza definita, con una piccolissima attenuazione delle onde dovuta a perdite di energia per riflessione. Ciò significa che le cavità servono come zone di immagazzinamento di energia elettromagnetica. La teoria dettagliata delle onde elettromagnetiche stazionarie nelle cavità è leggermente più complicata di quanto la nostra discussione qui indichi, a causa del carattere trasversale delle onde. Ma i risultati come ad esempio l'Eq. (22.56) rimangono gli stessi. Tali cavità vengono usate per l'analisi o la misura delle frequenze (nello stesso modo dei risuonatori acustici), per il controllo della frequenza in circuiti oscillanti e per misurare le proprietà del materiale che riempie la cavità.

ESEMPIO 22.8. Determinare il numero di modi di oscillazione differenti, in una cavità cubica di lati a, di frequenza uguale o più piccola di ν.

duced inside the cavity, it is reflected successively at all faces, and a set of eight waves, resulting from all the different combinations possible among $\pm k_1$, $\pm k_2$, and $\pm k_3$, is established. The interference or superposition of these eight waves gives rise to standing waves if the k_1, k_2, and k_3 components of $\boldsymbol{k}$ have the appropriate values. By analogy with Eq. (22.46), these values are

where n_1, n_2, and n_3 are integers. Since $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$, we may write

and the possible frequencies of the standing waves in the cavity are

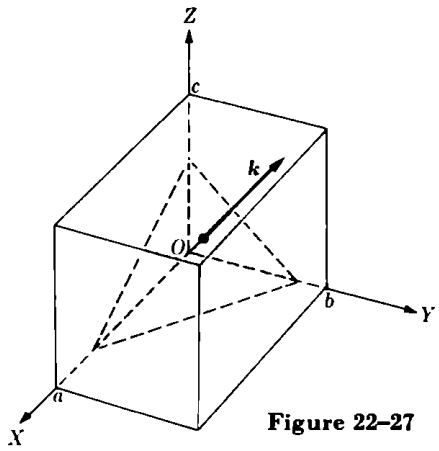


Figure 22–27

A cavity such as the one shown in Fig. 22–27 will therefore resonate, sustaining standing waves for the frequencies given by Eq. (22.56).

In the case of a spherical or cylindrical cavity, the mathematical treatment is more complex, but again we find that only certain frequencies are allowed.

The results we have obtained for standing waves in cavities find many applications. In acoustics, for example, resonating cavities are used for sound analysis. Resonating cavities for electromagnetic waves have walls made of materials which are good electrical conductors, so that the walls are the best possible reflectors. These cavities can sustain standing electromagnetic waves of definite frequencies with very little attenuation of the waves through energy loss by reflection. This means that the cavities serve as storage spaces for electromagnetic energy. The detailed theory of electromagnetic standing waves in cavities is slightly more complicated than our discussion here indicates, because of the transverse character of the waves. But results such as Eq. (22.56) remain the same. Such cavities are used for frequency measurement or analysis (in the same manner as acoustical resonators), for frequency control in oscillating circuits, and for measuring the properties of the material filling the cavity.

EXAMPLE 22.8. Determine the number of different modes of oscillation of frequency equal to or smaller than ν in a cubical cavity of side a.

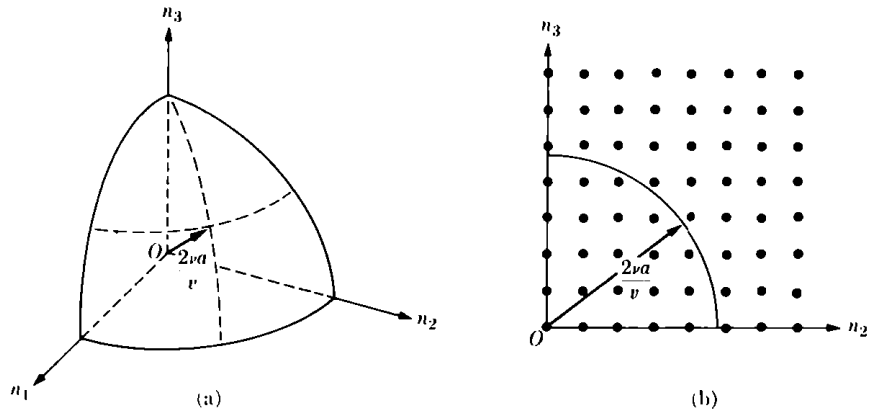


Figura 22–28

Soluzione: Se la cavità è cubica, $a = b = c$ nell'Eq. (22.56), e le frequenze possibili sono

ossia

In un sistema di riferimento in cui le coordinate sono n_1, n_2, e n_3 (Fig. 22–28), l'Eq. (22.57) rappresenta una sfera di raggio $2\nu a/v$. Il nostro problema è di trovare tutte le combinazioni possibili dei numeri interi n_1, n_2, e n_3 che soddisfino la

Se il raggio è molto grande, tale numero di combinazioni possibili è uguale al volume dell'ottante di sfera disegnato in Fig. 22–28(a), in quanto a ciascun insieme di numeri interi n_1, n_2, e n_3, possiamo associare una cella di volume unitario, come è indicato dai punti in Fig. 22–28(b). Il numero di modi di oscillazione di frequenza minore o uguale a ν è dunque

Essendo a^3 il volume della cavità, il numero di modi per unità di volume è, se dividiamo per a^3,

L'indice L è stato aggiunto perchè tale risultato è valido soltanto per onde longitudinali. Se le onde sono trasversali abbiamo per ciascun modo due stati di polarizzazione diversi indipendenti, cosicchè invece dell'Eq. (22.58) dobbiamo scrivere

Figure 22–28

Solution: If the cavity is cubical, $a = b = c$ in Eq. (22.56), and the possible frequencies are

$$\nu = (v/2a)\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

or

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 4\nu^2 a^2/v^2. \tag{22.57}$$

In a coordinate system in which the coordinates are n_1, n_2, and n_3 (Fig. 22–28), Eq. (22.57) represents a sphere of radius $2\nu a/v$. Our problem is to find all the possible combinations of integers n_1, n_2, and n_3 which satisfy

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \leq 4\nu^2 a^2/v^2.$$

If the radius is very large, this number of possible combinations is equal to the volume of the octant of the sphere shown in Fig. 22–28(a), since to each set of integers n_1, n_2, and n_3, we may associate a cell of unit volume, as indicated by the dots in Fig. 22–28(b). Then the number of modes of oscillation of frequency equal to or smaller than ν is

$$N_\nu = \frac{1}{8}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2\nu a}{v}\right)^3 = \frac{4\pi a^3 \nu^3}{3v^3}.$$

Since a^3 is the volume of the cavity, the number of modes per unit volume if we divide by a^3, is

$$n_{\nu,L} = \frac{4\pi\nu^3}{3v^3}. \tag{22.58}$$

The subscript L is added because this result is valid only for longitudinal waves. If the waves are transverse we have for each mode two independent and different states of polarization, so that instead of Eq. (22.58) we must write

$$n_{\nu,T} = \frac{8\pi\nu^3}{3v^3}. \tag{22.59}$$

Talvolta è conveniente conoscere il numero di modi in un intervallo di frequenza $d\nu$ che si scrive nella forma $dn_\nu = g(\nu)\, d\nu$. Differenziando l'Eq. (22.58), abbiamo

mentre per onde trasversali, dall'Eq. (22.59) otteniamo

Tali risultati sono molto utili in parecchi calcoli.

22.9 *Guide d'onda*

Le cavità discusse in precedenza ammettono soltanto onde stazionarie. Ma c'è anche la possibilità di produrre delle onde che si propagano in certi involucri detti *guide d'onda*, che sono lunghe cavità aperte ad entrambi gli estremi. Le onde vi vengono introdotte a una estremità e sono ricevute dall'altra. Discuteremo nel dettaglio un solo semplice tipo di guida, che consiste in due piani paralleli separati da una distanza a (Fig. 22–29). Se un'onda viene generata nella cavità in modo da formare un angolo coi piani, determinato dalle componenti k_1 e k_2 del vettore $\boldsymbol{k}$, rispettivamente parallela e perpendicolare ai piani, essa subirà delle riflessioni successive su entrambe le superficie di contorno, rimbalzando avanti e indietro tra di esse. Poichè lo spazio nella direzione parallela ai piani non è limitato (come accadeva per le cavità), l'onda si manterrà in moto verso destra. Scegliamo l'asse X parallelo ai piani e l'asse Y perpendicolare, in modo tale che il vettore $\boldsymbol{k}$ giaccia nel piano XY. Nella Fig. 22–29 abbiamo indicato il percorso di un raggio particolare. Lungo PQ il raggio è caratterizzato dalle componenti k_1 e k_2; da Q a R esso è caratterizzato dalle componenti k_1, $-k_2$. Da R in poi, è di nuovo caratterizzato da k_1 e k_2, e così via. Ne concludiamo dunque che nello spazio fra i due piani riflettenti, abbiamo due insiemi di onde che si propagano, corrispondenti rispettivamente a k_1, k_2, e $k_1, -k_2$. (Si ricordi che nel caso di onde stazionarie in due dimensioni, come quelle in una membrana, avevamo quattro onde, a causa delle onde addizionali generate per riflessione alle estremità destra e sinistra.) Tali due onde interferiscono, dando luogo al moto d'onda risultante (come verrà mostrato nell'Esempio 22.9) descritto dall'espressione

dove

per soddisfare alla condizione al contorno $\xi = 0$ per $y = a$.

Fig. 22–29. Un raggio che si propaga fra due piani riflettenti paralleli.

Sometimes it is convenient to know the number of modes in a frequency range $d\nu$ which is written in the form $dn_\nu = g(\nu)\, d\nu$. Differentiating Eq. (22.58), we have

$$dn_{\nu,L} = g_L(\nu)\, d\nu = \frac{4\pi\nu^2}{v^3}\, d\nu, \tag{22.60}$$

while for transverse waves, from Eq. (22.59) we get

$$dn_{\nu,T} = g_T(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{v^3}\, d\nu. \tag{22.61}$$

These results are very useful in several calculations.

22.9 *Wave Guides*

The cavities discussed above allow only standing waves. But there is also the possibility of producing traveling waves in certain enclosures called *wave guides*, which are long cavities open at both ends. Waves are fed in at one end and received at the other. We shall discuss in detail one simple type of guide, consisting of two parallel planes separated the distance a (Fig. 22–29). If a wave is set up inside the cavity at an angle with the planes, as determined by the components k_1 and k_2 of the vector $\boldsymbol{k}$, parallel and perpendicular, respectively, to the planes, it will suffer successive reflections at both limiting surfaces, bouncing back and forth between them. Since the space is not limited in the direction parallel to the planes (as happened with the cavities), the wave will keep progressing to the right. Let us choose the X-axis parallel to the planes and the Y-axis perpendicular to the planes so that the vector $\boldsymbol{k}$ is in the XY-plane. In Fig. 22–29 we have indicated the path of a particular ray. Along PQ the ray is characterized by the components k_1, k_2; from Q to R it is characterized by the components k_1, $-k_2$. From R on, it is again characterized by k_1 and k_2, and so on. We conclude then that in the space between the reflecting planes we have two sets of traveling waves, corresponding to k_1, k_2 and k_1, $-k_2$, respectively. (Remember that in the case of two-dimensional standing waves, such as those in a membrane, we had four waves, because of the additional waves generated by reflections at the right and left ends.) These two waves interfere, giving rise to the resultant wave motion (as will be shown in Example 22.9) described by the expression

$$\xi = -2\xi_0 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x), \tag{22.62}$$

where

$$k_2 = n\pi/a, \tag{22.63}$$

to satisfy the boundary condition $\xi = 0$ at $y = a$.

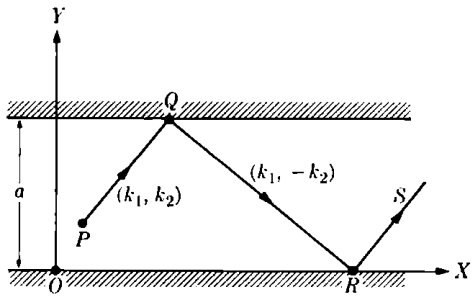


Fig. 22–29. Ray propagating between two parallel reflecting planes.

L'Eq. (22.62) differisce profondamente dai nostri risultati precedenti con altri tipi di onde stazionarie, in quanto la coordinata x non è stata separata, ma compare ancora in un termine della forma $\cos(\omega t - k_1 x)$. Tale termine corrisponde ad un'onda che si propaga lungo l'asse X con una velocità di fase

Poichè $k_1 \leq k$, in quanto k_1 è una componente di $\boldsymbol{k}$, l'Eq. (22.64) indica che la velocità di fase dell'onda che si propaga lungo la cavità è più grande della velocità di fase $v = \omega/k$ delle onde nello spazio libero. Così per le onde elettromagnetiche, la velocità di fase sarebbe maggiore di c. Ora da $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ e dalla Eq. (22.63), abbiamo che

ossia

in quanto $k = \omega/v$. La velocità di gruppo associata con la velocità di fase data dall'Eq. (22.64) è, per le Equazioni (18.58) e (22.65),

che è più piccola di v in quanto $k_1 \leq k$. Moltiplicando membro a membro le Equazioni (22.64) e (22.66), otteniamo $v_p v_g = v^2$, o per le onde elettromagnetiche nel vuoto ($v = c$), $v_p v_g = c^2$, risultato già trovato in precedenza nell'Esempio 19.9 per una situazione differente. Da tutto ciò vediamo che, anche se vuota, una guida d'onda elettromagnetica agisce come un mezzo dispersivo con un indice di rifrazione minore di uno, e quindi si ha una velocità di fase maggiore di c, ma una velocità di gruppo minore di c.

Direction of propagation = Direzione di propagazione
Nodal plane = Piano nodale
Nodal planes = Piani nodali

Fig. 22–30. Primi tre modi di propagazione di un'onda fra due piani riflettenti paralleli.

L'Eq. (22.65) indica anche un'altra proprietà importante delle guide d'onda. Dato che k_1 dev'essere un numero reale affinchè un'onda si propaghi lungo la guida d'onda, è necessario che $\omega^2/v^2 \geq n^2\pi^2/a^2$, che fornisce

ossia

In altre parole, soltanto quelle onde la cui frequenza soddisfa l'Eq. (22.67) si propagano lungo la guida. Ciascun modo è determinato dal valore di n, e per ciascun

Equation (22.62) differs profoundly from our previous results with other kinds of standing waves, in that the x-coordinate has not been separated, but still appears in a term of the form $\cos(\omega t - k_1 x)$. This term corresponds to a wave traveling along the X-axis with a phase velocity

$$v_p = \frac{\omega}{k_1} = \left(\frac{k}{k_1}\right) v. \tag{22.64}$$

Since $k_1 \leq k$ because k_1 is a component of $\boldsymbol{k}$, Eq. (22.64) indicates that the phase velocity of the wave traveling along the cavity is larger than the phase velocity $v = \omega/k$ of the waves in free space. So for electromagnetic waves, the phase velocity would be greater than c. Now from $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ and Eq. (22.63), we have that

$$k^2 = k_1^2 + \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

or

$$k_1 = \sqrt{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{v^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}}, \tag{22.65}$$

since $k = \omega/v$. The group velocity associated with the phase velocity given by Eq. (22.64) is, by Eqs. (18.58) and (22.65),

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_1} = \frac{k_1}{\omega} v^2 = \left(\frac{k_1}{k}\right) v, \tag{22.66}$$

which is smaller than v since $k_1 \leq k$. Multiplying Eqs. (22.64) and (22.66), we get $v_p v_g = v^2$, or for electromagnetic waves in vacuum ($v = c$), $v_p v_g = c^2$, a result found previously in Example 19.9 for a different situation. We see then that, even if it is empty, an electromagnetic wave guide acts as a dispersive medium with an index of refraction less than one, and thus a phase velocity larger than c, but a group velocity smaller than c.

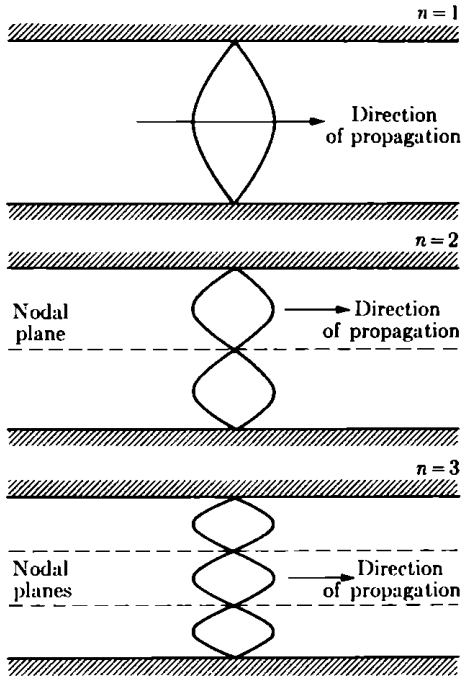


Fig. 22–30. First three modes of propagation of a wave between two parallel reflecting planes.

Equation (22.65) also indicates another important property of wave guides. Since k_1 must be a real number, in order for a wave to propagate along the wave guide, it is necessary that $\omega^2/v^2 \geq n^2\pi^2/a^2$, which yields

$$\omega \geq n\pi v/a \qquad \text{or} \qquad \nu \geq nv/2a. \tag{22.67}$$

In other words, only those waves with frequencies satisfying Eq. (22.67) are propagated along the guide. Each mode is determined by the value of n, and for each

Ionosphere = Ionosfera
Earth = Terra

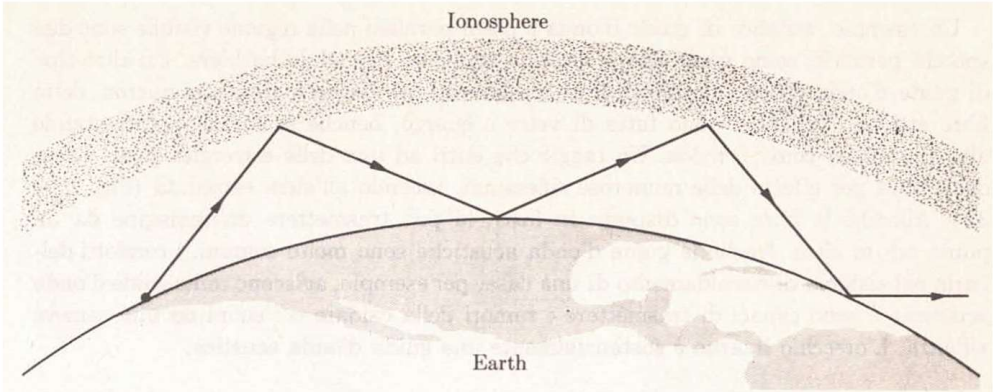


Fig. 22–31. La ionosfera e la terra si comportano come una guida d'onda per le radioonde.

modo esiste una frequenza di taglio, uguale a $n\pi v/a$, al di sotto della quale la propagazione non è possibile. Le guide d'onda agiscono dunque come filtri in frequenza.

Benchè l'onda si propaghi nella guida d'onda lungo l'asse X, l'ampiezza è modulata trasversalmente nella direzione Y dal fattore $\sin k_2 y$, nell'Eq. (22.62). La variazione trasversale dell'ampiezza è indicata in Fig. 22–30 per $n = 1$, 2, e 3. In pratica, le guide d'onda hanno una sezione trasversale o rettangolare o circolare. Le due forme dànno risultati simili per quanto riguarda la velocità di fase lungo l'asse della guida e la frequenza di taglio.

Benchè la nostra discussione sia valida per guide d'onda usate per qualsiasi tipo di onde, la situazione per le onde elettromagnetiche ha alcune caratteristiche particolari. A causa del carattere trasversale delle onde elettromagnetiche, per ogni $\boldsymbol{k}$ ci sono due modi possibili, a seconda della orientazione relativa del campo elettrico $\mathcal{E}$ rispetto ai lati della guida d'onda. Le guide d'onda elettromagnetiche sono ampiamente usate nella regione delle microonde allo scopo di trasmettere segnali.

Interessante è notare che la regione fra la superficie della terra e la ionosfera, che si trova approssimativamente a 80 km. sopra la terra, forma una guida d'onda che permette la propagazione delle onde radio attorno alla curvatura terrestre, come rappresenta la Fig. 22–31.

mode there is a cutoff frequency, equal to $n\pi v/a$, below which propagation is impossible. Wave guides then act as frequency filters.

Although the wave propagates within the wave guide along the X-axis, the amplitude is modulated transversely in the Y-direction by the factor $\sin k_2 y$ in Eq. (22.62). The transverse variation of the amplitude is indicated in Fig. 22–30 for $n = 1$, 2, and 3. In practice, wave guides have either a rectangular or a circular cross section. The two shapes yield similar results with respect to phase velocity along the axis of the guide and cutoff frequency.

Although our discussion is valid for wave guides used for any kind of waves, the situation for electromagnetic waves has some peculiarities. Because of the transverse character of electromagnetic waves, for each $\boldsymbol{k}$ there are two possible modes, depending on the relative orientation of the electric field $\mathcal{E}$ with respect to the sides of the wave guide. Electromagnetic wave guides are extensively used in the microwave region for the purpose of transmitting signals.

It is interesting to note that the region between the earth's surface and the ionosphere, which is approximately 80 km above the earth, forms a wave guide that allows the propagation of radio waves around the curve of the earth, as shown in Fig. 22–31.

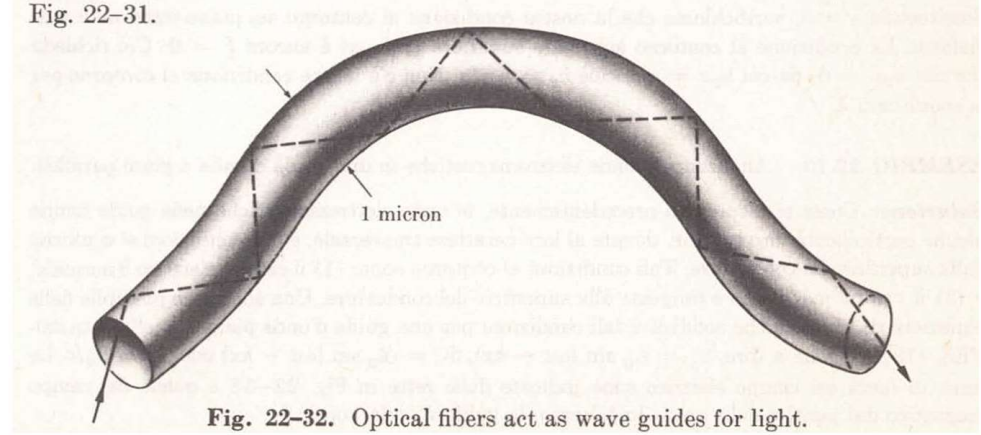


Fig. 22–32. Le fibre ottiche si comportano come guide d'onda per la luce.

Fig. 22–32. Optical fibers act as wave guides for light.

Un esempio semplice di guide d'onda a piani paralleli nella regione visibile sono due specchi paralleli, come quelli che si trovano in alcuni negozi da barbiere. Un altro tipo di guida d'onda ottica consiste in fibre trasparenti del diametro di alcuni micron, dette fibre ottiche. Tali fibre sono fatte di vetro o quarzo, benchè si stiano sperimentando altri materiali, come il nylon. Un raggio che entri ad una delle estremità segue l'asse della fibra per effetto delle numerose riflessioni, uscendo all'altra estremità (Fig. 22–32). Allorchè le fibre sono disposte in fasci, si può trasmettere un'immagine da un punto ad un altro. Anche le guide d'onda acustiche sono molto comuni. I condotti dell'aria nel sistema di riscaldamento di una casa, per esempio, agiscono come guide d'onda acustiche e sono capaci di trasmettere i rumori della caldaia o i suoni da una camera all'altra. L'orecchio interno è sostanzialmente una guida d'onda acustica.

ESEMPIO 22.9. Ricavare le Equazioni (22.62) e (22.63).

Soluzione: Le due onde che si propagano lungo la guida dànno origine ad un'onda risultante descritta dall'espressione

la quale va confrontata con l'Eq. (22.50). Per determinare ξ_0', imponiamo la condizione che $\xi = 0$ in tutti i punti della superficie inferiore; vale a dire, $y = 0$. Ponendo $y = 0$ nell'Eq. (22.68), si ottiene

cosicchè $\xi_0 + \xi_0' = 0$, cioè $\xi_0' = -\xi_0$, un risultato che ci si poteva aspettare dalla nostra esperienza in situazioni precedenti analoghe. L'Eq. (22.68) diventa dunque

Trasformando la differenza dei due seni in un prodotto, possiamo scrivere

Sostituendo $y = 0$, verifichiamo che la nostra condizione al contorno sul piano inferiore è soddisfatta. La condizione al contorno sul piano superiore ($y = a$) è ancora $\xi = 0$. Ciò richiede che $\sin k_2 a = 0$, da cui $k_2 a = n\pi$, cioè $k_2 = n\pi/a$. Non c'è invece condizione al contorno per la coordinata X.

ESEMPIO 22.10. Analizzare le onde elettromagnetiche in una guida d'onda a piani paralleli.

Soluzione: Come si è spiegato precedentemente, le onde elettromagnetiche nelle guide hanno alcune particolarità loro proprie, dovute al loro carattere trasversale, e alle condizioni al contorno sulla superficie del conduttore. Tali condizioni al contorno sono: (1) il campo elettrico è normale, e (2) il campo magnetico è tangente alla superficie del conduttore. Una soluzione possibile delle equazioni di Maxwell che soddisfi a tali condizioni per una guida d'onda piana è quella data dall'Eq. (19.12); vale a dire, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - kx)$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{B}_0 \sin(\omega t - kx)$ con $\mathcal{B}_0 = \mathcal{E}_0/c$. Le linee di forza del campo elettrico sono indicate dalle rette in Fig. 22–33 e quelle del campo magnetico dai punti e dalle croci. In tal caso, la guida d'onda non

A simple example of parallel plane wave guides in the optical region is two parallel mirrors, such as those found in some barber shops. Another type of optical wave guide consists of transparent fibers with a diameter of a few microns, called optical fibers. These fibers are made of glass or quartz, although other materials, such as nylon, are being tested. A ray entering at one end follows the axis of the fiber as a result of several reflections, emerging at the other end (Fig. 22–32). When the fibers are arranged in bundles, an image can be transmitted from one point to another. Acoustical wave guides are also very common. The air ducts in the heating system of a house, for example, act as acoustical wave guides which are capable of transmitting the noises from the furnace or sounds from one room to another. The inner ear is essentially an acoustical wave guide.

EXAMPLE 22.9. Derive Eqs. (22.62) and (22.63).

Solution: The two waves that propagate along the guide give rise to a resultant wave described by the expression

$$\xi = \xi_0 \sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] + \xi_0' \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)], \tag{22.68}$$

which must be compared with Eq. (22.50). To determine ξ_0', we impose the condition that $\xi = 0$ at all points of the lower surface; that is, $y = 0$. Setting $y = 0$ in Eq. (22.68) yields

$$\xi = (\xi_0 + \xi_0') \sin(\omega t - k_1 x) = 0,$$

so that $\xi_0 + \xi_0' = 0$ or $\xi_0' = -\xi_0$, a result to be expected from our experience with previous similar situations. Then Eq. (22.68) becomes

$$\xi = \xi_0 \{\sin[\omega t - (k_1 x + k_2 y)] - \sin[\omega t - (k_1 x - k_2 y)]\}.$$

Transforming the difference between the two sines into a product, we may write

$$\xi = -2\xi_0 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x). \tag{22.69}$$

By setting $y = 0$, we verify that our boundary condition at the lower plane is satisfied. The boundary condition at the upper plane ($y = a$) is also $\xi = 0$. This requires that $\sin k_2 a = 0$, resulting in $k_2 a = n\pi$ or $k_2 = n\pi/a$. However, there is no boundary condition for the X-coordinate.

EXAMPLE 22.10. Discuss electromagnetic waves in a plane parallel wave guide.

Solution: As explained above, electromagnetic waves in guides have certain peculiarities of their own, which are due to their transverse character and to the boundary conditions at the surface of the conductor. These boundary conditions are: (1) the electric field is normal, and (2) the magnetic field is tangential to the surface of the conductor. One possible solution of Maxwell's equations satisfying these conditions for a plane wave guide is that given by Eq. (19.12); that is, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - kx)$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{B}_0 \sin(\omega t - kx)$ with $\mathcal{B}_0 = \mathcal{E}_0/c$. The lines of force of the electric field are indicated by lines in Fig. 22–33 and those of the magnetic field by dots and crosses. In this case the wave guide does not

Direction of propagation = Direzione di propagazione
Electric field = Campo elettrico
Magnetic field = Campo magnetico

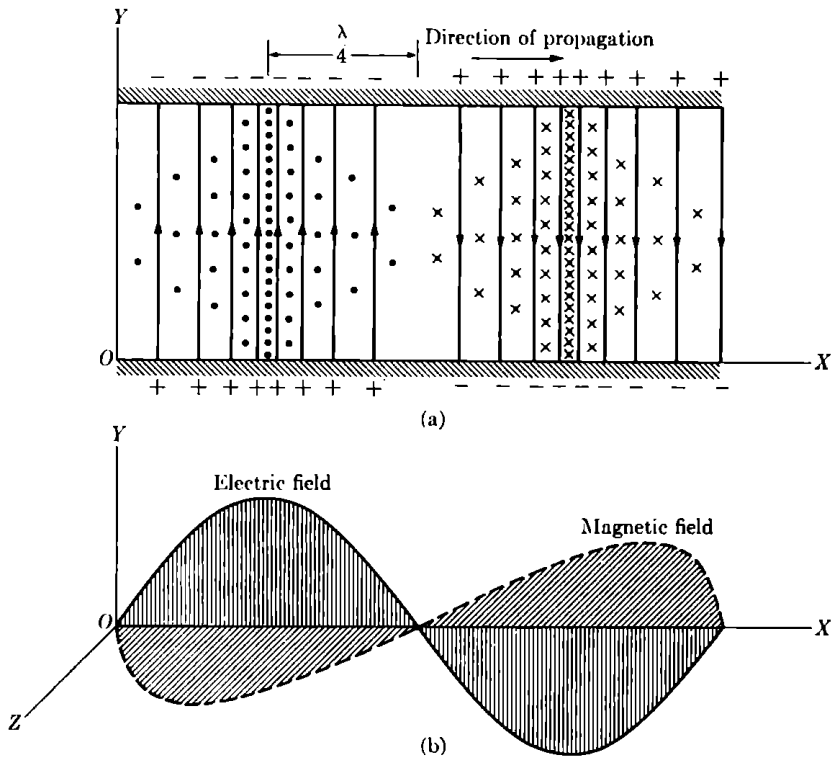


Fig. 22–33. (a) Linee di forza del campo elettrico (rette verticali) e linee di forza del campo magnetico (punti e croci) nel piano XY per un'onda elettromagnetica che si propaga parallelamente a due piani riflettenti paralleli al piano XZ. (b) Campi elettrico e magnetico nell'onda rappresentata nella parte (a).

Fig. 22–33. (a) Electric lines of force (vertical lines) and magnetic lines of force (dots and crosses) in the XY-plane for an electromagnetic wave propagating parallel to two reflecting planes parallel to the XZ-plane. (b) Electric and magnetic fields in the wave depicted in part (a).

cambia la velocità di fase dell'onda, che si propaga con la stessa velocità di fase $c = \omega/k$, corrispondente alla propagazione nello spazio libero; la guida d'onda limita soltanto il fronte d'onda.

Ma le equazioni di Maxwell ammettono altre soluzioni che soddisfano a loro volta le nostre condizioni al contorno. Una soluzione possibile è

change the phase velocity of the wave, which propagates with the same phase velocity $c = \omega/k$, corresponding to propagation in free space; the wave guide limits only the wave front.

But Maxwell's equations admit other solutions, which also satisfy our boundary conditions. One possible solution is

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y = 0, \qquad \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x),$$

$$\mathcal{B}_x = -\frac{k_2}{\omega}\mathcal{E}_0 \cos k_2 y \sin(\omega t - k_1 x),$$

$$\mathcal{B}_y = -\frac{k_1}{\omega}\mathcal{E}_0 \sin k_2 y \cos(\omega t - k_1 x), \qquad \mathcal{B}_z = 0.$$

Lo si può verificare per sostituzione diretta nelle equazioni di Maxwell. Tale soluzione è detta la soluzione TE (*trasversale elettrica*) in quanto il campo elettrico è trasversale, ma il campo magnetico ha una componente lungo la direzione effettiva di propagazione, cioè l'asse X. I campi elettrico e magnetico sono, tuttavia, perpendicolari l'uno all'altro. Per soddisfare

This can be verified by direct substitution in Maxwell's equations. This solution is called the TE (*transverse electric*) solution, because the electric field is transverse, but the magnetic field has a component along the effective direction of propagation, or X-axis. The electric and magnetic fields are, however, perpendicular to each other. To satisfy the

TE mode = Modo TE
TM mode = Modo TM

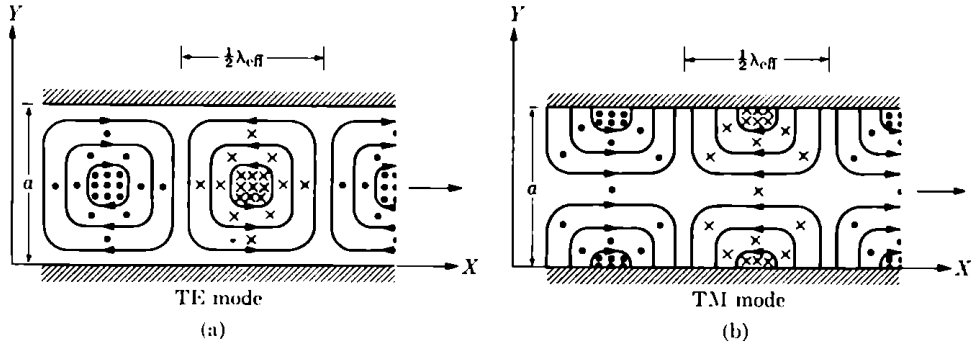


Fig. 22–34. Guide d'onda per onde elettromagnetiche. (a) Campo elettrico perpendicolare al foglio, o modo TE. (b) Campo magnetico perpendicolare al foglio, o modo TM.

Fig. 22–34. Wave guides for electromagnetic waves. (a) Electric field perpendicular to the page, or TE mode. (b) Magnetic field perpendicular to the page, or TM mode.

le condizioni al contorno su entrambi i piani conduttori, dobbiamo porre $\mathcal{E}_z = 0$ e $\mathcal{B}_y = 0$ per $y = 0$ e $y = a$. La prima è automaticamente soddisfatta, mentre la seconda richiede che sia $\sin k_2 a = 0$ cioè $k_2 a = n\pi$, cosicchè si ottiene la condizione data dall'Eq. (22.63). La Fig. 22–34(a) rappresenta le linee di forza per il modo fondamentale, $n = 1$. Le linee di forza del campo elettrico sono rette parallele ai piani (perpendicolari al foglio) e vengono quindi indicate con punti e croci, mentre le linee di forza del campo magnetico sono curve chiuse. Ciascun tracciato occupa metà della lunghezza d'onda effettiva $2\pi/k_1$, e quelli successivi hanno una differenza di fase di π. Lo stato così rappresentato si propaga lungo la guida con una velocità di fase $vp = \omega/k_1$.

Un'altra soluzione possibile delle equazioni di Maxwell è

boundary conditions at both conducting planes, we must set $\mathcal{E}_z = 0$ and $\mathcal{B}_y = 0$ for $y = 0$ and $y = a$. The first is automatically satisfied, while the second requires that $\sin k_2 a = 0$ or $k_2 a = n\pi$, so that the condition given by Eq. (22.63) is obtained. Figure 22–34(a) shows the lines of force for the lowest mode, $n = 1$. The lines of force of the electric field are straight lines parallel to the planes (perpendicular to the page) and thus are indicated by dots or crosses, while the lines of force of the magnetic field are the closed curves. Each pattern occupies one-half of the effective wavelength $2\pi/k_1$, and successive patterns have a phase difference of π. The patterns travel along the guide with the phase velocity $v_p = \omega/k_1$.

Another possible solution of Maxwell's equations is

$$\mathcal{E}_x = -\frac{k_2}{k_1}\mathcal{E}_0 \sin k_2 y \sin(\omega t - k_1 x),$$

$$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos k_2 y \cos(\omega t - k_1 x), \qquad \mathcal{E}_z = 0,$$

$$\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y = 0, \qquad \mathcal{B}_z = \frac{\omega}{k_1 c^2}\mathcal{E}_0 \cos k_2 y \cos(\omega t - k_1 x).$$

Anche questa può essere verificata per sostituzione diretta nelle equazioni di Maxwell. Tale seconda soluzione, denotata con TM (*trasversale magnetica*), è così detta in quanto il campo magnetico è trasversale. Il campo elettrico, tuttavia, ha una componente lungo la direzione effettiva di propagazione. I due campi rimangono perpendicolari l'uno all'altro. Per soddisfare le condizioni al contorno sui piani conduttori, dobbiamo imporre $\mathcal{E}_x = 0$ per $y = 0$ e $y = a$. La prima è automaticamente soddisfatta, e la seconda ancora una volta richiede che sia $\sin k_2 a = 0$, cioè $k_2 a = n\pi$, cosicchè si ottiene di nuovo la condizione data dall'Eq. (22.63). Perciò entrambi i modi hanno la medesima frequenza di taglio.

La Fig. 22–34(b) mostra di nuovo le linee di forza per il modo fondamentale, $n = 1$. Tuttavia le linee di forza del campo *magnetico* sono ora rette parallele ai piani (perpendicolari al foglio) e sono indicate con punti e croci, mentre le linee di forza del campo elettrico corrispondono ai tracciati indicati. Come nel caso TE, ciascun tracciato occupa metà della lunghezza d'onda effettiva $2\pi/k_1$, e gli stati si propagano lungo la guida con velocità di fase $v_p = \omega/k_1$.

La soluzione generale delle equazioni di Maxwell che soddisfa le condizioni al contorno di questo problema è una combinazione lineare dei modi TE e TM.

This again can be verified by direct substitution in Maxwell's equations. This second solution, denoted TM (for *transverse magnetic*), is so called because the magnetic field is transverse. The electric field, however, has a component along the effective direction of propagation. Both fields remain perpendicular to each other. To satisfy the boundary conditions at the conducting planes, we must make $\mathcal{E}_x = 0$ at $y = 0$ and $y = a$. The first is automatically satisfied, and the second once more requires that $\sin k_2 a = 0$ or $k_2 a = n\pi$, so that again the condition given by Eq. (22.63) is obtained. Therefore both modes have the same cutoff frequency.

Figure 22–34(b) again shows the lines of force for the lowest mode, $n = 1$. However, the lines of force of the *magnetic* field are now straight lines parallel to the planes (perpendicular to the page) and are indicated by dots or crosses, while the lines of force of the electric field correspond to the patterns shown. As in the TE case, each pattern occupies one-half of the effective wavelength $2\pi/k_1$, and the patterns travel along the guide with the phase velocity $v_p = \omega/k_1$.

The general solution of Maxwell's equation satisfying the boundary conditions of this problem is a linear combination of the TE and TM modes.

Bibliografia

References

1. "Discovery of Interference by Thomas Young," R. Pohl, *Am. J. Phys.* **28,** 530 (1960)
2. "Microwave Optics," C. Andrews, *The Physics Teacher* **2,** 55 (1964)
3. "Measuring Artificial Star Separation by Interference," M. Pryor, *Am. J. Phys.* **27,** 101 (1959)
4. "The 210-Foot Radio Telescope at Parkes," E. Bowen, *The Physics Teacher* **4,** 99 (1966)
5. "Fiber Optics," N. Kapany, *Sci. Am.*, November 1960, page 72
6. *Light: Principles and Experiments*, G. Monk. New York: Dover Press, 1963, Chapters 10 and 11
7. *Optics*, B. Rossi. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957, Chapter 3
8. *Great Experiments in Physics*, Morris Shamos, editor. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1959, Chapter 7 (Young)
9. *Foundations of Electromagnetic Theory*, J. R. Reitz and F. J. Milford. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1960, Sections 16–5 through 16–7
10. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 29; Volume II, Chapters 23 and 24
11. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 315 (Young)
12. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Section 30.5

Problemi

22.1 Due fenditure, separate da una distanza di 1 mm, sono illuminate con luce rossa di lunghezza d'onda 6.5×10^{-7} m. Le frange di interferenza vengono osservate su di uno schermo posto a 1 m dalle fenditure. (a) Trovare la distanza fra due frange luminose e fra due frange scure. (b) Determinare la distanza della terza frangia scura e della quinta frangia luminosa dalla frangia centrale.

22.2 Per mezzo di un *biprisma di Fresnel* (Fig. 22–4), si producono delle frange di interferenza su di uno schermo a 0.80 m di distanza dal biprisma, usando luce di lunghezza d'onda di 6.0×10^{-7} m. Trovare la distanza fra le due immagini prodotte dal biprisma se sullo schermo 21 frange occupano una distanza di 2.4 mm.

22.3 Dimostrare che se una sorgente è posta a una distanza d da un biprisma di Fresnel di indice di rifrazione n e con un angolo A molto piccolo, la distanza fra le due immagini è $a = 2(n - 1)\,Ad$, dove A è espresso in radianti. Calcolare la spaziatura fra le frange di luce verde di lunghezza d'onda 5×10^{-7} m prodotte da una sorgente posta a 5 cm da un biprisma di indice di rifrazione uguale a 1.5 e con un angolo di 2°. Lo schermo è a 1 m dal biprisma.

22.4 La Fig. 22–35 rappresenta un dispositivo, detto *specchio di Lloyd*, che produce figure di interferenza. Le sorgenti di luce coerente

Glass plate = Lastra di vetro

Figura 22–35

Problems

22.1 Two slits, separated a distance of 1 mm, are illumined with red light of wavelength 6.5×10^{-7} m. The interference fringes are observed on a screen placed 1 m from the slits. (a) Find the distance between two bright fringes and between two dark fringes. (b) Determine the distance of the third dark fringe and the fifth bright fringe from the central fringe.

22.2 By means of a *Fresnel biprism* (Fig. 22–4), interference fringes are produced on a screen 0.80 m away from the biprism, using light of wavelength equal to 6.0×10^{-7} m. Find the distance between the two images produced by the biprism if 21 fringes cover a distance of 2.4 mm on the screen.

22.3 Show that if a source is placed at a distance d from a Fresnel biprism having an index n and a very small angle A, the distance between the two images is $a = 2(n - 1)\,Ad$, where A is expressed in radians. Calculate the spacing of the fringes of green light of wavelength 5×10^{-7} m produced by a source placed 5 cm from a biprism, having an index equal to 1.5 and an angle of 2°. The screen is 1 m from the biprism.

22.4 Figure 22–35 shows an arrangement, called *Lloyd's mirror*, which produces interference patterns. The coherent light

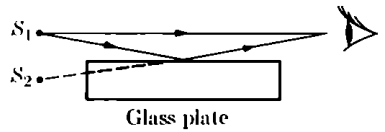


Figure 22–35

Screen = Schermo

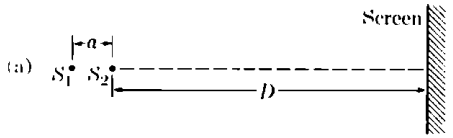


Figura 22–36

Thin mica sheet = Foglio di mica sottile
Shielded light source = Sorgente di luce schermata

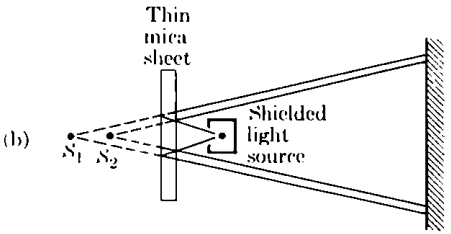


Figure 22–36

sono la sorgente S_1 e la sua immagine S_2, dovuta alla riflessione sulla superficie superiore della lastra di vetro. Perciò i raggi che interferiscono sono quelli che provengono direttamente dalla sorgente e quelli riflessi dal vetro. Quale conclusione si può trarre circa il cambiamento di fase per riflessione, se la frangia corrispondente a una differenza di cammino ottico nulla è (a) chiara, (b) scura? Nell'esperimento effettivo, si ottiene il risultato (b). Ce lo si poteva aspettare in base alla discussione del Paragrafo 20.7?

22.5 Nello specchio di Lloyd, la fenditura che fa da sorgente S_1 e la sua immagine virtuale S_2 stanno in un piano posto a 20 cm dietro lo spigolo sinistro dello specchio (vedere Fig. 22–35). Lo specchio è lungo 30 cm, e uno schermo viene posto sullo spigolo di destra. Calcolare la distanza da tale spigolo al primo massimo di luce, se la distanza perpendicolare da S_1 allo specchio è di 2 mm e $\lambda = 7.2 \times 10^{-7}$ m.

22.6 Studiare la figura di interferenza su di uno schermo allorchè le sorgenti S_1 e S_2, separate di un piccolo intervallo a, sono diposte lungo una retta perpendicolare allo schermo

sources are the source S_1 and its image, S_2, which is due to reflection on the upper surface of the glass plate. Therefore the interfering rays are those coming directly from the source and those reflected from the glass. What would you conclude about the phase change by reflection if the fringe corresponding to zero path difference is (a) bright, (b) dark? In the actual experiment, result (b) is obtained. Was it to be expected in view of the discussion of Section 20.7?

22.5 In Lloyd's mirror, the source slit S_1 and its virtual image S_2 lie in a plane 20 cm behind the left edge of the mirror (see Fig. 22–35). The mirror is 30 cm long, and a screen is placed at the right edge. Calculate the distance from this edge to the first light maximum, if the perpendicular distance from S_1 to the mirror is 2 mm and if $\lambda = 7.2 \times 10^{-7}$ m.

22.6 Discuss the interference pattern on a screen when the sources S_1 and S_2, separated the small distance a, are placed along a line perpendicular to the screen (Fig.

(Fig. 22–36a). Sperimentalmente le due sorgenti potrebbero essere le due immagini di una sorgente luminosa prodotte per riflessione sulle due facce di un sottile foglio di mica (Fig. 22–36b). Tale dispositivo è detto *interferometro di Pohl.*

22.7 Due sorgenti sincronizzate di onde sonore emettono onde di uguale intensità con una frequenza di 680 Hz. Le sorgenti distano 0.75 m l'una dall'altra. La velocità del suono è di 340 m s^{-1}. Trovare le posizioni di minima intensità: (a) su di una retta passante per le sorgenti, (b) nel piano perpendicolare bisettore del segmento che unisce le due sorgenti, (c) in un piano contenente le due sorgenti. (d) In tali minimi l'intensità è nulla?

22.8 Una delle tecniche per osservare la figura di interferenza prodotta da due fenditure è di illuminarle con dei raggi di luce paralleli, porre una lente convergente dietro al piano delle fenditure, e osservare la figura di interferenza su di uno schermo posto nel piano focale della lente (Fig. 22–37). Dimostrare che la posizione delle frange luminose rispetto alla frangia centrale è data da

22–36a). Experimentally the two sources could be the two images of a light source produced by reflection in the two faces of a thin mica sheet (Fig. 22–36b). This arrangement is called *Pohl's interferometer.*

22.7 Two synchronized sources of sound waves send out waves of equal intensity at a frequency of 680 Hz. The sources are 0.75 m apart. The velocity of sound is 340 m s^{-1}. Find the positions of minimum intensity: (a) on a line that passes through the sources, (b) in a plane that is the perpendicular bisector of the line between the sources, (c) in a plane that contains the two sources. (d) Is the intensity zero at any of the minima?

22.8 One technique for observing an interference pattern produced by two slits is to illuminate them with parallel rays of light, place a convergent lens behind the plane of the slits, and observe the interference pattern on a screen placed at the focal plane of the lens (Fig. 22–37). Show that the position of the bright fringes relative to the central fringe is given by $x =$

Screen = Schermo

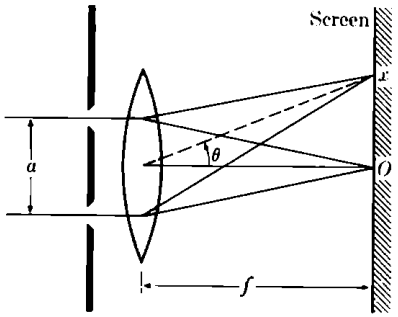


Figura 22–37

Figure 22–37

Screen = Schermo

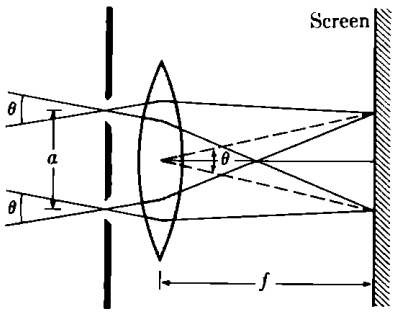


Figura 22–38

Figure 22–38

$x = n(f\lambda/a)$ e le frange scure corrispondono a $x = (2n + 1)(f\lambda/2a)$, dove n è un numero intero, f è la distanza focale della lente, e a è la distanza delle fenditure.

22.9 Due fasci paralleli di luce monocromatica della stessa lunghezza d'onda, formanti un piccolo angolo θ l'uno rispetto all'altro, incidono su due fenditure separate da una distanza a, poste di fronte a una lente convergente (Fig. 22–38). A causa dello spostamento angolare del fascio, i due sistemi di frange osservati su di uno schermo posto nel piano focale della lente (vedere il problema precedente) non coincidono. Dimostrare che se $\theta = \lambda/2a$, le frange chiare di uno dei fasci cadono sulle frange scure dell'altro, e la figura di interferenza scompare. È questo il metodo che fu proposto da Fizeau nel 1868 per misurare la separazione angolare di due oggetti distanti; e cioè di variare la distanza a fino a che la figura di interferenza scompaia. Esso è stato usato, per esempio, per misurare la separazione angolare delle stelle; cosa che si effettua ponendo uno schermo con due fenditure davanti all'obiettivo di un cannocchiale e variando la distanza fra le fenditure fino a che la figura di interferenza non scompare. Trovare la minima separazione angolare che può essere rivelata con il telescopio a rifrazione di Monte Wilson, il cui obiettivo ha un diametro di 100 pollici, cioè 2.54 m. Si assuma una lunghezza d'onda di 5.7×10^{-7} m.

22.10 Per aumentare il potere separatore di un cannocchiale, Michelson nel 1921 costruì un dispositivo interferometrico del tipo di quello rappresentato in Fig. 22–39, dove le M indicano

$n(f\lambda/a)$ and the dark fringes correspond to $x = (2n + 1)(f\lambda/2a)$, where n is an integer, f the focal length of the lens, and a is the separation of the slits.

22.9 Two parallel beams of monochromatic light of the same wavelength, which form a small angle θ with each other, fall on two slits separated the distance a, in front of a convergent lens (Fig. 22–38). Because of the angular displacement of the beam, the two sets of fringes observed on a screen placed at the focal plane of the lens (see the preceding problem) are not coincident. Show that if $\theta = \lambda/2a$, the bright fringes of one beam fall on the dark fringes of the other beam, and the interference pattern disappears. This is the method that was proposed by Fizeau in 1868 for measuring the angular separation of two distant objects by varying the distance a until the interference pattern disappears. It has been used, for example, to measure the angular separation of stars; this is done by placing a screen with two slits in front of the objective of a telescope and varying the separation of the slits until the diffraction pattern disappears. Find the minimum angular separation that can be detected with the Mount Wilson refracting telescope, whose objective has a diameter of 100 in. or 2.54 m. Assume that the wavelength is 5.7×10^{-7} m.

22.10 To increase the resolving power of a telescope, Michelson in 1921 built an interferometric arrangement such as that shown in Fig. 22–39, where the M's are

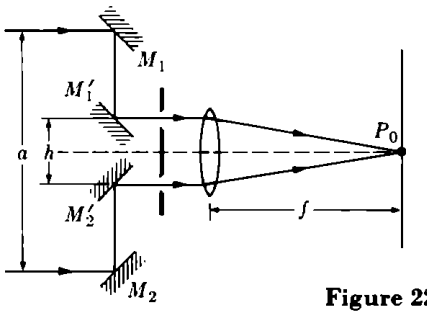


Figura 22–39

Figure 22–39

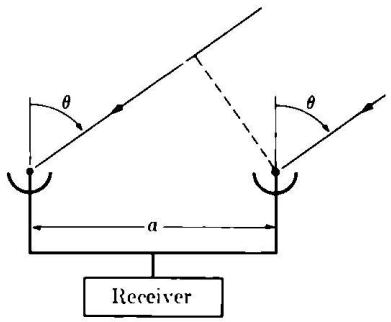
quattro specchi disposti davanti all'obiettivo di un cannocchiale. Perciò quanto si vede attraverso il cannocchiale è la figura di interferenza dei raggi ricevuti dagli specchi M_1 e M_2. È questo sostanzialmente il dispositivo di Fizeau descritto nel Problema 22.9. Si può dimostrare che, allorchè si osserva una sorgente luminosa estesa circolare, la figura di interferenza scompare se l'angolo sotteso dalla sorgente è legato alla distanza che separa gli specchi dalla relazione $\theta = 1.22\lambda/a$. Usando $a = 121$ pollici $= 3.073$ m e una lunghezza d'onda di 5.75×10^{-7} m, Michelson trovò che le frange corrispondenti alla stella α-Orione (Betelgeuse) scomparivano. Dimostrare che il diametro angolare di tale stella è 0.047″. Tale metodo ha fornito la prima misura del diametro di una stella. Quale dovrebbe essere il diametro dell'obiettivo di un cannocchiale per ottenere lo stesso potere separatore? Se la distanza della stella è 1.80×10^{18} m, trovare il diametro lineare della stella. Confrontare tale valore col diametro del sole e dell'orbita terrestre.

22.11 Un dispositivo interferometrico usato in radioastronomia consiste in due radiotelescopi posti a una certa distanza l'uno dall'altro. Le antenne di tali telescopi possono essere orientate in direzioni differenti, ma sono sempre mantenute parallele. I segnali ricevuti dalle antenne sono trasmessi a una stazione ricevente dove vengono mescolati (Fig. 22–40a). Dimostrare che le direzioni di incidenza per cui il segnale risultante è massimo sono date dall'Eq. (22.11), $\sin\theta = n\lambda/a$. [*Suggerimento:* Si osservi che la situazione è esattamente l'inverso di quella per due sorgenti illustrata in Fig. 22–3.] Disegnare un diagramma polare dell'intensità del segnale in funzione dell'angolo θ. La Fig. 22–40(b) mostra il doppio interferometro di Green Bank, West Virginia, che opera su lunghezze d'onda di 11 cm. La distanza a fra i due radiotelescopi può essere variata fino a 2700 m. Trovare l'angolo sotteso dal massimo centrale di intensità nelle condizioni di massima separazione dei due telescopi.

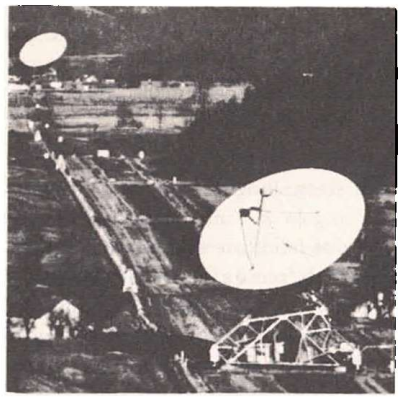
four mirrors placed in front of the objective of a telescope. Therefore what one observes through the telescope is the interference pattern of rays received by mirrors M_1 and M_2. This is essentially the Fizeau arrangement described in Problem 22.9. It can be shown that, when one observes an extended circular source of light, the interference pattern disappears if the angle subtended by the source is related to the separation of the mirrors by the relation $\theta = 1.22\lambda/a$. By using $a = 121$ in. $= 3.073$ m and a wavelength of 5.75×10^{-7} m, Michelson found that the fringes corresponding to the star α-Orionis (Betelgeuse) disappeared. Show that the angular diameter of this star is 0.047″. This method provided the first measurement of a star's diameter. What would the diameter of the objective of a telescope have to be to produce the same resolving power? If the distance to the star is 1.80×10^{18} m, find the linear diameter of the star. Compare this value with the diameter of the sun and of the earth's orbit.

22.11 An interferometric arrangement used in radio astronomy consists of two radio telescopes separated a certain distance. The antennas of these telescopes can be oriented in different directions, but are always kept parallel. The signals received by the antennas are transmitted to a receiving station where they are mixed (Fig. 22–40a). Show that the directions of incidence for which the resultant signal is maximum are given by Eq. (22.11), $\sin\theta = n\lambda/a$. [*Hint:* Note that the situation is just the reverse of that for two sources, illustrated in Fig. 22–3.] Make a polar plot of the intensity of the signal as a function of the angle θ. Figure 22–40(b) shows the double interferometer at Green Bank, West Virginia, which operates at a wavelength of 11 cm. The distance a between the two radio telescopes can be adjusted up to 2700 m. Find the angle subtended by the central intensity maximum at maximum separation of the two telescopes.

Receiver = Ricevitore



(a)



(b)

Fig. 22–40. (a) Disposizione di un radio-interferometro. (b) Radio-interferometro a due elementi a Green Bank, West Virginia. (La fotografia è dovuta alla cortesia del National Radio Astronomy Observatory)

Fig. 22–40. (a) Radio interferometer arrangement. (b) Two-element radio interferometer at Green Bank, West Virginia. (Photograph courtesy National Radio Astronomy Observatory)

22.12 Si supponga di avere, anzichè due fenditure parallele come nell'esperimento di Young, tre fenditure parallele uniformemente distanziate di un intervallo a. Discutere la distribuzione di intensità della figura di interferenza osservata su di uno schermo lontano.

22.13 Trovare l'intensità dei massimi secondari relativa a quella dei massimi principali per la disposizione di sorgenti di Fig. 22–12. [*Suggerimento:* Si può dimostrare che il primo massimo secondario si ha per $\theta \sim 48°$.]

22.14 Trovare la distanza fra le sorgenti necessaria nel dispositivo di Fig. 22–12 per produrre una disposizione "end-fire"; cioè con i massimi principali per $\theta = \pm\pi/2$. Determinare la posizione dei massimi secondari. Disegnare un diagramma della distribuzione angolare dell'intensità.

22.15 Discutere la distribuzione angolare di intensità per (a) tre e (b) cinque sorgenti di onde identiche uniformemente distanziate di un intervallo a lungo una retta. Si assuma $a = \lambda/2$.

22.16 Il primo radiointerferometro multiplo fu costruito nel 1951 in Australia dal Prof. W. N. Christiansen, ed è mostrato in Fig. 22–41. Esso consiste in 32 antenne, distanti 7 m una dall'altra, con i relativi riflettori parabolici. Il sistema è sintonizzato su di una lunghezza d'onda di 21 cm. I segnali ricevuti dalle antenne vengono sovrapposti nella stazione di osservazione per dare un segnale risultante. Il sistema è dunque equivalente a 32 sorgenti uniformemente distanziate. Trovare (a) l'ampiezza angolare del massimo centrale, (b) la separazione angolare fra due massimi principali successivi.

22.17 Considerando l'interferenza dei moti ondulatori generati da N sorgenti, come si è discusso nel Paragrafo 22.3, dimostrare che la fase iniziale del moto risultante è data da

22.12 Suppose that we have, instead of two parallel slits as in a Young's experiment, three parallel slits equally spaced a distance a. Discuss the intensity distribution of the interference pattern observed on a distant screen.

22.13 Find the intensities of the secondary maxima in the source arrangement of Fig. 22–12 relative to the principal maxima. [*Hint:* The first secondary maximum may be shown to occur at $\theta \sim 48°$.]

22.14 Find the spacing between the sources in the array of Fig. 22–12 to produce an "end-fire" pattern; i.e., one with principal maxima at $\theta = \pm\pi/2$. Determine the position of the secondary maxima. Make a plot of the angular distribution of the intensity.

22.15 Discuss the angular distribution of intensity for (a) three and (b) five identical sources of waves equally spaced the distance a along a straight line. Assume that $a = \lambda/2$.

22.16 The first multiple radio interferometer was built in 1951 in Australia by Prof. W. N. Christiansen, and is shown in Fig. 22–41. It consists of 32 antennas, 7 m apart, with their corresponding parabolic reflectors. The system is tuned to a wavelength of 21 cm. The signals received by the antennas are superposed at the observing station to give a resultant signal. The system is thus equivalent to 32 equally spaced sources. Find (a) the angular width of the central maximum, (b) the angular separation between successive principal maxima.

22.17 Considering the interference of wave motions produced by N sources, as discussed in Section 22.3, show that the initial phase of the resulting motion is given by

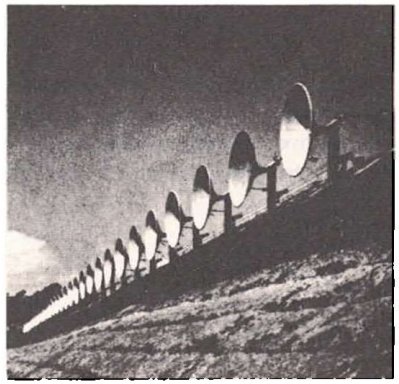


Fig. 22–41. Radio-interferometro a reticolo presso l'Università di Sydney, Australia. (La fotografia è dovuta alla cortesia del Prof. W. N. Christiansen)

Fig. 22–41. Grating radio interferometer at the University of Sydney, Australia. (Photograph courtesy Prof. W. N. Christiansen)

$\delta_N = \frac{1}{2}(N-1)\delta$, dove δ è dato dall'Eq. (22.12). Si osservi che δ_N è l'angolo che il vettore OP forma con l'asse X in Fig. 22–9.

22.18 Facendo uso del risultato ottenuto nel problema precedente e della legge di somma dei vettori, provare le seguenti relazioni trigonometriche:

$$1 + \cos\delta + \cos 2\delta + \cdots + \cos(N-1)\delta = \frac{\sin \frac{1}{2}N\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta} \cos \tfrac{1}{2}(N-1)\delta,$$

$$\sin\delta + \sin 2\delta + \cdots + \sin(N-1)\delta = \frac{\sin \frac{1}{2}N\delta}{\sin \frac{1}{2}\delta} \sin \tfrac{1}{2}(N-1)\delta.$$

[*Suggerimento:* Si osservi che nella Fig. 22–9, le componenti del vettore risultante lungo gli assi X e Y sono uguali alla somma delle componenti dei singoli vettori.]

22.19 Due pezzi di vetro piano rettangolari sono posti l'uno sull'altro. Una sottile striscio-lina di carta è posta fra di essi ad un estremo in modo tale che si forma un sottilissimo cuneo d'aria. Le lastre sono illuminate da un fascio di luce al sodio ($\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m) con incidenza normale. Si formano dieci frange di interferenza ad ogni centimetro di lunghezza del cuneo. Trovare l'angolo del cuneo.

22.20 Un pezzo di pellicola di cellophane quadrato di indice di rifrazione 1.5 ha una sezione trasversale a forma di cuneo, cosicchè il suo spessore alle due estremità opposte è a_1 e a_2 (Fig. 22–42). Se lo si illumina con luce monocromatica di lunghezza d'onda 6.0×10^{-7} m con incidenza normale, il numero di frange che si vedono per riflessione sulla pellicola è 10. Quanto vale la differenza $a_2 - a_1$?

22.21 Luce di lunghezza d'onda 5.0×10^{-7} m incide perpendicolarmente su di una pellicola spessa 10^{-6} m e di indice di rifrazione uguale a 1,4. Una parte della luce entra nella pellicola e viene riflessa indietro sulla seconda faccia. (a) Quante onde sono contenute lungo il percorso della luce nella pellicola dal punto di ingresso al punto di uscita? (b) Qual'è la differenza di fase fra tali onde tra il punto in cui escono dalla pellicola e quello in cui vi entrano? Ripetere il problema per luce il cui angolo di incidenza sia 30°.

22.22 Due lastre di vetro di lunghezza 5 cm sono poste a contatto ad una estremità e separate l'una dall'altra da un sottile foglio di carta all'altra estremità e formano così un prisma di aria. Quando il prisma viene illuminato con incidenza normale da luce di lunghezza d'onda 5.9×10^{-7} m, si osservano 42 frange scure. Trovare lo spessore del foglio di carta.

22.23 Una sottile pellicola di spessore 2.4×10^{-6} m e di indice di rifrazione 1.4 viene illuminata con luce monocromatica di lunghezza d'onda 6.2×10^{-7} m. Trovare il minimo angolo di incidenza per cui è massima l'interferenza per riflessione (a) costruttiva e (b) distruttiva. Ripetere il problema per luce trasmessa.

22.24 Dimostrare che se una lastra di vetro (indice di rifrazione n_v) viene ricoperta con una sottile pellicola di indice di rifrazione $n_p = \sqrt{n_v}$ (vedere Problema 20.18) e di spessore uguale a un quarto della lunghezza d'onda della luce nel film, ne risulta, per incidenza normale, una interferenza completamente distruttiva fra le luci riflesse alle due superficie. È questo un metodo pratico per diminuire l'intensità della riflessione da parte di lenti e lastre negli strumenti ottici. Detta pellicola sottile si chiama *rivestimento antiriflessione.*

22.25 Dimostrare che se la sottile pellicola del problema precedente ha un indice di rifrazione molto maggiore di quello del vetro e uno spessore di un quarto della lunghezza d'onda della luce (nella pellicola), l'intensità della luce riflessa viene aumentata per quella particolare lunghezza d'onda.

22.26 Dimostrare che se R è il raggio di curvatura della faccia convessa di una lente piano-convessa usata per produrre anelli di Newton, i raggi degli anelli luminosi sono dati da $r^2 = N\lambda R$ e i raggi degli anelli scuri da

$\delta_N = \frac{1}{2}(N-1)\delta$, where δ is given by Eq. (22.12). Note that δ_N is the angle that the vector OP makes with the X-axis in Fig. 22–9.

22.18 Using the result proved in the preceding problem and the law of vector addition, prove the following trigonometric relations:

[*Hint:* Note that in Fig. 22–9 the components of the resultant vector along the X- and Y-axes are equal to the sum of the components of the individual vectors.]

22.19 Two rectangular pieces of plane glass are laid one upon the other. A thin strip of paper is placed between them at one edge so that a very thin wedge of air is formed. The plates are illuminated by a beam of sodium light ($\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m) at normal incidence. Ten interference fringes are formed per centimeter length of wedge. Find the angle of the wedge.

22.20 A square piece of cellophane film with index of refraction 1.5 has a wedge-shaped section, so that its thickness at two opposite sides is a_1 and a_2 (Fig. 22–42). If it is illuminated with monochromatic light of wavelength 6.0×10^{-7} m at normal incidence, the number of fringes appearing by reflection on the film is 10. What is the difference $a_2 - a_1$?

22.21 Light of wavelength 5.0×10^{-7} m is incident perpendicularly on a film 10^{-6} m thick and has an index of refraction equal to

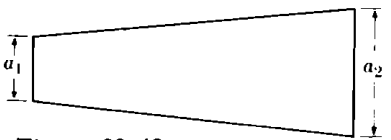


Figura 22–42

Figure 22–42

1.4. Part of the light enters the film and is reflected back at the second face. (a) How many waves are contained along the path of this light in the film from the point of incidence to the point of emergence? (b) What is the phase difference between these waves as they leave the film and as they enter it? Repeat the problem for light whose angle of incidence is 30°.

22.22 Two glass plates having a length of 5 cm are placed in contact at one end and separated at the other by a thin paper sheet, thus forming an air prism. When the prism is illuminated by light of wavelength 5.9×10^{-7} m at normal incidence, 42 dark fringes are observed. Find the thickness of the paper sheet.

22.23 A thin film having a thickness of 2.4×10^{-6} m and an index of refraction of 1.4 is illuminated with monochromatic light of wavelength 6.2×10^{-7} m. Find the smallest angles of incidence for which there is maximum (a) constructive and (b) destructive interference by reflection. Repeat the problem for light which is transmitted.

22.24 Show that if a glass plate (index n_g) is covered by a thin film having an index $n_a = \sqrt{n_g}$ (see Problem 20.18) and having a thickness equal to one-quarter of the wavelength of light in the film, complete destructive interference between light reflected at both surfaces results, for normal incidence. This is an effective method for decreasing the intensity of reflection from lenses and plates in optical instruments. Such a thin film is called an *antireflection coating.*

22.25 Show that if the thin film of the previous problem has an index much larger than that of glass and a thickness of one-quarter of the wavelength of light (in the film), the intensity of reflected light for that particular wavelength is increased.

22.26 Prove that if R is the radius of the convex side of a plano-convex lens used to produce Newton's rings, the radii of the bright rings are given by $r^2 = N\lambda R$ and the radii of the dark rings by $r^2 =$

$r^2 = (2N + 1)(\lambda R/2)$, dove N è un numero intero positivo. L'indice di rifrazione dell'aria si è assunto uguale a 1.

22.27 Si osservano degli anelli di Newton mediante una lente piano-convessa appoggiata su di una superficie di vetro piana (vedere Fig. 22–14). Il raggio di curvatura della lente è di 10 m. (a) Trovare i raggi degli anelli di interferenza scuri dei vari ordini che si osservano per riflessione con incidenza quasi perpendicolare, usando luce di lunghezza d'onda 4.8×10^{-7} m. (b) Quanti anelli si vedono se il diametro della lente è di 4 cm?

22.28 Il raggio di curvatura della superficie convessa di una lente piano-convessa è 1.20 m. La lente è posta su di una superficie di vetro piana con la faccia convessa verso il basso, e illuminata dall'alto con luce rossa di lunghezza d'onda 6.5×10^{-7} m. Trovare il diametro del terzo anello luminoso della figura di interferenza.

22.29 Un filo di rame di raggio 1 mm e lunghezza 1 m è sottoposto ad una forza di 10.000 N. Trovare: (a) la frequenza fondamentale e i primi due toni superiori, (b) le corrispondenti lunghezze d'onda. (c) Fare un grafico dello stato di vibrazione del filo in entrambi i casi. (d) Scrivere l'equazione che rappresenta le onde stazionarie per ciascuna frequenza.

22.30 Di quanto varia la frequenza fondamentale di una corda se si raddoppia (a) la forza a cui è sottoposta, (b) la sua massa ad unità di lunghezza, (c) il suo raggio, (d) la sua lunghezza? Ripetere il problema per un caso in cui le grandezze elencate vengono dimezzate.

22.31 Un tubo la cui lunghezza è 0.60 m è (a) aperto a entrambi gli estremi, e (b) chiuso ad un estremo e aperto all'altro. Trovare la sua frequenza fondamentale e il primo tono superiore se la temperatura dell'aria è di 27° C. Disegnare un diagramma della distribuzione di ampiezza lungo il tubo corrispondente alla frequenza fondamentale e al primo tono superiore.

22.32 Valutare la variazione percentuale nella frequenza fondamentale e ad ogni grado di variazione di temperatura in una colonna d'aria, alla temperatura di 27° C. [Vedere Esempio 18.6.]

22.33 Una corda vibrante con frequenza di 256 Hz è in risonanza con un diapason. Determinare la frequenza dei battimenti che si producono se la forza applicata alla corda viene aumentata del 20%.

22.34 Un diapason della frequenza di 256 Hz è posto di fronte all'estremità aperta di un tubo, come è rappresentato in Fig. 22–43. La lunghezza della colonna d'aria può essere variata spostando, mediante il movimento in su o in giù del contenitore A, il livello della superficie dell'acqua. Trovare la lunghezza delle prime tre colonne di aria che sono in risonanza con il diapason. Fare in ciascun caso uno schizzo che mostri la posizione dei nodi e dei ventri. Tracciare la distribuzione dell'ampiezza lungo il tubo. Si assuma una temperatura di 27° C.

22.35 Un tubo a T ha uno dei suoi rami chiuso da un pistone mobile, come è rappresentato in Fig. 22–44. Un diapason viene posto ad una delle estremità aperte, A. Dimostrare che la distanza fra le posizioni successive del

22.27 Newton's rings are observed with a plano-convex lens resting on a plane glass surface (see Fig. 22–14). The radius of curvature of the lens is 10 m. (a) Find the radii of the dark interference rings of the various orders observed by reflection under nearly perpendicular incidence, using light of wavelength 4.8×10^{-7} m. (b) How many rings are seen if the diameter of the lens is 4 cm?

22.28 The radius of curvature of the convex surface of a plano-convex lens is 1.20 m. The lens is placed on a plane glass plate with the convex side down, and illuminated from above with red light of wavelength 6.5×10^{-7} m. Find the diameter of the third bright ring of the interference pattern.

22.29 A copper wire having a radius of 1 mm and a length of 1 m is subject to a tension of 10,000 N. Find: (a) the fundamental frequency and the first two overtones, (b) the corresponding wavelengths. (c) Plot the vibrational state of the wire in each case. (d) Write the equation describing the standing waves for each frequency.

22.30 How is the fundamental frequency of a string changed if one doubles (a) its tension, (b) its mass per unit length, (c) its radius, (d) its length? Repeat the problem for a case in which the quantities listed are halved.

22.31 A tube whose length is 0.60 m is (a) open at both ends, and (b) closed at one end and open at the other. Find its fundamental frequency and the first overtone if the temperature of the air is 27°C. Plot the amplitude distribution along the tube corresponding to the fundamental frequency and the first overtone.

22.32 Estimate the percentage change in the fundamental frequency of an air column per degree change in temperature at a temperature of 27°C. [See Example 18.6.]

22.33 A string vibrating with a frequency of 256 Hz is in resonance with a tuning fork. Determine the frequency of the beats produced if the tension of the string is increased by 20%.

22.34 A tuning fork with a frequency of 256 Hz is placed in front of the open end of a tube, as shown in Fig. 22–43. The length of the air column can be changed by displacing the level of the water surface, moving container A up or down. Find the lengths of the first three air columns that are in resonance with the tuning fork. Make a sketch in each case showing the position of the nodes and antinodes. Indicate the amplitude distribution along the tube. Assume a temperature of 27°C.

22.35 A T-tube has one of the branches closed by a movable piston, as shown in Fig. 22–44. A tuning fork is placed at one of the open ends, A. Show that the separation between successive positions of the

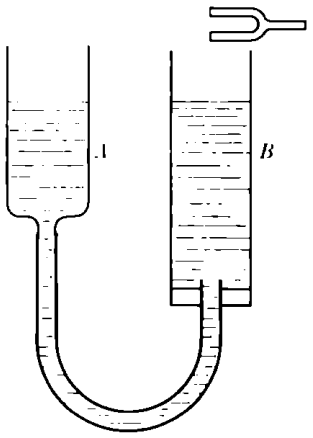


Figura 22–43 Figure 22–43

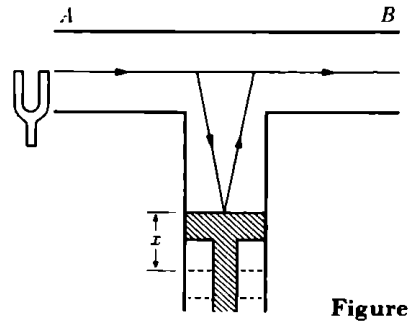


Figura 22–44 Figure 22–44

pistone in corrispondenza alle quali all'altro estremo aperto, B, viene ricevuta la massima intensità di suono, è $x = \frac{1}{2}\lambda$.

22.36 Due onde di superficie, $A \sin k(x - vt)$ e $A \sin k(y - vt)$, si propagano lungo una membrana. Discutere il moto risultante, dimostrando che tali onde sono equivalenti ad un'onda modulata che si propaghi in una direzione formante un angolo di 45° con l'asse X e con una velocità di fase uguale a $\sqrt{2}v$. Verificare che la lunghezza d'onda risulta ridotta del fattore $\sqrt{2}$. Dimostrare che l'ampiezza è nulla lungo le rette $x - y = (2n + 1)\pi/k$.

22.37 Dimostrare che per una membrana quadrata di lato a, se $\nu_0 = v/2a$ è la frequenza fondamentale, le frequenze successive sono $\nu = \sqrt{2}\nu_0$, $2\nu_0$, $\sqrt{5}\nu_0$, $2\sqrt{2}\nu_0$, $3\nu_0$, $\sqrt{10}\nu_0$, $\sqrt{13}\nu_0, \ldots$. Determinare il numero di combinazioni differenti di n_1 e n_2 necessario per ottenere il modo di vibrazione fondamentale e quelli successivi. Il numero di combinazioni differenti fornisce la *degenerazione* del modo vibrazionale.

22.38 Ripetere il problema precedente per una cavità cubica di lato a.

22.39 Una guida d'onda consiste in un lungo tubo di sezione trasversale rettangolare di lati a e b. Dimostrare che l'onda risultante è descritta dalla

e che le sole frequenze propagate lungo la guida d'onda sono quelle che soddisfano la condizione $\nu \geq \frac{1}{2}v\sqrt{n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2}$, dove n_1 e n_2 sono dei numeri interi. Determinare i piani nodali nella guida d'onda per $n_1 = 2$ e $n_2 = 3$.

22.40 Valutare il numero di modi vibrazionali trasversali ad unità di volume,

piston for which maximum intensity of sound is received at the other open end, B, is $x = \frac{1}{2}\lambda$.

22.36 Two surface waves, $A \sin k(x - vt)$ and $A \sin k(y - vt)$, propagate along a membrane. Discuss the resulting motion, showing that these waves are equivalent to a modulated wave propagating in a direction making an angle of 45° with the X-axis and with a phase velocity equal to $\sqrt{2}\,v$. Verify that the wavelength is reduced by the factor $\sqrt{2}$. Show that the amplitude is zero over the lines $x - y = (2n + 1)\pi/k$.

22.37 Show that for a square membrane of side a, if $\nu_0 = v/2a$ is the fundamental frequency, the successive frequencies are $\nu = \sqrt{2}\,\nu_0$, $2\nu_0$, $\sqrt{5}\,\nu_0$, $2\sqrt{2}\,\nu_0$, $3\nu_0$, $\sqrt{10}\,\nu_0$, $\sqrt{13}\,\nu_0, \ldots$. Determine the number of different combinations of n_1 and n_2 needed to obtain the fundamental and successive modes of vibration. The number of different combinations gives the *degeneracy* of the vibrating mode.

22.38 Repeat the preceding problem for a cubical cavity of side a.

22.39 A wave guide consists of a long tube of rectangular cross section with sides a and b. Show that the resultant wave is described by

$$\xi = 4\xi_0 \sin k_2 y \sin k_3 z \cos(\omega t - k_1 x)$$

and that the only frequencies transmitted along the wave guide are those satisfying $\nu \geq \frac{1}{2}v\sqrt{n_1^2/a^2 + n_2^2/b^2}$, where n_1 and n_2 are integers. Discuss the nodal planes in the wave guide for $n_1 = 2$ and $n_2 = 3$.

22.40 Estimate the number of transverse vibrational modes per unit volume, in the

nell'intervallo di frequenza fra 1.0×10^{15} Hz, e 1.2×10^{15} Hz, per le radiazioni elettromagnetiche intrattenute in una cavità.

22.41 È data l'equazione d'onda in due dimensioni

Cercare una soluzione, corrispondente a onde stazionarie, della forma $\xi = f(x,y) \sin \omega t$. Dimostrare che $f(x,y)$ soddisfa l'equazione differenziale

in cui $k = \omega/v$. Determinare le costanti k_1 e k_2 in modo che

sia una soluzione dell'equazione precedente. Confrontare i risultati trovati con quelli del Paragrafo 22.7.

22.42 Estendere la discussione del problema precedente al caso dell'equazione d'onda tridimensionale. In tal caso la soluzione di tentativo è

22.43 Studiare graficamente le soluzioni dell'equazione trascendente $x \tan x = C$, dove C è una costante. Si può procedere in uno dei due modi seguenti. Disegnare le curve $y = \tan x$ e $y = C/x$ e determinarne le intersezioni, o disegnare le curve $y = x$ e $y = C \cot x$ e determinarne le intersezioni. In ogni caso, ad eccezione della prima intersezione, tutte le altre sono molto prossime a $x = n\pi$, dove n è un numero intero. Si applichino i risultati ottenuti alla discussione dell'Esempio 22.6.

frequency range between 1.0×10^{15} Hz and 1.2×10^{15} Hz, for electromagnetic radiation trapped in a cavity.

22.41 Given the wave equation in two dimensions

$$\partial^2\xi/\partial x^2 + \partial^2\xi/\partial y^2 = (1/v^2)\,\partial^2\xi/\partial t^2.$$

Try a solution corresponding to standing waves of the form $\xi = f(x, y) \sin \omega t$. Show that $f(x, y)$ satisfies the differential equation

$$\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 + k^2 f = 0,$$

where $k = \omega/v$. Determine the constants k_1 and k_2 in order that

$$f(x, y) = A \sin k_1 x \sin k_2 y$$

be a solution of the preceding equation. Compare your results with those of Section 22.7.

22.42 Extend the discussion of the preceding problem to the case of the three-dimensional wave equation. In this case the trial solution is

$$f(x, y, z) = A \sin k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z.$$

22.43 Discuss graphically the solutions of the transcendental equation $x \tan x = C$, where C is a constant. You can proceed in either one of two ways. Draw the curves $y = \tan x$ and $y = C/x$ and determine their intersections, or draw the curves $y = x$ and $y = C \cot x$ and determine their intersections. In any case, with the exception of the first intersection, all the others fall closely after $x = n\pi$, where n is an integer. Apply your results to the discussion of Example 22.6.

23
DIFFRAZIONE

23.1 Introduzione
23.2 Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer prodotti da una fenditura rettangolare
23.3 Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer prodotti da una apertura circolare
23.4 Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer prodotti da due fenditure parallele, uguali
23.5 Reticoli di diffrazione
23.6 Fenomeni di diffrazione di Fresnel
23.7 Diffusione
23.8 Diffusione di raggi x dai cristalli

23
DIFFRACTION

23.1 Introduction
23.2 Fraunhofer Diffraction by a Rectangular Slit
23.3 Fraunhofer Diffraction by a Circular Aperture
23.4 Fraunhofer Diffraction by Two Equal, Parallel Slits
23.5 Diffraction Gratings
23.6 Fresnel Diffraction
23.7 Scattering
23.8 X-Ray Scattering by Crystals

23.1 Introduzione

Un altro fenomeno caratteristico della propagazione per onde è noto col nome generico di *diffrazione*. La diffrazione diventa sensibile quando un'onda è distorta da un ostacolo che ha dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda dell'onda stessa. L'ostacolo può essere uno schermo con una piccola apertura o fenditura che permette il passaggio ad una piccola porzione del fronte d'onda incidente. L'ostacolo può anche essere un piccolo oggetto come un filo o un disco, che impedisce il passaggio di una piccola porzione del fronte d'onda.

Fig. 23–1. Comportamento di un flusso continuo di particelle incidenti su uno schermo dotato di una piccola apertura.

Fig. 23–2. Comportamento di un'onda incidente su uno schermo dotato di una piccola apertura.

Se un flusso continuo di particelle incide su uno schermo avente una piccola apertura, saranno trasmesse e potranno continuare indisturbate il loro moto solo quelle particelle che arrivano sulla apertura (Fig. 23–1). Le altre verranno o fermate o rimbalzate all'indietro. Se al contrario un oggetto è posto sul cammino di un flusso continuo di particelle, questo arresterà quelle particelle che incidono su di esso, mentre le rimanenti particelle continueranno il loro moto indisturbate. Noi sappiamo tuttavia dalla comune esperienza, specialmente per il caso di onde sonore e di onde alla superficie dell'acqua, che le onde si comportano in un modo differente e che esse si propagano intorno agli ostacoli interposti sul loro cammino, come illustrato in Fig. 23–2. Tale effetto diventa sempre più sensibile via via che le dimensioni delle fenditure o degli ostacoli tendono alla lunghezza d'onda delle onde incidenti. Di solito non si può osservare la diffrazione della luce ad occhio nudo poichè la maggior parte degli oggetti interposti in un fascio di luce sono molto più grandi delle lunghezze d'onda delle onde luminose, il cui ordine di grandezza è 5×10^{-7} m.*

In questo capitolo discuteremo la diffrazione prodotta da certe aperture e schermi di geometria semplice, in due condizioni speciali. Nei fenomeni di *diffrazione di Fraunhofer*

*A questo punto suggeriamo allo studente di tornare a rileggere il Paragrafo 20.2.

23.1 Introduction

Another kind of phenomenon characteristic of wave motion is known by the generic name of *diffraction*. Diffraction is noticeable when a wave is distorted by an obstacle which has dimensions comparable to the wavelength of the wave. The obstacle may be a screen with a small opening or slit which allows only a small portion of the incident wave front to pass. The obstacle may also be a small object, such as a wire or a disk, that blocks the passage of a small portion of the wave front.

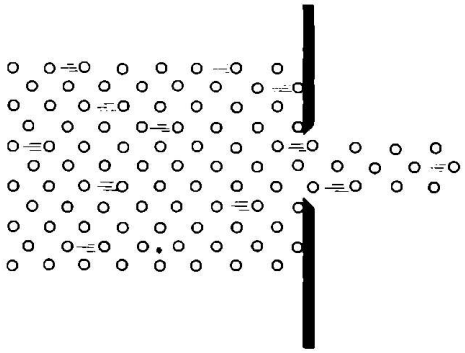


Fig. 23–1. Behavior of a stream of particles impinging on a screen with a small opening.

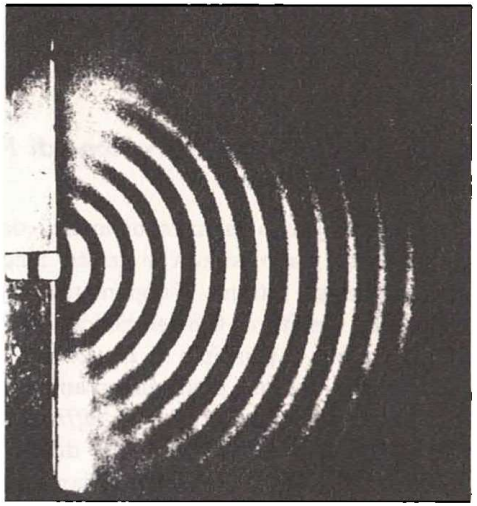


Fig. 23–2. Behavior of a wave impinging on a screen with a small opening.

If a stream of particles falls on a screen which has a small opening, only those falling on the opening will be transmitted and allowed to continue their motion undisturbed (Fig. 23–1). The others will either be stopped, or will bounce back. Conversely, if an object is placed in a stream of particles, it will block those particles falling on it, but the remaining particles will continue their motion undisturbed. However, we know from common experience, especially for the case of sound waves and surface waves in water, that waves behave in a different way, and that they extend around the obstacles interposed in their path, as illustrated in Fig. 23-2. This effect becomes more and more noticeable as the dimensions of the slits or the size of the obstacles approach the wavelength of the waves. One cannot usually observe diffraction of light with the naked eye, since most of the objects interposed in a beam of light are much larger than the wavelength of light waves, whose magnitude is of the order of 5×10^{-7} m.*

In this chapter we shall discuss diffraction produced by certain apertures and screens of simple geometry, under two special circumstances. In *Fraunhofer*

* We suggest that at this point the student go back and read Section 20.2 again.

supponiamo che i raggi incidenti siano paralleli e che noi osserviamo le figure di diffrazione a una distanza sufficientemente grande in modo da ricevere effettivamente soltanto quei raggi diffratti che sono paralleli. Questo può anche essere realizzato usando una lente che converge, nel suo piano focale, i raggi diffratti nella stessa direzione nella stessa posizione su uno schermo. Nei fenomeni di *diffrazione di Fresnel*, o i raggi incidenti hanno origine da una sorgente puntiforme o i raggi diffratti sono osservati in un particolare punto dello spazio, o sono verificate entrambe le condizioni.

Strettamente connessa alla diffrazione è la *diffusione* che ha origine quando gli ostacoli interposti sul cammino dell'onda diventano essi stessi sorgente di nuove onde. Noi abbiamo discusso la diffusione di onde elettromagnetiche da singoli elettroni nel Capitolo 19. In questo capitolo considereremo brevemente la diffusione da un punto di vista più generale.

23.2 *Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer prodotti da una fenditura rettangolare*

Come nostro primo esempio di analisi della diffrazione, consideriamo una fenditura rettangolare, molto stretta e molto lunga, in modo da poter ignorare, all'inizio, gli effetti degli estremi. Supponiamo anche che le onde incidenti siano normali al piano della fenditura. Ciò semplifica il calcolo matematico senza cambiare il problema fisico. Secondo il principio di Huygens, quando l'onda incidente batte sulla fenditura, tutti i punti del suo piano diventano sorgenti secondarie di onde, emettendo nuove onde, dette, nel nostro caso, onde *diffratte*, la cui ampiezza risultante è calcolata usando l'Eq. (20.2). Osservando le onde diffratte a diversi angoli θ rispetto alla direzione di incidenza (Fig. 23—3), noi troviamo che per certe direzioni la loro intensità è nulla. Queste direzioni sono date dalla relazione

dove n è un numero intero positivo o negativo, b è la larghezza della fenditura, e λ la lunghezza d'onda delle onde incidenti. Si esclude il valore $n = 0$, perchè esso corrisponde alla osservazione lungo la direzione di incidenza, che ovviamente implica un massimo di illuminamento.

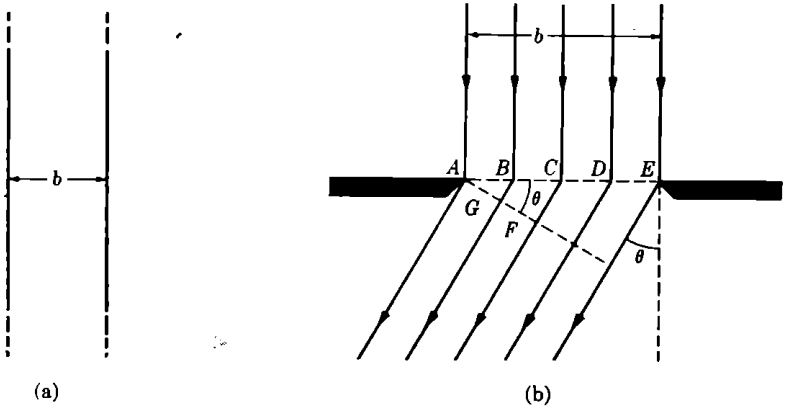


Fig. 23—3. Diffrazione da una fenditura stretta e lunga.

diffraction we assume that the incident rays are parallel, and that we observe the diffraction pattern at a distance sufficiently large so that we effectively receive only diffracted rays that are parallel. This can also be accomplished by using a lens that focuses rays diffracted in the same direction to the same position on a screen. In *Fresnel diffraction*, either the incident rays originate from a point source, or the diffracted rays are observed at a particular point of space, or both.

Closely related to diffraction is *scattering*, which takes place when the obstacles interposed in the wave themselves become sources of new waves. We discussed the scattering of electromagnetic waves by individual electrons in Chapter 19. In this chapter we shall briefly consider scattering from a more general point of view.

23.2 *Fraunhofer Diffraction by a Rectangular Slit*

As our first example of diffraction analysis, let us consider a rectangular slit, very narrow and very long, so that at the beginning we may ignore the effects at the ends. We also assume that the incident waves are normal to the plane of the slit. This simplifies the mathematics without changing the physical situation. According to Huygens' principle, when the incident wave falls on the slit all points of its plane become secondary sources of waves, emitting new waves, called, in our case, *diffracted* waves, whose resultant amplitude is computed by using Eq. (20.2). Observing the diffracted waves at different angles θ with respect to the direction of incidence (Fig. 23-3), we find that for certain directions their intensity is zero. These directions are given by the relation

$$b \sin \theta = n\lambda, \qquad n \neq 0, \tag{23.1}$$

where n is a positive or negative integer, b is the width of the slit, and λ the wavelength of the incident waves. The value $n = 0$ is excluded, because it corresponds to observation along the direction of incidence, which obviously implies a maximum of illumination.

Fig. 23-3. Diffraction by a long narrow slit.

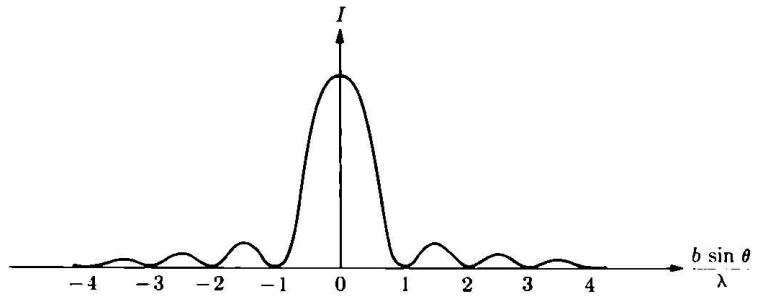


Fig. 23–4. Distribuzione dell'intensità delle frange di diffrazione prodotte da una fenditura stretta e lunga.

Fig. 23–4. Intensity distribution of the diffraction pattern of a long narrow slit.

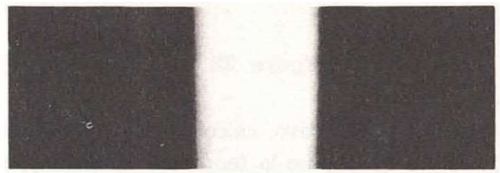


Fig. 23–5. Frange di diffrazione di Fraunhofer prodotte da una fenditura stretta e lunga

Fig. 23–5. Fraunhofer diffraction pattern produced by a long narrow slit.

Dall'Eq. (23.1), si ha

cosicchè l'intensità è nulla per $\sin\theta = \pm\lambda/b, \pm 2\lambda/b, \pm 3\lambda/b, \ldots$. Per giustificare l'Eq. (23.1), dall'Eq. (22.8) ricordiamo che quando la differenza di cammino ottico per due raggi è $r_1 - r_2 =$ numero intero dispari $\times$ $(\lambda/2)$, si ha interferenza con elisione. Ora dalla Fig. 23–3 vediamo che per raggi provenienti da A e dal punto di mezzo C, abbiamo $r_1 - r_2 = CF = \frac{1}{2}b\sin\theta = n(\lambda/2)$. Così per $n = 1, 3, 5, \ldots$, questi due raggi, come tutte le altre coppie di raggi che hanno origine in punti separati da $\frac{1}{2}b$, interferiscono con elisione e non si osservano onde nella direzione θ. Per n pari, si considerino punti A e B separati da $b/4$. Allora

Così per $n/2 =$ numero intero dispari, ossia $n = 2, 6, 10, \ldots$, questi due raggi, così come tutte le altre coppie di raggi aventi origine in punti separati da $b/4$, interferiscono distruttivamente e ancora non si osservano onde nella direzione corrispondente all'angolo θ. Il procedimento può essere esteso fino a comprendere tutti i numeri interi. Per $\theta = 0$, tuttavia, non vi è differenza di fase per i raggi provenienti da punti differenti, e si ha interferenza costruttiva dando luogo a un massimo pronunciato.

Tra ciascuna coppia di punti in cui è nulla l'intensità di illuminamento dato dall'Eq. (23.1) vi è un massimo; ma questi massimi diminuiscono gradualmente in intensità, condizione questa differente da quella che si ha nell'interferenza. L'intensità delle onde diffratte in funzione di θ è rappresentata in Fig. 23–4. Si noti che il massimo centrale ha larghezza doppia degli altri. La Fig. 23–5 rappresenta l'effettivo sistema di frange di diffrazione prodotte da una fenditura rettangolare.

From Eq. (23.1), we have

$$\sin\theta = n\lambda/b, \tag{23.2}$$

so that the intensity is zero for $\sin\theta = \pm\lambda/b, \pm 2\lambda/b, \pm 3\lambda/b, \ldots$. To justify Eq. (23.1), we recall from Eq. (22.8) that when the difference in path length for two rays is $r_1 - r_2 =$ odd integer $\times$ $(\lambda/2)$, destructive interference results. Now from Fig. 23-3 we see that for rays coming from A and the midpoint C we have $r_1 - r_2 = CF = \frac{1}{2}b\sin\theta = n(\lambda/2)$. Thus for $n = 1, 3, 5, \ldots$, these two rays, as well as all other pairs of rays originating at points separated by $\frac{1}{2}b$, interfere destructively, and no wave is observed in the direction θ. For even n, let us consider points A and B separated by $b/4$. Then

$$r_1 - r_2 = BG = \tfrac{1}{4}b\sin\theta = (n/2)(\lambda/2).$$

So for $n/2$ an odd integer, or $n = 2, 6, 10, \ldots$, these two rays, as well as all other pairs of rays originating at points separated by $b/4$, interfere destructively, and again no wave is observed in the direction corresponding to the angle θ. The procedure can be extended until all integers are included. For $\theta = 0$, however, there is no phase difference for the rays coming from different points, and the interference is constructive, resulting in a pronounced maximum.

Between each zero of intensity given by Eq. (23.1) there is a maximum; but these maxima gradually decrease in intensity, a situation different from that for interference. The intensity of the diffracted waves as a function of θ is represented in Fig. 23–4. Note that the central maximum has twice the width of the others. Figure 23–5 shows the actual diffraction pattern of a rectangular slit.

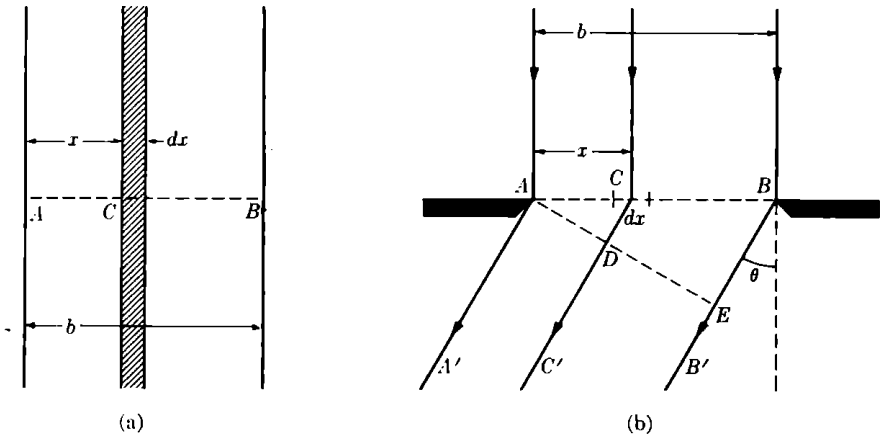


Figura 23–6

Figure 23–6

È non solo facile, ma anche istruttivo, calcolare la distribuzione dell'intensità rappresentata in Fig. 23–4. Se dividiamo la fenditura in fette infinitesime di larghezza dx, come è indicato in Fig. 23–6 (a), possiamo considerare ciascuna fetta come una sorgente secondaria di onde di ampiezza infinitesima $d\xi_0$. Quando consideriamo i raggi emessi nella direzione corrispondente all'angolo θ (Fig. 23–6b), la differenza di fase tra i raggi CC' e AA', presi come riferimento, è

It is easy, as well as instructive, to compute the intensity distribution shown in Fig. 23–4. If we divide the slit into very narrow strips of width dx, as shown in Fig. 23–6(a), we may consider each strip as a secondary source of waves of very small amplitude $d\xi_0$. When we consider the rays emitted in the direction corresponding to the angle θ (Fig. 23–6b), the phase difference between rays CC' and AA', taken as reference, is

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} CD = \frac{2\pi x \sin\theta}{\lambda}, \tag{23.3}$$

e quindi aumenta gradualmente con x. Per ottenere l'ampiezza nella direzione corrispondente all'angolo θ, dobbiamo costruire graficamente la poligonale dei vettori rotanti corrispondenti alle onde generate da tutte le fette da A a B. Poichè sono tutte di ampiezza infinitesima e poichè lo sfasamento angolare δ cresce proporzionalmente con x, i vettori stanno su un arco di cerchio OP il cui centro è in C e il cui raggio è ρ (Fig. 23–7). L'ampiezza risultante A è la corda OP. La pendenza in ogni punto dell'arco da O a P è proprio l'angolo δ dato dall'Eq. (23.3). In P, che corrisponde a $x = b$, l'inclinazione della tangente è l'angolo

and therefore increases gradually with x. To obtain the amplitude in the direction corresponding to the angle θ, we must plot the rotating vectors corresponding to the waves from all the strips from A to B. Since all are of infinitesimal amplitude and since the phase angle δ increases proportionately with x, the vectors fall on an arc of circle OP whose center is at C and whose radius is ρ (Fig. 23–7). The resultant amplitude A is the chord OP. The slope at any point of the arc from O to P is just the angle δ given by Eq. (23.3). At P, which corresponds to $x = b$, the inclination of the tangent is the angle

$$\alpha = \frac{2\pi b \sin\theta}{\lambda}. \tag{23.4}$$

Questo è anche l'angolo formato dai due raggi CO e CP. L'ampiezza risultante è quindi

This is also the angle formed by the two radii CO and CP. Therefore the resultant amplitude is

$$\begin{aligned} A &= \text{chord } OP = 2QP \\ &= 2\rho \sin\tfrac{1}{2}\alpha = 2\rho \sin(\pi b \sin\theta/\lambda). \end{aligned} \tag{23.5}$$

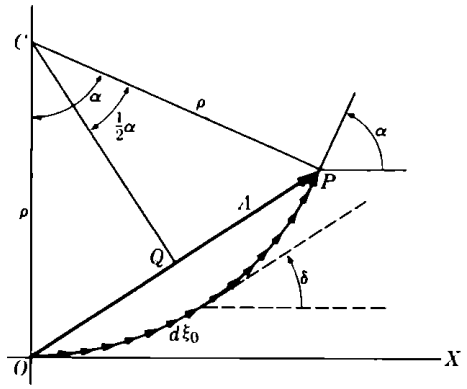


Figura 23–7

Figure 23–7

Osservando in direzione normale, tutti i vettori $d\xi_0$ sono paralleli, e la loro risultante è proprio la somma delle loro lunghezze, che è uguale alla lunghezza dell'arco da O a P. Indicando l'ampiezza risultante per osservazione normale ($\theta = 0$) con A_0, abbiamo allora

$$\text{arc} = \text{arco}$$

Dividendo membro a membro l'Eq. (23.5) per l'Eq. (23.6), otteniamo

e poichè le intensità sono proporzionali ai quadrati delle ampiezze, otteniamo

dove $u = \pi b \sin \theta/\lambda$. Verifichiamo allora che i valori nulli dell'intensità si hanno quando $u = n\pi$, o $b \sin \theta = n\lambda$, in accordo con l'Eq. (23.1), tranne che per $n = 0$, perchè allora $(\sin u/u)_{u=0} = 1$ (N.T.) (vedere Esempio 23.1). Ma poichè questi massimi di intensità corrispondono a valori successivamente più grandi di u, essi diventano sempre più piccoli dando luogo al sistema di frange rappresentato in Fig. 23–4. Per λ molto piccola rispetto a b, i primi valori nulli dell'intensità dalle due parti del massimo centrale corrispondono a un angolo

ottenuto ponendo $n = \pm 1$ nell'Eq. (23.1). Questo è rappresentato in Fig. 23–8. Un concetto utile è quello di *potere separatore* di una fenditura, definito dal fisico inglese Lord Rayleigh come il minimo angolo sotteso da due onde incidenti provenienti da due

Screen = Schermo
From source = Dalla sorgente

Fig. 23–8. Angolo sotteso dal picco luminoso centrale del sistema di frange prodotte da una fenditura unica.

N.T.—Per ottenere i massimi di intensità, troviamo i valori di u che soddisfano la $dI/du = 0$.

For normal observation, all vectors $d\xi_0$ are parallel, and their resultant is just the sum of their lengths, which is equal to the length of the arc from O to P. Designating the resultant amplitude for normal observation ($\theta = 0$) by A_0, we then have

$$A_0 = \text{arc } OP = \rho\alpha = \rho(2\pi b \sin \theta/\lambda). \tag{23.6}$$

Dividing Eq. (23.5) by Eq. (23.6), we get

$$A = A_0\left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta/\lambda)}{\pi b \sin \theta/\lambda}\right], \tag{23.7}$$

and since the intensities are proportional to the squares of the amplitudes, we obtain

$$I = I_0\left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta/\lambda)}{\pi b \sin \theta/\lambda}\right]^2 = I_0\left(\frac{\sin u}{u}\right)^2, \tag{23.8}$$

where $u = \pi b \sin \theta/\lambda$. We verify then that the zeros of the intensity occur when $u = n\pi$, or $b \sin \theta = n\lambda$, in agreement with Eq. (23.1), except for $n = 0$, because then $(\sin u/u)_{u=0} = 1$. To obtain the maxima of intensity, we find the values of u satisfying $dI/du = 0$ (see Example 23.1). But because these maxima of intensity correspond to successively larger values of u, they grow smaller and smaller, resulting in the pattern which was shown in Fig. 23–4. For λ very small compared with b, the first zeros of intensity on either side of the central maximum correspond to an angle

$$\theta \approx \sin \theta = \pm \frac{\lambda}{b}, \tag{23.9}$$

obtained by setting $n = \pm 1$ in Eq. (23.1). This is shown in Fig. 23–8. A useful concept is the *resolving power* of a slit, defined by the English physicist Lord Rayleigh as the minimum angle subtended by two incident waves coming from two

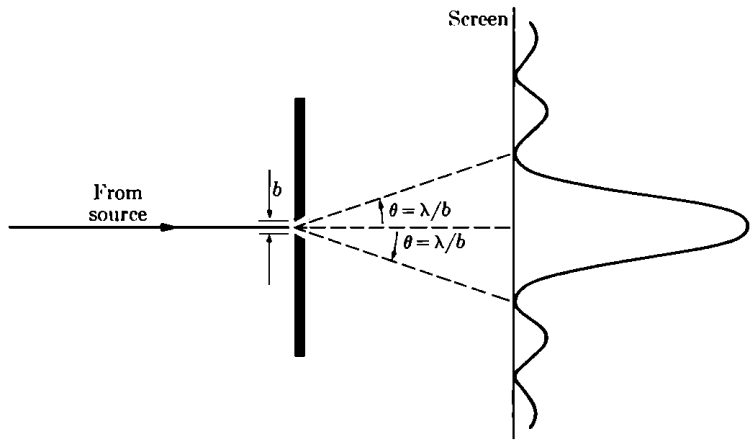


Fig. 23–8. Angle subtended by the central intensity peak of the diffraction pattern of a single slit.

From source = Dalla sorgente
Screen = Schermo
Diffraction pattern from = Figura di diffrazione da

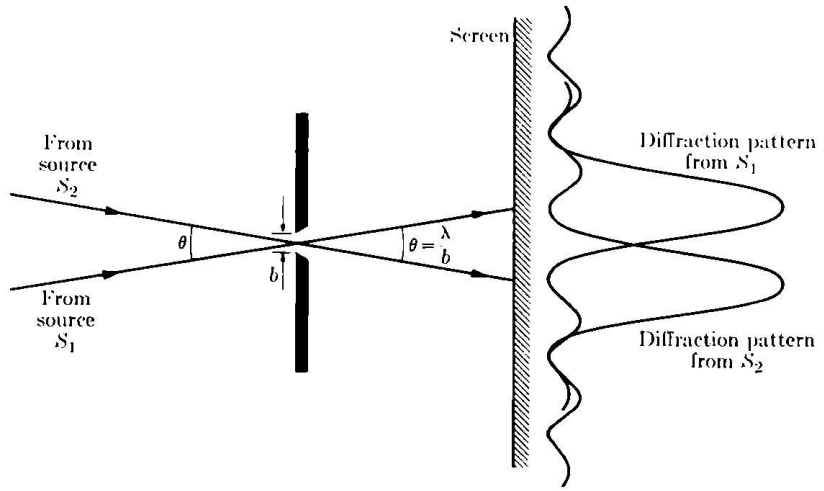


Fig. 23–9. Criterio di Rayleigh per il potere separatore di una fenditura.

Fig. 23–9. Rayleigh's rule for the resolving power of a slit.

sorgenti puntiformi lontane che permette ai loro rispettivi sistemi di frange di diffrazione di essere distinti. Quando onde provenienti da due sorgenti lontane S_1 e S_2 passano attraverso la stessa fenditura in due direzioni che formano un angolo θ (Fig. 23–9) le figure di diffrazione dei due sistemi di onde sono sovrapposte. Esse cominciano ad essere distinte quando il massimo centrale di una cade sul primo punto di intensità nulla da una parte o dall'altra del massimo centrale dell'altra figura, come indicato a destra in Fig. 23–9. Ma allora, in base alla Eq. (23.9) ed alla Fig. 23–8, l'angolo θ deve essere

che dà il potere separatore della fenditura seconda la definizione di Rayleigh. Supponendo che S_1 e S_2 siano due punti su un oggetto lontano, l'Eq. (23.10) dà la minima separazione angolare tra di essi, affinchè i due punti siano riconoscibili come distinti quando l'oggetto è osservator attraverso la fenditura. Se la luce passante attraverso una fenditura forma una immagine su uno schermo, e questa immagine viene osservata, per esempio, con un microscopio, non è possibile, qualunque sia l'ingradimento

distant point sources which will permit their respective diffraction patterns to be distinguished. When waves coming from two distant sources S_1 and S_2 pass through the same slit in two directions, making an angle θ (Fig. 23–9), the diffraction patterns of the two sets of waves are superposed. They begin to be distinguishable when the central maximum of one falls on the first zero on either side of the central maximum of the other, as indicated on the right in Fig. 23–9. But then, in view of Eq. (23.9) and Fig. 23–8, the angle θ must be

$$\theta = \lambda/b, \tag{23.10}$$

which gives the resolving power of the slit according to Rayleigh's definition. Assuming that S_1 and S_2 are two points on a distant object, Eq. (23.10) gives the minimum angular separation between them in order for the two points to be recognizable as different when the object is observed through the slit. If the light passing through the slit forms an image on a screen, and that image is observed with a microscope, for example, it is not possible, no matter what the magnification

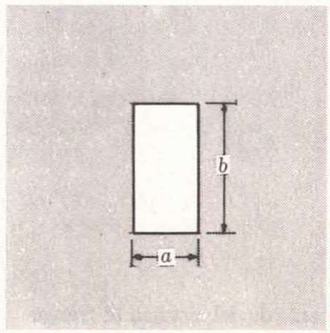


Fig. 23–10. Fenditura rettangolare.

Fig. 23–11. Frange di diffrazione di Fraunhofer prodotte da una fenditura rettangolare la cui altezza è il doppio della sua larghezza.

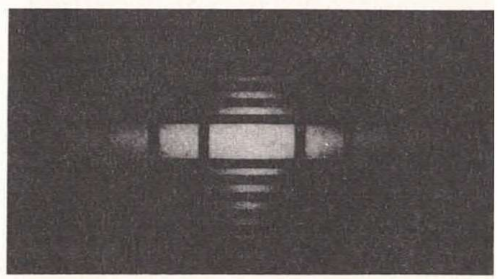


Fig. 23–10. Rectangular slit.

Fig. 23–11. Fraunhofer diffraction pattern of a rectangular slit whose height is twice its width.

del microscopio, osservare più dettagli nell'immagine di quanti sono permessi dal potere separatore della fenditura. Queste considerazioni devono essere tenute presenti nel progetto degli strumenti ottici.

Se la fenditura è rettangolare di lati a e b di dimensioni confrontabili tra di loro (Fig. 23–10), il sistema di frange di diffrazione è la combinazione dei due sistemi dovuti a ciascuna coppia di lati. Invece delle serie di bande indicate in Fig. 23–5, otteniamo una serie di rettangoli disposti a forma di croce, come nella fotografia di Fig. 23–11.

Nei nostri calcoli non abbiamo tenuto conto del fattore di direzionalità $g = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$, di cui abbiamo fatto cenno nella Eq. (20.2) quando abbiamo discusso il principio di Huygens. Questo fattore tende a diminuire ulteriormente l'ampiezza dei massimi di ordine più elevato.

ESEMPIO 23.1. Valutare l'intensità dei successivi massimi nel sistema di frange di diffrazione prodotto da una fenditura.

Soluzione: I massimi successivi si hanno per i massimi della frazione sin u/u, in base all'Eq. (23.8). Perciò, noi dobbiamo trovare

ossia

Questa è una equazione trascendente, di un genere simile a quello che compariva precedentemente nell'Esempio 22.6. Le sue soluzioni sono state trovate ponendo in grafico $y = \tan u$ e $y = u$ e trovando i punti di intersezione delle curve; l'esecuzione di questo calcolo è lasciata allo studente. Ma possiamo fare una valutazione supponendo che i massimi di sin u/u si trovino molto vicino ai massimi di sin u; cioè, quando $u = (n + \frac{1}{2})\pi$. I valori effettivi di u sono sempre leggermente minori di questa valutazione. Trascurando questa piccola differenza, troviamo che i valori di sin u/u nei massimi sono $1/(n + \frac{1}{2})\pi$, e le corrispondenti intensità sono

23.3 Fenomeni di diffrazioni di Fraunhofer prodotti da una apertura circolare

Il sistema di frange di diffrazione prodotte da una apertura circolare presenta molte delle caratteristiche già viste nel caso della fenditura rettangolare. Ma invece di un sistema di frange rettangolari come quello indicato in Fig. 23–11, la figura di diffrazione consiste in un disco luminoso circondato da corone anulari alternativamente scure e chiare come indicato in Fig. 23–12. I raggi del disco centrale e delle successive corone anulari non seguono una legge semplice. Tralasciamo l'analisi matematica del problema, che è molto più complicata per questa disposizione geometrica di quella relativa al caso della fenditura rettangolare. Supponendo che R sia il raggio dell'apertura (Fig. 23–13), l'angolo corrispondente alla prima corona anulare scura è dato dalla condizione

ossia

of the microscope, to observe more details in the image than that allowed by the resolving power of the slit. These considerations must be taken into account in the design of optical instruments.

If the slit is rectangular with sides a and b that are of comparable size (Fig. 23–10), the diffraction pattern is the combination of the two patterns due to each pair of sides. Instead of the series of bands shown in Fig. 23–5, we get a series of rectangles arranged in a crosswise form, as in the photograph of Fig. 23–11.

In our calculation we have not taken into account the directionality factor, $g = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$, which we mentioned in Eq. (20.2) when we were discussing Huygens' principle. This factor tends to further decrease the amplitude of the maxima of higher order.

EXAMPLE 23.1. Estimate the magnitude of the successive maxima in the diffraction pattern of a slit.

Solution: Successive maxima occur at the maxima of the fraction sin u/u, according to Eq. (23.8). Therefore we must find

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sin u}{u}\right) = 0 \qquad \text{or} \qquad \tan u = u.$$

This is a transcendental equation, of a kind similar to that which appeared previously in Example 22.6. Its solutions are found by plotting $y = \tan u$ and $y = u$ and finding the points of intersection of the curves; this is left to the student. But we can make an estimate by assuming that the maxima of sin u/u occur very close to the maxima of sin u; that is, when $u = (n + \frac{1}{2})\pi$. The actual values of u are always slightly less than the estimate. Neglecting this small difference, we find that the values of sin u/u at the maxima are $1/(n + \frac{1}{2})\pi$, and the corresponding intensities are

$$I = \frac{I_0}{(n + \frac{1}{2})^2\pi^2} = 0.045I_0,\ 0.016I_0,\ 0.008I_0.$$

23.3 Fraunhofer Diffraction by a Circular Aperture

The diffraction pattern produced by a circular aperture exhibits many of the features already seen in the case of the rectangular slit. But instead of a rectangular pattern like the one shown in Fig. 23–11, the diffraction pattern consists of a bright disk surrounded by alternate dark and bright rings, as shown in Fig. 23–12. The radii of the central disk and successive rings do not follow a simple sequence. We shall omit the mathematical analysis of the problem, which is much more involved than in the case of the rectangular slit because of the geometrical arrangement. Assuming that R is the radius of the aperture (Fig. 23–13), the angle corresponding to the first dark ring is given by the condition

$$\frac{2\pi R \sin\theta}{\lambda} = 3.8317 \tag{23.11}$$

or

$$\theta \approx \sin\theta = 1.22\frac{\lambda}{2R} = 1.22\frac{\lambda}{D}, \tag{23.12}$$

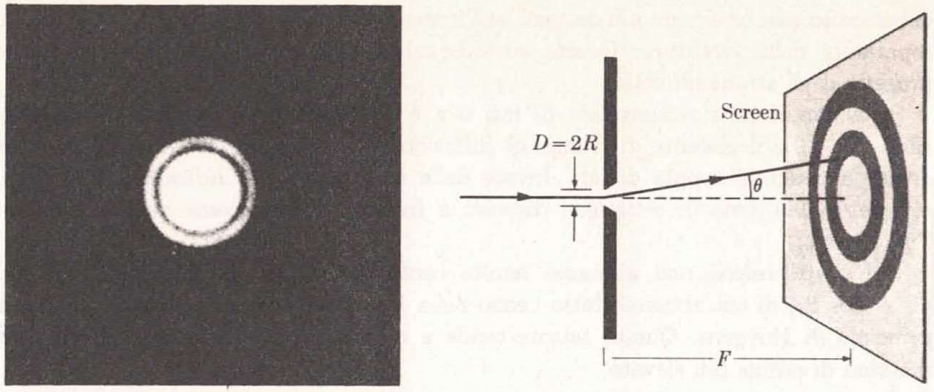


Fig. 23–12. Fraunhofer diffraction pattern of a circular slit.

Figure 23–13

Screen = Schermo

Fig. 23–12. Figura di diffrazione di Fraunhofer prodotta da una apertura circolare.

Figura 23–13

where $D = 2R$ is the diameter of the aperture and θ is expressed in radians. This expression also gives the resolving power for a circular aperture, defined, again according to Rayleigh, as the minimum angle between the directions of incidence of two plane waves coming from two distant point sources which will permit their respective diffraction patterns to be distinguished. This takes place when the center of the bright disk of the diffraction pattern of one source falls on the first dark ring of the diffraction pattern of the second (Fig. 23–14). The angular separation is given by Eq. (23.12). That is, $\theta = 1.22\lambda/D$. This expression appeared in Section 21.5 when we were discussing the magnification of a telescope.

A lens is actually a circular aperture, and therefore the image of a point, which in Chapter 21 was assumed to be another point, is in fact a diffraction pattern. However, the radius of a lens is, in general, so large compared with the wavelength of light that, for most practical purposes, diffraction effects may be ignored.

dove $D = 2R$ è il diametro dell'apertura e θ è espresso in radianti. Questa espressione dà anche il potere separatore per un'apertura circolare, definito, ancora secondo Rayleigh, come il minimo angolo tra le direzioni di incidenza di due onde piane provenienti da due sorgenti puntiformi lontane che permettono alle loro rispettive figure di diffrazione di essere separate. Questo ha luogo quando il centro del disco luminoso del sistema di frange di diffrazione di una sorgente cade sulla prima corona anulare scura della figura di diffrazione del secondo (Fig. 23–14). La separazione angolare è data dall'Eq. (23.12). Cioè, $\theta = 1{,}22\ \lambda/D$. Tale espressione compariva nel Paragrafo 21.5 quando abbiamo discusso l'ingrandimento di un cannocchiale.

Una lente è in realtà una apertura circolare e perciò l'immagine di un punto, che nel Capitolo 21 si è supposto essere un altro punto, è in realtà una figura di diffrazione. Tuttavia, il diametro di una lente è, in generale, così grande rispetto alla lunghezza d'onda della luce che per la maggior parte degli scopi pratici, gli effetti di diffrazione possono essere ignorati.

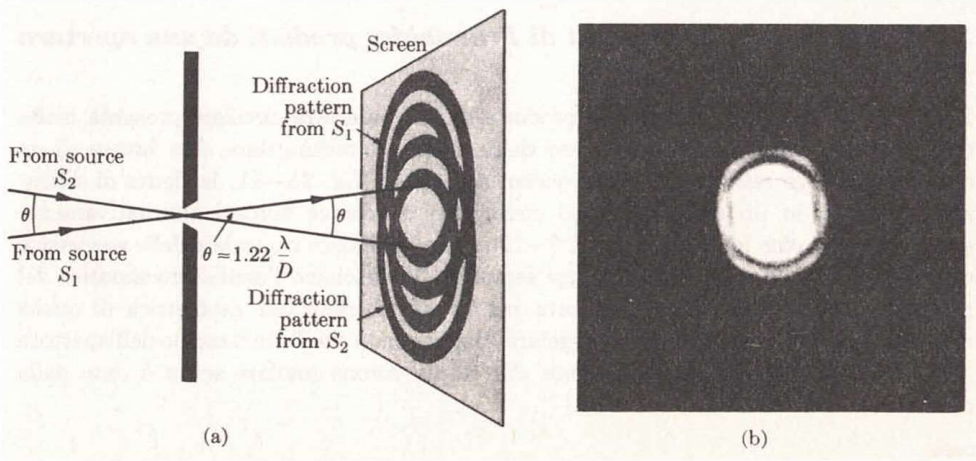


Fig. 23–14. Rayleigh's rule for the resolving power of a circular slit. Part (b) shows two distant point sources imaged through a lens and just resolved.

From source = Dalla sorgente
Diffraction pattern from = Figura di diffrazione da
Screen = Schermo

Fig. 23–14. Criterio di Rayleigh per il potere separatore di una apertura circolare. La parte (b) rappresenta le immagini di due sorgenti puntiformi lontane ottenute mediante una lente e appena risolte.

ESEMPIO 23.2. Una lente di diametro 2 cm ha una distanza focale di 40 cm. Essa è illuminata da un fascio parallelo di luce monocromatica di lunghezza d'onda 5.9×10^{-7} m. Trovare il raggio del disco centrale della figura di diffrazione osservata in un piano posto nel fuoco. Determinare anche il potere separatore della lente per questa lunghezza d'onda.

Soluzione: Quando usiamo l'Eq. (23.12), l'angolo sotteso dal disco centrale nella figura di diffrazione è

Questo è anche il potere separatore della lente. Usando l'Eq. (2.4), il raggio del disco centrale risulta

e perciò, per scopi pratici, possiamo dire che l'immagine nel piano focale è un punto.

Slit = Fenditura

EXAMPLE 23.2. A lens with a diameter of 2 cm has a focal length of 40 cm. It is illuminated with a beam of parallel monochromatic light of wavelength 5.9×10^{-7} m. Find the radius of the central disk of the diffraction pattern observed in a plane at the focus. Also determine the resolving power of the lens for this wavelength.

Solution: When we use Eq. (23.12), the angle subtended by the central disk in the diffraction pattern is

$$\theta = 1.22 \times \frac{5.9 \times 10^{-7}\ \text{m}}{4 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 1.80 \times 10^{-5}\ \text{rad} = 3.71''.$$

This is also the resolving power of the lens. The radius of the central disk, using Eq. (2.4), is

$$r = f\theta = 40\ \text{cm} \times 1.80 \times 10^{-5}\ \text{rad} = 7.2 \times 10^{-4}\ \text{cm},$$

and thus, for practical purposes, we may say that the image at the focal plane is a point.

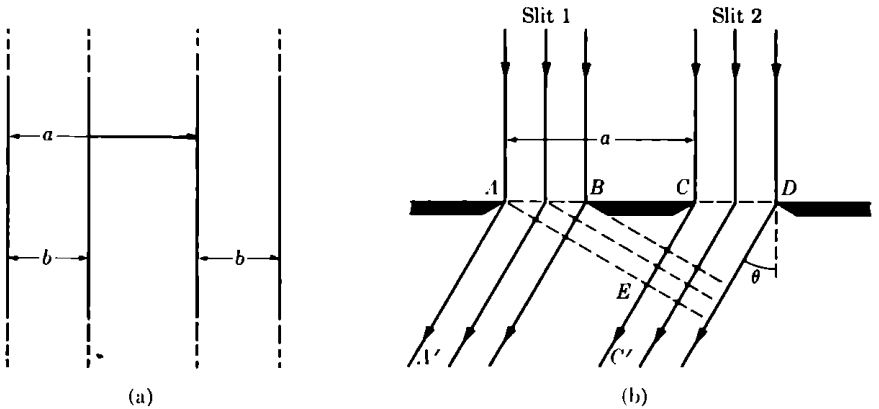


Fig. 23–15. Vista di fronte e in sezione di due fenditure strette e lunghe parallele.

Fig. 23–15. Front view and cross section of two parallel long narrow slits.

23.4 Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer prodotti da due fenditure parallele, uguali

Consideriamo ora due fenditure, ciascuna di larghezza b, e poste a distanza a (Fig. 23—15). Per una direzione corrispondente all'angolo θ abbiamo ora due sistemi di onde diffratte provenienti da ciascuna fenditura, e quello che in realtà osserviamo è il risultato dell'interferenza di queste onde. In altre parole, abbiamo ora una combinazione (dei fenomeni) di diffrazione e di interferenza. Per determinare l'intensità delle onde risultanti in funzione dell'angolo θ, dobbiamo valutare l'ampiezza risultante da ciascuna fenditura e comporre le due ampiezze per ottenere una risultante finale. Questo è indicato in Fig. 23—16, dove sono disegnati i vari vettori rotanti. L'angolo α ha il valore dato dall'Eq. (23.4). Il vettore $\overrightarrow{OP}$ dà l'ampiezza risultante A_1 dalla fenditura 1. Il valore di questa ampiezza, data dall'Eq. (23.7), è

Poichè le due fenditure hanno la stessa larghezza, l'ampiezza risultante per la fenditura 2 ha lo stesso valore A_1, ma la sua fase è diversa. Dalla Fig. 23—15 notiamo che, tra

23.4 Fraunhofer Diffraction by Two Equal, Parallel Slits

Let us now consider two slits, each of width b, displaced the distance a (Fig. 23–15). For a direction corresponding to the angle θ, we now have two sets of diffracted waves coming from each slit, and what we actually observe is the result of the interference of these waves. In other words, we now have a combination of diffraction and interference. To determine the intensity of the resultant waves in terms of the angle θ, we must compute the resultant amplitude from each slit and combine the two amplitudes to obtain a final resultant. This is shown in Fig. 23–16, where the different rotating vectors are drawn. The angle α has the value given by Eq. (23.4). The vector $\overrightarrow{OP}$ gives the resultant amplitude A_1 from slit 1. The value of this amplitude, as given by Eq. (23.7), is

$$A_1 = A_0 \frac{\sin(\pi b \sin\theta/\lambda)}{\pi b \sin\theta/\lambda}. \tag{23.13}$$

Since the two slits have the same width, the resultant amplitude for slit 2 has the same value, A_1, but its phase is different. From Fig. 23–15 we note that, between

i raggi corrispondenti provenienti dalle fenditure 1 e 2 come AA' e CC', vi è una differenza di fase costante data da

Le ampiezze o i vettori corrispondenti delle due fenditure formano perciò un angolo uguale a β. In conseguenza, in Fig. 23—16, il segmento $OQ = A_2$ per la fenditura 2 è ottenuto ruotando dell'angolo β il segmento $OP = A_1$ per la fenditura 1. La loro ampiezza risultante A è allora

Slit = Fenditura

Ponendo $A_1 = A_2$, e usando l'Eq. (M.14), possiamo scrivere

Perciò, usando le Equazioni (23.13) e (23.14), otteniamo

Figura 23—16

La distribuzione della intensità, che noi sappiamo essere proporzionale al quadrato dell'ampiezza, è allora

Quando confrontiamo questa equazione con l'Eq. (23.8) per una sola fenditura, notiamo che ora abbiamo il fattore addizionale $\cos^2(\pi a \sin\theta)/\lambda$. Ma se ricordiamo l'Eq. (22.10), che dà la distribuzione di intensità per le frange di interferenza di due sorgenti coerenti, vediamo che per quanto riguarda il fattore interferenza, l'Eq. (22.10) e l'Eq. (23.15) coincidono, poichè nella Eq. (23.15) a è la distanza delle due fenditure e nella Eq. (22.10) a è la distanza delle due sorgenti. Perciò l'equazione che descrive il sistema complessivo di diffrazione per le due fenditure è l'equazione che descrive le frange di interferenza per due sorgenti coerenti modulate dall'espressione per le frange di diffrazione di una sola fenditura. Questo è rappresentato in Fig. 23—17 e nella fotografia di Fig. 23—18.

Si noti che i massimi delle frange di interferenza si hanno per $\pi a \sin\theta/\lambda = n\pi$, o $\sin\theta = n(\lambda/a)$, mentre i punti di intensità nulla delle frange di diffrazione sono data dall'Eq. (23.2), ossia $\sin\theta = n'(\lambda/b)$. Poichè $a > b$, i punti di intensità nulla delle frange di diffrazione sono maggiormente distanziati dei massimi delle frange di interferenza. Perciò, quando vi sono due fenditure, le frange chiare sono molto più sottili e molto più ravvicinate di quelle prodotte da una singola fenditura.

corresponding rays from slits 1 and 2 such as AA' and CC', there is a constant phase difference given by

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} CE = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}. \tag{23.14}$$

Therefore the corresponding amplitudes or vectors from the two slits make an angle equal to β. Accordingly, in Fig. 23–16 the line $OQ = A_2$ for slit 2 is obtained by rotating line $OP = A_1$ for slit 1 through the angle β. Their resultant amplitude A is then

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\beta}.$$

Setting $A_1 = A_2$, we may write, using Eq. (M.14),

$$A = A_1\sqrt{2(1+\cos\beta)} = 2A_1\cos\tfrac{1}{2}\beta.$$

Therefore, using Eqs. (23.13) and (23.14), we obtain

$$A = 2A_0\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\cos\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}.$$

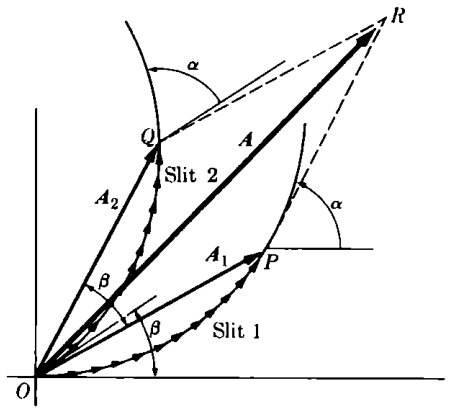


Figure 23–16

The intensity distribution, which we know is proportional to the square of the amplitude, is then

$$I = I_0\left[\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\right]^2\cos^2\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}. \tag{23.15}$$

When we compare this equation with Eq. (23.8) for a single slit, we realize that now we have the additional factor $\cos^2(\pi a\sin\theta)/\lambda$. But if we remember Eq. (22.10), which gives the intensity distribution for the interference pattern of two synchronous sources, we see that Eq. (22.10) and Eq. (23.15) coincide insofar as the interference factor is concerned, since in Eq. (23.15) a is the separation of the two slits and in Eq. (22.10) a is the separation of the two sources. Therefore the equation which describes the overall diffraction pattern for two slits is the equation which describes the interference pattern for two synchronous sources modulated by the expression for the diffraction pattern of a single slit. This is shown in Fig. 23–17 and in the photograph of Fig. 23–18.

Note that the maxima of the interference pattern occur for $\pi a\sin\theta/\lambda = n\pi$, or $\sin\theta = n(\lambda/a)$, while the zeros of the diffraction pattern are given by Eq. (23.2), or $\sin\theta = n'(\lambda/b)$. Since $a > b$, the zeros of the diffraction pattern are more widely spaced than the maxima of the interference pattern. Therefore, when there are two slits, the bright fringes are much narrower and more closely spaced than those produced by a single slit.

Interference pattern = Figura di interferenza
Diffraction pattern = Figura di diffrazione

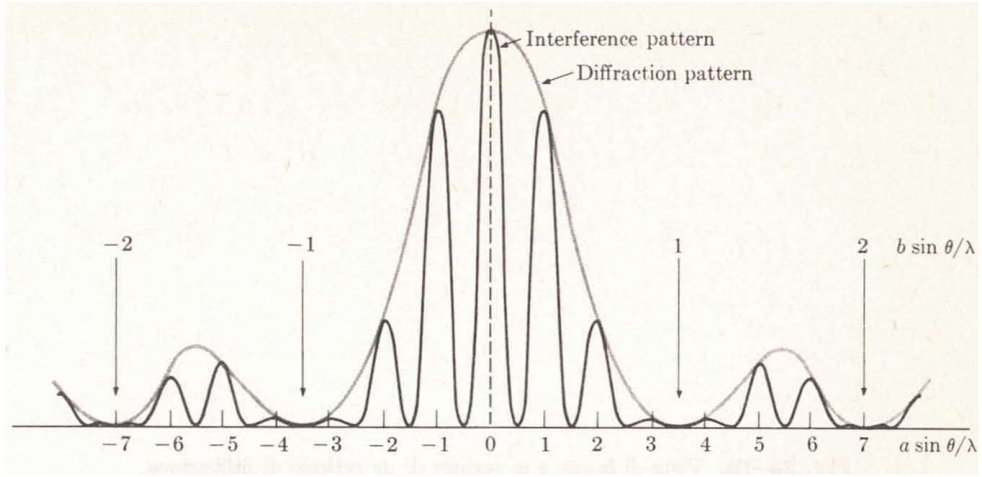


Fig. 23–17. Distribuzione delle intensità (lungo un piano posto normalmente alla luce incidente) risultante da due fenditure strette lunghe e parallele.

Fig. 23–17. Intensity distribution (along a plane set normal to the incident light) resulting from two parallel long narrow slits.

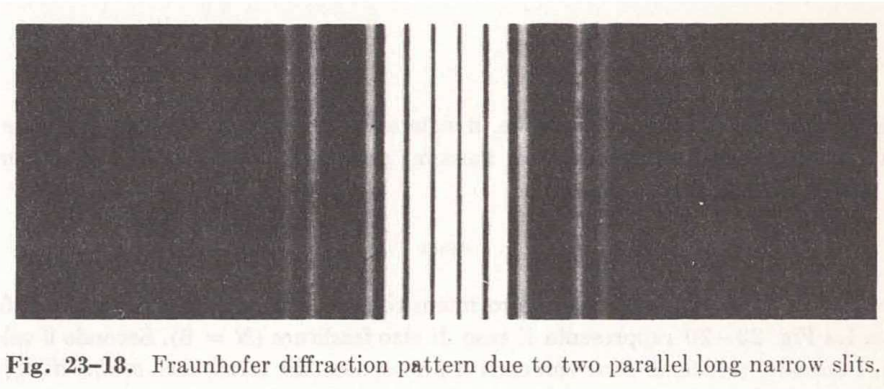


Fig. 23–18. Frange di diffrazione di Fr hofer prodotte da due fenditure strette lunghe e parallele.

Fig. 23–18. Fraunhofer diffraction pattern due to two parallel long narrow slits.

23.5 *Reticoli di diffrazione*

Il passo logico successivo è quello di considerare le frange di diffrazione prodotte da parecchie fenditure parallele di uguale larghezza b, distanziate di uno stesso intervallo a. Sia N il numero delle fenditure. Dalla Fig. 23–19 vediamo, per analogia con il problema della doppia fenditura, che nella direzione corrispondente all'angolo θ dobbiamo osservare l'interferenza dovuta a N sorgenti coerenti (una per fenditura) modulate dalle frange di diffrazione di una fenditura. Poichè la distanza tra le sorgenti successive è a, il fattore di interferenza per l'intensità è lo stesso già trovato nell'Eq. (22.14); cioè,

mentre il fattore di diffrazione, secondo l'Eq. (23.8), è

23.5 *Diffraction Gratings*

The next logical step is to consider the diffraction pattern produced by several parallel slits of equal width b, equally spaced the distance a. Let N be the number of slits. From Fig. 23–19 we see, by similarity with the problem of the double slit, that in the direction corresponding to the angle θ we must observe the interference due to N synchronous sources (one per slit) modulated by the diffraction pattern of one slit. Since the separation between successive sources is a, the interference factor for the intensity is the same as found in Eq. (22.14); that is,

$$\left[\frac{\sin\,(N\pi a \sin\,\theta/\lambda)}{\sin\,(\pi a \sin\,\theta/\lambda)}\right]^2,$$

while the diffraction factor, according to Eq. (23.8), is

$$\left[\frac{\sin\,(\pi b \sin\,\theta/\lambda)}{\pi b \sin\,\theta/\lambda}\right]^2.$$

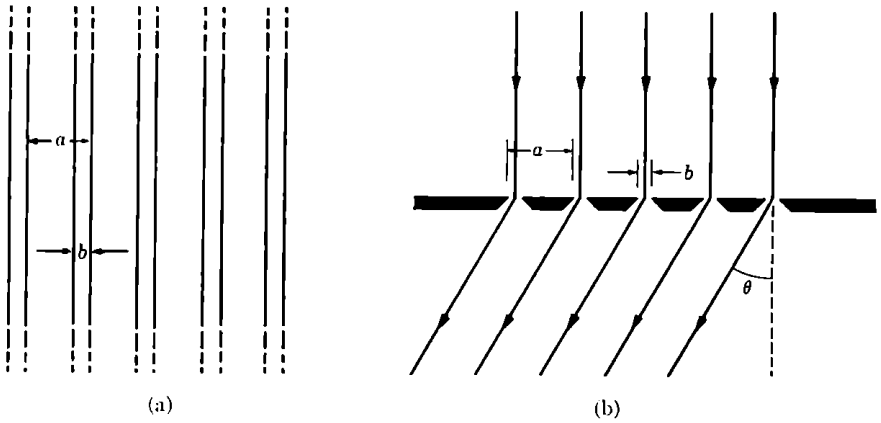


Fig. 23–19. Vista di fronte e in sezione di un reticolo di diffrazione.

La distribuzione dell'intensità è allora

Se il numero di fenditure N è grande, il sistema di frange consisterà in una serie di sottili frange chiare corrispondenti ai massimi principali delle frange di interferenza che, dall'Eq. (22.15), sono dati da

ossia

dove $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ma le loro intensità sono modulate dalle frange di diffrazione. La Fig. 23–20 rappresenta il caso di otto fenditure ($N = 8$). Secondo il valore di n, i massimi principali sono chiamati il primo, secondo, terzo, ecc., *ordine di diffrazione*.

Interference = Interferenza
Diffraction = Diffrazione

Fig. 23–20. Distribuzione della intensità prodotta da un reticolo di diffrazione su un piano posto normalmente alla luce incidente e parallelo al reticolo.

Fig. 23–19. Front view and cross section of a diffraction grating.

The intensity distribution is then

$$I = I_0\left[\frac{\sin(\pi b \sin\theta/\lambda)}{\pi b \sin\theta/\lambda}\right]^2\left[\frac{\sin(N\pi a \sin\theta/\lambda)}{\sin(\pi a \sin\theta/\lambda)}\right]^2. \tag{23.16}$$

If the number of slits N is large, the pattern will consist of a series of narrow bright fringes corresponding to the main maxima of the interference pattern, which, by Eq. (22.15), are given by

$$a \sin\theta = n\lambda \quad \text{or} \quad \sin\theta = n(\lambda/a), \tag{23.17}$$

where $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, but their intensities are modulated by the diffraction pattern. Figure 23–20 shows the case for eight slits ($N = 8$). According to the value of n, the principal maxima are called the first, second, third, etc., *order of diffraction*.

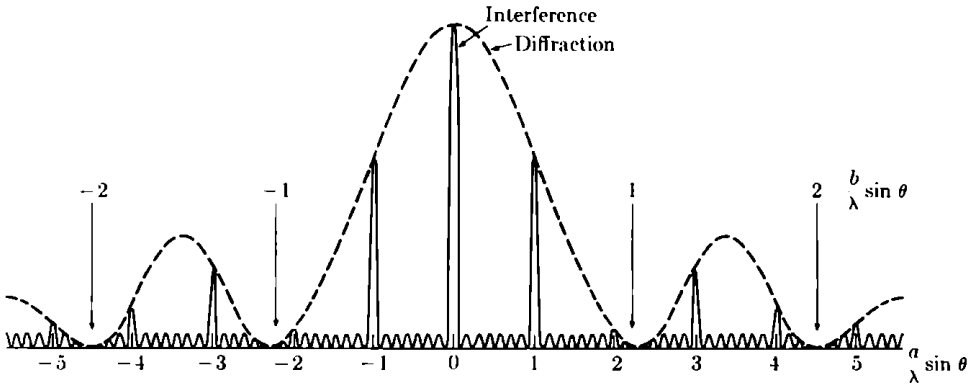


Fig. 23–20. Intensity distribution produced by a diffraction grating on a plane placed normal to the incident light and parallel to the grating.

Un sistema come quello che abbiamo appena esaminato è detto *reticolo di diffrazione per trasmissione*. Allo scopo di analizzare la luce nel vicino infrarosso, visibile, o nell'ultravioletto, i reticoli di diffrazione per trasmissione consistono in parecchie migliaia di fenditure al centimetro ottenute incidendo una serie di tratti paralleli su una pellicola trasparente. I tratti allora si comportano come gli spazi opachi tra le fenditure. Un reticolo di diffrazione può anche funzionare per riflessione: una serie di tratti paralleli è incisa su una superficie metallica. Le sottili striscie tra le incisioni riflettono la luce, producendo un sistema di frange di diffrazione (vedere Problema 23.31). Talvolta, per migliorare la focalizzazione, la superficie viene resa concava (vedere Problema 23.32).

Quando luce di parecchie lunghezze d'onda incide su un reticolo, le differenti lunghezze d'onda producono massimi di diffrazione ad angoli differenti, tranne che per l'ordine zero, che è lo stesso per tutti. L'insieme dei massimi di un dato ordine per tutte le lunghezze d'onda costituisce uno *spettro*. Così abbiamo spettri del primo, secondo, terzo, ecc., ordine. Si noti che più elevata è la lunghezza d'onda, maggiore è la deviazione per un dato ordine dello spettro. Perciò il rosso è deviato più del violetto, a differenza di quanto capita quando la luce è dispersa da un prisma. La *dispersione* di un reticolo è definita da $D = d\theta/d\lambda$. Dalla Eq. (23.17) abbiamo $\cos\theta\, d\theta/d\lambda = n/a$, cosicchè

che indica che più elevato è l'ordine di diffrazione, maggiore è la dispersione. I reticoli di diffrazione sono molto importanti nell'analisi del campo spettrale in un intervallo esteso a varie regioni dello spettro elettromagnetico, e hanno diversi vantaggi sui prismi. Un vantaggio è che i reticoli di diffrazione non dipendono dalle proprietà dispersive del materiale, ma soltanto dalla geometria del reticolo. La Fig. 23–21 indica gli elementi fondamentali di uno spettroscopio a reticolo.

Source = Sorgente
Collimator = Collimatore
Telescope = Cannocchiale
First order = Primo ordine
Second order = Secondo ordine
Zero order = Ordine zero
Grating = Reticolo

Fig. 23–21. Spettroscopio a reticolo. La sorgente si trova di fronte alla fenditura di un collimatore. Il reticolo di diffrazione è posto perpendicolare all'asse del collimatore e gli spettri dei diversi ordini vengono esaminati spostando il cannocchiale.

A system such as the one we have just discussed is called a *transmission diffraction grating*. For purposes of analyzing near-infrared, visible, or ultraviolet light, transmission diffraction gratings consist of several thousands of slits per centimeter, obtained by etching a series of parallel lines on a transparent film. The lines then act as the opaque spaces between the slits. A diffraction grating can also work by reflection: A series of parallel lines are etched on a metallic surface. The narrow strips between the etchings reflect light, producing a diffraction pattern (see Problem 23.31). Sometimes the surface is made concave to improve focusing (see Problem 23.32).

When light of several wavelengths falls on a grating, the different wavelengths produce diffraction maxima at different angles, except for the zero order, which is the same for all. The set of maxima of a given order for all wavelengths constitutes a *spectrum*. So we have spectra of first, second, third, etc., orders. Note that the longer the wavelength, the larger the deviation for a given order of spectrum. Therefore the red is deviated more than the violet, which is the opposite of what happens when light is dispersed by a prism. The *dispersion* of a grating is defined by $D = d\theta/d\lambda$. From Eq. (23.17) we have $\cos\theta\, d\theta/d\lambda = n/a$, so that

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{a\cos\theta}, \tag{23.18}$$

indicating that the higher the order of diffraction, the greater the dispersion. Diffraction gratings are very important in spectrum analysis in a wide range of regions of the electromagnetic spectrum, and have several distinct advantages over prisms. One advantage is that diffraction gratings do not depend on the dispersive properties of the material, but only on the geometry of the grating. Figure 23–21 shows the basic elements of a grating spectroscope.

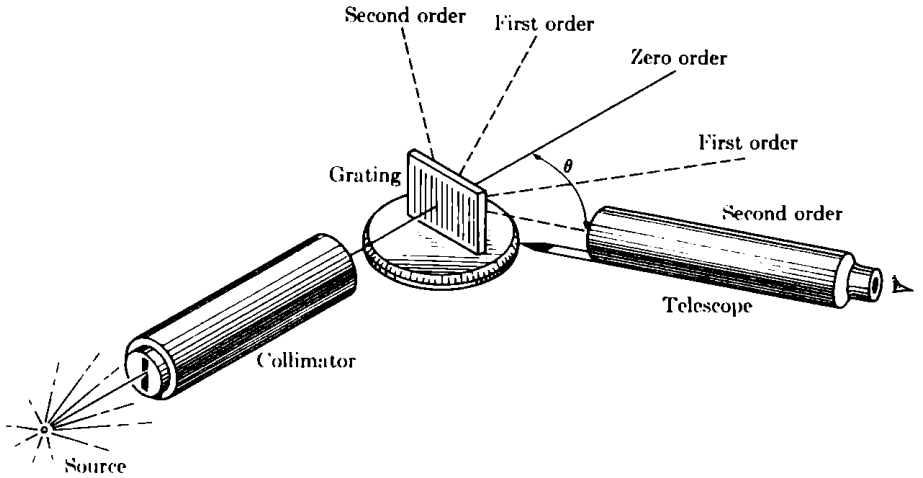


Fig. 23–21. Grating spectroscope. The source is placed in front of the slit on the collimator. The diffraction grating is placed perpendicular to the collimator's axis and the spectra of different orders are investigated by moving the telescope.

ESEMPIO 23.3. Un reticolo con 20.000 tratti ha una lunghezza di 4 cm. Trovare la separazione angolare dell'intero spettro visibile per il primo e il secondo ordine. Si supponga che la lunghezza d'onda sia compresa tra 3.90×10^{-7} m e 7.70×10^{-7} m come ricordato nel Paragrafo 19.15.

Soluzione: Abbiamo $a = 4 \times 10^{-2}\,\text{m}/20.000 = 2 \times 10^{-6}\,\text{m}$. Perciò, usando l'Eq. (23.17), per $n = 1$, abbiamo

ossia

ossia

Perciò lo spettro di primo ordine sottende un angolo di 8°19′. Analogamente, per lo spettro di secondo ordine, l'angolo risulta di 22°27′, come lo studente può calcolare da se stesso. È possibile uno spettro completo del terzo ordine?

ESEMPIO 23.4. Discutere la posizione dei massimi quando l'angolo di incidenza delle onde monocromatiche piane incidenti su un reticolo di diffrazione non è nullo. In Fig. 23—22, l'angolo di incidenza è i e l'angolo di diffrazione è θ.

Soluzione: I massimi principali sono determinati dalle frange di interferenza e queste a loro volta sono determinate dalla differenza di fase tra i raggi corrispondenti nelle successive fenditure. La Fig. 23—22 indica che una tale differenza di fase è data da

Affinchè questa espressione abbia validità generale, gli angoli i e θ devono avere i segni indicati nella figura. La condizione per un massimo diventa allora

ossia

Per $n = 0$, abbiamo $\sin\theta = -\sin i$ ossia $\theta = -i$, che corrisponde al prolungamento del raggio incidente. Se trasformiamo in un prodotto, per mezzo dell'Eq. (M.7), la condizione scritta sopra per un massimo, abbiamo

Perciò la deviazione $D = i + \theta$ per il massimo di ordine n si ottiene dalla

e quindi la deviazione ha un valore minimo quando $\theta = i$, e l'angolo di incidenza per la deviazione minima corrispondente all'ordine n si ottiene dalla

Fig. 23—22. Reticolo di diffrazione impiegato con incidenza obliqua.

EXAMPLE 23.3. A grating with 20,000 lines has a length of 4 cm. Find the angular separation of the whole visible spectrum for the first order and the second order. Assume that the wavelength goes from 3.90×10^{-7} m up to 7.70×10^{-7} m, as mentioned in Section 19.15.

Solution: We have that $a = 4 \times 10^{-2}\,\text{m}/20{,}000 = 2 \times 10^{-6}\,\text{m}$. Therefore, using Eq. (23.17), we have for $n = 1$,

$$\sin\theta_{\text{red}} = \frac{7.70 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-6}} = 0.335 \quad \text{or} \quad \theta_{\text{red}} = 19°34',$$

$$\sin\theta_{\text{violet}} = \frac{3.90 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-6}} = 0.195 \quad \text{or} \quad \theta_{\text{violet}} = 11°15'.$$

Therefore the first-order spectrum covers an angle of 8°19′. Similarly, for the second-order spectrum, the angle is 22°27′, as the student may figure out for himself. Is a full third-order spectrum possible?

EXAMPLE 23.4. Discuss the position of the maxima when the angle of incidence of plane monochromatic waves falling on a diffraction grating is not zero. In Fig. 23–22, the angle of incidence is i and the angle of diffraction is θ.

Solution: The principal maxima are determined by the interference pattern, and this in turn is determined by the phase difference between corresponding rays in successive slits. Figure 23–22 shows that such a phase difference is given by

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(AB + BC) = \frac{2\pi a(\sin i + \sin\theta)}{\lambda}.$$

In order that this expression have general validity, the angles i and θ must have the signs indicated in the figure. The condition for a maximum then becomes

$$a(\sin i + \sin\theta) = n\lambda \quad \text{or} \quad \sin\theta = n\lambda/a - \sin i.$$

For $n = 0$, we have $\sin\theta = -\sin i$ or $\theta = -i$, which corresponds to the continuation of the incident ray. If we transform the above condition for a maximum into a product, by means of Eq. (M.7), we have

$$2a \sin\tfrac{1}{2}(i + \theta)\cos\tfrac{1}{2}(i - \theta) = n\lambda.$$

Therefore the deviation $D = i + \theta$ for the maximum of order n may be found from

$$\sin\tfrac{1}{2}D = \frac{n\lambda}{2a}\sec\tfrac{1}{2}(i - \theta)$$

and thus the deviation is a minimum when $\theta = i$, and the angle of incidence for the minimum deviation for order n is found from

$$\sin i = n\lambda/2a.$$

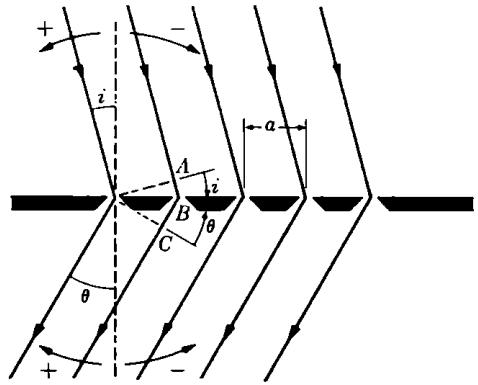


Fig. 23–22. Diffraction grating with oblique incidence.

ESEMPIO 23.5. Discutere il *potere separatore* di un reticolo di diffrazione.

Soluzione: Quando due onde piane, di lunghezza d'onda di poco differente, incidono su un reticolo di diffrazione, i massimi principali dello stesso ordine per ciascuna lunghezza d'onda possono cadere così vicini gli uni agli altri che diventa impossibile distinguere se il fascio incidente originario sia monocromatico o meno. Affinchè le due lunghezze d'onda possano essere distinte (o risolte) in un dato ordine, è necessario che il massimo principale per una lunghezza d'onda cada sul primo punto di intensità nulla dall'uno o dall'altro lato del massimo principale dell'altra lunghezza d'onda. Se $\Delta\lambda$ è la minima differenza di lunghezza d'onda per la quale la sopracitata condizione viene verificata per una lunghezza d'onda λ, il potere separatore del reticolo è

Consideriamo, come esempio, una lunghezza d'onda λ per la quale valga l'Eq. (23.17). I massimi di intensità corrispondono all'angolo dato da $\sin\theta = n\lambda/a$. Allora

Ma i punti di intensità nulla da un lato e dall'altro del massimo di ordine n, sono dati in accordo con l'Eq. (23.16), da

ossia

Chiamando θ' e θ'' i due angoli dati da questa equazione, abbiamo che $\sin\theta' - \sin\theta'' = 2\lambda/Na$, o, usando l'Eq. (M.7), $\sin\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')\cos\frac{1}{2}(\theta' + \theta'') = \lambda/Na$. Poichè l'angolo θ' è quasi uguale all'angolo θ'', possiamo sostituire $\sin\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')$ con $\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')$ e $\cos\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')$ con $\cos\theta$ e scrivere $\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')\cos\theta = \Delta\theta\cos\theta = \lambda/Na$. Ma dalla precedente equazione, $\cos\theta\,\Delta\theta = n\,\Delta\lambda/a$. Abbiamo infine

ossia

Perciò quanto più grande è il numero totale di tratti del reticolo e più elevato è l'ordine dello spettro, tanto più piccolo è $\Delta\lambda$, e dunque tanto più grande è il potere separatore del reticolo. D'altra parte, il potere separatore è indipendente dalle dimensioni e dalla distanza dei tratti nel reticolo.

ESEMPIO 23.6. Stabilire se il reticolo dell'Esempio 23.3 può risolvere le due righe gialle del sodio, le cui lunghezze d'onda sono 5.890×10^{-7} m e 5.896×10^{-7} m.

Soluzione: La lunghezza d'onda intermedia tra le due righe è 5.893×10^{-7} m, e queste sono separate di 6×10^{-10} m. Dai risultati dell'Esempio 23.5, abbiamo che il potere separatore del reticolo è $R = Nn = 2 \times 10^4 n$. Per la lunghezza d'onda assegnata, la minima differenza di lunghezza d'onda risolta nello spettro del primo ordine è

che è un ventesimo della separazione delle due righe del sodio. Quindi ovviamente si potrebbero vedere del tutto distinte le due righe D nello spettro di prim'ordine prodotto dal reticolo.

EXAMPLE 23.5. Discuss the *resolving power* of a diffraction grating.

Solution: When two plane waves, of slightly different wavelength, fall on a diffraction grating, the principal maxima of the same order for each wavelength may fall so close to each other that it is impossible to distinguish whether the original beam was monochromatic or not. In order that the two wavelengths may be distinguished (or resolved) in a given order, it is necessary that the principal maximum for one of the wavelengths fall on the first zero on either side of the principal maximum of the other wavelength. Given that $\Delta\lambda$ is the minimum wavelength difference for which the above condition is met at a wavelength λ, the resolving power of the grating is

$$R = \lambda/\Delta\lambda.$$

Consider, as an example, a wavelength λ such that Eq. (23.17) holds. The maxima of intensity correspond to the angle given by $\sin\theta = n\lambda/a$. Then

$$\cos\theta\,\Delta\theta = n\,\Delta\lambda/a.$$

But the zeros on either side of the maximum of order n, in accordance with Eq. (23.16), are given by

$$\frac{Na\sin\theta}{\lambda} = (Nn \pm 1)\pi \qquad \text{or} \qquad \sin\theta = \frac{Nn \pm 1}{N}\frac{\lambda}{a}.$$

Calling θ' and θ'' the two angles given by this equation, we have that $\sin\theta' - \sin\theta'' = 2\lambda/Na$, or, using Eq. (M.7), $\sin\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')\cos\frac{1}{2}(\theta' + \theta'') = \lambda/Na$. Since θ' is almost equal to θ'', we may replace $\sin\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')$ by $\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')$ and $\cos\frac{1}{2}(\theta' + \theta'')$ by $\cos\theta$ and write $\frac{1}{2}(\theta' - \theta'')\cos\theta = \Delta\theta\cos\theta = \lambda/Na$. But from the above equation, $\cos\theta\,\Delta\theta = n\,\Delta\lambda/a$. Therefore we finally have

$$\lambda/N = n\,\Delta\lambda \qquad \text{or} \qquad R = \lambda/\Delta\lambda = Nn.$$

Therefore, the greater the total number of lines of the grating and the higher the order of the spectrum, the smaller $\Delta\lambda$ is, and so the greater the resolving power of the grating. On the other hand, the resolving power is independent of the size and spacing of the ruling in the grating.

EXAMPLE 23.6. Determine whether the grating of Example 23.3 can resolve the two yellow lines of sodium, whose wavelengths are 5.890×10^{-7} m and 5.896×10^{-7} m.

Solution: The average wavelength of the two lines is 5.893×10^{-7} m, and their separation is 6×10^{-10} m. From the results of Example 23.5, we have that the resolving power of the grating is $R = Nn = 2 \times 10^4 n$. At the given wavelength, the minimum wavelength separation in the first-order spectrum is

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{5.893 \times 10^{-7}}{2 \times 10^4 \times 1} = 2.947 \times 10^{-11}\ \text{m},$$

which is one-twentieth of the separation of the two sodium lines. Hence one could obviously see quite distinctly the two D-lines in the first-order spectrum produced by the grating.

23.6 *Fenomeni di diffrazione di Fresnel*

Come abbiamo spiegato nel Paragrafo 23.1, i fenomeni di diffrazione di Fresnel hanno luogo quando o la sorgente puntiforme delle onde incidenti o il punto di osservazione da cui esse sono viste o entrambi, sono a una distanza finita dall'apertura o dall'ostacolo. I calcoli matematici relativi ai fenomeni di diffrazione di Fresnel sono molto più complicati dei calcoli relativi ai fenomeni di diffrazione di Fraunhofer, ma i concetti fisici rimangono gli stessi. Perciò noi discuteremo soltanto gli aspetti fondamentali e supporremo che la sorgente delle onde sia così lontana dallo schermo che le onde incidenti siano piane e che esse si propaghino perpendicolarmente allo schermo.

Supponiamo di voler determinare l'equazione dell'onda che ci si attende nel punto P, quando conosciamo l'equazione dell'onda in un certo fronte d'onda piana S (Fig. 23–23). Secondo il principio di Huygens-Kirchhoff, come formulato nel Paragrafo 20.2, possiamo dividere il fronte d'onda in elementi di superficie. La simmetria suggerisce che essi siano scelti come corone circolari concentriche rispetto alla proiezione Q sul piano S del punto P. Allora il contributo dell'elemento di superficie di area dS all'equazione dell'onda in P, ha, secondo l'Eq. (20.2), una ampiezza proporzionale a

$$\frac{dS}{r}\,g(\theta), \tag{23.19}$$

dove dS è l'area della corona circolare. La fase iniziale in P dell'onda generata da dS sarà

$$\delta = \frac{2\pi r}{\lambda}. \tag{23.20}$$

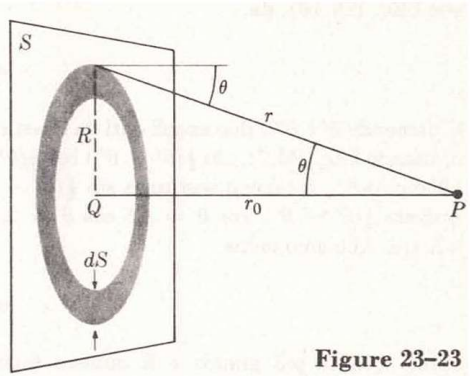


Figura 23–23

Sommando i vettori rotanti delle successive corone circolari caratterizzati dalle Equazioni (23.19) e (23.20), possiamo ottenere l'ampiezza risultante in P. A causa dei fattori $1/r$ e $g(\theta)$, i vettori diventano sempre più piccoli in lunghezza dando luogo a una spirale invece di un cerchio, come indicato in Fig. 23–24.

Per semplificare i calcoli, e in considerazione del fatto che λ è molto più piccola di r_0, possiamo dividere la superficie in corone circolari dette *zone di Fresnel* (Fig. 23–25), le cui distanze da P differiscono successivamente di $\frac{1}{2}\lambda$. Cioè, $r_1 = r_0 + \frac{1}{2}\lambda$, $r_2 = r_1 + \frac{1}{2}\lambda$, $r_3 = r_2 + \frac{1}{2}\lambda$, ecc. Una tale suddivisione gode della proprietà che le onde che giungono in P dalle zone successive hanno una differenza di fase di π e interferiscono distruttivamente; cioè

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{2\pi}{\lambda}(r_{n+1} - r_n) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \pi,$$

che corrisponde a interferenza distruttiva [si ricordi l'Eq. (12.21)]. Se ξ_{0n} è l'ampiezza prodotta in P dalla n-esima zona, proporzionale al valore dato dall'Eq. (23.19), l'ampiezza risultante in P è

$$\xi_0 = \xi_{00} - \xi_{01} + \xi_{02} - \xi_{03} + \cdots \tag{23.21}$$

23.6 *Fresnel Diffraction*

As explained in Section 23.1, Fresnel diffraction takes place when either the point source of incident waves or the observation point from which they are seen, or both, are at a finite distance from the aperture, or from the obstacle. The mathematical calculations for Fresnel diffraction are much more involved than the calculations for Fraunhofer diffraction, but the physical ideas remain the same. Therefore we shall discuss only the fundamental aspects, and we shall assume that the source of the waves is so far away from the screen that the incident waves are plane, and that they propagate perpendicular to the screen.

Suppose that we want to compute the wave motion to be expected at point P when we know the wave motion at a certain plane wave front S (Fig. 23–23). According to the Huygens-Kirchhoff principle, as formulated in Section 20.2, we may divide the wave front into surface elements. Symmetry suggests that they be chosen as circular rings concentric at the projection Q of P on the plane S. Then the contribution of the surface element of area dS to the wave motion at P, according to Eq. (20.2), has an amplitude proportional to

$$\frac{dS}{r}\,g(\theta), \tag{23.19}$$

where dS is the area of the ring. The initial phase at P of the wave produced by dS will be

$$\delta = \frac{2\pi r}{\lambda}. \tag{23.20}$$

By adding the rotating vectors of successive rings characterized by Eqs. (23.19) and (23.20), we can obtain the resultant amplitude at P. Because of the $1/r$ and $g(\theta)$ factors, the vectors become smaller and smaller in size, resulting in a spiral instead of a circle, as shown in Fig. 23–24.

Figure 23–23

To simplify the calculation, and in view of the fact that λ is much smaller than r_0, we shall divide the surface into rings called *Fresnel zones* (Fig. 23–25), whose distances to P differ successively by $\frac{1}{2}\lambda$. That is, $r_1 = r_0 + \frac{1}{2}\lambda$, $r_2 = r_1 + \frac{1}{2}\lambda$, $r_3 = r_2 + \frac{1}{2}\lambda$, etc. This arrangement has the property that the waves from successive zones arriving at P have a phase difference of π and interfere destructively; that is,

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{2\pi}{\lambda}(r_{n+1} - r_n) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \pi,$$

which corresponds to destructive interference [remember Eq. (12.21)]. If ξ_{0n} is the amplitude produced at P by the nth zone, which is proportional to the value given in Eq. (23.19), the resultant amplitude at P is

$$\xi_0 = \xi_{00} - \xi_{01} + \xi_{02} - \xi_{03} + \cdots \tag{23.21}$$

Possiamo anche scrivere questo nella forma

$$\xi_0 = \tfrac{1}{2}\xi_{00} + (\tfrac{1}{2}\xi_{00} - \xi_{01} + \tfrac{1}{2}\xi_{02}) + (\tfrac{1}{2}\xi_{02} - \xi_{03} + \tfrac{1}{2}\xi_{04}) + \cdots$$

Le ampiezze dalle zone vicine sono quasi uguali in grandezza, anche se esse diminuiscono al crescere di n; cioè, $\xi_{00} > \xi_{01} > \xi_{02} > \ldots$. Così possiamo scrivere, con buona approssimazione, che $\frac{1}{2}\xi_{00} - \xi_{01} + \frac{1}{2}\xi_{02} \approx 0$, e in generale, $\frac{1}{2}\xi_{0(n-1)} - \xi_{0n} + \frac{1}{2}\xi_{0(n+1)} \approx 0$. Perciò, per un piano indefinito, la somma nella Eq. (23.21) si riduce effettivamente a

The amplitudes from neighboring zones are almost equal in magnitude, although they decrease when n increases; that is, $\xi_{00} > \xi_{01} > \xi_{02} > \ldots$. So we may write, with good approximation, that $\frac{1}{2}\xi_{00} - \xi_{01} + \frac{1}{2}\xi_{02} \approx 0$, and in general, $\frac{1}{2}\xi_{0(n-1)} - \xi_{0n} + \frac{1}{2}\xi_{0(n+1)} \approx 0$. Therefore the summation in Eq. (23.21) for an infinite plane effectively reduces to

$$\xi_0 = \tfrac{1}{2}\xi_{00}, \tag{23.22}$$

e il moto dell'onda in P ha origine da quella parte del fronte d'onda direttamente allineato con P, essendo uguale a metà di quello nella sola prima zona di Fresnel.

and the wave motion at P proceeds from the part of the wave front directly in line with P, being equal to one-half of the first Fresnel zone only.

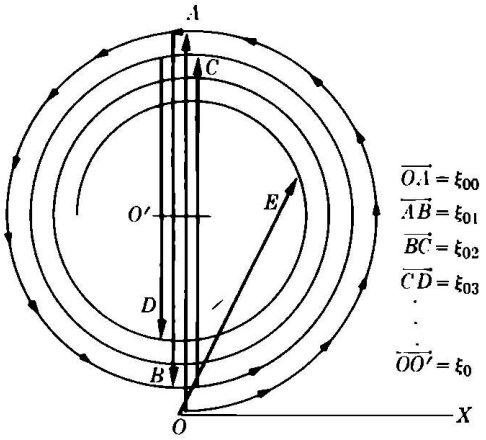


Figura 23–24

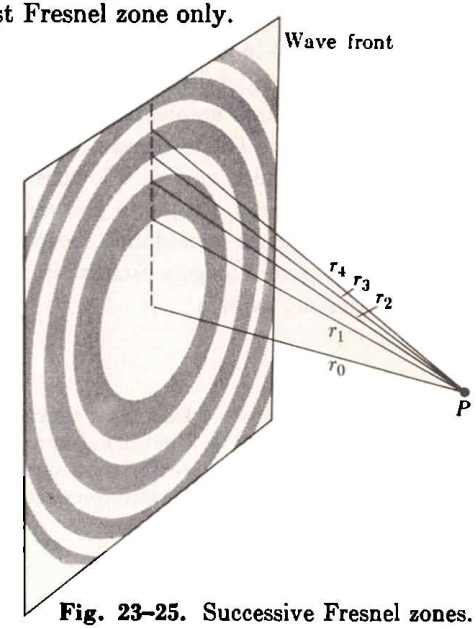


Fig. 23–25. Successive zone di Fresnel.

Wave front = Fronte d'onda

Figure 23–24

Fig. 23–25. Successive Fresnel zones.

Si noti che ciascuna zona di Fresnel è composta di molti degli elementi di superficie circolari illustrati in Fig. 23–23. Per capire la situazione mediante un diagramma dei vettori ampiezza come quello di Fig. 23–24, si noti che, per la prima zona, la distanza va da r_0 a $r_0 + \frac{1}{2}\lambda$, o la fase da $2\pi r_0/\lambda$ a $(2\pi r_0/\lambda) + \pi$. Questo significa che quando disegnamo tutti i vettori ampiezza da tutte le sorgenti secondarie entro questa zona, la loro differenza di fase cambia gradualmente da zero a π. Tali vettori costituiscono l'arco da O ad A in Fig. 23–24, e l'ampiezza ξ_{00} dovuta alla prima zona è il vettore $\overrightarrow{OA}$. Per la seconda zona, la distanza va da $r_0 + \frac{1}{2}\lambda$ a $r_0 + \lambda$, o la fase da $(2\pi r_0/\lambda) + \pi$ a $(2\pi r_0/\lambda) + 2\pi$, dando luogo ancora a una differenza di fase di π tra gli estremi cosicchè la seconda zona corrisponde all'arco da A a B, con ampiezza ξ_{01} uguale al vettore $\overrightarrow{AB}$. Tale procedimento viene ripetuto fino a che si sia tenuto conto di tutte le zone. La spirale converge ad un punto O', cosicchè l'ampiezza risultante è $\overrightarrow{OO'}$, che è approssimativamente $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, come nell'Eq. (23.22).

Note that each Fresnel zone is composed of many of the circular surface elements illustrated in Fig. 23–23. To understand the situation in terms of an amplitude vector diagram such as that of Fig. 23–24, note that, for the first zone, the distance goes from r_0 to $r_0 + \frac{1}{2}\lambda$, or the phase from $2\pi r_0/\lambda$ to $(2\pi r_0/\lambda) + \pi$. This means that when we draw all the amplitude vectors from all secondary sources within this zone, their phase difference changes gradually from zero to π. These vectors constitute the arc from O to A in Fig. 23–24, and the amplitude ξ_{00} of the first zone is the vector $\overrightarrow{OA}$. For the second zone, the distances go from $r_0 + \frac{1}{2}\lambda$ to $r_0 + \lambda$, or the phases from $(2\pi r_0/\lambda) + \pi$ to $(2\pi r_0/\lambda) + 2\pi$, again resulting in a phase difference of π between extremes, so that the second zone corresponds to the arc from A to B, with its amplitude ξ_{01} equal to vector $\overrightarrow{AB}$. This procedure is repeated until all zones are covered. The spiral converges at a point O', so that the resultant amplitude is $\overrightarrow{OO'}$, which is approximately $\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, as in Eq. (23.22).

A questo punto si noti che essendo $r_n = r_0 + \frac{1}{2}n\lambda$, il raggio della zona n, dalla Fig. 23–25, risulta $R_n^2 = r_n^2 - r_0^2 = (r_0 + \frac{1}{2}n\lambda)^2 - r_0^2 = n\lambda r_0 + \frac{1}{4}n^2\lambda^2$. Se n non è molto grande, l'ultimo termine può essere trascurato (se $\lambda \ll r_0$), cosicchè

Questo mostra incidentalmente che tutte le zone di Fresnel hanno la stessa area, che è uguale a $\pi\lambda r_0$.

Quando il fronte d'onda viene arrestato da uno schermo, la situazione risulta completamente differente da quella dell'Eq. (23.22), perchè allora alcune zone contribuiscono solo parzialmente (o niente del tutto) al moto dell'onda in P. Supponiamo ora che un'onda incida normalmente su uno schermo avente una apertura circolare di raggio a. Il punto di osservazione è su una retta perpendicolare allo schermo e passante per il centro dell'apertura cosicchè le zone di Fresnel sono concentriche con l'apertura. Quando il punto è a una distanza r_0, tale che $a^2 = \lambda r_0$, solo una zona passa attraverso l'apertura, producendo in P una ampiezza ξ_{00}, che ha valore doppio del valore ottenuto nell'Eq. (23.22) per l'intero fronte d'onda, dando luogo a un illuminamento in P quattro volte più grande di quando non vi è lo schermo, e viene esposto l'intero fronte d'onda! Se l'apertura è più larga o il punto più vicino, cosicchè $a^2 = 2\lambda r_0$, attraverso l'apertura passano le due prime zone dando luogo a una ampiezza $\xi_{00} - \xi_{01}$, che è praticamente nulla e dando quindi luogo a oscurità in P! In genere, fino a che rimane valida la nostra approssimazione, avremo

One zone, bright center = Una zona, centro chiaro
Two zones, dark center = Due zone, centro scuro
Three zones, bright center = Tre zone, centro chiaro
Four zones, dark center = Quattro zone, centro scuro

Fig. 23–26. Variazione nelle zone di Fresnel, osservate in un punto fisso, risultante da una variazione nel diametro della apertura.

Fig. 23–27. Variazione nelle zone di Fresnel come risultato di uno spostamento di un punto parallelamente al piano della apertura, come rappresentato in Fig. 23–28.

At this point, let us note that since $r_n = r_0 + \frac{1}{2}n\lambda$, the radius of zone n, from Fig. 23–25, is $R_n^2 = r_n^2 - r_0^2 = (r_0 + \frac{1}{2}n\lambda)^2 - r_0^2 = n\lambda r_0 + \frac{1}{4}n^2\lambda^2$. If n is not very large, the last term can be neglected (if $\lambda \ll r_0$), so that

$$R_n^2 = n\lambda r_0. \tag{23.23}$$

Incidentally, this shows that all Fresnel zones have the same area, which is equal to $\pi\lambda r_0$.

When the wave front is blocked by a screen, the situation is completely different from Eq. (23.22), because then some zones contribute only partially (or not at all) to the wave motion at P. Now suppose that an incident wave falls at normal incidence on a screen having a circular aperture of radius a. The observation point is on a line perpendicular to the screen through the center of the aperture, so that the Fresnel zones are concentric with the aperture. When the point is a distance r_0 such that $a^2 = \lambda r_0$, only one zone passes through the aperture, producing at P an amplitude ξ_{00}, which is twice the value obtained in Eq. (23.22) for the whole wave front, resulting in an illumination at P four times as great as when no screen is present and the whole wave front is exposed! If the aperture is larger, or the point closer, so that $a^2 = 2\lambda r_0$, the first two zones pass through the aperture, resulting in an amplitude of $\xi_{00} - \xi_{01}$, which is practically zero and results in darkness at P! In general, so long as our approximation remains valid, we shall

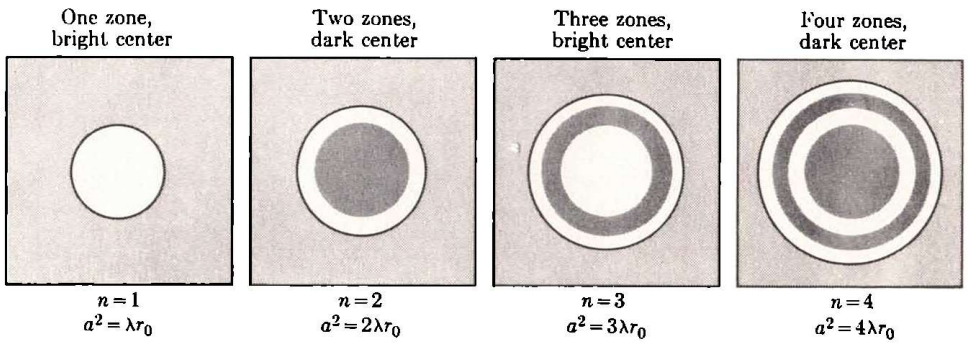


Fig. 23–26. Change in Fresnel zones for a fixed point resulting from a change in the size of the aperture.

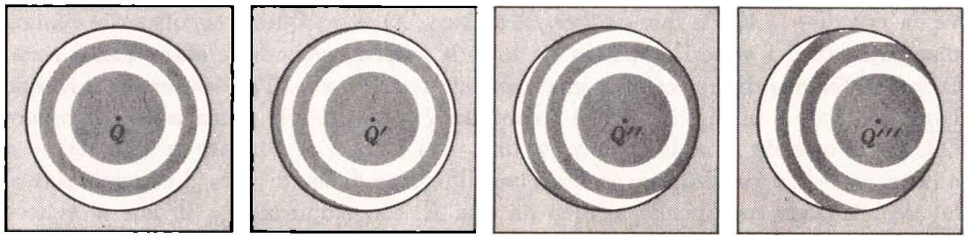


Fig. 23–27. Change in Fresnel zones resulting from a displacement of a point parallel to the plane of the aperture, as shown in Fig. 23–28.

luminanza massima od oscurità al centro del sistema di frange di diffrazione a seconda se n è dispari o pari, dove n è il numero di zone di Fresnel comprese entro l'apertura relativa al punto dove si osserva diffrazione. La situazione per diversi valori di n è indicata in Fig. 23–26.

Usando il diagramma di Fig. 23–24, vediamo che quando è esposta una sola zona, l'ampiezza risultante è $\overrightarrow{OA} = \xi_{00}$. Quando sono esposte due zone, l'ampiezza risultante è $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \xi_{00} - \xi_{01}$. Per tre zone, è

e così via. In generale, quando viene esposto un certo numero di zone di Fresnel complete più una frazione, si può ottenere l'ampiezza risultante tracciando su un grafico come in Fig. 23–24, il vettore $\overrightarrow{OE}$ che va dal punto O al punto E, corrispondente all'esatto numero di zone compresa la frazione dell'ultima. Nel caso indicato in Fig. 23–24, E corrisponde a quattro zone più una frazione della quinta.

Figura 23–28

Quando il punto di osservazione si sposta lateralmente in un piano parallelo allo schermo, le zone di Fresnel si spostano con esso, ma esse non sono più simmetriche rispetto all'apertura come indicato in Fig. 23–27. In questa figura, ciascun caso corrisponde alle diverse posizioni P, P', P'', P''' del punto di osservazione, come si vede in Fig. 23–28, con zone centrate in Q, Q', Q'', Q''', rispettivamente. Il risultato è che le diverse zone attive contribuiscono differentemente al moto dell'onda risultante, dando luogo a frange di diffrazione composte di una serie di corone anulari che sono concentriche con P e che sono alternativamente chiare e scure, come indicato in Fig. 23–29. La Fig. 23–30 rappresenta la distribuzione dell'intensità

have maximum brightness or darkness at the center of the diffraction pattern, depending on whether n is odd or even, where n is the number of Fresnel zones falling within the aperture relative to the point where the diffraction is observed. The situation for different values of n is shown in Fig. 23–26.

Using the diagram of Fig. 23–24, we see that when only one zone is exposed, the resultant amplitude is $\overrightarrow{OA} = \xi_{00}$. When two zones are exposed, the resultant amplitude is $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \xi_{00} - \xi_{01}$. For three zones, it is

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \xi_{00} - \xi_{01} + \xi_{02} \approx \tfrac{1}{2}(\xi_{00} + \xi_{02}),$$

and so on. In general, when a certain number of complete Fresnel zones, plus a fraction, are exposed, one can obtain the resultant amplitude by drawing, on a diagram such as Fig. 23–24, the vector $\overrightarrow{OE}$ that goes from O to the point E, which corresponds to the exact number of zones plus the fraction of the last. In the case shown in Fig. 23–24, E corresponds to four zones plus a fraction of a fifth.

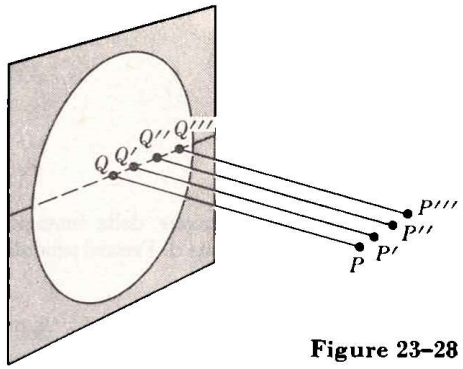


Figure 23–28

When the observation point moves sidewise, parallel to the screen, the Fresnel zones move with it, but they are no longer symmetric with respect to the aperture, as shown in Fig. 23–27. In that figure, each case corresponds to the different positions P, P', P'', P''' of the observation point, as shown in Fig. 23–28, with zones centered at Q, Q', Q'', Q''', respectively. The result is that the different active zones contribute differently to the resulting wave motion, giving rise to a diffraction pattern composed of a series of rings which are concentric with P and which alternate in brightness, as shown in Fig. 23–29. Figure 23–30 shows the intensity

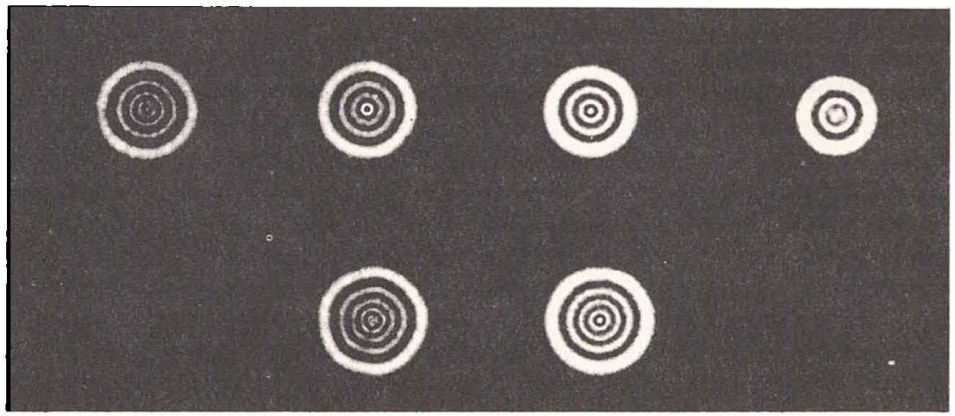


Fig. 23–29. Figure di diffrazione di Fresnel prodotte da aperture circolari di diversi raggi.

Fig. 23–29. Fresnel diffraction patterns of circular apertures of different radii.

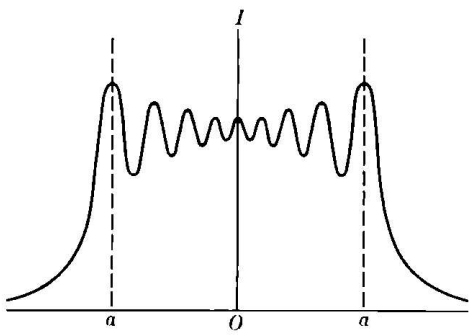


Fig. 23–30. Distribuzione della intensità nei fenomeni di diffrazione di Fresnel prodotti da una apertura circolare.

Fig. 23–31. Fenomeni di diffrazione di Fresnel prodotti da un piccolo disco circolare portato da una sottile asta.

Fig. 23–30. Intensity distribution of Fresnel diffraction by a circular aperture.

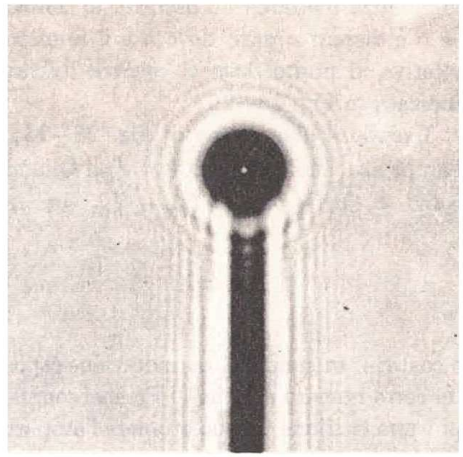


Fig. 23–31. Fresnel diffraction by a small circular disk supported by a thin rod.

in funzione della distanza dall'asse dell'apertura circolare di raggio a, comprendente parecchie zone.

Se invece di una apertura circolare abbiamo un disco circolare, la figura di diffrazione è simile, tranne che nel centro, dove si ha sempre luce. Questo avviene perchè la prima zona di Fresnel non esposta dà sempre un contributo positivo al centro, per lo stesso motivo per cui lo dà nel caso di un fronte d'onda piana completamente esposto (Fig. 23–31).

distribution as a function of the distance from the axis of the aperture for a circular aperture of radius a, comprising several zones.

If instead of a circular aperture we have a circular disk, the diffraction pattern is similar, except that at the center there is always brightness. This is because at the center the first unexposed Fresnel zone always gives a positive contribution, for the same reason that it does in the case of a completely exposed plane wave front (Fig. 23–31).

Fresnel diffraction = Fenomeni di diffrazione di Fresnel
Fraunhofer diffraction = Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer
Incident waves = Onde incidenti
Small = Piccolo
Intermediate = Intermedio
Large = Grande

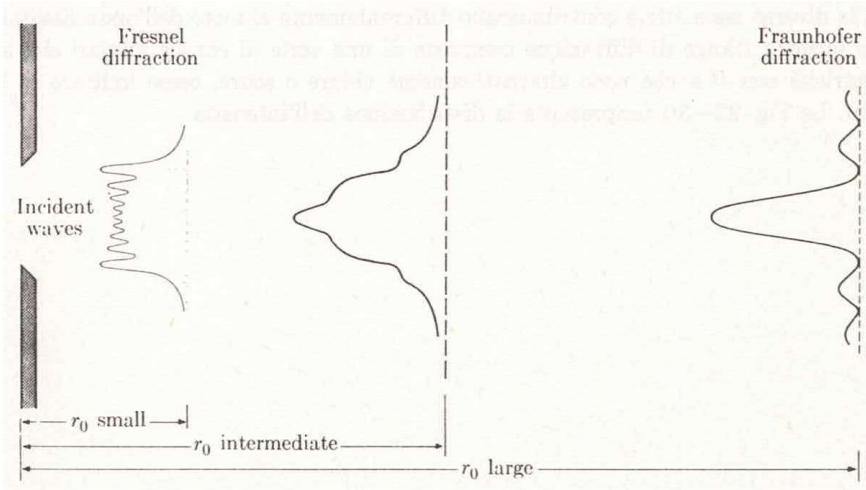


Fig. 23–32. Variazione nella figura di diffrazione al variare della distanza del punto dall'apertura.

Fig. 23–32. Change in the diffraction pattern as the distance from the point to the aperture changes.

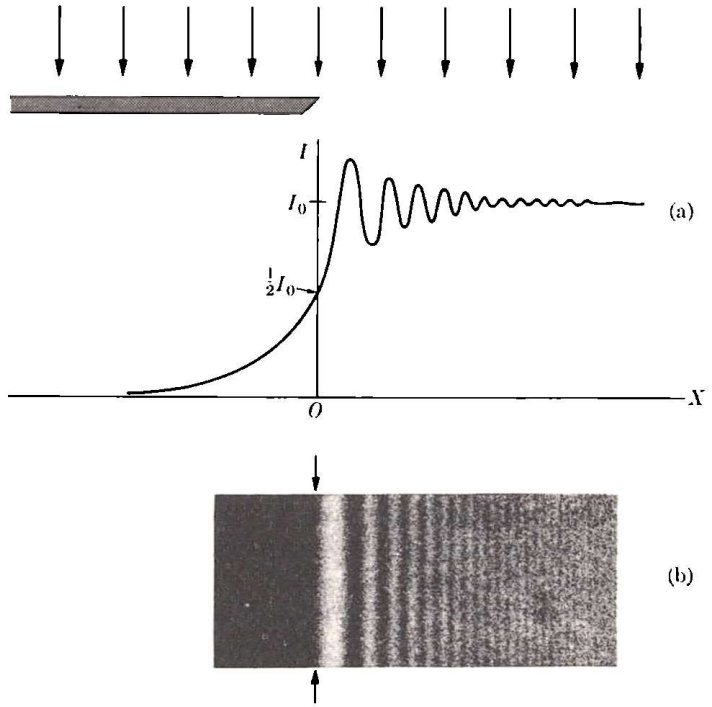


Fig. 23–33. (a) Distribuzione della intensità nei fenomeni di diffrazione di Fresnel prodotti da uno spigolo rettilineo. (b) Fotografia dei fenomeni di diffrazione di Fresnel prodotti da uno spigolo rettilineo.

Per una fenditura rettangolare la situazione è molto simile a quella per l'apertura circolare, salvo che invece di corone anulari le zone di Fresnel sono frange parallele alla fenditura. Come ci si allontana da una fenditura, il sistema di frange di diffrazione evolve gradualmente da un sistema di frange di Fresnel a un sistema di frange di Fraunhofer, come indicato in Fig. 23—32.

Per uno spigolo rettilineo, il sistema di frange di diffrazione ha una distribuzione delle intensità rappresentata in Fig. 23—33, con l'intensità che tende a zero gradualmente nella zona dell'ombra geometrica, ed ha andamento oscillante per un primo tratto di alcune lunghezze d'onda nella zona geometrica di illuminamento.

ESEMPIO 23.7. Uno schermo con un piccolo foro di diametro 1 mm viene illuminato con luce di lunghezza d'onda 5.9×10^{-7} m. Calcolare la distanza, lungo la perpendicolare per il centro del foro, tra lo schermo e il punto oscuro più lontano.

Soluzione: In questo caso il raggio del foro è $a = 0.5$ mm $= 5 \times 10^{-4}$ m e la lunghezza d'onda è $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m. Il punto oscuro più lontano è quel punto per cui solo due zone di Fresnel stanno entro l'apertura. Perciò secondo l'Eq. (23.23), con $n = 2$ e R_n sostituito da a, abbiamo $a^2 = 2\lambda r_0$ ossia $r_0 = a^2/2\lambda = 0.212$ m, che significa che il punto oscuro più lontano è a circa 21.2 cm dallo schermo. In generale, i successivi punti di oscurità sono a distanze di $a^2/2n\lambda$ (dove n è un numero intero) dallo schermo.

Fig. 23–33. (a) Intensity distribution for Fresnel diffraction by a straight edge. (b) Photograph of the Fresnel diffraction by a straight edge.

For a rectangular slit the situation is very similar to that for the circular aperture, except that instead of rings the Fresnel zones are strips parallel to the slit. As we recede from a slit, the diffraction pattern evolves gradually from a Fresnel pattern to a Fraunhofer pattern, as indicated in Fig. 23–32.

At an edge, the diffraction pattern has the intensity distribution shown in Fig. 23–33, with the intensity falling off gradually to zero within the geometrical shadow, and fluctuating during the first few wavelengths within the geometrical region of illumination.

EXAMPLE 23.7. A screen with a small hole 1 mm in diameter is illuminated with light of wavelength 5.9×10^{-7} m. Calculate the distance along the perpendicular between the screen and the farthest point of darkness.

Solution: In this case the radius of the hole is $a = 0.5$ mm $= 5 \times 10^{-4}$ m and the wavelength is $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m. The farthest point of darkness is that point at which only two Fresnel zones are within the aperture. Thus, according to Eq. (23.23), with $n = 2$ and R_n replaced by a, we have $a^2 = 2\lambda r_0$ or $r_0 = a^2/2\lambda = 0.212$ m, which means that the farthest point of darkness is about 21.2 cm from the screen. In general, successive points of darkness are at distances of $a^2/2n\lambda$ (where n is an integer) from the screen.

23.7 *Diffusione*

Finora nella nostra discussione sulla diffrazione, abbiamo implicitamente supposto che gli oggetti interposti sul cammino di un'onda giuochino un ruolo *passivo*. Cioè, abbiamo supposto che il loro solo ruolo sia quello di interrompere una parte del fronte d'onda senza aggiungere esse stesse una nuova onda. Con tale ipotesi, gli effetti di diffrazione osservati sono esclusivamente dovuti all'onda incidente distorta.

Tuttavia, in molti casi, questa non è una descrizione realistica. Supponiamo, per esempio, che una sfera di materiale elastico sia sospesa nell'aria e che un'onda acustica o di compressione sia prodotta nelle vicinanze. Quando l'onda passa intorno alla sfera, essa subisce, prima di tutto, una diffrazione del tipo discusso precedentemente. Ma, in aggiunta, la sfera elastica subisce deformazioni oscillatorie dovute alle fluttuazioni della pressione che accompagnano l'onda. Le oscillazioni della superficie della sfera producono a loro volta nuove perturbazioni o onde nell'aria circostante; esse sono sovrapposte all'onda iniziale. Le nuove onde prodotte dalla sfera oscillante sono le onde *diffuse* e il processo è detto *diffusione*.

Analogamente, se una sfera conduttrice è posta sul cammino di un'onda elettromagnetica, i campi elettrico e magnetico dell'onda inducono oscillazioni nelle cariche libere sulla sfera, e queste cariche oscillanti, secondo la teoria sviluppata nel Capitolo 19 per la radiazione elettromagnetica, producono una onda elettromagnetica nuova o diffusa.

Nel Capitolo 19 abbiamo discusso la diffusione di un singolo elettrone, problema questo puramente dinamico su scala atomica. La diffusione che stiamo per descrivere qui ha una natura più macroscopica, in quanto essa implica corpi costituiti da molti atomi o contenenti molti elettroni. Possiamo calcolare l'entità di questa diffusione macroscopica applicando certe condizioni al contorno sulla superficie del corpo, condizioni che determinano la natura dell'onda diffusa. Per esempio, nel caso di una sfera perfettamente conduttrice, dobbiamo richiedere che alla superficie della sfera la componente tangenziale del campo elettrico risultante (cioè la somma del campo dell'onda incidente e dell'onda diffusa) sia nulla.

I processi di diffusione sono estremamente importanti in tutti i fenomeni di onde. Tuttavia, una più completa discussione della diffusione richiede un trattamento matematico che esula dallo scopo di questo testo.

23.8 *Diffusione di raggi x da cristalli*

Onde elettromagnetiche con lunghezze d'onda più corte delle ultraviolette, come raggi x e raggi γ non sono sensibilmente diffratte da oggetti delle dimensioni usate nella regione ottica. Tuttavia, un reticolo cristallino con atomi e molecole regolarmente spaziati a distanze dell'ordine di 10^{-10} m, fornisce un eccellente mezzo per produrre diffrazione di raggi x. Questo problema è talvolta più complicato di quelli discussi precedentemente in questo capitolo, per due ragioni. In primo luogo, poichè un tale cristallo è un sistema ordinato in tre dimensioni, i centri di diffrazione sono distribuiti nello spazio piuttosto che in una direzione, come indicato in Fig. 23—34 che è la rappresentazione di un cristallo di NaCl. (Le sfere scure e chiare corrispondono rispettivamente agli

23.7 *Scattering*

So far in our discussion of diffraction we have implicitly assumed that the objects interposed in the path of a wave play a *passive* role. That is, we have assumed that their only role is to interrupt a part of the wave front, without themselves adding any new wave. With such an assumption, the diffraction effects observed are exclusively due to the distorted incident wave motion.

However, in many instances this is not a realistic picture. Suppose, for example, that a sphere of elastic material is suspended in the air and that an acoustical or compressional wave is produced nearby. When the wave passes around the sphere, it suffers, first of all, a diffraction of the type discussed previously. But in addition the elastic sphere undergoes oscillatory deformations due to the pressure fluctuations accompanying the wave. The oscillations of the surface of the sphere in turn produce new perturbations or waves in the surrounding air; these are superposed on the initial wave. The new waves produced by the oscillating sphere are the *scattered* waves, and the process is called *scattering*.

Similarly, if a conducting sphere is placed in the path of an electromagnetic wave, the electric and magnetic fields of the wave induce oscillations in the free charges on the sphere, and these oscillating charges, according to the theory developed in Chapter 19 for electromagnetic radiation, produce a new or scattered electromagnetic wave.

In Chapter 19 we discussed scattering by a single electron, which is a purely dynamical problem at the atomic order of magnitude. The scattering we are describing here has a more macroscopic nature, since it involves bodies composed of many atoms or containing many electrons. We can compute the magnitude of this macroscopic scattering by applying certain boundary conditions at the surface of the body, conditions which determine the nature of the scattered wave. For example, in the case of a perfectly conducting sphere, we must require that at the surface of the sphere the tangential component of the resultant electric field (i.e., the sum of the field of the incident wave and the scattered wave) be zero.

Scattering processes are extremely important to all wave phenomena. However, a more thorough discussion of scattering requires a mathematical treatment beyond the scope of this text.

23.8 *X-Ray Scattering by Crystals*

Electromagnetic waves with wavelengths shorter than the ultraviolet, such as x-rays and γ-rays, are not noticeably diffracted by objects of the dimensions used for the optical region. However, a crystal lattice, with atoms or molecules regularly spaced at distances of the order of 10^{-10} m, provides an excellent medium for producing diffraction of x-rays. This problem is somewhat more complicated than those discussed previously in this chapter, for two reasons. In the first place, since such a crystal is a three-dimensional array, the diffraction centers are distributed in space rather than in one direction, as indicated in Fig. 23–34, which is a diagram of a NaCl crystal. (The dark and light spheres correspond to the

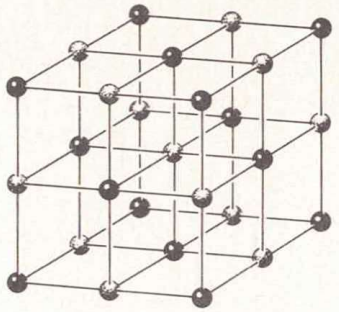


Fig. 23–34. Rappresentazione semplificata di un cristallo di cloruro di sodio, che indica la disposizione regolare di atomi formanti un reticolo cubico.

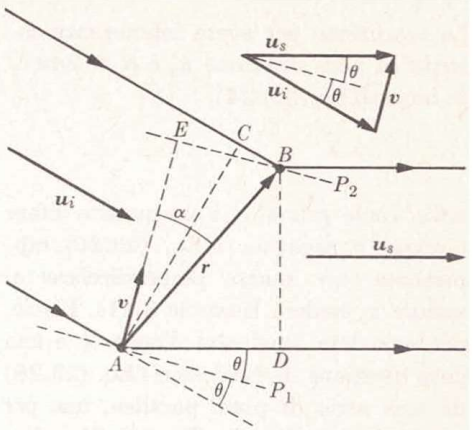


Fig. 23–35. Diffusione di raggi x da due atomi A e B.

ioni Na^+ e Cl^-.) In secondo luogo, sotto l'azione del campo elettrico di un'onda elettromagnetica, gli atomi o le molecole in un cristallo diventano sorgenti secondarie di radiazione, come è stato precedentemente spiegato nel Paragrafo 19.9. In realtà, abbiamo quindi piuttosto una diffusione che una diffrazione.

Quando i raggi x passano attraverso il cristallo, l'intensità dei raggi diffusi o diffratti è il risultato dell'interferenza (lungo la direzione di osservazione) delle onde emesse da ciascun atomo o molecola. Quando il cristallo è composto di più di una classe di atomi, ciascun tipo di atomo contribuisce in un modo differente alla diffusione dei raggi x. Perciò, per semplificare il nostro calcolo, dovremo supporre di avere soltanto una classe di atomi, e soltanto un atomo per cella elementare nei cristalli. I risultati sono di validità generale. Quando è presente più di una classe di atomi, la correzione è molto semplice e si può calcolare direttamente, ma non sarà discussa qui.

Si considerino due atomi A e B, posti a distanza r (Fig. 23–35). Sia $\boldsymbol{u}_i$ un versore lungo la direzione di propagazione delle onde incidenti e $\boldsymbol{u}_d$ un versore analogo lungo la direzione delle onde diffuse. La differenza di cammino tra le onde incidenti e le onde diffuse per questi due atomi è $AD - BC$, e lo sfasamento è dato da

Ma $AD = \boldsymbol{u}_d \cdot \boldsymbol{r}$ e $BC = \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{r}$. Perciò

$$\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{u}_d$$

dove $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_d - \boldsymbol{u}_i$. Indicando con 2θ l'angolo tra $\boldsymbol{u}_d$ e $\boldsymbol{u}_i$, vediamo dall'inserto in Fig. 23–35, che

Na$^+$ and Cl$^-$ ions.) Second, under the action of the electric field of an electromagnetic wave, the atoms or molecules in a crystal become secondary sources of radiation, as previously explained in Section 19.9. Therefore we actually have more of a scattering than a diffraction.

When x-rays pass through the crystal, the intensity of the scattered or diffracted rays is the result of the interference (along the direction of observation) of the waves emitted by each atom or molecule. When the crystal is composed of more than one class of atoms, each kind of atom contributes in a different way to the scattering of the x-rays. Thus, to simplify our calculation, we shall assume that we have only one class of atoms, and only one atom per unit cell in the crystals. The results are of general validity. The correction when more than one class of atoms are present is very simple and straightforward to compute, but will not be discussed here.

Let us consider two atoms A and B, separated the distance r (Fig. 23–35). Let $\boldsymbol{u}_i$ be a unit vector along the direction of propagation of the incident waves and $\boldsymbol{u}_s$ a similar unit vector along the direction of the scattered waves. The path difference for the incident and scattered waves for those two atoms is $AD - BC$, and the phase shift is given by

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(AD - BC).$$

But $AD = \boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{r}$ and $BC = \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{r}$. Therefore

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(\boldsymbol{u}_s - \boldsymbol{u}_i) \cdot \boldsymbol{r} = \frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}, \tag{23.24}$$

where $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_s - \boldsymbol{u}_i$. Designating the angle between $\boldsymbol{u}_s$ and $\boldsymbol{u}_i$ by 2θ, we see, from the insert in Fig. 23–35, that

$$v = 2 \sin \theta. \tag{23.25}$$

La condizione per avere interferenza costruttiva nella direzione $\boldsymbol{u}_d$ è $\delta = 2n\pi$ o, in base all'Eq. (23.24),

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = n\lambda, \qquad (23.26)$$

dove, come prima, n è un numero intero positivo o negativo. L'Eq. (23.26) rappresenta un piano perpendicolare al vettore $\boldsymbol{v}$ (vedere Esempio 3.11). Perciò, per una data lunghezza d'onda λ e una data direzione di incidenza, l'Eq. (23.26) dà una serie di piani paralleli, uno per ciascun valore di n. La Fig. 23–35 indica due di questi piani P_1 e P_2. Per tutti gli atomi posti su questi piani, si verifica la condizione (23.26) ed essi contribuiscono tutti ad un massimo di intensità nella direzione $\boldsymbol{u}_d$. Nell'Eq. (23.26), $n = 0$ corrisponde al piano passante per A, $n = \pm 1$ ai piani immediatamente prossimi da una parte e dall'altra, $n = \pm 2$ alla coppia successiva di piani, e così via.

Fig. 23–36. Piani diffondenti paralleli in un cristallo.

Dalla Fig. 23–35, e usando l'Eq. (23.25), vediamo che $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = vr \cos\alpha = 2d \sin\theta$, dove $d = AE = r \cos\alpha$ è la distanza tra i piani P_1 e P_2. Allora l'Eq. (23.26) diventa

$$2d \sin\theta = n\lambda, \qquad (23.27)$$

espressione nota come *equazione di Bragg*. I valori di n sono limitati dalla condizione che deve essere sin θ minore di 1. La geometria che interviene in questa equazione è indicata in Fig. 23–36. Per raggi come 1 e 2 che sono diffusi da atomi nello stesso piano, la differenza di fase è nulla ($n = 0$) ed essi interferiscono costruttivamente. Questo, tuttavia, accade per ogni angolo di incidenza. Il fatto importante

X-ray tube = Tubo a raggi x
Slit = Fenditura
Crystal = Cristallo
Detector = Ricevitore

Fig. 23–37. Spettrometro a cristallo per diffrazione di raggi x. I raggi x, generati dal tubo a sinistra nella figura e collimati da una fenditura praticata in un blocco di piombo, sono diffratti dal cristallo. I raggi x diffratti sono osservati da un ricevitore mobile, di solito una camera di ionizzazione.

The condition for constructive interference in the direction $\boldsymbol{u}_s$ is $\delta = 2n\pi$ or, in view of Eq. (23.24),

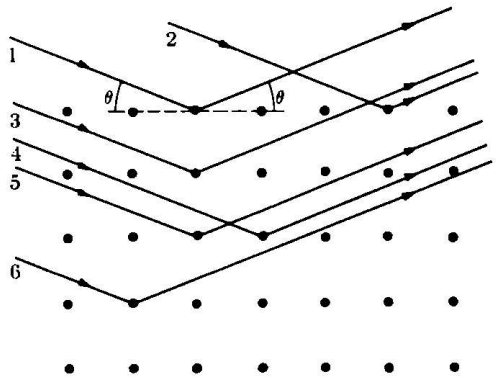


Fig. 23–36. Parallel scattering planes in a crystal.

where, as before, n is a positive or negative integer. Equation (23.26) represents a plane perpendicular to the vector $\boldsymbol{v}$ (see Example 3.11). Therefore, for a given wavelength λ and a given direction of incidence, Eq. (23.26) gives a series of parallel planes, one for each value of n. Figure 23–35 shows two such planes, P_1 and P_2. For all atoms located on these planes, condition (23.26) holds and they all contribute to a maximum of intensity in the direction $\boldsymbol{u}_s$. In Eq. (23.26), $n = 0$ corresponds to the plane passing through A, $n = \pm 1$ to the next closest plane on either side, $n = \pm 2$ for the next pair of planes, and so on.

From Fig. 23–35, and using Eq. (23.25), we see that $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = vr \cos\alpha = 2d \sin\theta$, where $d = AE = r \cos\alpha$ is the distance between planes P_1 and P_2. Then Eq. (23.26) becomes

$$2d \sin\theta = n\lambda, \qquad (23.27)$$

an expression known as *Bragg's equation*. The values of n are limited by the condition that sin θ must be smaller than one. The geometry involved in this equation is shown in Fig. 23–36. For rays such as 1 and 2 which are scattered by atoms in the same plane, the phase difference is zero ($n = 0$) and they interfere constructively. This, however, happens for any angle of incidence. The important thing

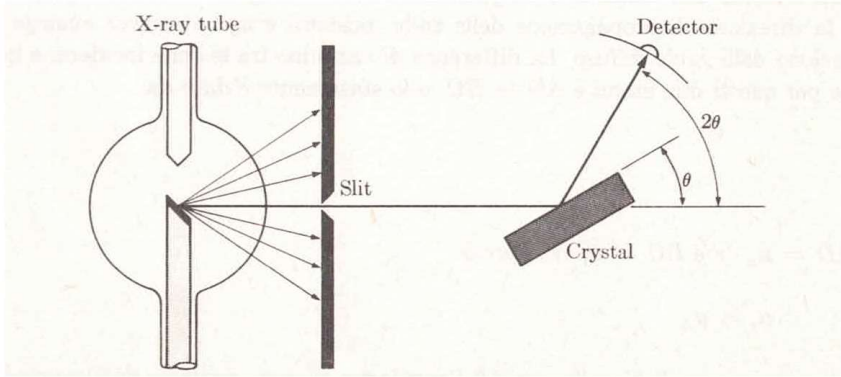


Fig. 23–37. Crystal spectrometer for x-ray diffraction. X-rays, generated by the tube at left and collimated by a slit in a lead block, are diffracted by the crystal. The diffracted x-rays are observed by a movable detector, usually an ion chamber.

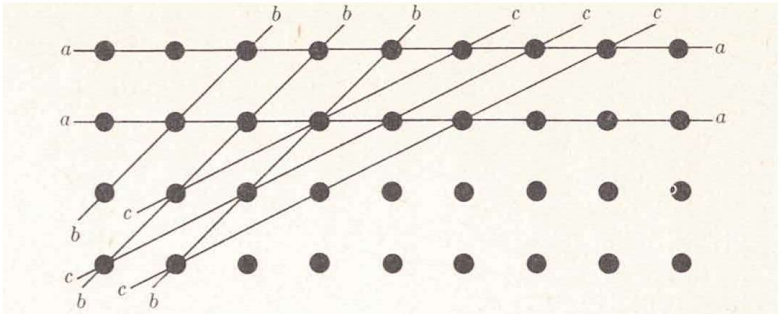


Fig. 23–38. Several possible parallel scattering planes in a crystal.

Fig. 23–38. Alcuni possibili piani diffondenti paralleli in un cristallo.

contenuto nella condizione di Bragg è che raggi come 3, 4, 5, . . ., provenienti da piani successivi interferiscono anche costruttivamente dando luogo a un massimo molto intenso. Perciò la condizione di Bragg esprime una specie di effetto collettivo, in cui i raggi diffusi da tutti gli atomi in certi piani paralleli interferiscono costruttivamente. Per determinati piani (o determinata d) e lunghezza d'onda λ, variando l'angolo si hanno alternativamente posizioni di massima e minima intensità, corrispondenti a interferenza costruttiva (data dall'Eq. 23.27), o distruttiva. Si noti che l'Eq. (23.27) può essere usata per misurare la distanza d dei piani se è nota la lunghezza d'onda λ, e viceversa. Un disegno schematico del dispositivo sperimentale per osservare diffusione di Bragg di raggi x, dispositivo detto *spettrometro a cristallo*, è rappresentato in Fig. 23–37.

Per una data direzioni di incidenza $\boldsymbol{u}_i$, l'Eq. (23.26) definisce una serie di possibili famiglie di piani paralleli, che dànno luogo a un massimo per la diffusione nella direzione $\boldsymbol{u}_d$ caratteristico di ciascuna famiglia. L'intensità dipende dal numero di atomi in ciascuna famiglia di piani. Alcune delle possibili famiglie di piani sono indicate in Fig. 23–38. Ciascun piano corrisponde a una diversa densità dei centri di diffusione e una diversa distanza. Se nel cammino dei raggi diffusi, diffratti da un monocristallo (vedere Fig. 23–39), viene interposto uno schermo, appare uno spettro regolare, che è caratteristico della struttura cristallina. Esso è detto *spettrogramma di Laue*. Ciascun punto nello spettrogramma corrisponde alla direzione di $\boldsymbol{u}_d$ riferita alle diverse famiglie di piani illustrate in Fig. 23–38. La fotografia di Fig. 23–40 riporta un tale spettrogramma di Laue.

Incident x-ray = Raggio x incidente
Single crystal = Monocristallo
Scattered x-rays = Raggi x diffusi
Screen = Schermo

Fig. 23–39. Fenomeni di diffrazione di Laue di raggi x da un monocristallo.

Se il materiale diffondente, invece di essere un monocristallo, è una polvere contenente un gran numero di piccoli cristalli, tutti orientati casualmente, i corrispondenti vettori $\boldsymbol{u}_d$ sono distribuiti su superficie coniche intorno alla direzione di incidenza, come è indicato in Fig.

implied by Bragg's condition is that rays such as 3, 4, 5, . . . , coming from successive planes also interfere constructively, giving rise to a very intense maximum. Therefore Bragg's condition expresses a sort of collective effect, in which the rays scattered by all atoms in certain parallel planes interfere constructively. For fixed planes (or fixed d) and wavelength λ, changing the angle θ alternately produces positions of maximum and minimum intensity, corresponding to constructive (as given by Eq. 23.27), or destructive interference. Note that Eq. (23.27) can be used to measure the plane separation d if the wavelength λ is known, and conversely. A schematic drawing of the experimental arrangement for observing Bragg's scattering of x-rays, a device called a *crystal spectrometer*, is shown in Fig. 23–37.

For a given direction of incidence $\boldsymbol{u}_i$, Eq. (23.26) defines a series of possible families of parallel planes, producing a maximum for scattering in the directions $\boldsymbol{u}_s$ characteristic of each family. The intensity depends on the number of atoms in each family of planes. Some of the possible families of planes are shown in Fig. 23–38. Each plane corresponds to a different density of scattering centers and a different spacing. If a screen is interposed in the path of the scattered rays diffracted by a single crystal (see Fig. 23–39), a regular pattern, which is characteristic of the crystal structure, appears. It is called the *Laue pattern*. Each dot in the pattern corresponds to the direction of $\boldsymbol{u}_s$ related to the different families of planes illustrated in Fig. 23–38. The photograph of Fig. 23–40 shows one such Laue pattern.

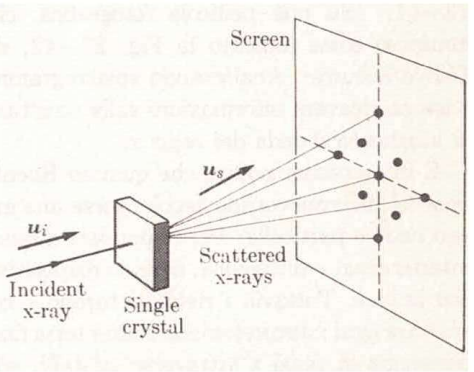


Fig. 23–39. Laue x-ray diffraction by a single crystal.

If the scatterer, instead of being a single crystal, is a powder containing a large number of small crystals, all randomly oriented, the corresponding $\boldsymbol{u}_s$ vectors are distributed on conical surfaces about the direction of incidence, as shown in Fig.

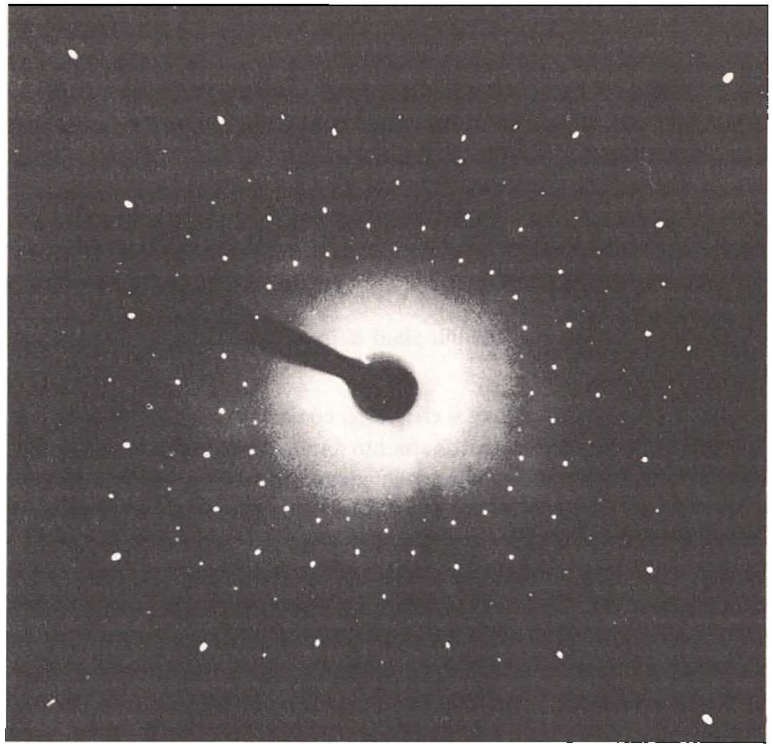


Fig. 23—40. Spettrogramma di Laue per diffrazione da un cristallo di quarzo. È stato fatto un tentativo per mascherare l'effetto del fascio incidente non deviato.

Fig. 23–40. Laue diffraction pattern for a quartz crystal. An attempt has been made to mask the effect of the undeviated incident beam.

23—41. Su una pellicola fotografica, ciascuna superficie conica produce un anello luminoso come indicato in Fig. 23—42, dando luogo al cosiddetto spettrogramma di Debye-Scherrer. Analizzando spettrogrammi come quelli delle Fig. 23—40 e 23—42, si possono ricavare informazioni sulla struttura interna di un cristallo o, viceversa, trovare la lunghezza d'onda dei raggi x.

È interessante notare che quando Roentgen osservò i raggi x per la prima volta alla fine del diciannovesimo secolo, sorse una grande discussione circa la loro natura. Erano essi onde o particelle? Per rispondere a questa domanda, i fisici eseguirono esperienze di interferenza, e diffusione, usando dispositivi simili a quelli usati per esperienze eseguite con la luce. Tuttavia i risultati furono o negativi o non convincenti. La tendenza fu di scartare ogni interpretazione ondulatoria fino a che Von Laue, Bragg, ed altri studiarono il passaggio di raggi x attraverso cristalli, ed ottennero i risultati che sono stati discussi, i quali offrirono una prova conclusiva del carattere ondulatorio della radiazione x.

ESEMPIO 23.8. Un fascio di raggi x è diffratto da un cristallo di salgemma. Lo spettro di primo ordine corrisponde a un angolo di 6°50′ e la distanza tra i piani è 2.81×10^{-10} m. Determinare la lunghezza d'onda dei raggi x e la posizione dello spettro del secondo ordine.

23–41. On a photographic film, each conical surface produces a bright ring, as shown in Fig. 23–42, resulting in the so-called Debye-Scherrer patterns. By analyzing patterns such as those of Figs. 23–40 and 23–42, one can derive the internal structure of a crystal or, conversely, find the wavelength of the x-rays.

It is interesting to note that when Roentgen observed x-rays for the first time at the end of the nineteenth century, a great argument arose about their nature. Were they waves or particles? To answer this question, physicists performed interference and scattering experiments, using equipment similar to that used for experiments dealing with light. However, the results were either negative or unconvincing. The trend was to discard any wave interpretation until von Laue, Bragg, and others studied the passage of x-rays through crystals, and obtained the results we have been discussing, which offered conclusive proof of the wave character of x-radiation.

EXAMPLE 23.8. A beam of x-rays is diffracted by a rock-salt crystal. The first-order spectrum corresponds to an angle of 6°50′ and the distance between the planes is 2.81×10^{-10} m. Determine the wavelength of the x-rays and the position of the second-order spectrum.

Powdered crystal = Polvere di microcristalli

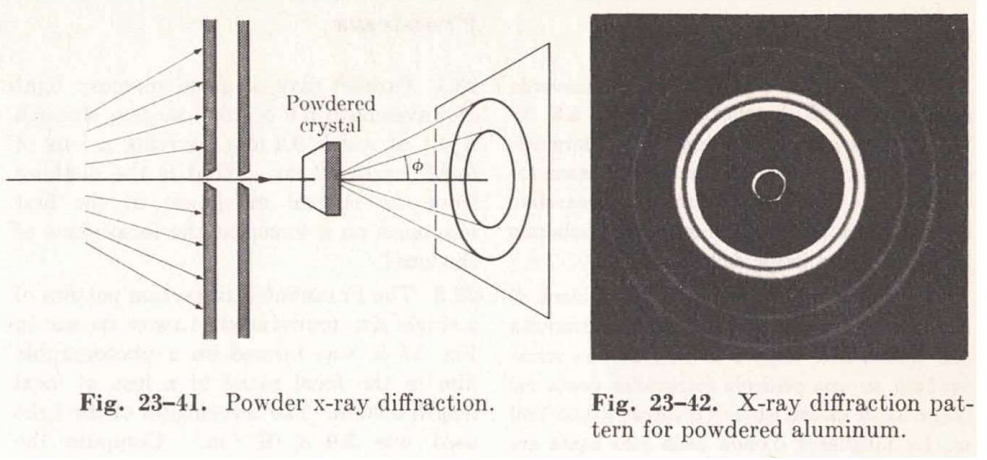


Fig. 23–41. Diffrazione di raggi x da una polvere.

Fig. 23–42. Spettro di diffrazione di raggi x da alluminio in polvere.

Fig. 23–41. Powder x-ray diffraction.

Fig. 23–42. X-ray diffraction pattern for powdered aluminum.

Soluzione: Usando la relazione di Bragg (23.27) con $d = 2.81 \times 10^{-10}$ m, $\theta = 6°50'$, e $n = 1$, troviamo che

$$\lambda = 2d \sin\theta = 6.69 \times 10^{-11} \text{ m}.$$

Per trovare la posizione dello spettro del secondo ordine, poniamo $n = 2$. Allora $\sin\theta = n\lambda/2d = 0.238$, ossia $\theta = 13°46'$. Si noti che il massimo ordine di diffrazione è limitato dalla condizione $n\lambda/2d < 1$, che nel nostro caso corrisponde a $n < 8.4$ oppure $n_{max} = 8$.

Solution: Using Bragg's relation (23.27) with $d = 2.81 \times 10^{-10}$ m, $\theta = 6°50'$, and $n = 1$, we find that

To find the position of the second-order spectrum, we set $n = 2$. Thus $\sin\theta = n\lambda/2d = 0.238$ or $\theta = 13°46'$. Note that the maximum diffraction order is limited by the condition $n\lambda/2d < 1$, which in our case amounts to $n < 8.4$ or $n_{max} = 8$.

Bibliografia

References

1. "A Student Experiment in Fresnel Diffraction," P. Young, *Am. J. Phys.* **32,** 367 (1964)
2. "Crystals," E. Wood, *The Physics Teacher* **3,** 7 (1965)
3. "Early Studies in X-Ray Crystallography," A. Hull and C. Burdick, *Physics Today,* October 1958, page 18
4. "Undergraduate Research Project: Photon Diffraction," R. Biser, *Am. J. Phys.* **31,** 29 (1963)
5. *Light: Principles and Experiments,* G. Monk. New York: Dover Press, 1963, Chapter 12
6. *Optics,* B. Rossi. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957, Chapter 4
7. *Great Experiments in Physics,* Morris Shamos, editor. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1959, Chapter 8 (Fresnel); Chapter 14 (Roentgen)
8. *The Feynman Lectures on Physics,* Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 30; Volume II, Chapter 30
9. *Source Book in Physics,* W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 294 (Grimaldi); page 318 (Fresnel); page 365 (Rowland)
10. *Foundations of Modern Physical Science,* G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Sections 30.2, 30.3, and 30.6

Problemi

23.1 Un fascio di raggi paralleli di luce verde del mercurio di lunghezza d'onda, 5.6×10^{-7} m attraversa una fenditura di larghezza 0.4 mm che copre una lente di distanza focale 40 cm. Qual'è la distanza tra il massimo centrale e il primo minimo su uno schermo posto nel piano focale delle lente?

23.2 Il sistema di frange di diffrazione di Fraunhofer di una singola fenditura, riprodotta con dimensioni doppie in Fig. 23–5, venne formato su una pellicola fotografica posta nel piano focale di una lente di distanza focale 0.60 m. La lunghezza d'onda della luce usata era 5.9×10^{-7} m. Calcolare la larghezza della fenditura. [*Suggerimento:* misurare (sulla fotografia) la distanza tra i corrispondenti minimi a destra e a sinistra del massimo centrale.]

23.3 Per osservare 2 sorgenti puntiformi lontane distanti 1 piede (= 30.48 cm) tra loro viene usato un cannocchiale. L'obiettivo del cannocchiale è coperto con uno schermo avente una fenditura di larghezza 1 mm. Qual'è la massima distanza, misurata in piedi, a cui le due sorgenti appaiono distinte? Si supponga $\lambda = 5.0 \times 10^{-7}$ m.

23.4 Nel piano focale di una lente di distanza focale 1 m, viene osservato il sistema di frange di diffrazione di Fraunhofer di una singola fenditura. La larghezza della fenditura è 0.4 mm. La luce incidente è costituita di due lunghezze d'onda λ_1 e λ_2. Il quarto minimo corrispondente a λ_1 e il quinto minimo corrispondente a λ_2 cadono nello stesso punto, a 5 mm dal massimo centrale. Calcolare λ_1 e λ_2.

23.5 Un'onda monocromatica piana di lunghezza d'onda λ incide con un angolo di 30° su uno schermo opaco piano che ha una fenditura stretta e lunga di larghezza a (Fig. 23–43). Dietro lo schermo vi è una lente convergente il cui asse principale è perpendicolare al piano dello schermo. Descrivere il sistema di frange di diffrazione osservate nel piano focale di questa lente.

23.6 Discutere la distribuzione della intensità dei fenomeni di diffrazione di Fraunhofer ottenuti con 3 fenditure identiche ugualmente distanti. Si supponga incidenza normale sulle fenditure.

Problems

23.1 Parallel rays of green mercury light of wavelength 5.6×10^{-7} m pass through a slit of width 0.4 mm covering a lens of focal length 40 cm. What is the distance from the central maximum to the first minimum on a screen at the focal plane of the lens?

23.2 The Fraunhofer diffraction pattern of a single slit, reproduced at twice its size in Fig. 23–5, was formed on a photographic film in the focal plane of a lens of focal length 0.60 m. The wavelength of the light used was 5.9×10^{-7} m. Compute the width of the slit. [*Hint:* measure (on the photograph) the distance between corresponding minima on the right and the left of the central maximum.]

23.3 A telescope is used to observe two distant point sources 1 foot apart. The objective of the telescope is covered with a screen in which there is a slit of width 1 mm. What is the maximum distance, in feet, at which the two sources will be distinguishable? Assume $\lambda = 5.0 \times 10^{-7}$ m.

23.4 The Fraunhofer diffraction pattern of a single slit is observed in the focal plane of a lens of focal length 1 m. The width of the slit is 0.4 mm. The incident light contains two wavelengths, λ_1 and λ_2. The fourth minimum corresponding to λ_1 and the fifth minimum corresponding to λ_2 occur at the same point, 5 mm from the central maximum. Compute λ_1 and λ_2.

23.5 A plane monochromatic wave of wavelength λ is incident, at an angle of 30°, on a plane opaque screen which has a long narrow slit of width a (Fig. 23–43). Behind the screen is a converging lens whose principal axis is perpendicular to the plane of the screen. Describe the diffraction pattern observed in the focal plane of this lens.

23.6 Discuss the intensity distribution of the Fraunhofer diffraction by three identical slits equally spaced. Assume normal incidence on the slits.

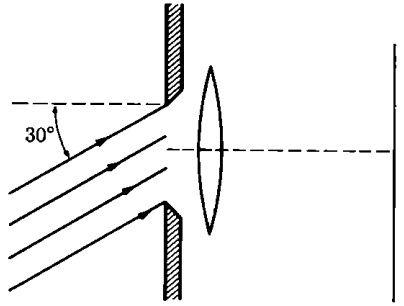


Figura 23–43

Figure 23–43

23.7 Un'onda monocromatica piana di lunghezza d'onda 6.0×10^{-7} m incide perpendicolarmente su uno schermo opaco che ha una apertura rettangolare di 0.5 mm per 1.0 mm. (a) Descrivere il sistema di frange di diffrazione osservato nel piano focale di una lente convergente di distanza focale 2 m posta direttamente dopo l'apertura. (b) Calcolare le dimensioni del rettangolo formato dalle frange scure che circondano il massimo centrale.

23.8 In un sistema di frange di diffrazione nel caso di una doppia fenditura manca il terzo massimo principale in quanto questo massimo d'interferenza coincide con il primo punto di intensità nulla di diffrazione. (a) Trovare il rapporto a/b. (b) Porre in grafico la distribuzione delle intensità dei vari massimi dall'una e dall'altra parte del massimo centrale. (c) Fare uno schizzo in chiaroscuro delle frange che dovrebbero apparire su uno schermo.

23.9 Determinare il raggio del disco centrale della figura di diffrazione di Fraunhofer dell'immagine di una stella formata da (a) una lente di una macchina fotografica di diametro 2.5 cm e distanza focale 7.5 cm, (b) l'obiettivo di un cannocchiale di diametro 15 cm con una distanza focale di 1.5 m. Si consideri luce di lunghezza d'onda 5.6×10^{-7} m.

23.10 Due fori di spillo distanti 1.5 mm sono posti di fronte a una intensa sorgente luminosa e osservati attraverso una lente coperta da uno schermo che ha un foro circolare centrale (apertura) con un diametro di 4 mm. Qual'è la massima distanza alla quale i fori di spillo

23.7 A plane monochromatic wave of wavelength 6.0×10^{-7} m is incident perpendicularly on an opaque screen which has a rectangular aperture of 0.5 mm × 1.0 mm. (a) Describe the diffraction pattern observed in the focal plane of a converging lens of focal length 2 m placed directly behind the aperture. (b) Compute the sides of the rectangle formed by the dark lines surrounding the central maximum.

23.8 In a double-slit diffraction pattern the third principal maximum is missing because that interference maximum coincides with the first diffraction zero. (a) Find the ratio a/b. (b) Plot the intensity distribution over several maxima on either side of the central maximum. (c) Make a half-tone sketch of the fringes as they would appear on a screen.

23.9 Compute the radius of the central disk of the Fraunhofer diffraction pattern of the image of a star formed by (a) a camera lens 2.5 cm in diameter and focal length 7.5 cm, (b) a telescope objective 15 cm in diameter, with a 1.5-m focal length. Assume light of wavelength 5.6×10^{-7} m.

23.10 Two pinholes 1.5 mm apart are placed in front of a bright light source and viewed through a lens covered by a screen that has a central circular hole (aperture) with a diameter of 4 mm. What is the maximum distance at which the pinholes

possono essere risolti? Si assuma una lunghezza d'onda di 5,5 × 10^{-7} m.

23.11 Il sistema di frange di diffrazione di Fraunhofer di una doppia fenditura è osservato nel piano focale di una lente di distanza focale 50 cm. La luce monocromatica incidente ha una lunghezza d'onda di 5.0 × 10^{-7} m. Si trova che la distanza tra i due minimi adiacenti al massimo di ordine zero è 0.5 cm, e il massimo del quarto ordine manca. Calcolare la larghezza delle fenditure e la distanza fra i loro centri.

23.12 I proiettori di una automobile che si sta avvicinando sono distanti 1.30 m. Valutare la distanza a cui i due proiettori possono essere risolti a occhio nudo se la risoluzione dell'occhio è determinata soltanto dalla diffrazione. Si supponga una lunghezza d'onda media di 5.5 × 10^{-7} m e che il diametro della pupilla dell'occhio sia di 5 mm. Confrontare con il risultato ottenuto per il potere separatore dell'occhio dato nel Paragrafo 21.5.

23.13 In Fig. 23—44, due sorgenti di luce puntiformi S_1 e S_2 poste a una distanza di 50 m dalla lente L e distanti tra di loro 6 mm, producono immagini che sono appena risolte secondo il criterio di Rayleigh. La distanza focale della lente è 20 cm. Quanto vale il diametro dei dischi centrali di diffrazione?

23.14 Due stelle ugualmente brillanti sottendono un angolo di un secondo. Assumendo una lunghezza d'onda di 5.5 × 10^{-7} m: (a) qual'è il più piccolo diametro di un obiettivo di un cannocchiale

can be resolved? Assume a wavelength of 5.5 × 10^{-7} m.

23.11 The Fraunhofer diffraction of a double slit is observed in the focal plane of a lens of focal length 50 cm. The incident monochromatic light has a wavelength of 5.0 × 10^{-7} m. It is found that the distance between the two minima adjacent to the maximum of order zero is 0.5 cm, and the maximum of the fourth order is missing. Compute the width of the slits and the distance between their centers.

23.12 The headlights of an approaching automobile are 1.30 m apart. Estimate the distance at which the two headlights can be resolved by the naked eye if the resolution of the eye is determined by diffraction alone. Assume a mean wavelength of 5.5 × 10^{-7} m and assume that the diameter of the pupil of the eye is 5 mm. Compare with the result obtained by the resolving power of the eye as given in Section 21.5.

23.13 In Fig. 23-44, two point sources of light S_1 and S_2, at a distance of 50 m from lens L and 6 mm apart, produce images which are just resolved by Rayleigh's criterion. The focal length of the lens is 20 cm. What is the diameter of the first diffraction circles?

23.14 Two equally bright stars subtend an angle of one second. Assuming a wavelength of 5.5 × 10^{-7} m: (a) What is the smallest diameter of a telescope objective

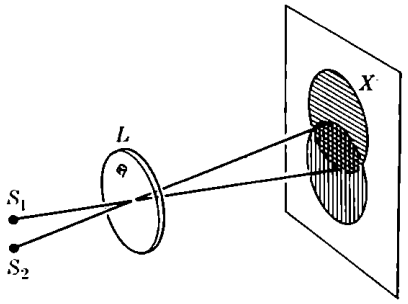


Figura 23—44

Figure 23-44

che permette di risolvere queste stelle? (b) Quanto dovrebbe essere l'ingrandimento del cannocchiale? (c) Calcolare la distanza focale dell'oculare che deve venire usato se la distanza focale dell'obiettivo è 1.80 m.

23.15 Si può dimostrare che, nel caso dei fenomeni di diffrazione di Fraunhofer, l'ampiezza delle onde diffratte da una apertura circolare di raggio R è proporzionale alla *funzione di Bessel* $J_1(x)$ (vedere Chemical Rubber Company's Standard Mathematical Tables, dodicesima edizione, pagina 317), dove per incidenza normale $x = (2\pi R/\lambda) \sin\theta$, e θ è l'angolo che i raggi diffratti formano con l'asse dell'apertura (Fig. 23—45). (a) Dimostrare che le direzioni per cui le onde diffratte hanno ampiezza nulla corrispondono alle radici dell'Eq. $J_1(x) = 0$. (b) Guardando su una tabella le radici di $J_1(x) = 0$ (*loc. cit.* pag. 318) ottenere, usando l'Eq. (23.11), i valori di sin θ per le prime tre direzioni di ampiezza nulla. (c) Supponendo che i raggi diffratti siano focalizzati da una lente convergente di distanza focale f su uno schermo posto nel piano focale della lente, trovare un'espressione dei diametri delle prime tre corone anulari scure formate. (Si noti che in questo problema sin θ può essere sostituito da θ). (d) Ottenere i valori di θ e dei raggi delle corone anulari dato che R = 0,1 mm, λ = 5.9 × 10^{-7} m, e f = 20 cm.

23.16 Luce monocromatica di lunghezza d'onda 6.0 × 10^{-7} m, generata da una sorgente puntiforme lontana, passa attraverso una apertura circolare.

Figura 23—45

lens that will permit these stars to be resolved? (b) What should be the magnifying power of the telescope? (c) Compute the focal length of the eyepiece to be used if the focal length of the objective is 1.80 m.

23.15 It can be shown that, in the case of Fraunhofer diffraction, the amplitude of the waves diffracted by a circular aperture of radius R is proportional to the *Bessel function* $J_1(x)$ (see Chemical Rubber Company's Standard Mathematical Tables, twelfth edition, page 317), where for normal incidence $x = (2\pi R/\lambda) \sin\theta$, and θ is the angle the diffracted rays make with the axis of the aperture (Fig. 23-45). (a) Show that the directions for which the diffracted waves have zero amplitude correspond to the roots of the equation $J_1(x) = 0$. (b) By looking at a table of roots of $J_1(x) = 0$ (*loc. cit.*, page 318), obtain the values of sin θ for the first three directions of zero amplitude, checking Eq. (23.11). (c) Assuming that the diffracted rays are focused by a convergent lens of focal length f on a screen at the focal plane of the lens, express the radii of the first three dark rings formed. (Note that in this problem sin θ can be replaced by θ.) (d) Obtain the values of θ and of the radii of the rings, given that R = 0.1 mm, λ = 5.9 × 10^{-7} m, and f = 20 cm.

23.16 Monochromatic light of wavelength 6.0 × 10^{-7} m, originating at a distant point source, passes through a circular

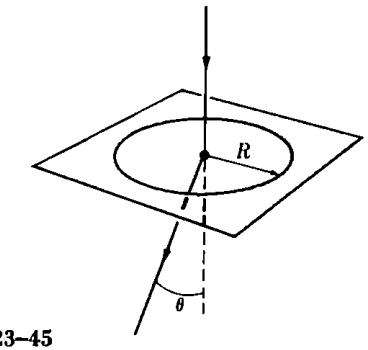


Figure 23-45

Si osserva su uno schermo, posto un metro oltre l'apertura, la figura di diffrazione di Fresnel. Determinare il diametro della apertura circolare se essa espone (a) soltanto le zone di Fresnel centrali, (b) le prime quattro zone di Fresnel.

23.17 Un punto è posto a un centimetro da una apertura circolare illuminata da luce di lunghezza d'onda 5.0×10^{-7} m. Se l'apertura corrisponde a 10 zone di Fresnel determinarne il raggio.

23.18 Luce di lunghezza d'onda 5.0×10^{-7} m incide su una apertura circolare di 0.1 mm di raggio. A quale distanza dalla apertura dovrebbe venir posto un punto in modo che l'apertura corrisponda a (a) tre zone di Fresnel, (b) quattro zone di Fresnel? Stabilire in ciascun caso se vi è luce o oscurità in questo punto.

opening. The Fresnel diffraction pattern is observed on a screen 1 m beyond the opening. Determine the diameter of the circular aperture if it exposes (a) the central Fresnel zones only, (b) the first four Fresnel zones.

23.17 A point is placed 1 cm from a circular aperture illuminated by light of wavelength 5.0×10^{-7} m. If the aperture corresponds to 10 Fresnel zones, determine its radius.

23.18 Light of wavelength 5.0×10^{-7} m falls on a circular aperture of 0.1 mm radius. At what distance from the aperture should a point be located so that the aperture corresponds to (a) three Fresnel zones, (b) four Fresnel zones? Estimate in each case whether there will be brightness or darkness at that point.

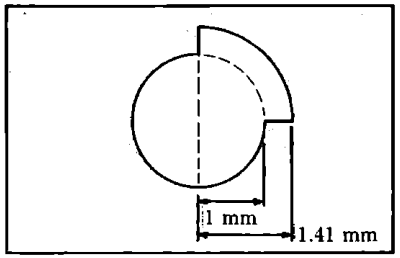


Figura 23–46

Figure 23–46

23.19 Un'onda monocromatica piana di lunghezza d'onda $\lambda = 5.0 \times 10^{-7}$ m incide perpendicolarmente su uno schermo opaco che ha una apertura della forma indicata in Fig. 23–46. Il raggio del cerchio interno è 1 mm e quello del cerchio esterno 1.41 mm. (a) Valutare l'ampiezza e l'intensità della perturbazione ottica in un punto P sull'asse del cerchio, a 2 metri dallo schermo, rispetto ai valori che si dovrebbero ottenere in assenza dello schermo. (b) Determinare la fase di questa perturbazione rispetto a quella della perturbazione che si osserverebbe in P senza lo schermo.

23.20 Un fascio parallelo di luce di lunghezza d'onda 5.6×10^{-7} m attraversa una apertura circolare di diametro 2.60 mm. La figura

23.19 A plane monochromatic light wave of wavelength $\lambda = 5.0 \times 10^{-7}$ m is incident perpendicularly on an opaque screen which has an aperture of the shape shown in Fig. 23–46. The radius of the inner circle is 1 mm and that of the outer circle is 1.41 mm. (a) Compute the amplitude and the intensity of the optical disturbance at a point P on the axis of the circles, 2 m from the screen, relative to the values which one would obtain in the absence of the screen. (b) Determine the phase of this disturbance relative to that of the disturbance which one would observe at P without the screen.

23.20 Parallel light waves of wavelength 5.6×10^{-7} m pass through a circular aperture 2.60 mm in diameter. The Fresnel

di diffrazione di Fresnel è osservata su uno schermo posto a 1 metro dalla apertura. (a) Il centro della figura di diffrazione apparirà chiaro o scuro? (b) A quale distanza minima dovrebbe venir spostato lo schermo per ottenere la condizione opposta a quella ottenuta in (a)?

23.21 Un'onda luminosa monocromatica piana di lunghezza d'onda $\lambda = 5.0 \times 10^{-7}$ m incide perpendicolarmente su uno schermo che ha una apertura circolare di diametro 0.4 cm. (a) Determinare le posizioni dei punti di intensità minima e massima lungo l'asse dello schermo. (b) A quale distanza dallo schermo si ha l'ultimo minimo?

23.22 Uno schermo che ha una apertura circolare di raggio 0,4 cm viene illuminato con un'onda luminosa piana che incide perpendicolarmente. Si assuma che la luce incidente sia una miscela di due fasci luminosi monocromatici di lunghezze d'onda $\lambda_1 = 6.0 \times 10^{-7}$ m e $\lambda_2 = 4.0 \times 10^{-7}$ m rispettivamente. Determinare i punti sulla retta perpendicolare alla apertura e passante per il suo centro dove viene osservata soltanto una delle due lunghezze d'onda.

23.23 Onde monocromatiche piane di lunghezza d'onda 6.0×10^{-7} m incidono normalmente su un reticolo per trasmissione piano avente 500 tratti al mm. Determinare l'angolo di deviazione per gli spettri del primo, secondo, e terzo ordine.

23.24 Un reticolo per trasmissione piano ha incisi 4000 tratti al cm. Calcolare la separazione angolare in gradi, dello spettro di secondo ordine tra le righe α e β dell'idrogeno atomico, le cui lunghezze d'onda sono rispettivamente 6.56×10^{-7} m e 4.10×10^{-7} m. Si consideri incidenza normale.

23.25 (a) Qual'è la lunghezza d'onda della luce che è deviata nello spettro di primo ordine di un angolo di 20° da un reticolo per trasmissione avente 6000 tratti al centimetro? (b) Qual'è la deviazione del secondo ordine di questa lunghezza d'onda? Si consideri incidenza normale.

23.26 Qual'è la più elevata lunghezza d'onda che può essere osservata nello spettro del quarto ordine con un reticolo per trasmissione avente 5000 tratti al centimetro? Si consideri incidenza normale.

diffraction pattern is observed on a screen 1 m from the aperture. (a) Will the center of the diffraction pattern appear bright or dark? (b) What minimum distance should the screen be moved in order to reverse the condition found in (a)?

23.21 A plane monochromatic light wave of wavelength $\lambda = 5.0 \times 10^{-7}$ m is incident perpendicularly on a screen which has a circular aperture 0.4 cm in diameter. (a) Determine the positions of the points of minimum and maximum intensity along the axis of the screen. (b) How far from the screen does the last minimum occur?

23.22 A screen which has a circular aperture of radius 0.4 cm is illumined with plane light waves falling perpendicularly. Assume that the incident light is a mixture of two monochromatic light beams of wavelengths $\lambda_1 = 6.0 \times 10^{-7}$ m and $\lambda_2 = 4.0 \times 10^{-7}$ m, respectively. Determine the points on the line perpendicular to the aperture and through its center, where only one of the two wavelengths is observed.

23.23 Plane monochromatic waves of wavelength 6.0×10^{-7} m are incident normally on a plane transmission grating having 500 lines per mm. Determine the angles of deviation for the first-, second-, and third-order spectra.

23.24 A plane transmission grating is ruled with 4000 lines per cm. Compute the angular separation in degrees, in the second-order spectrum, between the α and β lines of atomic hydrogen, whose wavelengths are, respectively, 6.56×10^{-7} m and 4.10×10^{-7} m. Assume normal incidence.

23.25 (a) What is the wavelength of light which is deviated in the first order through an angle of 20° by a transmission grating having 6000 lines per cm? (b) What is the second-order deviation of this wavelength? Assume normal incidence.

23.26 What is the longest wavelength that can be observed in the fourth order for a transmission grating having 5000 lines per cm? Assume normal incidence.

Incident light = Luce incidente
Diffracted light = Luce diffratta

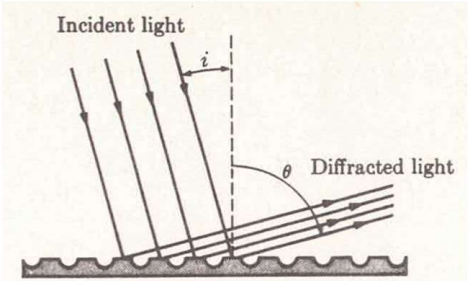


Figura 23–47

Figure 23–47

23.27 Supponendo che i limiti dello spettro visibile siano in corrispondenza a lunghezze d'onda di 4×10^{-7} m e 7×10^{-7} m, trovare gli angoli sottesi dagli spettri di primo e secondo ordine prodotti da un reticolo piano avente 6000 tratti al cm. Si consideri incidenza normale.

23.28 Dimostrare che in un reticolo avente un gran numero di tratti l'intensità del primo massimo secondario da una parte e dall'altra del primo massimo principale è uguale a circa 4% dell'intensità del massimo principale.

23.29 Un reticolo per trasmissione lungo 4 cm ha 4000 tratti al cm. Calcolare il potere separatore del reticolo nello spettro di primo ordine per una lunghezza d'onda di 5.9×10^{-7} m. Il reticolo separerà le due righe di lunghezza d'onda 5.890×10^{-7} m e 5.896×10^{-7} m che costituiscono il doppietto giallo del sodio? Calcolare anche la minima deviazione e la corrispondente dispersione per la lunghezza d'onda considerata.

23.30 Dimostrare che, indipendentemente dalla distanza tra i tratti del reticolo, il violetto dello spettro di terzo ordine si sovrappone al rosso dello spettro di secondo ordine. Si consideri incidenza normale.

23.31 Un *reticolo per riflessione* è fatto incidendo, con una punta di diamante, sottili tratti su una superficie metallica resa speculare (Fig. 23–47). Gli spazi lucidati tra le incisioni adiacenti sono l'equivalente delle fenditure in un reticolo per trasmissione. Dimostrare che i massimi principali sono ottenuti nella condizione $a(\sin i - \sin \theta) = n\lambda$, dove a è la distanza tra i tratti consecutivi.

23.27 Assuming that the limits of the visible spectrum are at wavelengths of 4×10^{-7} m and 7×10^{-7} m, find the angles subtended by the first- and second-order spectra produced by a plane grating having 6000 line sper cm. Assume normal incidence.

23.28 Show that, in a grating having a large number of lines, the intensity of the first secondary maximum on either side of the first principal maximum is equal to about 4% of the intensity of the principal maximum.

23.29 A transmission grating 4 cm long has 4000 lines per cm. Compute the resolving power of the grating for a wavelength of 5.9×10^{-7} m in the first-order spectrum. Will the grating separate the two lines of wavelength 5.890×10^{-7} m and 5.896×10^{-7} m which constitute the sodium yellow doublet? Also compute the minimum deviation and the corresponding dispersion for the wavelength considered.

23.30 Show that, no matter what the grating spacing, the violet of the third-order spectrum overlaps the red of the second-order spectrum. Assume normal incidence.

23.31 A *reflection grating* is made by etching, with a diamond point, fine lines on a polished metal surface (Fig. 23–47). The polished spaces left between adjacent rulings are the equivalent of the slits in a transmission grating. Show that the principal maxima are obtained by the condition $a(\sin i - \sin \theta) = n\lambda$, where a is the separation between consecutive lines.

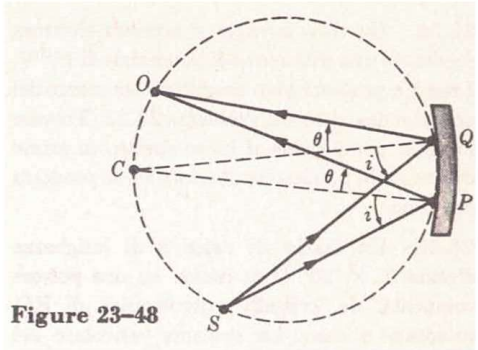


Figura 23–48

Figure 23–48

23.32 Per assicurare una focalizzazione appropriata a un reticolo di diffrazione, il fisico americano H. A. Rowland costruì reticoli concavi di grande raggio di curvatura. Si supponga che C, nella Fig. 23–48, sia il centro di curvatura del reticolo e che il cerchio tratteggiato abbia un diametro uguale al raggio del reticolo. Dimostrare che per ogni sorgente S posta su questo cerchio, (a) tutti i raggi incidono sul reticolo con lo stesso angolo di incidenza, (b) tutti i raggi diffratti dal reticolo sotto lo stesso angolo convergono nello stesso punto O sul cerchio tratteggiato. Perciò se una lastra fotografica è posta in O, tangente al cerchio, può venire registrato lo spettro di diffrazione corrispondente a quell'angolo di diffrazione. Tale sistema è detto *dispositivo di Rowland* ed è ampiamente usato nei laboratori di fisica per ricerche spettroscopiche. [*Suggerimento*: Si noti che la normale al reticolo nel punto di incidenza di un raggio passa per C, e che la superficie del reticolo si discosta molto poco da quella del cerchio tratteggiato.]

23.33 La distanza tra i piani principali in un cristallo di NaCl è 2.82×10^{-10} m. Si trova che avviene una riflessione di Bragg di primo ordine di un fascio di raggi x monocromatico per un angolo di 10°. (a) Calcolare la lunghezza d'onda dei raggi x. (b) Quale angolo corrisponde allo spettro di secondo ordine?

23.34 Lo ioduro di potassio, KI, è un cristallo cubico avente densità di 3.13 gr cm^{-3}. Trovare la minima distanza tra i piani, cioè il lato di una cella elementare. Determinare gli angoli corrispondenti alle prime due riflessioni di Bragg per raggi x di lunghezza d'onda 3.0×10^{-10} m.

23.32 To assure proper focusing by a diffraction grating, the American physicist H. A. Rowland constructed concave gratings of large radius. Assume that C in Fig. 23–48 is the center of curvature of the grating, and that the dashed circle has a diameter equal to the radius of the grating. Show that for any source S placed on that circle, (a) all rays fall on the grating with the same angle of incidence, (b) all rays diffracted by the grating through the same angle converge on some point O on the dashed circle. Thus if a photographic plate is placed at O, tangent to the circle, the diffraction spectrum corresponding to that diffraction angle can be recorded. This arrangement is called *Rowland's mounting*, and is used widely in physics laboratories for spectroscopic research. [*Hint:* Note that the normal to the grating at the point of incidence of a ray passes through C, and that the grating's surface departs very little from that of the dashed circle.]

23.33 The spacing between the principal planes in a NaCl crystal is 2.82×10^{-10} m. It is found that a first-order Bragg reflection of a monochromatic x-ray beam occurs at an angle of 10°. (a) Compute the wavelength of the x-rays. (b) What angle corresponds to the second-order spectrum?

23.34 Potassium iodide, KI, is a cubic crystal having a density of 3.13 g cm^{-3}. Find the smallest interplanar distance; i.e., the length of a unit cell. Determine the angles corresponding to the first two Bragg reflections for x-rays of wavelength 3.0×10^{-10} m.

23.35 Un tubo a raggi x accelera elettroni mediante una differenza di potenziale di 10^5 V. I raggi x prodotti sono esaminati per mezzo del cristallo descritto nel Problema 23.33. Trovare l'angolo per il quale si ha lo spettro di primo ordine della minima lunghezza d'onda prodotta dal tubo.

23.36 Un fascio di raggi x di lunghezza d'onda 5×10^{-11} m incide su una polvere composta da cristalli microscopici di KCl orientati a caso. La costante reticolare nel cristallo è 3.14×10^{-10} m. Una pellicola fotografica è posta a 0,1 m dal bersaglio costituito dalla polvere. (a) Trovare i raggi dei cerchi corrispondenti agli spettri del primo e secondo ordine se i piani diffondenti hanno una distanza uguale alla costante reticolare. (b) Determinare i raggi dei cerchi che hanno origine dai piani che formano un angolo di 45° con i piani considerati in (a).

23.37 Un reticolo cristallino può essere caratterizzato da 3 vettori fondamentali $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, in modo che la struttura cristallina è periodica per spostamenti che sono combinazioni lineari di multipli interi dei tre vettori (Fig. 23–49). (a) Dimostrare che la posizione relativa dei vettori dei due punti che occupano posizioni simili in due diverse celle è data da $\boldsymbol{r} = \gamma_1\boldsymbol{a}_1 + \gamma_2\boldsymbol{a}_2 + \gamma_3\boldsymbol{a}_3$, dove γ_1, γ_2, e γ_3 sono numeri interi positivi e negativi. (b) Dimostrare che gli atomi che prendono parte allo spettro di diffrazione dei raggi x di ordine n sono dati dai numeri interi che soddisfano l'equazione $\boldsymbol{v} \cdot (\gamma_1\boldsymbol{a}_1 + \gamma_2\boldsymbol{a}_2 + \gamma_3\boldsymbol{a}_3) = n\lambda$, dove $\boldsymbol{v}$ è definita nell'Eq. (23.24). (c)

23.35 An x-ray tube accelerates electrons through a potential difference of 10^5 V. The x-rays produced are examined by means of the crystal described in Problem 23.33. Find the angle at which the first-order spectrum of the shortest wavelength produced by the tube occurs.

23.36 A beam of x-rays, of wavelength 5×10^{-11} m, falls on a powder composed of microscopic crystals of KCl oriented at random. The lattice spacing in the crystal is 3.14×10^{-10} m. A photographic film is placed 0.1 m from the powder target. (a) Find the radii of the circles corresponding to the first- and second-order spectra from planes having the same spacing as the lattice spacing. (b) Determine the radii for the circles resulting from planes making an angle of 45° with those in (a).

23.37 A crystal lattice may be characterized by three fundamental vectors, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, so that the crystal structure is periodic for displacements that are linear combinations of integral multiples of the three vectors (Fig. 23–49). (a) Show that the relative position vectors of two points occupying similar positions in two different cells is given by $\boldsymbol{r} = \gamma_1\boldsymbol{a}_1 + \gamma_2\boldsymbol{a}_2 + \gamma_3\boldsymbol{a}_3$, where γ_1, γ_2, and γ_3 are positive or negative integers. (b) Show that the atoms participating in the x-ray diffraction spectrum of order n are given by the integers satisfying the equation $\boldsymbol{v} \cdot (\gamma_1\boldsymbol{a}_1 + \gamma_2\boldsymbol{a}_2 + \gamma_3\boldsymbol{a}_3) = n\lambda$, where $\boldsymbol{v}$ is as defined in Eq. (23.24). (c)

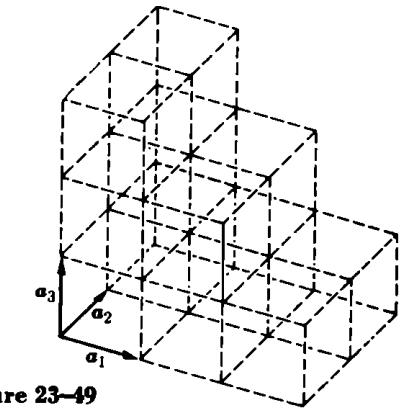


Figura 23–49

Figure 23–49

Dimostrare che l'intensità della radiazione diffusa nella direzione associata a $\boldsymbol{v}$ è proporzionale a $(A_1A_2A_3)^2$, dove $A_i = \sin(N_i\pi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_i/\lambda)/\sin \pi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_i/\lambda$ e N_i è il numero di celle del cristallo nella direzione di $\boldsymbol{a}_i$. (d) Facendo uso del risultato ottenuto in (c), dimostrare che i massimi principali avvengono in una direzione che soddisfa alle relazioni $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_1 = n_1\lambda$, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_2 = n_2\lambda$, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_3 = n_3\lambda$, dove n_1, n_2, e n_3 sono numeri interi. Esse sono dette *equazioni di Laue*. (e) Usando i vettori reciproci $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ (vedere Problema 3,29), dimostrare che

Tale equazione determina la posizione dei punti luminosi in uno spettrogramma di Laue, come è riportato in Fig. 23–40.

Show that the intensity of the radiation scattered in the direction associated with $\boldsymbol{v}$ is proportional $(A_1A_2A_3)^2$, where $A_i = \sin(N_i\pi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_i/\lambda)/\sin \pi\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_i/\lambda$ and N_i is the number of cells of the crystal in the direction of $\boldsymbol{a}_i$. (d) From the result derived in (c), show that the principal maxima occur in a direction satisfying the relations $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_1 = n_1\lambda$, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_2 = n_2\lambda$, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_3 = n_3\lambda$, where n_1, n_2, and n_3 are integers. They are called the *Laue equations*. (e) Using the reciprocal vectors $\boldsymbol{a}^1$, $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{a}^3$ (see Problem 3.29), show that

$$\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{u}_i + (n_1\boldsymbol{a}^1 + n_2\boldsymbol{a}^2 + n_3\boldsymbol{a}^3)\lambda.$$

This equation determines the position of the bright dots in a Laue pattern, as shown in Fig. 23–40.

24
FENOMENI DI TRASPORTO

24.1 Introduzione
24.2 Diffusione molecolare; legge di Fick
24.3 Conduzione termica; legge di Fourier
24.4 Trasporto con produzione e assorbimento
24.5 Viscosità
24.6 Cammino libero medio, frequenza di collisione e sezione d'urto
24.7 Teoria molecolare dei fenomeni di trasporto
24.8 Conclusione

24
TRANSPORT PHENOMENA

24.1 Introduction
24.2 Molecular Diffusion; Fick's Law
24.3 Thermal Conduction; Fourier's Law
24.4 Transport with Production and Absorption
24.5 Viscosity
24.6 Mean Free Path, Collision Frequency, and Collision Cross Section
24.7 Molecular Theory of Transport Phenomena
24.8 Conclusion

24.1 Introduzione

Dal Capitolo 18 al Capitolo 23, abbiamo discusso un insieme di importanti fenomeni che cadono sotto la generica denominazione di *moti per onde*. Sebbene queste onde corrispondano ad un'ampia gamma di fenomeni fisici, dalle onde elastiche in un mezzo materiale alle onde elettromagnetiche nel vuoto, esse hanno tutte una caratteristica comune; cioè, i campi ed esse associati soddisfano l'equazione dell'onda (18.11),

e ciò consente una descrizione comune di molte delle loro proprietà indipendentemente dalla loro natura fisica. Una di queste proprietà è la propagazione di ogni perturbazione fisica *senza distorsioni*, poichè in ogni caso la forma dell'onda rimane la stessa e può essere espressa, in un mezzo non dispersivo, con $f(x \pm vt)$.

Un'equazione del tipo (24.1) descrive la distribuzione nello spazio e l'evoluzione nel tempo di un campo ξ. Ma esistono anche altri campi che sono descritti da equazioni diverse e che hanno una diversa dipendenza dallo spazio e dal tempo. La propagazione di questi campi può essere accompagnata da una distorsione o da una attenuazione e non può essere espressa da una funzione avente la forma $f(x \pm vt)$. In taluni casi, si può tuttavia parlare di velocità di propagazione. Considereremo qui soltanto un tipo particolare di questi campi che corrisponde ad un gruppo di importanti problemi fisici aventi alcune caratteristiche comuni; si tratta dei *fenomeni di trasporto*. In questi processi, si verifica un trasferimento netto (o trasporto) in quantità macroscopica sia di materia che di energia, o di quantità di moto. Le caratteristiche fisiche comuni a questi fenomeni possono essere descritte con tecniche simili e sono caratterizzate da un'equazione di "propagazione" del primo ordine rispetto al tempo, che (in molti casi semplici) ha la forma

ove a è una costante caratteristica di ogni situazione e ξ è il campo corrispondente al particolare fenomeno di trasporto in questione. È da notare che molti fenomeni di trasporto obbediscono a equazioni più complicate della (24.2), che deve essere considerata soltanto una prima (ma soddisfacente) approssimazione. In questo capitolo discuteremo brevemente tre specie di fenomeni di trasporto: (a) la diffusione di molecole e di neutroni, (b) la conduzione termica, e (c) la viscosità.

24.2 Diffusione molecolare; legge di Fick

Tutti sappiamo che, aprendo una bottiglia di profumo o di un altro liquido avente un odore ben preciso, per esempio ammoniaca, in una stanza chiusa, possiamo sentirne molto presto l'odore anche in punti lontani dalla bottiglia. In tal caso diciamo che le molecole del liquido, dopo l'evaporazione, diffondono nell'aria e si disperdono in tutto lo spazio circostante. La stessa cosa accade ponendo una zolletta di zucchero in un bicchiere d'acqua. Lo zucchero si scioglie lentamente, ma al

24.1 Introduction

In Chapters 18 through 23 we discussed a number of important phenomena that fall under the general heading of *wave motion*. Although these waves correspond to a wide range of physical phenomena, from elastic waves in a material medium to electromagnetic waves in vacuum, they all have a common characteristic; namely, the fields associated with them satisfy the wave equation (18.11),

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{24.1}$$

and this fact makes possible a common description for many of their properties, irrespective of their specific physical nature. One of these properties is propagation of the physical disturbance *without distortion*, since in all cases the wave form remains the same, and can be expressed, especially for a wave in a nondispersive medium, by $f(x \pm vt)$.

An equation such as Eq. (24.1) describes the distribution in space, and the evolution in time, of a field ξ. But there exist still other fields which are described by different equations, and which have different dependencies on space and time. The propagation of these fields may be accompanied by distortion or attenuation and cannot be expressed by a function of the form $f(x \pm vt)$. In some instances, however, one may still speak of a velocity of propagation. We shall consider here only a special type of these other fields, which corresponds to a group of important physical problems having certain common features, under the general heading of *transport phenomena*. Transport phenomena are those processes in which there is a net transfer (or transport) of either matter, energy, or momentum, in a bulk or macroscopic amount. The common physical features of these phenomena can be described by similar techniques, and are characterized by a "propagation" equation of first order in time, which (in the more simple cases) is of the form

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \tag{24.2}$$

where a is a constant characteristic of each situation and ξ is the field corresponding to the particular transport phenomenon. It should be noted that many transport phenomena obey equations more complicated than that given by Eq. (24.2), which must be considered as only a first (but satisfactory) approximation. In this chapter we shall briefly discuss three kinds of transport problems: (a) molecular and neutron diffusion, (b) thermal conduction, and (c) viscosity.

24.2 Molecular Diffusion; Fick's Law

We know that when we open a bottle of perfume, or of any other liquid having a distinct odor, such as ammonia, we can smell it very quickly in remote parts of a closed room. We say that the molecules of the liquid, after evaporating, diffuse through the air, spreading into all the surrounding space. The same thing happens if we place a sugar cube in a glass of water. The sugar dissolves gradually, but at

Partition = Setto

Fig. 24—1. Diffusione in fase gassosa. (a) I due gas sono separati da un setto. (b) Poco dopo la rimozione del setto, poche molecole di ciascun gas si trovano dall'altra parte. (c) Dopo un certo tempo la miscela dei due gas è omogenea e non ha luogo alcuna ulteriore diffusione.

tempo stesso le molecole dello zucchero che si è sciolto diffondono nell'acqua sinchè sono disperse in tutta l'acqua. Come ultimo esempio consideriamo due gas in un recipiente suddiviso da un setto, come mostrato in Fig. 24—1; rimuovendo il setto, i due gas diffondono l'uno nell'altro sinchè, dopo un certo tempo, si ha una miscela omegenea.

Questo e molti altri esempi familiari allo studente illustrano una caratteristica fondamentale del processo di diffusione:

Larger concentration = Concentrazione maggiore
Smaller concentration = Concentrazione minore

Affinchè abbia luogo la diffusione, la distribuzione spaziale delle molecole della sostanza deve essere disomogenea.

Chiamiamo n il numero di molecole della sostanza diffondente per unità di volume (indicheremo questa grandezza con il termine *concentrazione* della sostanza). In accordo con l'affermazione precedente, questo numero deve variare da punto a punto affinchè si verifichi la diffusione. Una seconda caratteristica è che

Fig. 24—2. La corrente di diffusione nei due versi è diversa.

la diffusione ha luogo nella direzione nella quale diminuisce la concentrazione,

e quindi tende a rendere uniforme in tutto lo spazio la distribuzione delle molecole della sostanza diffondente. Quindi esiste un ben preciso verso nel quale avviene la diffusione. Questa tendenza tuttavia deve essere considerata in modo statistico e macroscopico poichè possono verificarsi fluttuazioni locali che, per brevi intervalli di tempo, comportano, in certi luoghi, un'inversione del flusso molecolare.

La diffusione è, in generale, prodotta dall'agitazione termica delle molecole, la quale è all'origine delle frequenti collisioni tra molecole che producono la diffusione.

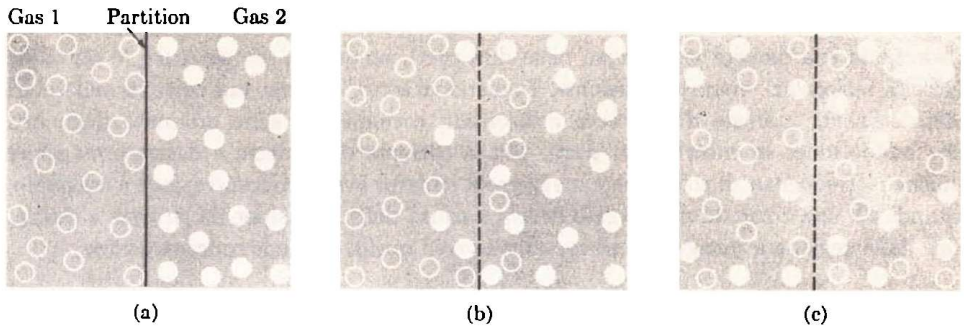


Fig. 24–1. Gaseous diffusion. (a) The two gases are held separate by the partition. (b) Shortly after the partition is removed, a few molecules of each gas are found on the other's side. (c) After a certain time the mixture of the two gases is homogeneous, and no further diffusion takes place.

the same time the dissolved sugar molecules diffuse through the water, and eventually are distributed throughout the water. As a final illustration, if there are two gases in a partitioned vessel, as shown in Fig. 24–1, and if we remove the partition, we shall find that the two gases diffuse into each other until, after a certain time, we find that we have a homogeneous mixture.

These and many other examples familiar to the student illustrate a fundamental characteristic of the diffusion process:

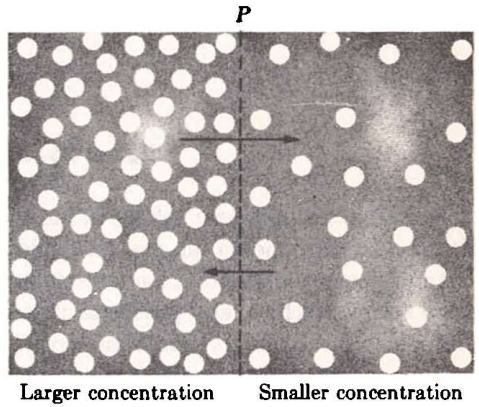


Fig. 24–2. The diffusion current in the two directions is different.

For diffusion to take place, the space distribution of the molecules of the substance must be inhomogeneous.

Let us call n the number of molecules of the diffusing substance per unit volume (this will be called the *concentration* of the substance). According to the above statement, this number must vary from place to place in order for diffusion to take place. A second characteristic is that

diffusion takes place in the direction in which the concentration decreases,

and therefore tends to equalize the molecular distribution of the diffusing substance over all space. Hence there is a well-defined tendency for diffusion to occur. This tendency, however, must be considered in a statistical or macroscopic way, because local fluctuations may occur which, for short intervals of time, produce a reversal of the molecular flow at certain spots.

Diffusion is, in general, the result of the fact that molecular agitation produces frequent collisions among the molecules which, as a consequence, are scattered.

Supponiamo che un gas occupi una regione divisa in due sezioni da un setto (Fig. 24−2), cosicchè la sua densità sia diversa nelle due parti, mentre la temperatura, e quindi le velocità molecolari, siano le medesime. Togliendo il setto, si hanno due correnti molecolari all'interfaccia, indicate dalle frecce orizzontali, correnti che sono originate dagli urti che hanno luogo in entrambe le parti. Ma la corrente da sinistra a destra è maggiore poichè la frequenza di collisione è maggiore a sinistra ove la concentrazione è maggiore. Quindi c'è una corrente netta verso destra a causa della diffusione da sinistra a destra, cioè dalla regione a maggior concentrazione verso quella a minor concentrazione.

Suppose that we have a gas occupying a region divided into two sections by a partition (Fig. 24–2), so that its density is different on each side but the temperature, and therefore also the molecular velocities, are the same on both sides. If we remove the partition, we have two currents of molecules at the interface, indicated by the horizontal arrows, resulting from collisions and scatterings occurring on both sides. But the current from left to right is the greater because the collision frequency is greater on the left, where the concentration is greater. Therefore there is a net current to the right, resulting in a diffusion from left to right, or from the region of greater concentration to that of lesser concentration.

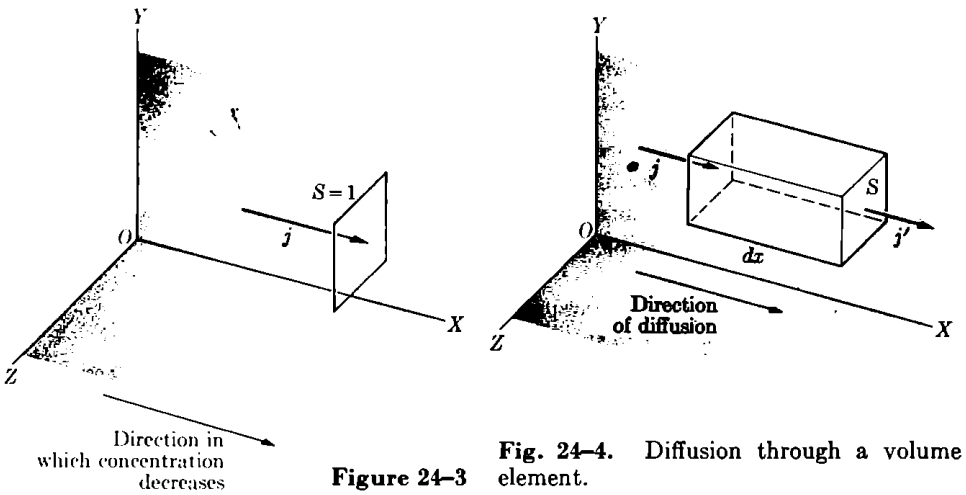


Figura 24−3 **Fig. 24−4.** Diffusione attraverso un elemento di volume.

Figure 24–3 **Fig. 24–4.** Diffusion through a volume element.

Nel seguito studieremo solo la diffusione di una sostanza attraverso se stessa o attraverso un altro mezzo (un gas, un liquido, o un solido) omogeneo le cui molecole siano sostanzialmente in quiete. Non considereremo il caso di due sostanze diffondenti l'una entro l'altra, poichè questo problema richiede una trattazione un po' diversa. Ignoreremo anche gli effetti delle forze intermolecolari.

Supponiamo che la concentrazione della sostanza vari in una certa direzione che designeremo come l'asse X (Fig. 24−3), ma che, d'altra parte, la concentrazione sia la medesima in tutti i piani perpendicolari a questa direzione. Allora il numero di atomi e di molecole per unità di volume (cioè la concentrazione) è una funzione della sola coordinata x, cioè, $n(x)$. Essa viene espressa in m^{-3}. La diffusione ha allora luogo nella direzione dell'asse X. Chiamiamo j la *densità della corrente di particelle*; cioè, il numero netto di particelle che attraversano nell'unità di tempo un'area unitaria perpendicolare alla direzione di diffusione. Questa densità di corrente è espressa in $m^{-2}\ s^{-1}$. Se la sostanza è omogenea (cioè, se n è costante), la densità di corrente j è nulla poichè lo stesso numero di particelle attraversa la superficie in versi opposti e non avviene alcun trasporto netto di massa. Ma se la sostanza è disomogenea, n varia da punto a punto, e si ha una corrente netta ossia un trasporto di massa. L'intuizione fisica, confermata dall'esperienza, suggerisce che la

In what follows we shall consider only the diffusion of a substance into itself or through another medium (a gas, a liquid, or a solid) which is homogeneous and whose molecules are essentially fixed. We shall not discuss the case of two substances which diffuse each into the other, since that requires a slightly different treatment. We shall also ignore the effects of intermolecular forces.

Suppose that the concentration of the substance varies in a certain direction, which will be designated as the X-axis (Fig. 24–3), but that otherwise the concentration is the same in all planes perpendicular to that direction. Then the number of atoms or molecules per unit volume (or the concentration) is a function of the x-coordinate alone; that is, $n(x)$. It is expressed in m^{-3}. The diffusion then occurs in the direction of the X-axis. Let us call j the *particle current density;* i.e., the net number of particles that cross, per unit time, a unit area placed perpendicular to the direction of diffusion. This particle current density is expressed in $m^{-2}\ s^{-1}$. When the substance is homogeneous (that is, when n is constant), the current density j is zero because the same number of particles passes in one direction as in the opposite, and no net mass transport exists. But when the substance is inhomogeneous and n varies from point to point, a net current, or mass transport, results. Physical intuition, confirmed by experiment, suggests that the current

densità di corrente sia tanto maggiore quanto maggiore è la variazione di concentrazione $n(x)$ per unità di lunghezza, ossia quanto maggiore il gradiente di concentrazione (cioè quanto maggiore $\partial n/\partial x$). Gli esperimenti mostrano anche che sussiste una relazione di proporzionalità tra la densità di corrente j e la variazione di concentrazione per unità di lunghezza, $\partial n/\partial x$; cioè,

dove la costante di proporzionalità D dipende dalla sostanza ed è chiamata *coefficiente di diffusione*. Il segno meno indica che il flusso risultante avviene nella direzione e verso delle n decrescenti.

La maggior parte dei processi di diffusione soddisfa molto bene la relazione (24.3) eccetto quando la concentrazione n è molto bassa o molto alta o cambia bruscamente in una distanza piccola cosicchè i ragionamenti di tipo statistico non sono più applicabili. L'Equazione (24.3), che è chiamata *legge di Fick*, fu suggerita nel 1855 dal fisiologo tedesco Adolf Fick (1829—1901). Il *coefficiente di diffusione* D è in relazione con lo stato di aggregazione delle molecole della sostanza diffondente (come si mostrerà per i gas nel Paragrafo 24.7) ed è espresso in $m^2\ s^{-1}$, cosicchè nell'Eq. (24.3) le unità di misura sono tra loro coerenti. Assumeremo D indipendente dalla concentrazione, approssimazione questa valida in un'ampia gamma di condizioni. La legge di Fick stabilisce una relazione tra la densità di corrente e la variazione per unità di lunghezza (o il gradiente) della concentrazione della sostanza.

Combinando la legge di Fick con il principio di conservazione delle molecole (il numero totale di molecole deve rimanere costante), otteniamo una relazione nella quale appare la sola concentrazione. A questo scopo consideriamo un elemento di volume orientato parallelamente alla direzione di diffusione, come in Fig. 24—4, avente una lunghezza dx ed una sezione trasversale di area S. Il suo volume vale

$$dV = \text{area della sezione trasversale} \times \text{lunghezza} = S\,dx.$$

Il numero di particelle entro il volume ad un dato istante è $n\,dV = nS\,dx$. Il flusso entrante (cioè, il numero di particelle entranti attraverso la base di sinistra nell'unità di tempo) vale jS, ed il flusso uscente attraverso la base di destra vale $j'S$. La legge di conservazione del numero di molecole richiede che la velocità di accumulo di molecole sia eguale alla differenza tra il flusso entrante e quello uscente. Cioè,

$$\text{Velocità di accumulo} = \text{flusso entrante} - \text{flusso uscente}.$$

Quindi abbiamo

$$\text{Velocità di accumulo}$$

dove $dj = j' - j$ è la differenza tra la densità di corrente ai due estremi dell'elemento di volume. Ma la velocità di accumulo è uguale all'incremento nell'unità di tempo del

density is greater, the greater the variation of the concentration $n(x)$ per unit length, or concentration gradient (that is, the greater $\partial n/\partial x$). Experiments also show that there is a proportionality relation between the current density j and the change in concentration per unit length, $\partial n/\partial x$; that is,

$$j = -D\frac{\partial n}{\partial x}, \tag{24.3}$$

where the proportionality constant D is a coefficient depending on the substance, called the *diffusion coefficient*. The minus sign indicates that the net flow is in the direction in which n decreases.

Most diffusion processes satisfy relation (24.3) quite well, except when the concentration n is extremely low, very high, or changes suddenly in a short distance, so that statistical reasoning is no longer applicable. Equation (24.3), which is called *Fick's law*, was suggested in 1855 by the German physiologist Adolf Fick (1829–1901). The *diffusion coefficient* D is related to the state of the molecules of the diffusing substance (as will be shown for gases in Section 24.7) and is expressed in $m^2\ s^{-1}$, so that the units are consistent in Eq. (24.3). We shall assume that D is independent of the concentration, an approximation valid over a wide range of conditions. Fick's law establishes a relation between the current density and the change per unit length (or the gradient) of the concentration of the substance.

By combining Fick's law with the principle of conservation of molecules (that is, that the number of molecules must remain constant), we obtain a relation in which only the concentration appears. For that purpose let us consider a volume element oriented parallel to the direction of diffusion, as shown in Fig. 24–4, with a length dx and a cross section of area S. Its volume is

$$dV = \text{cross-sectional area} \times \text{length} = S\,dx.$$

The number of particles inside the volume at a given instant is $n\,dV = nS\,dx$. The incoming flux (i.e., the number of particles entering the left-hand-side base per unit time) is jS, and the outgoing flux through the right-hand-side base is $j'S$. The law of the conservation of the number of molecules requires that the rate of accumulation be equal to the difference between the incoming and the outgoing flux. That is,

$$\text{Accumulation rate} = \text{incoming flux} - \text{outgoing flux}.$$

Therefore we have

$$\begin{aligned}\text{Accumulation rate} &= jS - j'S \\ &= -(j' - j)S = -(dj)S = -\frac{\partial j}{\partial x}S\,dx,\end{aligned}$$

where $dj = j' - j$ is the difference between the current density at one end and at the other. But the rate of accumulation is equal to the increase per unit time of

numero di particelle per unità di volume ($\partial n/\partial t$), moltiplicato per il volume ($S\,dx$). Cioè,

$$\text{Velocità di accumulo} = \frac{\partial n}{\partial t} S\,dx.$$

Eguagliando i due risultati e semplificando il fattore comune $S\,dx$, otteniamo

Usando la legge di Fick, cioè $j = -D(\partial n/\partial x)$, per eliminare j, otteniamo

Questa è l'*equazione della diffusione*, del tipo già indicato nell'Eq. (24.2). Questa relazione, talvolta chiamata seconda legge di Fick, esprime la conservazione del numero di particelle. Questa equazione contiene la derivata seconda rispetto alla coordinata spaziale, come avviene per l'equazione delle onde, ma solo la derivata prima rispetto al tempo. Questo fatto riflette una differenza importante, sia dal punto di vista fisico che matematico, tra i processi di diffusione e quelli di propagazione di onde che obbediscono all'Eq. (18.11).

Consideriamo una situazione particolare: quella delle *condizioni stazionarie*; cioè uno stato nel quale la concentrazione rimane costante nel tempo. In tal caso $\partial n/\partial t = 0$, e, eliminando il fattore costante D, l'Eq. (24.4) diviene

Integrando, abbiamo

$$\text{const} = \text{cost.}$$

Ma se $\partial n/\partial x = \text{cost.}$, l'Eq. (24.3) fornisce $j = \text{cost}$. Quindi, in condizioni stazionarie, la densità di corrente è la medesima attraverso ogni sezione trasversale, il che è ovvio da un punto di vista fisico. Una densità di corrente costante significa che il numero di particelle diffondenti attraverso ogni elemento di volume come quello mostrato in Fig. 24—4, e che entrano nell'unità di tempo attraverso un estremo è uguale a quello delle particelle uscenti dall'altro estremo nell'unità di tempo. Ossia non ha luogo alcun accumulo o cambiamento della concentrazione in ciascun punto del mezzo, fatto questo in accordo con il concetto di condizioni stazionarie o di regime. Dall'Eq. (24.3), abbiamo che

Integrando questa espressione, scriviamo

the number of particles per unit volume ($\partial n/\partial t$), multiplied by the volume ($S\,dx$). That is,

$$\text{Accumulation rate} = \frac{\partial n}{\partial t} S\,dx.$$

Equating the two results for the accumulation rate and canceling the common factor $S\,dx$, we get

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}.$$

Using Fick's law, that is, $j = -D(\partial n/\partial x)$, to eliminate j, we have

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}. \tag{24.4}$$

This is the *diffusion equation*, of the type already indicated in Eq. (24.2). Sometimes called Fick's second law, it expresses the conservation of the number of particles. This equation contains the second derivative with respect to space, as does the wave equation, but only the first derivative with respect to time. This reflects an important difference, both in the physical and the mathematical aspects, in diffusion processes as compared with wave propagation, which obeys Eq. (18.11).

Let us consider a special situation: that of a *steady state;* i.e., a state in which the concentration remains constant with time. Then $\partial n/\partial t = 0$, and, when we drop the constant factor D, Eq. (24.4) becomes

$$\partial^2 n/\partial x^2 = 0. \tag{24.5}$$

Integrating, we have

$$\partial n/\partial x = \text{const.} \tag{24.6}$$

But when $\partial n/\partial x = \text{const}$, Eq. (24.3) yields $j = \text{const}$. Therefore, under stationary or steady conditions, the current density is the same across any cross section, which is physically obvious. A constant current density means that through any volume element, such as the one shown in Fig. 24-4, the number of diffusing particles that enter per unit time through one end is the same as the number of particles that go out per unit time through the other end. That is, there is no accumulation or change in concentration at any point in the medium, a fact which is in agreement with the concept of stationary or steady conditions. From Eq. (24.3), we have that

$$\partial n/\partial x = -j/D.$$

Integrating this expression, we write

$$\int_{n_0}^{n} dn = \int_0^x -\frac{j}{D}\,dx,$$

dove n_0 è la concentrazione delle particelle nel punto $x = 0$. Allora, siccome j/D è costante, abbiamo, in questo caso

un risultato che mostra come la concentrazione delle particelle diminuisca linearmente con la distanza lungo la direzione di diffusione, come è mostrato nella Fig. 24–5. L'Equazione (24.7) può anche essere scritta nella forma

Questa espressione è equivalente alla legge di Fick, espressa dall'Eq. (24.3), ma è valida solo per correnti costanti. Altrimenti, l'equazione precedente fornisce la corrente media tra due punti separati dalla distanza x.

Si noti che in condizioni stazionarie è necessario rifornire particelle con portata costante da un lato e rimuoverle con lo stesso ritmo dall'altro lato. Ciò significa che, se la concentrazione delle particelle è tenuta costante ad entrambe le sezioni terminali del condotto mostrato in Fig. 24–5, e avente lunghezza L, lo stesso numero di particelle entranti nell'unità di tempo ad $x = 0$ deve essere rimosso ad $x = L$. Se la concentrazione in $x = L$ vale n_1, allora l'equazione precedente fornisce

Supponiamo, per esempio, di avere un tubo verticale aperto ad entrambi gli estremi. Un estremo del tubo è immerso in un liquido che evapora, cosicchè le molecole del liquido diffondono nell'aria che si trova all'interno del tubo (Fig. 24–6). Una corrente d'aria all'altro estremo rimuove le molecole che vi giungono, provocando una condizione stazionaria: il numero di molecole che entrano dal fondo a causa dell'evaporazione è uguale al numero di molecole rimosse alla sommità dalla corrente d'aria. Questo è in effetti un metodo per misurare il coefficiente di diffusione D. Possiamo trovare la quantità j

Air current = Corrente d'aria
Fan = Ventilatore
Tube = Tubo

Fig. 24–5. Variazione della concentrazione dovuta alla diffusione stazionaria lungo una sbarra.

Fig. 24–6. Diffusione di vapor d'acqua lungo una colonna.

where n_0 is the concentration of particles at $x = 0$. Then, since j/D is constant in this case, we have

$$n = -\frac{j}{D}x + n_0, \tag{24.7}$$

a result which indicates that the concentration of particles decreases linearly with the distance along the direction of diffusion, as shown in Fig. 24–5. Equation (24.7) can also be written in the form

$$j = D\frac{n_0 - n}{x}.$$

This expression is equivalent to Fick's law, as given by Eq. (24.3), but is valid only for constant current. Otherwise the above equation gives the average current between two points separated a distance x.

Note that under stationary conditions it is necessary to feed particles in at a constant rate on one side and remove them at the same rate at the other side. This means that, when the concentration is kept constant at both ends of the pipe of length L shown at the bottom of Fig. 24–5, the same number of particles that enter per unit time at $x = 0$ must be removed per unit time at $x = L$. If the concentration at $x = L$ is n_1, then the above equation gives

$$j = D\frac{n_0 - n_1}{L}. \tag{24.8}$$

Suppose, for example, that we have a vertical tube open at both ends. One end of the tube is in a liquid, which evaporates, so that the molecules of the liquid diffuse through the air in the tube (Fig. 24–6). An air current at the other end removes the molecules that arrive there, resulting in a steady condition: The number of molecules entering at the bottom because of evaporation is equal to the number of molecules removed at the top by the air current. This, in fact, is one method for measuring the diffusion coefficient D. We can find the quantity j by

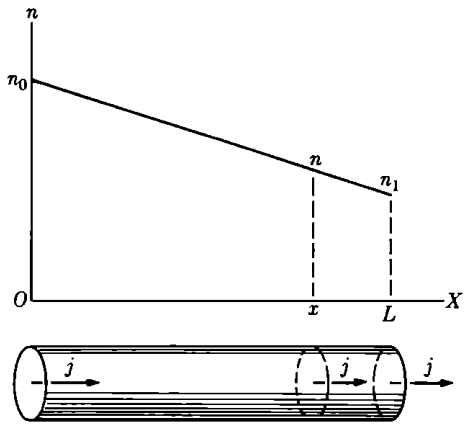


Fig. 24-5. Change in concentration due to steady diffusion along a rod.

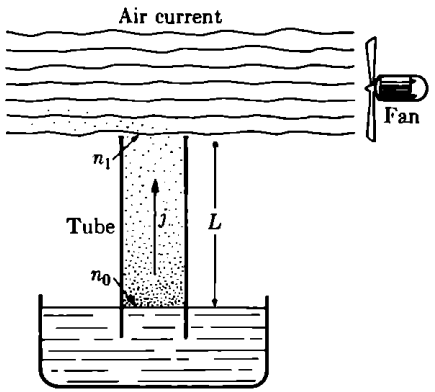
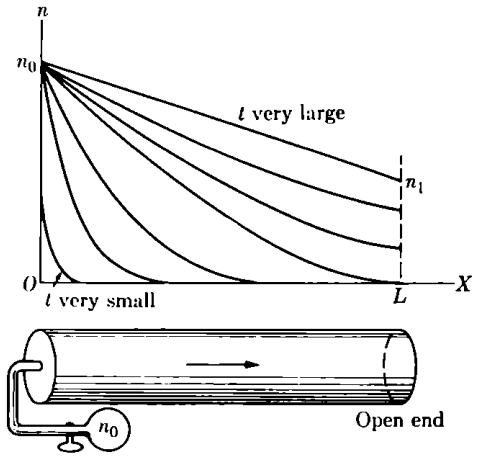


Fig. 24-6. Diffusion of water vapor along a column.

t very large = t molto grande
t very small = t molto piccolo
Open end = Estremità aperta

t very large = t molto grande
t very small = t molto piccolo
Closed end = Estremità chiusa



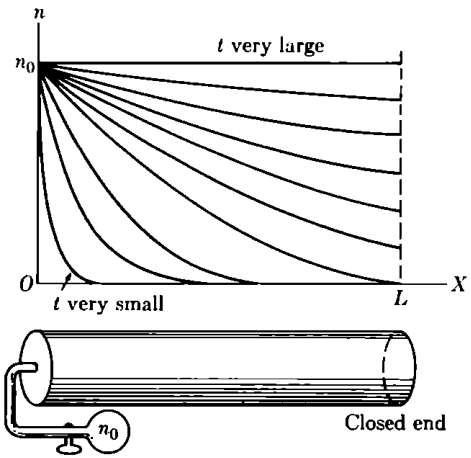


Fig. 24–7. Variazione, nel tempo, della concentrazione nella diffusione lungo un condotto con un'estremità aperta. La concentrazione in ogni punto cambia finchè non viene raggiunto uno stato stazionario (indicato dalla linea retta).

Fig. 24–8. Variazione, nel tempo, della concentrazione nella diffusione lungo un condotto con un'estremità chiusa. Lo stato stazionario viene raggiunto quando la concentrazione è uniforme.

Fig. 24–7. Change in concentration with time for diffusion along a pipe with an open end. The concentration at each point changes until a steady state is reached (the straight line).

Fig. 24–8. Change in concentration with time for diffusion along a pipe with a closed end. The steady state is reached when the concentration is uniform.

misurando la quantità di liquido che evapora in un intervallo di tempo assegnato. Possiamo determinare sperimentalmente la concentrazione n_0 al fondo e n_1 alla sommità. Infine applichiamo l'Eq. (24.8) per calcolare D.

La situazione appena considerata si riferisce a condizioni di regime già raggiunte. Un altro importante problema è quello della determinazione delle modalità con le quali viene raggiunto questo stato stazionario. Consideriamo nuovamente il tubo mostrato in Fig. 24–5. Supponiamo che inizialmente non vi siano molecole del gas diffondente nel condotto. Ad un certo istante, $t = 0$, un estremo viene collegato con una sorgente di gas avente concentrazione costante n_0; le molecole vengono rimosse con una certa rapidità all'altro estremo. Se misuriamo la concentrazione delle molecole lungo il tubo, a tempi diversi dopo l'esecuzione del collegamento, otteniamo le varie curve mostrate nella Fig. 24–7. Se le molecole vengono rimosse a $x = L$ con la stessa portata con la quale erano state introdotte a $x = 0$, lo stato stazionario viene raggiunto solo dopo un lungo intervallo di tempo; in tal caso, la concentrazione lungo il tubo è data dall'Eq. (24.7). Se l'altra estremità del tubo è chiusa, il cambiamento della concentrazione è mostrato in Fig. 24–8, ove lo stato stazionario corrisponde ad una concentrazione uniforme. Tutti questi risultati possono essere ottenuti risolvendo l'Equazione (24.4) dipendente dal tempo. La discussione matematica è più difficile che per il caso stazionario, e viene omessa.

ESEMPIO 24.1. Quando il vapor d'acqua diffonde in aria, il coefficiente di diffusione vale 2.19×10^{-5} m^2 s^{-1} alla pressione atmosferica ed alla temperatura di 20°C. In un esperimento del tipo di quello di Fig. 24–6, il tubo ha una lunghezza di 1.0 m ed una sezione trasversale di 20 cm^2. Trovare la quantità di acqua evaporata per secondo attraverso al tubo.

Soluzione: Dobbiamo prima determinare la densità di corrente data dall'Eq. (24.8). Assumendo che il processo sia sufficientemente lento cosicchè la regione nei pressi del fondo del tubo possa essere

measuring the amount of liquid which evaporates in a given interval of time. We can experimentally determine the concentration n_0 at the bottom and n_1 at the top. Then we apply Eq. (24.8) to compute D.

The situation we have just considered assumes that a steady state has already been reached. Another important problem is to determine how this steady state is reached. Let us again consider the pipe shown in Fig. 24–5. Suppose that initially there are no molecules of the diffusing gas in the pipe. At a given time, $t = 0$, one end is connected to a source of the gas at a constant concentration n_0; the molecules are removed at a certain rate at the other end. If we measure the concentration of the molecules along the pipe at different times after the connection is made, we obtain the various curves shown in Fig. 24–7. Only after a long time is the steady state reached, when the molecules are removed at $x = L$ at the same rate at which they are fed at $x = 0$, and the concentration along the pipe is given by Eq. (24.7). If the other end of the tube is closed, the change in concentration will be as shown in Fig. 24–8, the steady state corresponding to a uniform concentration throughout. All these results can be derived by solving the time-dependent equation (24.4). The mathematical discussion is more difficult than that for the steady state, and will be omitted.

EXAMPLE 24.1. When water vapor diffuses through air, the diffusion coefficient is 2.19×10^{-5} m^2 s^{-1} at standard pressure and at a temperature of 20°C. In an experiment such as the one in Fig. 24–6, the tube has a length of 1.0 m and a cross section of 20 cm^2. Find the amount of water evaporated per second through the tube.

Solution: We must first determine the current density as given by Eq. (24.8). Assuming that the process is slow enough so that the region at the bottom of the tube can be con-

considerata satura ad ogni istante, troviamo che la densità di vapor d'acqua a 20°C è 1.73×10^{-2} kg m^{-3}, e se m è la massa di una molecola, il numero di molecole alla base del tubo per unità di volume è $n_0 = (1.73 \times 10^{-2}/m)$ m^{-3}. Possiamo supporre anche che la concentrazione alla sommità del tubo sia così piccola che si possa porre $n_1 = 0$. Allora $j = Dn_0/L$. Quindi

La massa evaporata in un secondo attraverso il tubo è

In un'ora, la massa evaporata è 2.73×10^{-6} kg, ossia circa 2.73 mg. Poichè la massa di una molecola d'acqua è 2.98×10^{-26} kg, il numero di molecole evaporate per secondo è 2.54×10^{16}, ossia 1.27×10^{15} molecole per cm^2 per secondo.

24.3 *Conduzione termica; legge di Fourier*

La conduzione termica è un altro fenomeno di trasporto, nel quale l'energia dovuta all'agitazione molecolare viene trasferita da un luogo ad un altro con un corrispondente cambiamento di temperatura. La conduzione termica avviene tutte le volte che la temperatura varia da luogo a luogo in una sostanza, cioè quando l'energia media delle molecole è diversa in diversi luoghi della sostanza. Questa differenza di temperatura dà luogo ad un flusso netto di energia e possiamo quindi definire la conduzione termica come un trasferimento di energia provocato da una differenza di temperatura.

Hot gas = Gas caldo
Cold gas = Gas freddo

La conduzione termica avviene nella direzione nella quale la temperatura diminuisce,

Figura 24–9

e quindi la conduzione termica tende a rendere uniforme la temperatura in tutta la sostanza. Il meccanismo della conduzione termica è diverso nei solidi, nei liquidi, e nei gas, a causa del fatto che la mobilità delle molecole è diversa nei tre stati. Nei gas, e in una certa misura anche nei liquidi, possiamo dire che la conduzione termica è il risultato delle collisioni tra molecole veloci e molecole lente, collisioni che comportano un trasferimento di energia dalle molecole più veloci alle più lente. Nei solidi, il meccanismo della conduzione termica è più complesso.

Consideriamo una camera contenente un gas in presenza di un gradiente di temperatura. Nei luoghi ove la temperatura è maggiore le molecole hanno, in media, velocità maggiori che nei luoghi ove la temperatura è inferiore. Per esempio, in Fig. 24–9, supponiamo che il gas alla sinistra sia più caldo del gas alla destra. A causa delle collisioni tra le molecole al contorno, e a causa

sidered as saturated at all times, we find that the density of water vapor at 20°C is 1.73×10^{-2} kg m^{-3}, and if m is the mass of one molecule, the number of molecules at the base of the tube per unit volume is $n_0 = (1.73 \times 10^{-2}/m)$ m^{-3}. We may also assume that the concentration at the top is so small that we can make $n_1 = 0$. Then $j = Dn_0/L$. Therefore

$$j = \frac{(2.19 \times 10^{-5})(1.73 \times 10^{-2}/m)}{1.0} = \frac{3.78 \times 10^{-7}}{m} \text{ m}^{-2}\,\text{s}^{-1}.$$

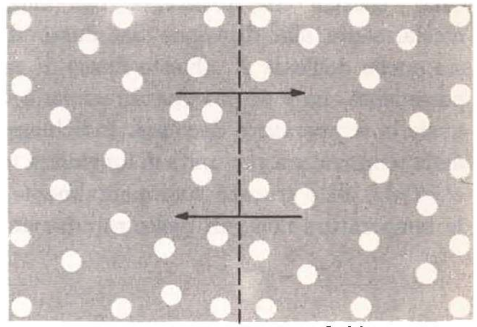
The mass evaporated per second through the tube is

$$M = jSm = (3.78 \times 10^{-7})(2 \times 10^{-3}) = 7.56 \times 10^{-10} \text{ kg s}^{-1}.$$

In one hour the mass evaporated is 2.73×10^{-6} kg, or about 2.73 mg. Since the mass of a water molecule is 2.98×10^{-26} kg, the number of molecules evaporated per second is 2.54×10^{16}, or 1.27×10^{15} molecules per cm^2 per second.

24.3 *Thermal Conduction; Fourier's Law*

Thermal conduction is another transport phenomenon, in which the energy due to molecular agitation is transferred from one place to another with a corresponding change in temperature. Thermal conduction occurs whenever the temperature varies from place to place in the substance; i.e., when the average energy of the molecules is different in different parts of the substance. This temperature difference gives rise to a net energy flow, and thus we may define thermal conduction as an energy transfer by temperature difference.



Thermal conduction takes place in the direction in which the temperature decreases,

Figure 24–9

and therefore thermal conduction tends to equalize the temperature over all the substance. The mechanism of thermal conduction is different in solids, liquids, and gases, due to the fact that molecular mobility differs in these three states. In gases, and to a certain extent in liquids, we may say that thermal conduction is the result of collisions between fast molecules and slow molecules, collisions which result in a transfer of kinetic energy from the faster molecules to the slower. In solids the mechanism of thermal conduction is more complex.

Let us consider a chamber filled with a gas which has a temperature gradient throughout its volume. In places where the temperature is higher, the molecules have, on the average, higher velocities than in places where the temperature is lower. For example, in Fig. 24–9, suppose that the gas at the left is hotter than the gas at the right. Because of the collision between the molecules at the boundary,

della diffusione delle molecole "calde" dalla sinistra alla destra e delle molecole "fredde" dalla destra alla sinistra, si verifica un trasferimento netto di energia da sinistra a destra, trasferimento di energia che chiamiamo *calore*. (Lo studente ripensi alla nostra discussione del concetto di calore del Paragrafo 9.10.)

Nei solidi non avviene un tale trasferimento di energia mediante il moto delle molecole, poichè il moto delle molecole in un solido è solo costituito dalle vibrazioni attorno alle loro posizioni di equilibrio, ed il processo che ne deriva è piuttosto un trasporto di questa energia vibrazionale lungo il reticolo cristallino del solido. Nei metalli, tuttavia, c'è un effetto addizionale poichè gli elettroni di conduzione (che sono in equilibrio termico con gli ioni positivi nel metallo) sono liberi di muoversi nel volume del metallo. Gli elettroni di conduzione si comportano in modo simile alle molecole in un gas a tendono a diffondere entro il metallo dalle regioni calde a quelle fredde, trasferendo energia, per collisioni con gli altri elettroni e con gli ioni del reticolo, alle regioni più fredde.

Nei gas e nei liquidi può avvenire anche un trasferimento di materia dovuto a differenze di densità create da differenze di temperatura. Questo processo, chiamato *convezione*, non rientra nella categoria dei fenomeni qui discussi, perchè non è sostanzialmente dovuto all'agitazione molecolare ma a condizioni macroscopiche di instabilità.

Chiamiamo j_E la *densità di corrente di energia* dovuta alla differenza di temperatura; cioè, l'energia che attraversa, nell'unità di tempo, un'area unitaria posta perpendicolarmente alla direzione del flusso di energia. Assumeremo che questa direzione sia quella dell'asse X. Questo flusso di energia, lo ricordiamo dalla nostra discussione precedente, ha luogo in una direzione e verso ben definiti, che è la direzione lungo la quale la temperatura decresce. Indichiamo la temperatura con T. Quindi la variazione della temperatura per unità di lunghezza (ossia il gradiente di temperatura) del materiale è $\partial T/\partial x$. Si è trovato sperimentalmente che j_E è proporzionale a $\partial T/\partial x$, a meno che la temperatura non vari molto rapidamente in una distanza piccola; cioè,

dove K è un coefficiente caratteristico di ogni materiale chiamato *conduttività termica*. Il segno meno indica che l'energia fluisce nella direzione nella quale la temperatura diminuisce. Questo enunciato, noto come *legge di Fourier*, è stato proposto intorno al 1815 dallo scienziato francese Joseph Fourier (1768–1830). Si noti che j_E è espresso in J m^{-2} s^{-1}, e che $\partial T/\partial x$ è espresso in °C m^{-1}. Quindi K è espresso in J m^{-1} s^{-1} °C^{-1} ossia in m kg s^{-3} °C^{-1}. Talvolta, però, K si esprime in cal m^{-1} s^{-1} °C^{-1}. La legge di Fourier per la conduzione termica è molto simile alla legge di Fick per la diffusione. Infatti sussiste una relazione tra la conduttività termica K ed il coefficiente di diffusione D: ne parleremo nel Paragrafo 24.7. Sebbene il meccanismo della conduzione del calore sia diverso nei gas, nei liquidi, e nei solidi, la legge di Fourier va bene nei tre casi.

Il nostro passo successivo è quello di ottenere una relazione nella quale compaia la sola temperatura. Possiamo fare questo applicando il principio di conservazione dell'energia. Consideriamo un elemento di volume orientato parallelamente alla direzione del flusso di energia, come è mostrato

and the diffusion of the "hot" molecules from left to right and of the "cold" molecules from right to left, there is a net energy transfer from left to right, an energy transfer which we call *heat*. (We remind the student of our discussion of the concept of heat in Section 9.10.)

In solids there is no such energy transfer by molecular motion, since the only motion of molecules in a solid is vibration about their equilibrium positions, and the process involved is more a transport of this vibrational energy along the crystal lattice of the solid. In metals, however, there is an additional effect, since the conduction electrons (which are in thermal equilibrium with the positive ions in the metal) are free to move through the volume of the metal. The conduction electrons behave in a manner similar to the molecules in a gas, and tend to diffuse through the metal from the hot to the cold region, transferring energy by collision with other electrons and with the lattice ions in the colder region.

In gases and liquids there may also be a bulk transfer of the material due to density differences created by temperature differences. This process, called *convection*, is not in the same category as those discussed here, because it is not essentially due to molecular agitation but to a macroscopic condition of instability.

Let us call j_E the *energy current density* due to a temperature difference; i.e., the energy which crosses per unit time through a unit area, placed perpendicular to the direction in which the energy flow takes place. We shall assume that this direction is the X-axis. This energy flow, as we recall from our previous discussion, takes place in a well-defined direction, which is the direction in which the temperature decreases. We designate the temperature by T. Thus the change of temperature per unit length (or the temperature gradient) of the material is $\partial T/\partial x$. It has been found experimentally that, unless the temperature changes very rapidly over a short distance, j_E is proportional to $\partial T/\partial x$; that is,

$$j_E = -K \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{24.9}$$

where K is a coefficient characteristic of each material, and is called *thermal conductivity*. The negative sign indicates that the energy flows in the direction in which the temperature decreases. This statement, known as *Fourier's law*, was proposed about 1815 by the French scientist, Joseph Fourier (1768–1830). Note that j_E is expressed in J m^{-2} s^{-1} and that $\partial T/\partial x$ is expressed in °C m^{-1}. Therefore K is expressed in J m^{-1} s^{-1} °C^{-1} or in m kg s^{-3} °C^{-1}. Sometimes, however, K is expressed in cal m^{-1} s^{-1} °C^{-1}. Fourier's law for thermal conductivity is very similar to Fick's law for diffusion. In fact, there is a relationship between the thermal conductivity K and the diffusion coefficient D: we shall talk about this in Section 24.7. Although the mechanism for heat conduction is different in gases, liquids, and solids, Fourier's law applies to these three states of matter.

Our next step is to obtain a relation in which only the temperature appears. We can do this by applying the principle of conservation of energy. Let us consider a volume element oriented parallel to the direction of energy flow, as shown

in Fig. 24–10, avente lunghezza dx ed area della sezione trasversale S. Il suo volume è $dV = S\,dx$. Posto che ρ sia la densità del materiale, la massa nell'elemento di volume dV è $dm = \rho\,dV = \rho\,S\,dx$. L'energia entrante nell'elemento di volume attraverso la faccia di sinistra nell'unità di tempo (chiamato *flusso di energia entrante*) è $j_E\,S$, e l'energia che abbandona l'elemento di volume attraverso la faccia destra per unità di tempo (*flusso di energia uscente*) è $j'_E\,S$. Allora l'incremento di energia per unità di tempo nel volume è

Rapidità di incremento di energia = flusso entrante − flusso uscente

dove $dj_E = j'_E - j_E$ è la differenza tra la densità di corrente di energia agli estremi dell'elemento di volume. Ma, se non hanno luogo altri processi, un incremento di energia comporta un incremento di energia delle molecole entro il volume e ciò comporta un incremento di temperatura.

Il *calore specifico* c di una sostanza è definito come l'energia assorbita dall'unità di massa della sostanza per aumentare la temperatura di un grado. Esso è espresso in J kg^{-1} $°C^{-1}$ (ossia in cal kg^{-1} $°C^{-1}$). Quindi se la temperatura della sostanza viene aumentata di dT, l'energia assorbita per unità di massa è $c\,dT$. Se l'incremento di temperatura ha luogo nell'intervallo di tempo dt, l'energia assorbita per unità di massa e per unità di tempo è $c(\partial T/\partial t)$. Giacchè la massa nel nostro elemento di volume è $\rho\,S\,dx$, possiamo scrivere per l'incremento di energia nell'unità di tempo,

Rapidità di incremento di energia =

Uguagliando i risultati per le rapidità di incremento di energia e semplificando il fattore comune $S\,dx$, otteniamo

O, se usiamo la legge di Fourier, cioè l'Eq. (24.9), (e se assumiamo costante la conduttività K), l'equazione diviene

Direction of energy flow = Direzione del flusso di energia

o

dove

Fig. 24–10. Conduzione termica attraverso un elemento di volume.

in Fig. 24–10, with a length dx and a cross section of area S. Its volume is $dV = S\,dx$. Given that ρ is the density of the material, the mass in the volume element dV is $dm = \rho\,dV = \rho\,S\,dx$. The energy entering the volume element through the left-hand side per unit time (called the *incoming energy flux*) is $j_E\,S$, and the energy leaving the volume through the right-hand side, also per unit time (called the *outgoing energy flux*) is $j'_E\,S$. Then the energy gain per unit time inside the volume is

$$\begin{aligned}\text{Rate of energy gain} &= \text{incoming flux} - \text{outgoing flux}\\ &= j_E S - j'_E S = -(j'_E - j_E)S\\ &= -dj_E S = -\frac{\partial j_E}{\partial x}\,S\,dx,\end{aligned}$$

where $dj_E = j'_E - j_E$ is the difference between the energy current density at the ends of the volume element. But, if no other process takes place, an energy gain means an increase in the energy of the molecules within the volume, and this means a rise in temperature.

The *specific heat* c of a substance is defined as the energy absorbed by the substance per unit mass in order to increase its temperature one degree. It is expressed in J kg^{-1} $°C^{-1}$ (or in cal kg^{-1} $°C^{-1}$). Therefore, if the temperature of the substance is increased by dT, the energy absorbed per unit mass is $c\,dT$. If the temperature increase happens in the time dt, the energy absorbed per unit mass and per unit time is $c(\partial T/\partial t)$. Since the mass in our volume element is $\rho\,S\,dx$, we may write for its energy gain per unit time,

$$\text{Rate of energy gain} = (\rho S\,dx)\left(c\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \rho c S\frac{\partial T}{\partial t}\,dx.$$

Equating the results for the rate of energy gain and canceling the common factor $S\,dx$, we get

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_E}{\partial x}.$$

Or, if we use Fourier's law, Eq. (24.9), (and if we assume that the thermal conductivity K is constant), the equation will then become

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

or

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{24.10}$$

where

$$a^2 = K/\rho c. \tag{24.11}$$

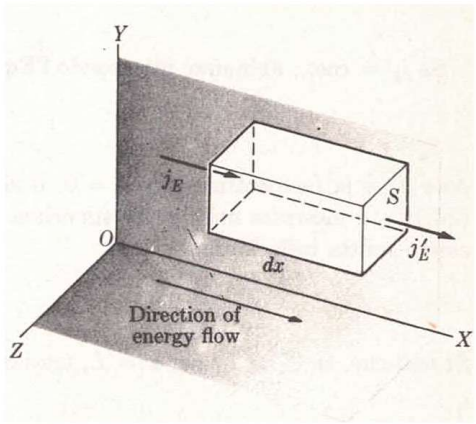


Fig. 24–10. Thermal conduction through a volume element.

L'Equazione (24.10) per la conduzione termica è quindi del medesimo tipo dell'Eq. (24.4) per la diffusione molecolare, ma esprime la conservazione dell'energia in luogo della conservazione del numero di particelle. Le sue soluzioni sono identiche matematicamente a quelle dell'Eq. (24.4), ma si riferiscono alla distribuzione della temperatura invece che a quella della concentrazione. In situazione stazionaria, $\partial T/\partial t = 0$, e quindi

o

In altre parole, la densità di corrente di energia attraverso ogni sezione della sostanza è costante. Per esempio, supponiamo di avere una sbarra circondata da un materiale isolante cosicchè non venga perduta energia attraverso le facce laterali (Fig. 24—11). La condizione di regime richiede che, per una quantità assegnata di energia entrante attraverso l'estremità sinistra che si trova a temperatura maggiore, un'identica quantità sia rimossa nell'unità di tempo all'estremità destra, a temperatura inferiore.

Insulating material = Materiale isolante

Fig. 24—11. Distribuzione stazionaria di temperatura lungo una sbarra isolata termicamente con estremi a temperature fisse.

Se j_E = cost., abbiamo, integrando l'Eq. (24.9), che

dove T_0 è la temperatura per $x = 0$. Il diagramma di T in funzione di x, dato dall'Eq. (24.12), è mostrato nella parte superiore della Fig. 24—11. L'Equazione (24.12) può essere scritta nella forma

Si noti che, se $T = T_1$ per $x = L$, troviamo dalla (24.13) che

espressione che fornisce la densità di corrente di energia lungo la sbarra isolata in termini delle temperature delle due estremità.

Equation (24.10) for thermal conduction is therefore of the same type as Eq. (24.4) for molecular diffusion, but it expresses conservation of energy instead of conservation of the number of particles. Its solutions are mathematically identical to those of Eq. (24.4), but they refer to temperature distribution instead of concentration distribution. For steady state, $\partial T/\partial t = 0$, and therefore

$$\frac{\partial j_E}{\partial x} = 0 \qquad \text{or} \qquad j_E = \text{const.}$$

In other words, the energy current density through any section of the substance is constant. For example, suppose that we have a rod, surrounded by an insulating material so that no energy is lost through the lateral surfaces (Fig. 24–11). The steady state requires that, for a given amount of energy per unit time fed through the left end at a higher temperature, the same amount of energy per unit time must be removed from the right end at a lower temperature.

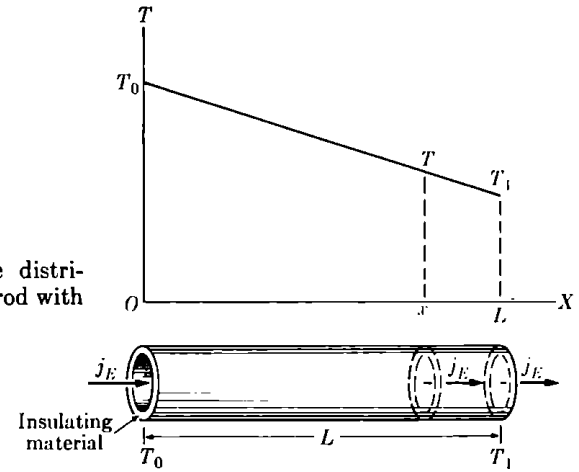


Fig. 24–11. Steady temperature distribution along a thermally insulated rod with ends at fixed temperatures.

If j_E = const, we have, by integrating Eq. (24.9), that

$$T = -\frac{j_E}{K}x + T_0, \tag{24.12}$$

where T_0 is the temperature at $x = 0$. The plot of T versus x as given by Eq. (24.12) is shown in the upper part of Fig. 24–11. Equation (24.12) may be written in the alternate form

$$j_E = K\frac{T_0 - T}{x}. \tag{24.13}$$

Note that if $T = T_1$ for $x = L$, then from Eq. (24.13) we find that

$$j_E = K\frac{T_0 - T_1}{L}, \tag{24.14}$$

which gives the energy current density along the insulated rod in terms of the temperature at the two ends.

ESEMPIO 24.2 Due pareti di spessore L_1 e L_2 e conduttività K_1 e K_2 sono in contatto (Fig. 24–12). Le temperature delle superfici esterne sono T_1 e T_2. Calcolare la temperatura della superficie comune. Si assume di aver raggiunto le condizioni di regime.

Soluzione: Poichè il flusso di energia è lo stesso nelle due pareti, dall'Eq. (24.13), abbiamo che $j_E = K_1(T_1 - T)/L_1$ e che $j_E = K_2(T - T_2)/L_2$, cosicchè $K_1(T_1 - T)/L_1 = K_2(T - T_2)/L_2$ ossia

che è la temperatura della parete comune.

EXAMPLE 24.2. Two walls of thicknesses L_1 and L_2 and thermal conductivities K_1 and K_2 are in contact (Fig. 24–12). The temperatures at the outer surfaces are T_1 and T_2. Compute the temperature at the common wall. Assume steady conditions.

Solution: Since the energy flux is the same for both walls, we have, from Eq. (24.13), that $j_E = K_1(T_1 - T)/L_1$ and $j_E = K_2(T - T_2)/L_2$, so that $K_1(T_1 - T)/L_1 = K_2(T - T_2)/L_2$ or

$$T = \frac{K_1T_1L_2 + K_2T_2L_1}{K_1L_2 + K_2L_1}, \tag{24.15}$$

which is the temperature of the common wall.

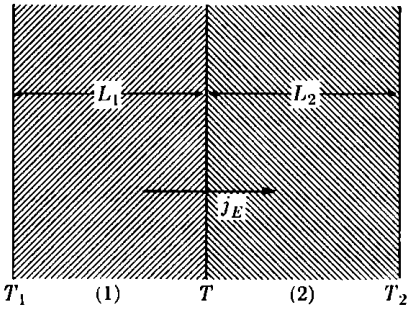


Fig. 24–12. Flusso di calore attraverso due strati a contatto costituiti di materiali diversi.

Fig. 24–12. Heat flow through two slabs of different materials in contact.

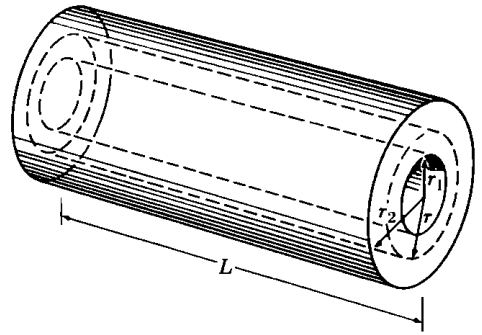


Fig. 24–13. Flusso radiale di calore attraverso un tubo spesso.

Fig. 24–13. Radial heat flow through a thick pipe.

ESEMPIO 24.3. Un tubo ha un raggio interno r_1 e temperatura interna T_1 e raggio esterno r_2 e temperatura esterna T_2. Ottenere la distribuzione di temperatura in ogni sezione del tubo ed il flusso di calore per unità di lunghezza (Fig. 24–13). Si assuma che $T_1 > T_2$.

Soluzione: La legge di Fourier, espressa nell'Eq. (24.9), ci consente di scrivere il flusso di energia in ogni direzione. Nel nostro problema, poichè il tubo ha simmetria cilindrica, il flusso di energia è radiale e dobbiamo scrivere per l'Eq. (24.9)

L'energia che passa attraverso ogni strato del tubo, di raggio r e area $(2\pi r)L$ è dunque

$$\Phi_E = \text{flusso radiale di energia} = j_E \times \text{area} = -2\pi LKr(\partial T/\partial r).$$

In condizioni di regime questo flusso di energia deve essere lo stesso attraverso ogni strato; cioè, non deve dipendere da r. Quindi $\Phi_E = \text{cost}$, cosicchè abbiamo $r\,\partial T/\partial r = C$, dove C denota una costante, o $dT = C\,dr/r$. Integrando, abbiamo

o

Per $r = r_2$, abbiamo $T = T_2$, cosicchè

o

EXAMPLE 24.3. A pipe has an inner radius r_1 and temperature T_1 and an outer radius r_2 and temperature T_2. Obtain the temperature distribution in any cross section as well as the heat flow across it per unit length (Fig. 24–13). Assume that $T_1 > T_2$.

Solution: Fourier's law, as expressed in Eq. (24.9), allows us to write the energy flux in any direction. In our problem, since the pipe has cylindrical symmetry, the energy flux is radial, and we must write for Eq. (24.9)

$$j_E = -K(\partial T/\partial r).$$

The energy passing through any layer of the pipe, whose radius is r and whose area is $(2\pi r)L$, is then

$$\Phi_E = \text{radial energy flux} = j_E \times \text{area} = -2\pi LKr(\partial T/\partial r).$$

Under steady-state conditions this energy flux must be the same throughout any layer; that is, it must be independent of r Therefore $\Phi_E = \text{const}$, so that we have $r\,\partial T/\partial r = C$, where C denotes the constant, or $dT = C\,dr/r$. Integrating, we have

$$\int_{T_1}^{T} dT = C\int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r} \quad \text{or} \quad T - T_1 = C\ln\frac{r}{r_1}.$$

For $r = r_2$ we have $T = T_2$, so that

$$T_2 - T_1 = C\ln\frac{r_2}{r_1} \quad \text{or} \quad C = \frac{T_2 - T_1}{\ln(r_2/r_1)},$$

espressione che fornisce, per la temperatura alla distanza r,

e per il flusso di energia

ESEMPIO 24.4. La temperatura alla superficie di un certo corpo varia in maniera periodica. Questa temperatura è data da

ove T_0 è l'ampiezza delle fluttuazioni di temperatura alla superficie. Calcolare la distribuzione di temperatura entro il corpo. (Questo problema può essere applicato, per esempio, per analizzare le variazioni di temperatura al di sotto della superficie terrestre. La superficie terrestre è soggetta a fluttuazioni di temperatura, più o meno regolari, con un periodo eguale ad un giorno e con una fluttuazione annuale sovrapposta a quella giornaliera.)

Soluzione: La situazione alla superficie del corpo è simile a quella di un estremo di una fune costretto ad oscillare, cosicchè un'onda si propaga lungo la fune. Quindi, potremmo pensare ad assumere, in primo luogo, che il nostro problema abbia pure una soluzione del tipo

Se una soluzione del genere fosse esatta, l'espressione precedente rappresenterebbe "un'onda termica." Essa si ridurrebbe all'Eq. (24.17) per $x = 0$, soddisfacendo quindi la nostra condizione al contorno. Tuttavia, l'Eq. (24.18) non può essere una soluzione della nostra equazione di propagazione (24.10) perchè $\partial T/\partial t = \omega T_0 \cos(\omega t - kx)$ e $\partial^2 T/\partial x^2 = -k^2 T_0 \sin(\omega t - kx)$ e, indipendentemente dal valore assegnato a k, non possiamo soddisfare l'Eq. (24.10) perchè da un lato abbiamo $\cos(\omega t - kx)$ e dall'altro $\sin(\omega t - kx)$. Se ricordiamo però la nostra discussione della propagazione delle onde elettromagnetiche in un conduttore (Paragrafo 20.12), nella quale compare anche un termine del primo ordine in t e dalla quale si ottiene un'onda smorzata, possiamo attenderci che il nostro problema possa essere risolto assumendo una soluzione avente la forma di un'onda attenuata. Lo studente può verificare, per sostituzione diretta nell'Eq. (24.10), che

è una soluzione. Questa si riduce all'Eq. (24.17) per $x = 0$ e quindi soddisfa le condizioni al contorno del problema. Pertanto, l'Eq. (24.19) descrive "un'onda termica smorzata" che si propaga entro il mezzo come mostra la Fig. 24—14. Notando che nell'Eq. (24.19), $k = \sqrt{\omega/2}/a$, la velocità di fase dell'onda termica risulta $v = \omega/k = a\sqrt{2\omega}$, ed aumenta con la frequenza. Anche lo smorzamento aumenta con la frequenza.

Fig. 24—14. Onda di temperatura.

which yields, for the temperature at the distance r,

$$T = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1}, \tag{24.16}$$

and for the energy flux

$$\Phi_E = \frac{2\pi LK(T_1 - T_2)}{\ln r_2/r_1}.$$

EXAMPLE 24.4. The temperature at the surface of a certain body is changing in a periodic form. This temperature is given by

$$T = T_0 \sin \omega t, \tag{24.17}$$

where T_0 is the amplitude of the temperature fluctuations at the surface. Compute the temperature distribution inside the body. (This problem can be applied, for example, to analyze the variations in temperature beneath the earth's surface. The earth's surface is subject to a more or less regular fluctuation of temperature within a period of one day, with an annual fluctuation superposed on this daily cycle.)

Solution: The condition at the surface of the body is similar to that at one end of a string which is forced to oscillate, with the result that a wave is propagated along the string. Therefore we may assume at first that our problem also has a solution of the form

$$T = T_0 \sin(\omega t - kx). \tag{24.18}$$

If such a solution were the correct one, the above expression would then represent a "thermal wave." It would reduce to Eq. (24.17) for $x = 0$, thus satisfying our boundary condition. However, Eq. (24.18) cannot be a solution of our propagation equation (24.10) because $\partial T/\partial t = \omega T_0 \cos(\omega t - kx)$ and $\partial^2 T/\partial x^2 = -k^2 T_0 \sin(\omega t - kx)$, and no matter what values we assign to k we cannot satisfy Eq. (24.10), because on one side we have $\cos(\omega t - kx)$ and on the other side $\sin(\omega t - kx)$. But if we recall our discussion of the propagation of an electromagnetic wave in a conductor (Section 20.12), in which a term of first order in t also appears and an attenuated wave results, we may expect that our problem here can be described by assuming a solution in the form of an attenuated wave. The student may verify by direct substitution in Eq. (24.10) that

$$T = T_0 e^{-(\sqrt{\omega/2}/a)x} \sin\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega/2}}{a}x\right) \tag{24.19}$$

is a solution. It reduces to Eq. (24.17) for $x = 0$, thus satisfying the boundary condition of the problem. Therefore Eq. (24.19) describes an "attenuated thermal wave" propagating inside the medium, as illustrated in Fig. 24–14. Noting that in Eq. (24.19) $k = \sqrt{\omega/2}/a$, the phase velocity of the thermal wave is $v = \omega/k = a\sqrt{2\omega}$, which increases with the frequency. The damping also increases with the frequency.

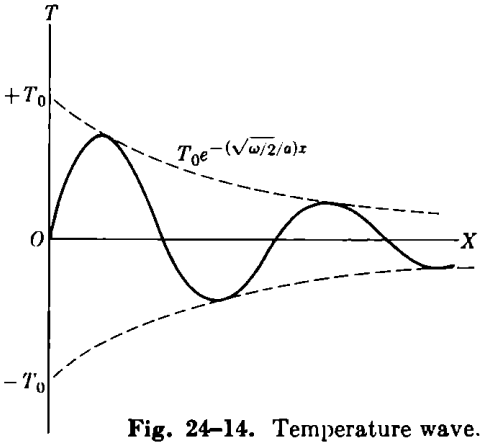
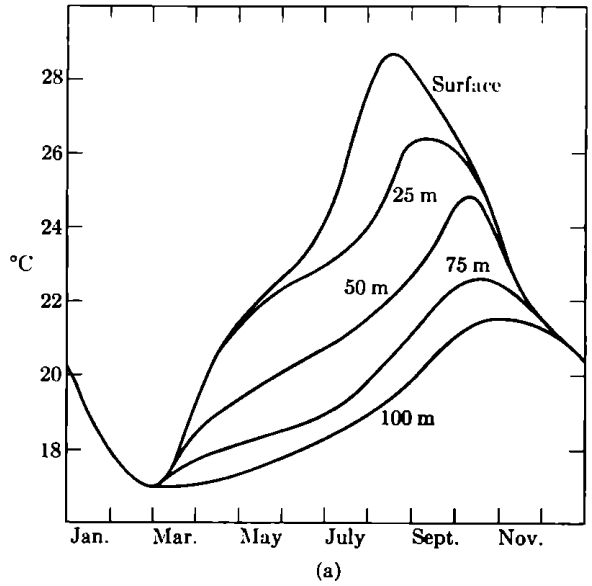


Fig. 24–14. Temperature wave.

Surface = Superficie
Jan. = Genn.
Mar. = Mar.
May = Magg.
July = Lugl.
Sept. = Sett.
Nov. = Nov.



Surface = Superficie
Midnight = Mezzanotte
Noon = Mezzogiorno
Hours = Ore

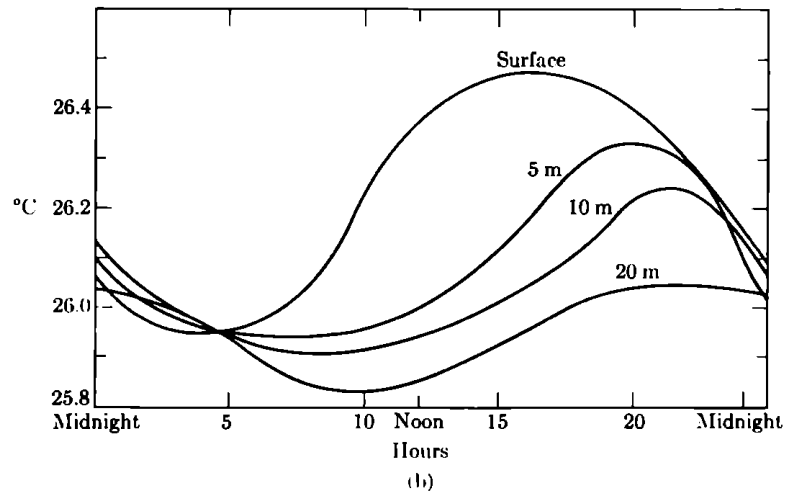


Fig. 24–15. (a) Variazione annuale della temperatura, a varie profondità, nella regione centrale dell'Oceano Atlantico. (b) Variazione diurna della temperatura a varie profondità nell'Oceano Atlantico, durante l'estate.

Questo problema suggerisce che la temperatura a grande profondità sotto la crosta terrestre o nell'oceano rimanga praticamente costante durante l'anno, fatto questo confermato dagli esperimenti. Le variazioni annue e diurne di temperatura per un punto nell'Atlantico centrale a varie profondità sono illustrate nelle Figure 24–15(a) e (b). Si noti che l'ampiezza dell'onda termica diminuisce con la profondità e si verifica un ritardo di fase dovuto alla velocità di propagazione finita delle onde termiche nell'acqua sotto la superficie.

Fig. 24–15. (a) Annual variation of temperature at various depths in the mid-Atlantic Ocean. (b) Diurnal variation of temperature at various depths in the Atlantic Ocean during summer.

This problem suggests that the temperature at a great depth beneath the earth's crust or in the oceans remains practically the same all the year around, a fact substantiated by experiments. The annual and diurnal temperature variations for a point in the mid-Atlantic at various depths are shown in Figs. 24–15(a) and (b). Note that the amplitude of the thermal wave decreases with depth, and that there is a phase lag due to the finite velocity of propagation of the thermal wave down from the surface into the water.

24.4 Trasporto con produzione e assorbimento

Parlando del processo di diffusione nel Paragrafo 24.2, siamo giunti all'Eq. (24.4), che esprime la conservazione del numero di particelle. Questa conservazione richiede che la differenza tra i flussi entrante e uscente nell'unità di tempo attraverso la facce dell'elemento di volume sia uguale all'accumulo nell'unità di tempo nell'elemento di volume. La situazione diviene più generale se—oltre alla pura diffusione che nasce dal moto delle molecole—sono possibili altri processi.

Supponiamo, per esempio, che un gas, mentre diffonde in un altro gas, subisca un processo, quale una reazione chimica, per cui alcune delle sue molecole scompaiono dalla fase gassosa. Allora, se scriviamo l'equazione di bilancio per il numero totale di molecole in un volume assegnato, dobbiamo tener conto del numero di molecole che scompaiono in seguito a questo processo addizionale. Può anche accadere la condizione opposta; le molecole possono essere *prodotte* in seguito a qualche processo nell'elemento di volume nel quale avviene la diffusione. L'espressione del bilancio del numero di particelle in presenza di produzione e assorbimento deve ora assumere la forma

$$\text{Accumulo} = \text{guadagno per diffusione} + \text{produzione} - \text{assorbimento},$$

ove tutti i termini si riferiscono alle unità di volume e di tempo. L'accumulo è $\partial n/\partial t$. Il guadagno per diffusione è $D(\partial^2 n/\partial x^2)$, in accordo con le argomentazioni fatte per ottenere l'Eq. (24.4). Se indichiamo con P la produzione e con A l'assorbimento, l'equazione di bilancio diviene

Per risolvere questa equazione dobbiamo conoscere in ciascun caso la natura dei termini di produzione P e di assorbimento A. Illustreremo l'applicazione di questa equazione al caso dei neutroni in un reattore nucleare termico.

Un reattore nucleare termico è un dispositivo nel quale vengono prodotti neutroni per *fissione* (o suddivisione) degli atomi di uranio, che costituiscono ciò che viene chiamato il combustibile. Gli atomi di uranio sono distribuiti nel volume del reattore.

Quando un atomo di uranio si fende o si separa in due frammenti in seguito alla cattura di un neutrone, vengono emessi altri neutroni che sono molto veloci. Nei reattori termici viene aggiunta una sostanza chiamata *moderatore*. Nella maggior parte dei reattori il moderatore è costituito da grafite o da acqua. Quando i neutroni veloci prodotti dalla fissione dell'uranio collidono con gli atomi del moderatore, perdono energia (vedere Esempio 9.13), finchè non raggiungono un'energia di equilibrio con gli atomi del moderatore. I neutroni vengono allora chiamati *neutroni termici* o *lenti*. Questi neutroni vengono usati per produrre nuove fissioni degli atomi di uranio. I neutroni termici si muovono e diffondono nel reattore finchè non vengono assorbiti (o catturati) dagli atomi dei diversi materiali che formano il reattore, principalmente dal combustibile di uranio, o sfuggono dalle pareti del reattore. Quindi un reattore nucleare termico funziona sulla base del processo di diffusione neutronica, combinata con la produzione e con l'assorbimento di neutroni.

24.4 Transport with Production and Absorption

When we were talking about the diffusion process in Section 24.2, we arrived at Eq. (24.4), which expresses the conservation of the number of particles. This conservation requires that the difference between the incoming and outgoing fluxes per unit time through the sides of a volume element be equal to the accumulation per unit time in the volume element. The situation becomes more general when—in addition to pure diffusion, which arises from molecular motion—other processes are possible.

Suppose, for example, that a gas, at the same time that it diffuses into another gas, undergoes some process, such as a chemical reaction, by which some of its molecules disappear from the gaseous phase. Then, when we write the balance equation for the total number of molecules in a given volume, we must take into account the number of molecules that disappear as a result of this additional process. The reverse situation may also occur; molecules may be *produced* because of some kind of process that takes place in the given volume element where the diffusion is taking place. The expression for the balance in the number of particles when production and absorption takes place must now be of the form

$$\text{Accumulation} = \text{gain by diffusion} + \text{production} - \text{absorption},$$

where all terms are per unit volume and per unit time. The accumulation is $\partial n/\partial t$. The gain by diffusion is $D(\partial^2 n/\partial x^2)$ according to the logic used to obtain Eq. (24.4). If we designate the production by P and the absorption by A, the balance equation is then

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + P - A. \tag{24.20}$$

To solve this equation we must know in each case the nature of the production P and the absorption A. We shall illustrate the application of this equation to the case of neutrons in a thermal nuclear reactor.

A thermal nuclear reactor is a device in which neutrons are produced by the *fission* (or division) of uranium atoms, which constitute what is called the fuel. The uranium atoms are distributed over the volume of the reactor.

When a uranium atom fissions or splits into two fragments as a result of the capture of a neutron, new neutrons are also released, which are very fast. In a thermal nuclear reactor a substance called the *moderator* is added. In most reactors the moderator is graphite or water. When the fast neutrons produced by uranium fission collide with the atoms of the moderator, they lose energy (see Example 9.13), and eventually they come to energy equilibrium with the moderator atoms. The neutrons are then called *slow* or *thermal neutrons*. These neutrons are used to produce new fissions of uranium atoms. The thermal neutrons wander or diffuse through the reactor until they are either absorbed (or captured) by atoms of the different materials comprising the reactor, mainly the uranium fuel, or escape through the walls of the reactor. Thus a thermal nuclear reactor operates by the process of neutron diffusion, combined with the production and the absorption of neutrons.

In un reattore omogeneo l'uranio combustibile ed il moderatore sono mescolati uniformemente. In tal caso, si può dimostrare che la differenza $P - A$ tra produzione e assorbimento è proporzionale a n; cioè $P - A = Cn$, ove C è una costante dipendente dai parametri tipici del progetto del reattore. Allora l'Eq. (24.20) diviene

In condizioni stazionarie, $\partial n/\partial t = 0$ e l'Eq. (24.21) si riduce a

Reactor = Reattore

ossia

ove $B^2 = C/D$ è chiamato "*buckling*". La soluzione dell'Eq. (24.22) è del tipo

come si può verificare per sostituzione diretta, dove n_0 e n_1 sono due costanti da determinare mediante le condizioni al contorno.

Fig. 24–16. Distribuzione di neutroni in un reattore nucleare.

Supposto che il reattore abbia la forma di uno strato di spessore a, l'intuizione fisica ci dice che, sebbene i neutroni vengano generati in tutto il volume, essi sfuggono attraverso le due superfici estreme dello strato. Quindi la densità di neutroni è massima al centro dello strato e decresce verso i lati producendo due correnti di diffusione, come è suggerito in Fig. 24–16. Possiamo allora imporre che $n = 0$ in $x = 0$ e in $x = a$. Imponendo la condizione per $x = 0$ nell'Eq. (24.23), otteniamo $n_1 = 0$, cosicchè l'Eq. (24.23) si riduce a $n = n_0 \sin Bx$. Imponendo la condizione per $x = a$, si ha $\sin Ba = 0$ ossia $Ba =$ (intero) $\times \pi$. Ma n non può essere negativo, perchè rappresenta il numero di neutroni nell'unità di volume. Quindi otteniamo che, in condizioni stazionarie, il solo valore possibile è $Ba = \pi$, cosicchè il "buckling" è dato da

Quest'equazione stabilisce una relazione tra le dimensioni del reattore stratiforme e la produzione e assorbimento di neutroni, da cui B è determinato. Quindi l'equazione viene impiegata dai progettisti di reattori per determinare la composizione corretta del reattore al fine di garantire che esso funzioni in condizioni stazionarie. Per reattori aventi forme diverse, si ottengono analoghi risultati.

Una situazione simile può verificarsi per la conduzione termica quando le sorgenti sono distribuite nel volume della sostanza o possono avvenire perdite di energia alle superfici. Consideriamo, per esempio, la distribuzione di temperatura,

In a homogeneous reactor, the uranium fuel and the moderator are uniformly mixed throughout the volume of the reactor. In this case it can be shown that the difference $P - A$ between production and absorption is proportional to n; that is, $P - A = Cn$, where C is a constant related to the parameters involved in the design of the reactor. Then Eq. (24.20) becomes

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Cn. \qquad (24.21)$$

For a stationary state, $\partial n/\partial t = 0$ and Eq. (24.21) reduces to

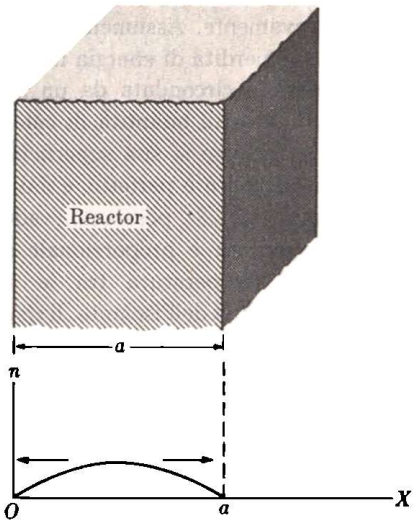
$$D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + Cn = 0$$

or

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + B^2 n = 0, \qquad (24.22)$$

where $B^2 = C/D$ is called the *buckling*. The solution of Eq. (24.22) is of the form

$$n = n_0 \sin Bx + n_1 \cos Bx, \qquad (24.23)$$



as may be verified by direct substitution, where n_0 and n_1 are two constants to be determined from the boundary conditions.

Fig. 24–16. Neutron distribution in a nuclear reactor.

Given that the reactor is in the form of a slab of thickness a, physical intuition tells us that, although the neutrons are generated throughout all the volume, they escape through the two limiting surfaces of the slab. Therefore, the neutron density is maximum at the center of the slab and decreases toward the sides, producing two diffusing currents, as suggested in Fig. 24–16. We may then require that $n = 0$ for $x = 0$ and $x = a$. Setting $x = 0$ in Eq. (24.23), we get $n_1 = 0$, so that Eq. (24.23) reduces to $n = n_0 \sin Bx$. Setting $x = a$, we get $\sin Ba = 0$ or $Ba =$ (integer) $\times \pi$. But n cannot be negative, because it represents the number of neutrons per unit volume. Therefore we finally recognize that the only possible result for steady state is $Ba = \pi$, giving the buckling as

$$B = \pi/a. \qquad (24.24)$$

This equation establishes a relation between the size of the reactor slab and the production and absorption of neutrons, as expressed by B. Thus the equation is used by reactor designers to determine the correct composition of the reactor to ensure that it will operate under steady conditions. For other reactor geometries, corresponding results are obtained.

A similar situation may occur for thermal conduction, in which energy sources are distributed through the volume of the substance, or the energy losses may occur at its surface. Let us consider, for example, the temperature distribution

in condizioni stazionarie per una sbarra la cui superficie non è isolata termicamente, cosicchè viene perduta dell'energia sotto forma di calore attraverso la superficie verso il mezzo circostante. La rapidità di perdita di energia è proporzionale all'area della superficie e può essere considerata proporzionale alla differenza di temperatura tra la sbarra ed il mezzo circostante, fintantochè questa differenza non è molto grande. Questa affermazione, chiamata *legge di Newton del raffreddamento*, è valida solo approssimativamente. Assumendo il valore zero per la temperatura del mezzo circostante, si ha che la perdita di energia in ogni punto della superficie è proporzionale a T. Anche se la sbarra è circondata da un materiale isolante, una certa quantità di calore viene perduta attraverso la sua superficie, poichè nessun isolamento è perfetto, e dai risultati dell'Esempio 24.3 possiamo vedere che l'energia perduta è proporzionale alla differenza di temperatura tra le superfici interna ed esterna dell'isolante. Il risultato di tale perdita di energia attraverso la superficie è che, in condizioni stazionarie, la temperatura diminuisce esponenzialmente lungo la sbarra, come è mostrato dalla Fig. 24—17, invece che linearmente come avviene nel caso di una sbarra perfettamente isolata.

Insulated bar = Sbarra isolata
Uninsulated bar = Sbarra non isolata

Fig. 24—17. Distribuzione di temperatura lungo una sbarra non isolata i cui estremi sono tenuti a temperature fisse.

24.5 *Viscosità*

Come si è detto all'inizio di questo capitolo, esiste per i gas (e per i fluidi in generale), un terzo fenomeno di trasporto che è in stretta connessione sia con la diffusione molecolare che con la conduzione termica: la *viscosità*. Nel Paragrafo 7.10, trattando il moto di un corpo in un fluido, abbiamo introdotto il coefficiente di viscosità η, senza però definirlo in termini del tutto precisi.

Consideriamo un fluido nel quale si verifichi, oltre all'agitazione termica delle molecole, un movimento di massa o una corrente di convezione dell'intero fluido. Quali esempi, ricordiamo una corrente d'aria in una galleria a vento, oppure l'acqua che scorre in un canale o in un condotto. Supponiamo che il fluido si muova come illustrato in Fig. 24—18, nelle quale la velocità di convezione v_y è diretta lungo l'asse Y, mentre il suo modulo è funzione della distanza lungo l'asse X, come è indicato nella parte inferiore della Fig. 24—18. Consideriamo il piano P perpendicolare all'asse X, e quindi parallelo alla direzione del moto convettivo del fluido. Le molecole, tuttavia, non si muovono soltanto parallelamente all'asse Y, perchè sono dotate del moto di agitazione termica e collidono tra di loro. Ne risulta che le molecole attraversano continuamente il piano P, sia dalla sinistra che dalla destra. Ogni molecola è dotata anche della quantità di moto dovuta al moto di convezione (parallela all'asse Y). Nella situazione illustrata in Fig. 24—18, le molecole che attraversano il piano da sinistra a destra hanno una quantità di moto dovuta al moto convettivo più grande di quelle che lo attraversano da destra a sinistra. Questa differenza di quantità di moto dà luogo ad un aumento della quantità di moto di origine convettiva alla destra di P e ad una diminuzione della quantità di moto convettiva alla sinistra.

La *densità di corrente di quantità di moto*, j_p, è l'entità di quantità di moto dovuta alla convezione (parallela all'asse Y) trasferita per unità di tempo attraverso un'area

under steady-state conditions for a bar whose surface is not thermally insulated, so that energy is lost as heat across its surface into the surrounding medium. The rate of energy loss is proportional to the area of the surface, and may be considered to be proportional to the temperature difference between the bar and the surroundings, so long as this difference is not very large. This statement, called *Newton's law of cooling*, is only approximately valid. Assuming the temperature of the surroundings to be zero, we then have that the energy loss at each point of the surface is proportional to T. Even if the bar is surrounded by an insulating material, some heat is lost through its surface, since no insulation is perfect, and from the result of Example 24.3 we may see that the energy lost is also proportional to the temperature difference between the inner and outer surfaces of the insulator. The result of this surface energy loss is that, in the steady state, the temperature decreases along the bar exponentially, as shown in Fig. 24–17, instead of linearly, as in the case of the perfectly insulated bar.

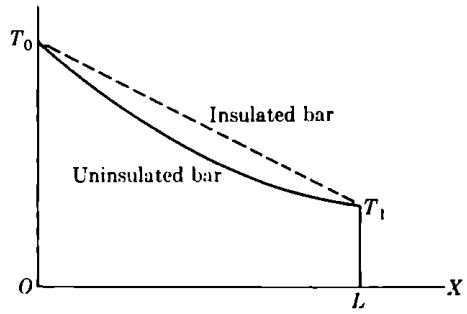


Fig. 24–17. Temperature distribution along a noninsulated rod whose ends are kept at fixed temperatures.

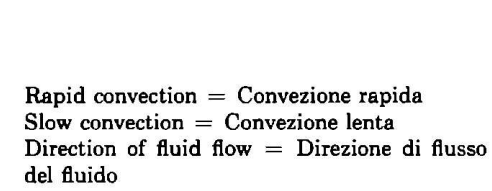
24.5 *Viscosity*

As we mentioned at the beginning of this chapter, there is a third transport phenomenon which holds for gases (and for fluids in general), which is closely related to both molecular diffusion and thermal conduction: *viscosity*. In Section 7.10, when we were dealing with the motion of a body through a fluid, we introduced a *coefficient of viscosity* η, but we did not define it in precise terms.

Let us consider a fluid in which there is, in addition to the thermal agitation of the molecules, a mass movement or convection current of the whole fluid. Examples are an air current in a wind tunnel or water running in a canal or pipe. Suppose that the fluid is moving as shown in Fig. 24–18, in which the convection velocity v_y is along the Y-axis, but its value is a function of the distance along the X-axis, as indicated at the bottom of Fig. 24–18. Consider the plane P perpendicular to the X-axis, and therefore parallel to the direction of the convective motion of the fluid. The molecules, however, do not move only parallel to the Y-axis, because they have thermal motion and will also collide among themselves. As a result, molecules are continuously crossing the plane P, both from left to right and from right to left. Each molecule carries its convective momentum (parallel to the Y-axis) with it. In the situation illustrated in Fig. 24–18, molecules crossing from left to right carry a larger convective momentum than those crossing from right to left. This difference in momentum gives an increase in the convective momentum on the right of P and a decrease in convective momentum on the left.

The *momentum current density*, j_p, is the amount of convective momentum (parallel to the Y-axis) transferred per unit time across a unit area perpendicular

unitaria perpendicolare alla direzione nella quale cambia la velocità di convezione; nel nostro caso, questa è la direzione dell'asse X. L'esperienza mostra che j_p è proporzionale alla variazione della velocità di convezione v_y per unità di lunghezza lungo l'asse X, ossia al gradiente della velocità di convezione (cioè, $\partial v_y/\partial x$), cosicchè possiamo scrivere l'espressione



che è molto simile alla legge di Fick per la diffusione molecolare ed alla legge di Fourier per la conduzione termica. Il segno meno nell'Eq. (24.25) è dovuto al fatto che il trasferimento di quantità di moto ha luogo nella direzione nella quale la velocità di convezione diminuisce. Il fattore di proporzionalità η è il coefficiente di viscosità del fluido. Si noti che j_p è espresso in (m kg s^{-1}) m^{-2} s^{-1} oppure in m^{-1} kg s^{-2}, e che $\partial v_y/\partial x$ è espressa in s^{-1}. Quindi, il coefficiente di viscosità è espresso in m^{-1} kg s^{-1}. Un decimo di questa unità è chiamato *poise*, che si abbrevia con P (vedere Tabella 7–2).

Fig. 24–18. Fluido nel quale avviene un movimento di massa oltre all'agitazione termica delle molecole.

Possiamo considerare queste questioni anche da un diverso punto di vista. Poichè nel nostro esempio il fluido alla destra del piano P guadagna quantità di moto di origine convettiva (parallela all'asse Y), ed il fluido alla sinistra di P perde quantità di moto di origine convettiva (parallela all'asse Y), possiamo dire che il fluido alla destra di P è soggetto ad una forza parallela alla direzione del flusso e che il fluido alla sinistra di P è soggetto ad una forza eguale e contraria. Il valore di questa forza, per unità di area, è chiamato *sforzo tangenziale* ed è designato con τ. Poichè la forza è uguale alla derivata della quantità di moto rispetto al tempo, concludiamo che $\tau = j_p$. Possiamo vedere che le unità di misura in questa relazione sono tra loro coerenti poichè τ (essendo una forza per unità d'area) è espresso in N m^{-2} ossia m^{-1} kg s^{-2}, unità coincidente con quella trovata prima per j_p. L'Equazione (24.25) può quindi essere scritta nella forma diversa $\tau = \eta\ \partial v_y/\partial x$.

Ora applicheremo al fluido il principio di conservazione della quantità di moto. Consideriamo un elemento di volume di lunghezza dx e area della sezione trasversale uguale a S (Fig. 24–19). Il fluido contenuto nell'elemento di volume ha una velocità di convezione v_y. Le molecole che entrano nell'elemento di volume da sinistra causano un incremento di quantità di moto per unità di tempo (chiamato flusso di quantità di moto entrante), parallelo all'asse Y, eguale a $j_p\ S$. Le molecole che lasciano l'elemento da destra causano una perdita di quantità di moto per unità di tempo (chiamata flusso di quantità di moto uscente), parallela all'asse Y, eguale a $j_p'\ S$. Perciò

to the direction in which the convective velocity changes; in our case, this is the direction defined by the X-axis. Experiment shows that j_p is proportional to the variation of the convection velocity v_y per unit length along the X-axis, or the convection velocity gradient (that is, $\partial v_y/\partial x$), so that we may write the expression

$$j_p = -\eta \frac{\partial v_y}{\partial x}, \qquad (24.25)$$

which is very similar to Fick's law for molecular diffusion and Fourier's law for thermal conduction. The negative sign in Eq. (24.25) is due to the fact that the momentum transfer takes place in the direction in which the convection velocity decreases. The proportionality factor η is the coefficient of viscosity for the fluid. Note that j_p is expressed in (m kg s^{-1}) m^{-2} s^{-1} or m^{-1} kg s^{-2}, and $\partial v_y/\partial x$ is expressed in s^{-1}. Thus the coefficient of viscosity is expressed in m^{-1} kg s^{-1}. One-tenth of this unit is called a *poise*, abbreviated P (see Table 7–2).

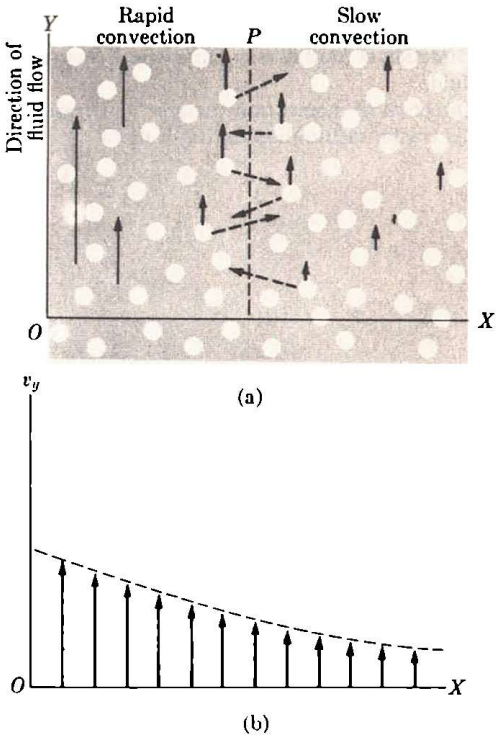


Fig. 24–18. Fluid in which there is mass movement plus thermal agitation of molecules.

We may look at this matter from a different point of view. Since, in our illustration, the fluid to the right of plane P is gaining convective momentum (parallel to the Y-axis), and the fluid to the left of P is losing convective momentum (parallel to the Y-axis), we may say that the fluid to the right of P is subject to a force parallel to the direction of the flow and that the fluid to the left of P is subject to an equal and opposite force. The value of this force, per unit area, is called a *shear stress* and is designated by τ. Since force is equal to the time rate of change of momentum, we conclude that $\tau = j_p$. We can see that the units of this relation are consistent, since τ (being a force per unit area) is expressed in N m^{-2} or m^{-1} kg s^{-2}, which are the same units previously found for j_p. Equation (24.25) can therefore be written in the alternative form $\tau = \eta\ \partial v_y/\partial x$.

Now we shall apply the principle of conservation of momentum to the fluid. Let us consider a volume element of length dx and cross-sectional area S (Fig. 24–19). The volume element has a convection velocity v_y. Molecules which enter the volume element from the left produce a gain in momentum per unit time (called incoming momentum flux), parallel to the Y-axis, equal to $j_p\ S$. The molecules which leave through the right side produce a loss in momentum per unit time (called outgoing momentum flux), parallel to the Y-axis, equal to $j_p'\ S$. Thus

Direction of fluid flow = Direzione di flusso del fluido
Direction of momentum transfer = Direzione del trasferimento di quantità di moto

Fluid velocity = Velocità del fluido
Fluid motion = Moto del fluido

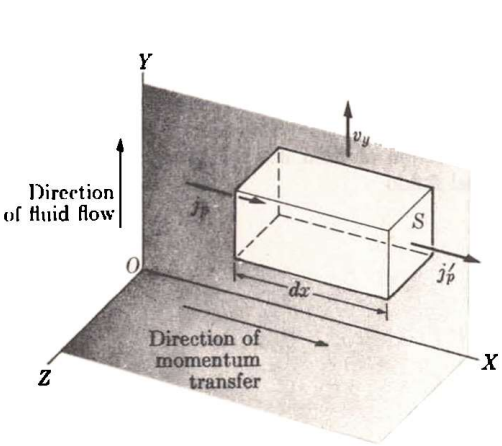


Fig. 24–19. Trasferimento di quantità di moto attraverso un elemento di volume.

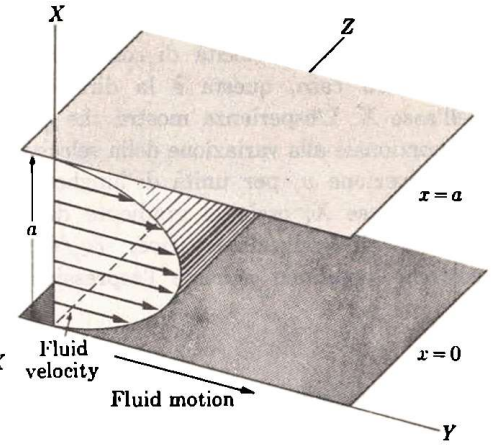


Fig. 24–20. Distribuzione di velocità in un fluido viscoso che scorre tra due piani paralleli.

Fig. 24–19. Momentum transfer through a volume element.

Fig. 24–20. Velocity distribution for viscous fluid flow between two parallel planes.

l'incremento netto di quantità di moto per unità di tempo entro l'elemento di volume è

Rapidità di incremento di quantità di moto = flusso entrante − flusso uscente

Se la quantità di moto per unità di volume dovuta alla convezione del fluido viene indicata con p_y, l'incremento di quantità di moto, nell'unità di tempo, del fluido entro l'elemento di volume può anche essere scritto nella forma

Rapidità di incremento di quantità di moto =

Quindi, eguagliando i due risultati e semplificando il fattore comune $S\,dx$, otteniamo

Si noti che il membro di sinistra di questa equazione rappresenta una forza per unità di volume e quindi il membro di destra può essere chiamato *forza viscosa* per unità di volume, agente sul fluido.

Ci possono essere anche altre forze agenti sul fluido nella direzione dell'asse Y. Per esempio, un fluido in moto lungo un canale o un condotto inclinati è anche soggetto al proprio peso. Designamo queste forze addizionali per unità di volume con f. Quindi f rappresenta un incremento addizionale di quantità di moto per unità di tempo e di volume e l'equazione precedente può essere scritta

the net gain in momentum per unit time inside the volume element is

$$\begin{aligned}\text{Rate of gain in momentum} &= \text{incoming flux} - \text{outgoing flux}\\ &= j_p S - j'_p S = -(j'_p - j_p)S\\ &= -\frac{\partial j_p}{\partial x} S\,dx.\end{aligned}$$

If the convective momentum per unit volume of the fluid is designated by p_y, the gain in momentum, per unit time, of the fluid inside the volume element may also be written in the form

$$\text{Rate of gain in momentum} = \frac{\partial p_y}{\partial t} S\,dx.$$

Therefore, equating both results and canceling the common factor $S\,dx$, we obtain

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} = -\frac{\partial j_p}{\partial x}.$$

Note that the left-hand side of this equation represents a force per unit volume and therefore the right-hand side may be called the *viscous force*, per unit volume, acting on the fluid.

There may be other forces acting on the fluid along the Y-axis. For example, a fluid moving along a sloping channel or pipe is also subject to its own weight. Let us designate these additional forces per unit volume by f. Thus f represents an additional gain in momentum per unit volume and per unit time, and the above equation may be written

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} = -\frac{\partial j_p}{\partial x} + f.$$

Combinando questo risultato con l'Eq. (24.25), e tenendo conto del fatto che $p_y = \rho v_y$, ove ρ è la densità del fluido, abbiamo

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}f, \tag{24.26}$$

che è l'equazione del moto di un fluido viscoso. Essa esprime la conservazione della quantità di moto del fluido. Vediamo che se aggiungiamo il termine f/ρ, che ha lo stesso ruolo del termine $P - A$ nell'Eq. (24.20), e che può essere interpretato come un incremento (o decremento) di quantità di moto per unità di massa e di tempo (cioè, come produzione o assorbimento di quantità di moto) dovuto alle interazioni esterne agenti sul fluido, anche questa equazione è simile all'Eq. (24.2). In assenza di forze esterne, l'Eq. (24.26) si riduce a

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2},$$

che è identica all'equazione della diffusione, l'Eq. (24.4), con la sostituzione di D con η/ρ e di n con v_y.

È importante notare che l'Eq. (24.26) è valida solo per fluidi incomprimibili con velocità di convezione piccola; per fluidi che non soddisfano questi criteri, compaiono nell'equazione anche altri termini.

ESEMPIO 24.5. Determinare la distribuzione di velocità in un fluido viscoso che si muove tra due pareti piane parallele, come in un canale. Si assuma che sia presente una forza per unità di volume costante e che il moto avvenga in condizioni stazionarie.

Soluzione: Poichè le condizioni sono stazionarie, abbiamo che $\partial v_y/\partial t = 0$, e l'Eq. (24.26) si riduce a

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = -\frac{f}{\eta}.$$

Poichè in questo problema f/η è costante, abbiamo (integrando rispetto a x),

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{f}{\eta}x + c_1,$$

dove c_1 è la costante di integrazione. Integrando nuovamente, otteniamo

$$v_y = -\frac{f}{2\eta}x^2 + c_1 x + c_2.$$

Per determinare le costanti di integrazione c_1 e c_2, dobbiamo usare le condizioni al contorno. Poichè un fluido viscoso tende ad aderire alle pareti, il fluido in contatto con le due pareti deve avere una velocità molto piccola che possiamo ritenere nulla. Quindi, con riferimento alla Fig. 24–20, dobbiamo avere $v_y = 0$ per $x = 0$ e $x = a$, come condizioni al contorno. Queste condizioni forniscono $c_1 = fa/2\eta$ e $c_2 = 0$, cosicchè

$$v_y = \frac{f}{2\eta}(ax - x^2).$$

Combining this result with Eq. (24.25), and taking into account the fact that $p_y = \rho v_y$, where ρ is the density of the fluid, we have

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}f, \tag{24.26}$$

which is the equation of motion of the viscous fluid. It expresses the conservation of momentum of the fluid. We recognize that this, too, is similar to Eq. (24.2), if we add the term f/ρ, which plays the same role as $P - A$ does in Eq. (24.20), and which may be interpreted as an increase (or decrease) of momentum per unit mass and per unit time (i.e., production or absorption of momentum) due to external interactions on the fluid. In the absence of external forces, Eq. (24.26) reduces to

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2},$$

which is identical to the diffusion equation, Eq. (24.4), with D replaced by η/ρ and n replaced by v_y.

It is important to note that Eq. (24.26) is valid only for incompressible fluids with a small convection velocity; for fluids which do not meet these criteria, other terms enter into the equation.

EXAMPLE 24.5. Determine the distribution of velocity in a viscous fluid moving between two parallel plane walls, such as in a channel. Assume a constant force per unit volume and steady conditions.

Solution: Since the conditions are steady, we have that $\partial v_y/\partial t = 0$, and Eq. (24.26) reduces to

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = -\frac{f}{\eta}.$$

Since in this problem f/η is constant, we have (integrating with respect to x),

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{f}{\eta}x + c_1,$$

where c_1 is the integration constant. Integrating again, we obtain

$$v_y = -\frac{f}{2\eta}x^2 + c_1 x + c_2.$$

To determine the integration constants c_1 and c_2, we must use the boundary conditions. Because a viscous fluid tends to adhere to the walls, the fluid in contact with the two walls must have a very small velocity, which we may assume to be zero. Thus, referring to Fig. 24–20, we must have $v_y = 0$ for $x = 0$ and $x = a$ as boundary conditions. These conditions yield $c_1 = fa/2\eta$ and $c_2 = 0$, resulting in

$$v_y = \frac{f}{2\eta}(ax - x^2).$$

Questa espressione fornisce la velocità di convezione del fluido in funzione della distanza dal piano $x = 0$. Essa rappresenta una parabola come è indicato in Fig. 24–20. La velocità è massima nel piano mediano. Se il fluido si muove nella direzione verticale, f può essere il peso per unità di volume del fluido e quindi eguale a ρg. Se il fluido si muove tra due piani orizzontali, la forza f viene prodotta applicando un gradiente di pressione lungo la direzione di moto. In questo caso, in accordo con i risultati del Paragrafo 9.14, $f = -\partial p/\partial x$; se p_1 e p_2 sono le pressioni in due punti separati dalla distanza l, abbiamo che $f = (p_1 - p_2)/l$ e

24.6 *Cammino libero medio, frequenza di collisione, e sezione d'urto*

Discuteremo ora alcuni concetti importanti per descrivere i fenomeni di trasporto nei gas da un punto di vista molecolare. Siccome le molecole di un gas sono in moto, esse collidono frequentemente, e per conseguenza i loro percorsi sono a zigzag (Fig. 24–21). Per descrivere il moto di queste molecole sono stati introdotti tre utili concetti: il *cammino libero medio di collisione*, la *frequenza di collisione*, e la *sezione d'urto*.

Il *cammino libero medio di collisione*, indicato con l, è la distanza media percorsa da una molecola del gas tra due collisioni. Esso può essere calcolato seguendo una molecola per un tempo sufficientemente lungo e trovando la lunghezza media del percorso tra collisioni successive. Oppure può essere anche calcolato fissando l'attenzione ad un particolare istante, su un gran numero di molecole che hanno appena subìto una collisione e trovando la distanza media percorsa da tutte le molecole fino alla collisione successiva. I due metodi sono statisticamente equivalenti.

La *frequenza di collisione*, indicata con Γ, è il numero di collisioni subìte da una molecola nell'unità di tempo. Il cammino libero medio e la frequenza di collisione sono strettamente connessi perchè, assegnata v_{med}, velocità media di una molecola, il tempo medio tra due collisioni è $t = l/v_{\text{med}}$, e quindi il numero di collisioni nell'unità di tempo, o frequenza di collisione Γ, può essere espresso come $1/t$ ossia

$$\text{ave} = \text{med}$$

La frequenza di collisione Γ è espressa in s^{-1}. Ovviamente, se abbiamo N molecole in un volume assegnato, il numero totale di collisioni subìte da tutte le molecole in questo volume nell'unità di tempo vale $N\Gamma$.

Un altro utile concetto è quello d *sezione d'urto macroscopica* Σ, definita come il numero di collisioni subìte da una molecola per unità di lunghezza e data quindi da

Essa è espressa in m^{-1}.

Fig. 24–21. Cammini liberi molecolari.

This expression gives the convection velocity of the fluid as a function of the distance to the plane $x = 0$. It represents a parabola, as indicated in Fig. 24–20. The velocity is maximum at the median plane. If the fluid moves in the vertical direction, f may be the weight per unit volume of the fluid, and thus equal to ρg. When the fluid moves between two horizontal planes, the force f is produced by applying a pressure gradient along the direction of motion. In this case, according to Section 9.14, $f = -\partial p/\partial x$; if p_1 and p_2 are the pressures at two points separated the distance l, we have then that $f = (p_1 - p_2)/l$ and

$$v_y = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l}(ax - x^2).$$

24.6 *Mean Free Path, Collision Frequency, and Collision Cross Section*

We shall now discuss some concepts that are important to describe transport phenomena in gases from the molecular point of view. Since molecules in a gas are in motion, they collide frequently, and as a result their paths are a zigzag (Fig. 24–21). To describe the motion of these molecules, three useful concepts have been introduced: the *collision mean free path*, the *collision frequency*, and the *collision cross section*.

The *collision mean free path*, designated by l, is the average distance a molecule of a gas moves between collisions. It may be computed by following a molecule for a sufficiently long time and finding the average length of the paths between successive collisions. Or it may also be computed by looking, at a particular instant of time, at a large number of molecules that have just suffered a collision, and finding the average distance moved by all molecules until their next collision. The two methods are statistically equivalent.

The *collision frequency*, designated by Γ, is the number of collisions a molecule suffers per unit time. The mean free path and the collision frequency are closely related because, given that v_{ave} is the average velocity of a molecule, the average time between two collisions is $t = l/v_{\text{ave}}$, and thus the number of collisions per unit time, or the collision frequency Γ, can be expressed as $1/t$ or

$$\Gamma = v_{\text{ave}}/l. \qquad (24.27)$$

The collision frequency Γ is expressed in s^{-1}. Obviously, if we have N molecules in a given volume, the total number of collisions of all molecules in this volume per unit time is $N\Gamma$.

Another useful concept is the *macroscopic collision cross section* Σ, defined as the number of collisions of a molecule per unit length, and therefore given by

$$\Sigma = 1/l. \qquad (24.28)$$

It is expressed in m^{-1}.

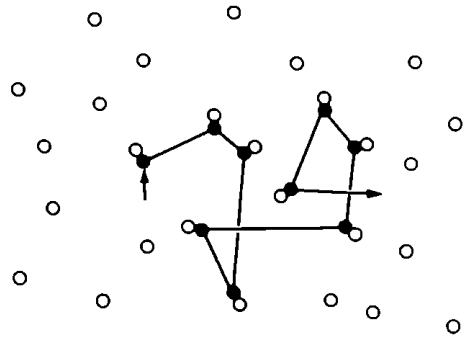


Fig. 24–21. Molecular free paths.

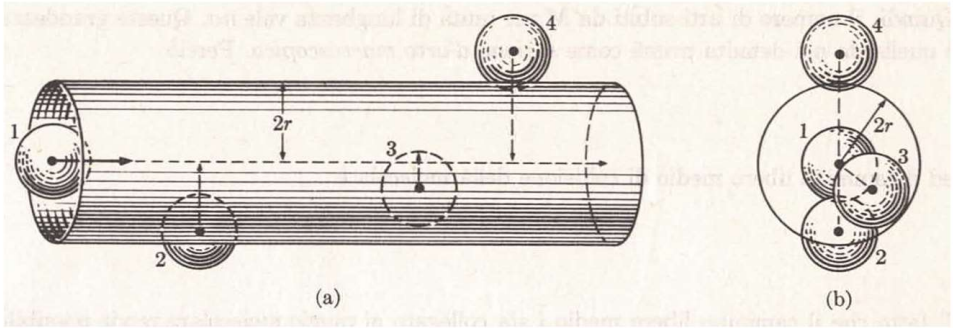


Fig. 24–22. Cilindro spazzato da una molecola ed entro il quale hanno luogo le collisioni. Le molecole i cui *centri* sono entro il cilindro subiscono collisioni con la molecola 1. (a) Vista laterale, (b) vista frontale del volume così delimitato.

Fig. 24–22. Collision cylinder swept out by a molecule. Molecules whose *centers* are within the cylinder would undergo collisions with molecule 1. (a) Side view, (b) front view of excluded volume.

Il cammino libero medio l è legato alle dimensioni delle molecole nel modo seguente. Chiamiamo n il numero di molecole per unità di volume e r il "raggio" di ciascuna molecola. Usando la parola "raggio," non intendiamo che le molecole siano necessariamente delle sfere. Tuttavia, a causa del loro rapido moto rotazionale, esse si comportano di fatto come sfere. Trascurando le forze intermolecolari e assumendo che le molecole si comportino come palle da biliardo, abbiamo che, affinchè due molecole collidano, è necessario che la distanza tra le traiettorie descritte dai loro centri sia minore di $2r$ (Fig. 24–22). Allora, se assumiamo che la molecola 1 si muova verso destra, la regione efficace attorno a 1 entro la quale deve trovarsi il centro di un'altra molecola affinchè abbia luogo una collisione, è un cilindro di raggio $2r$. Se la separazione tra i due centri è minore di $2r$, come per le molecole 2 e 3, avviene la collisione. Se essa è maggiore di $2r$, come per la molecola 4, non avviene la collisione.

Consideriamo ora uno strato avente spessore dx e area S (Fig. 24–23). Il numero totale di molecole del gas nello strato è $nS\,dx$. Ciascuna molecola scherma una certa area di raggio $2r$; cioè, impedisce il libero passaggio attraverso tale area di una molecola M. Questa area è

$$\sigma = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2. \tag{24.29}$$

Questa area è chiamata *sezione d'urto microscopica*. L'area totale schermata da tutte le molecole nello strato (ritenendo che non vi siano sovrapposizioni, il che è corretto se la concentrazione molecolare non è molto grande e se lo strato è molto sottile) è $(nS\,dx)\sigma$. Allora la probabilità che M subisca una collisione passando attraverso lo strato è

$$\frac{(nS\,dx)\sigma}{S} = n\sigma\,dx.$$

The mean free path l is related to the dimensions of the molecule in the following way. Let us call n the number of molecules per unit volume and r the "radius" of each molecule. When we use the word "radius," we do not mean to imply that the molecules are spheres. However, because of their rapid rotational motion, they effectively act as spheres. Neglecting intermolecular forces and assuming that molecules act as billiard balls, we have that, in order for two molecules to collide, the distance between their two centers projected on a plane perpendicular to the direction of relative motion must be less than $2r$ (Fig. 24–22). Then, if we assume that molecule 1 moves to the right, the effective region around 1 within which the center of another molecule has to be in order for a collision to occur is a cylinder of radius $2r$. If the separation between the centers is less than $2r$, as it is for molecules 2 and 3, collision does occur. If it is greater than $2r$, as it is for molecule 4, there is no collision.

Consider now a slab of thickness dx and area S (Fig. 24–23). The total number of gas molecules in the slab is $nS\,dx$. Each molecule screens a certain area of radius $2r$; that is, it prevents the free passage of a molecule M. This area is expressed by

This is called the *microscopic collision cross section*. The total area screened by all molecules in the slab (assuming that there is no superposition, which is correct if the molecular concentration is not very large and dx is very small) is $(nS\,dx)\sigma$. Then the probability that M suffers a collision in passing through the slab is

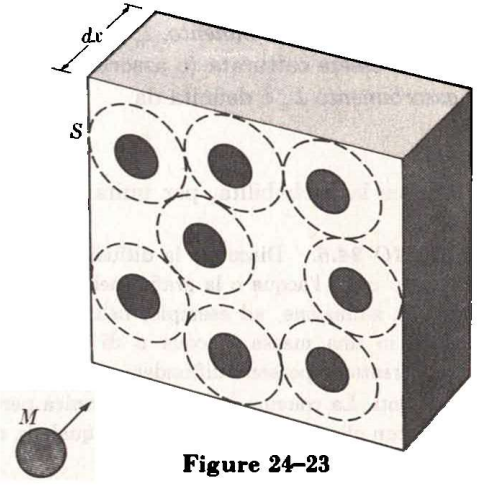


Figura 24–23

Figure 24–23

Quindi, il numero di urti subìti da M per unità di lunghezza vale $n\sigma$. Questa grandezza è quella da noi definita prima come *sezione d'urto macroscopica*. Perciò

Thus the number of collisions of M per unit length is $n\sigma$. This is what we previously defined as the *macroscopic collision cross section*. Thus

$$\Sigma = n\sigma, \tag{24.30}$$

ed il cammino libero medio di collisione della molecola è

and the collision mean free path of the molecule is

$$l = \frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{n\sigma}. \tag{24.31}$$

Il fatto che il cammino libero medio l sia collegato al raggio molecolare rende possibile stimare le dimensioni molecolari misurando l.

Considerando anche le forze intermolecolari, si giunge alla conclusione che le molecole vengono diffuse o "collidono" con un conseguente cambiamento della direzione di moto, anche se la loro separazione è maggiore del loro diametro, come si è discusso nell'Esempio 7.16, per l'urto sotto l'effetto di una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza. In questo caso più generale, σ è ancora legato a Σ e a l dalle Equazioni (24.30) e (24.31), che ne costituiscono in realtà la definizione, mentre l'Eq. (24.29) non è più applicabile.

Si noti che l'Eq. (24.31) è corretta fintantochè consideriamo le molecole nello strato della Fig. 24—23 come oggetti fissi. Se esse sono in moto, come avviene nei gas, la probabilità di collisione può essere maggiore, con conseguente diminuzione del cammino libero medio. Per esempio, un calcolo che tiene conto della distribuzione di velocità in un gas fornisce

When we take the intermolecular forces into account, the molecules are scattered or "collide" with a resultant change in their direction of motion even when their separation is larger than their diameters, as was discussed in Example 7.16 for scattering under an inverse-square force. In this more general case, σ is still related to Σ and l by Eqs. (24.30) and (24.31), which are actually their definitions, but Eq. (24.29) is no longer applicable.

Note that Eq. (24.31) is correct so long as we consider the molecules in the slab of Fig. 24–23 fixed. However, if they are in motion, as they are in a gas, the probability of a collision may be greater, and thus the mean free path decreases. For example, a derivation which takes into account the velocity distribution in a gas gives

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\sigma},$$

dove σ è dato dall'Eq. (24.29). Questo equivale a dire che $\Sigma = \sqrt{2}\, n\sigma$, il che è come dire che la sezione d'urto effettiva per molecola è $\sqrt{2}\, \sigma$ in luogo di σ.

I concetti di sezione d'urto di cammino libero medio possono essere estesi ad altri processi, oltre a quelli di collisione, come quelli di assorbimento o di cattura. Per esempio, se una molecola, mentre diffonde, può essere catturata da un'altra molecola, il *cammino libero medio di assorbimento*, l_a, fornisce la distanza media percorsa da una molecola prima di essere catturata (o assorbita). Analogamente, la *sezione d'urto macroscopica di assorbimento* Σ_a è definita da

where σ is given by Eq. (24.29). This is equivalent to $\Sigma = \sqrt{2}\, n\sigma$ and is the same as saying that the effective cross section per molecule is $\sqrt{2}\, \sigma$ instead of σ.

The concepts of cross section and mean free path can be extended to other processes, in addition to collisions, such as absorption or capture. For example, if a molecule, while diffusing, can be captured by another molecule, the *absorption mean free path*, l_a, gives the average distance a molecule moves before it is captured (or absorbed). Similarly, the *macroscopic absorption cross section* Σ_a is defined as

$$\Sigma_a = 1/l_a,$$

e fornisce la probabilità, per unità di lunghezza, che una molecola venga assorbita.

and gives the probability, per unit length, that the molecule will be absorbed.

ESEMPIO 24.6. Discutere la diffusione di neutroni in un mezzo non moltiplicante; cioè, in un mezzo come l'acqua o la grafite nel quale i neutroni vengono assorbiti ma non prodotti. È questa la situazione, ad esempio, nella colonna termica di un reattore nucleare, colonna che consiste in una massa d'acqua o di grafite posta a lato del reattore. I neutroni prodotti entro il reattore possono diffondere lungo la colonna termica e possono essere usati per molti esperimenti. La colonna è chiamata termica perchè i neutroni che ne escono sono in equilibrio termico con gli atomi del materiale del quale la colonna è fatta.

EXAMPLE 24.6. Discuss neutron diffusion in a non-multiplicative medium; i.e., a medium such as water or graphite in which neutrons are absorbed but not produced. This is the situation, for example, in a thermal column of a nuclear reactor, a column which consists of a mass of water or graphite placed adjacent to one of the sides of the reactor. The neutrons produced inside the reactor are allowed to diffuse along the thermal column, and may be used for a number of experiments. The column is called thermal because the neutrons that emerge from it are in thermal equilibrium with the atoms of the material composing the column.

Reactor core = Nucleo del reattore
Thermal column = Colonna termica
Reactor shielding = Schermo del reattore

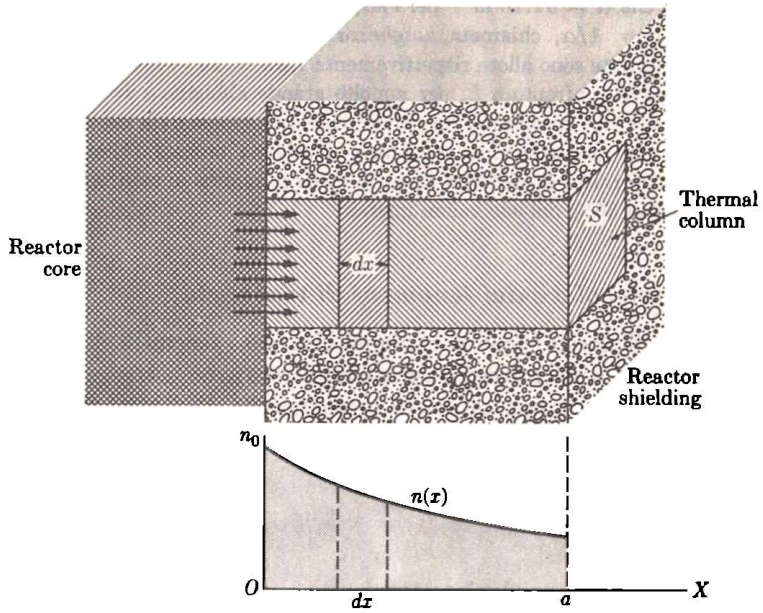


Fig. 24–24. Concentrazione dei neutroni lungo una colonna termica in un reattore nucleare.

Fig. 24–24. Neutron concentration along a thermal column in a nuclear reactor.

Soluzione: La situazione fisica è illustrata in Fig. 24–24. I neutroni penetrano nella colonna termica da sinistra uscendo dal nucleo del reattore e diffondono attraverso la colonna. Durante il processo di diffusione, i neutroni subiscono delle collisioni con gli atomi del materiale costituente la colonna. In alcuni casi, la collisione dà luogo a una cattura di neutroni da parte degli atomi del materiale. Chiamiamo l_a il cammino libero medio di assorbimento, cioè la distanza media percorsa da un neutrone prima di venire catturato. Allora, la *sezione d'urto macroscopica di assorbimento* del materiale è $\Sigma_a = 1/l_a$. Per neutroni termici in acqua, Σ_a è circa 22 m^{-1}, e in grafite è 0.037 m^{-1}, valori che mostrano che i neutroni termici sono catturati più facilmente dall'acqua che dalla grafite.

Consideriamo ora lo strato di spessore dx e sezione trasversale di area S mostrato nella Fig. 24–24. Il numero totale di neutroni presenti nello strato è $nS\,dx$. La distanza totale percorsa nell'unità di tempo è $(nS\,dx)v_{med}$ dove v_{med} è la velocità media dei neutroni. Il numero di neutroni assorbito per unità di tempo dal materiale è perciò $(nS\,dx)v_{med}\Sigma_a$, e per unità di volume è $v_{med}\Sigma_a n$. Quindi, l'Eq. (24.20), eliminando il termine di produzione e scrivendo il termine di assorbimento nella forma appena precisata, diviene

ave = med

In condizioni stazionarie, $\partial n/\partial t = 0$, e

o

dove $\alpha^2 = v_{med}\Sigma_a/D$. La soluzione di questa equazione differenziale è $n = n_0e^{-\alpha x} + n_1e^{\alpha x}$, dove n_0 e n_1 sono determinati dalle condizioni agli estremi della colonna termica. Poichè per neutroni termici in acqua e grafite, D/v_{med} è uguale rispettivamente a 0.0084 m e

Solution: The physical arrangement is illustrated in Fig. 24–24. Neutrons penetrate the thermal column from the left, proceeding from the reactor core, and diffuse through the column. During the diffusion process, the neutrons undergo collisions with the atoms of the material composing the column. In some cases the collision results in a capture of the neutron by the atoms of the material. Let us call l_a the absorption mean free path; i.e., the average distance a neutron moves before being captured. Then the *macroscopic absorption cross section* of the material is $\Sigma_a = 1/l_a$. For thermal neutrons in water, Σ_a is about 22 m^{-1}, and in graphite 0.037 m^{-1}, which shows that slow neutrons are more easily captured by water than by graphite.

Let us now consider the slab of thickness dx and cross sectional area S shown in Fig. 24–24. The total number of neutrons within it is $nS\,dx$. The total distance they move per unit time is $(nS\,dx)v_{ave}$, where v_{ave} is the neutrons' average velocity. The number of neutrons absorbed per unit time by the material is therefore $(nS\,dx)v_{ave}\Sigma_a$, and per unit volume is $v_{ave}\Sigma_a n$. Thus Eq. (24.20), if we eliminate the factor of production and let absorption be given by the above value, becomes

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - v_{ave}\Sigma_a n.$$

Under steady conditions, $\partial n/\partial t = 0$, and

$$D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - v_{ave}\Sigma_a n = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \alpha^2 n = 0,$$

where $\alpha^2 = v_{ave}\Sigma_a/D$. The solution of this differential equation is $n = n_0e^{-\alpha x} + n_1e^{\alpha x}$, where n_0 and n_1 are determined by the boundary conditions at both ends of the thermal column. Since for thermal neutrons in water and graphite, D/v_{ave} equals 0.0084 m and

0,0092 m, abbiamo che $\alpha = 51.18\ m^{-1}$ per l'acqua e $2.005\ m^{-1}$ per la grafite. Talvolta viene usata la quantità $L = 1/\alpha$, chiamata *lunghezza di diffusione*. I valori di L per neutroni termici in acqua e in grafite sono allora rispettivamente 1.95×10^{-2} m e 0,50 m. Se la colonna termica è molto lunga in confronto a L, per x molto grande abbiamo $n = 0$. Ciò comporta che $n_1 = 0$ e che $n = n_0 e^{-\alpha x}$, cosicchè si ha un decremento esponenziale del numero di neutroni termici man mano che questi si muovono lungo la colonna termica. Allora la lunghezza di diffusione, $L = 1/\alpha$, fornisce la distanza lungo la quale il numero di neutroni diminuisce di un fattore $1/e$, cioè sino al 36%, del suo valore iniziale.

24.7 *Teoria molecolare dei fenomeni di trasporto*

Nella prima parte di questo capitolo abbiamo discusso i fenomeni di trasporto da un punto di vista generale o macroscopico senza considerare il comportamento delle molecole responsabili di questi fenomeni. La nostra presentazione si è basata sulla legge di Fick per la diffusione,

sulla legge di Fourier per la conduzione termica,

e sulla legge del flusso in regime viscoso,

Figura 24–25

Tutte queste leggi hanno una base sperimentale e sono valide entro i limiti indicati in ciascun caso. Ora noi vogliamo correlare le quantità D, K, e η con le proprietà molecolari. Ci limiteremo al caso dei gas.

Come si è detto prima, i tre fenomeni di trasporto già discussi sono dovuti all'agitazione molecolare. La diffusione delle molecole è dovuta al trasferimento di *molecole* da una regione nella quale esse sono più concentrate ad una regione nella quale sono meno concentrate. La conduzione termica è dovuta al trasferimento di *energia* da una regione nella quale le molecole si muovono velocemente, e quindi dove la temperatura è alta, ad una altra dove esse si muovono lentamente e dove quindi la temperatura è inferiore. Similmente la viscosità è dovuta al trasferimento della *quantità di moto* associata al moto convettivo da un luogo nel quale la convezione è più rapida ad un luogo nel quale è più lenta.

Il passo successivo dovrebbe essere quello di ottenere queste leggi in termini del nostro modello molecolare. Questo procedimento è molto istruttivo, come illustrazione di un'argomentazione di tipo fisico. Esso è complicato matematicamente e quindi presenteremo qui solo una descrizione delle linee principali. Il filo logico che si segue è il seguente. Consideriamo per prima la diffusione. Con riferimento alla Fig. 24–25, il problema consiste nel trovare il numero netto di molecole che attraversano (nell'unità di tempo) un'area dS posta perpendicolarmente alla direzione nella quale ha luogo la diffusione. Questa direzione è stata indicata con l'asse X.

0.0092 m, respectively, we have that $\alpha = 51.18\ m^{-1}$ for water and $2.005\ m^{-1}$ for graphite. Sometimes the quantity $L = 1/\alpha$, called the *diffusion length*, is used. The values of L for thermal neutrons in water and in graphite are thus 1.95×10^{-2} m and 0.50 m, respectively. When the thermal column is very long compared with L, we must have $n = 0$ for x very large. This requires that $n_1 = 0$ and $n = n_0 e^{-\alpha x}$, resulting in an exponential decay of the number of thermal neutrons as they move along the column. Then the diffusion length, $L = 1/\alpha$, gives the distance in which the number of neutrons decreases to $1/e$, or 36% of its initial value.

24.7 *Molecular Theory of Transport Phenomena*

In the first part of this chapter we have discussed transport phenomena from a general or macroscopic point of view, without looking into the molecular behavior responsible for these phenomena. Our presentation has been based on Fick's law for diffusion,

$$j = -D\frac{\partial n}{\partial x}, \qquad (24.32)$$

Fourier's law for thermal conduction,

$$j_E = -K\frac{\partial T}{\partial x}, \qquad (24.33)$$

and the law of viscous flow,

$$j_p = -\eta\frac{\partial v_y}{\partial x}. \qquad (24.34)$$

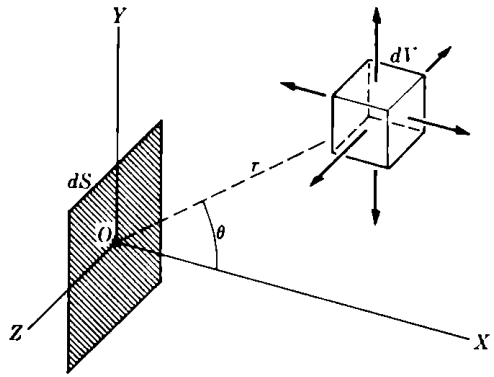


Figure 24–25

All these laws have an experimental basis, and are valid within the limits indicated in each case. We now intend to correlate the quantities D, K, and η with the molecular properties. We shall limit ourselves to gases only.

As we have mentioned before, the three transport processes we have discussed are due to molecular agitation. Molecular diffusion is due to the transfer of *molecules* from a region in which they are more concentrated to a region in which they are less concentrated. Thermal conduction is due to the transfer of *energy* from one region where molecules move fast and thus the temperature is high, to another where they move more slowly and thus the temperature is lower. Similarly, viscosity is due to the transfer of *momentum* associated with the convective motion, from one place where the convection is fast to another where it is slower.

Our next step should be to obtain these laws in terms of our molecular model. The derivation is very instructive as an illustration of physical reasoning. It is mathematically involved, however, and thus we shall present only a description of the procedure. The logic to be used is as follows: Consider diffusion first. When we refer to Fig. 24–25, the problem consists in finding the net number of molecules which cross (per unit time) an area dS placed perpendicular to the direction in which diffusion takes place. This direction has been designated as the X-axis.

Consideriamo un volume dV posto alla distanza r da dS. Il numero di molecole in questo volume è $n\,dV$ ed il numero di collisioni da esse subite nell'unità di tempo è $\Gamma\,n\,dV$. Un certo numero di queste molecole sono dirette verso dS dopo la collisione. Ma non tutte raggiungono dS, a causa di nuove collisioni che le deviano dal loro cammino. Quindi, dobbiamo determinare quante di queste molecole, dopo aver colliso entro il volume dV, attraversano l'area dS nell'unità di tempo. Se integriamo su tutto lo spazio, per tener conto di tutte le parti della sostanza, otteniamo la corrente netta in dS. Ovviamente, affinchè ci sia una corrente netta, è necessario che n vari con x in modo tale che il numero di particelle che attraversano dS dalla destra sia diverso dal numero di quelle che l'attraversano dalla sinistra. Altrimenti, ragioni di simmetria mostrano che la corrente netta deve essere nulla. Confrontiamo poi l'espressione risultante per la densità di corrente di dS con la legge di Fick per la diffusione, l'Eq. (24.32). Da questo risultato, possiamo allora ottenere il valore del coefficiente di diffusione D in termini delle costanti molecolari. Per la conduzione termica, dobbiamo tener conto dell'energia trasportata da ogni molecola che attraversa dS. Per la viscosità dobbiamo tener conto della quantità di moto di origine convettiva trasportata dalle molecole.

Il risultato di tutti questi calcoli è che il coefficiente di diffusione molecolare è connesso con la dinamica molecolare dall'espressione

ave = med

ove v_{med} è la velocità media e l e il cammino libero medio di collisione delle molecole. Per il coefficiente di conduzione termica, abbiamo la relazione

ave = med

Infine il coefficiente di viscosità è espresso da

ave = med

Le Espressioni (24.35), (24.36), e (24.37) mostrano la stretta relazione esistente tra i tre fenomeni di trasporto.

La teoria dei fenomeni di trasporto cui abbiamo accennato costituisce ciò che è chiamata *approssimazione della diffusione*. Una teoria più raffinata deve tener conto di certi fattori addizionali che dànno luogo e equazioni più complicate.

Se si considera anche l'effetto delle forze intermolecolari, i valori misurati di D, K, e η ci consentono di ottenere i parametri che definiscono il potenziale intermolecolare. Un risultato immediato è costituito dal fatto che possiamo stimare le dimensioni molecolari. Misurando uno qualsiasi di questi coefficienti possiamo calcolare il cammino libero medio e da questo possiamo ottenere la sezione d'urto σ ed il raggio molecolare. Dobbiamo tuttavia ricordare che i valori così ottenuti del cammino libero medio e del raggio molecolare forniscono soltanto degli ordini di grandezza. La Tabella 24−1 elenca i valori sperimentali ottenuti per alcuni gas monoatomici, biatomici, e poliatomici; essa fornisce anche i raggi molecolari, calcolati partendo dai dati di viscosità.

ESEMPIO 24.7. Stimare i coefficienti D e K per l'idrogeno in condizioni standard di temperatura e pressione. Confrontare i risultati con i valori sperimentali.

We then consider a volume dV at a distance r from dS. The number of molecules in this volume is $n\,dV$ and the number of collisions they undergo per unit time is $\Gamma n\,dV$. A certain number of these molecules are aimed toward dS after the collision. But not all of them reach dS because they may suffer a new collision that deflects them from their path. Thus we must determine how many of these molecules, after colliding within the volume dV, cross the area dS per unit time. When we integrate over all space to take into account all regions of the substance, we obtain the net current at dS. Obviously, in order for there to be a net current, it is necessary that n vary with x in such a way that the number of particles crossing dS from the right be different from those crossing it from the left. Otherwise symmetry indicates that the net current should be zero. We compare the resulting expression for the current density at dS with Fick's law for diffusion, Eq. (24.32). From this result, we can then obtain the value of the diffusion coefficient D in terms of the molecular constants. For thermal conduction, we must account for the energy carried by each molecule which crosses dS. For viscosity, we must account for the convective momentum carried by the molecules.

The result of all these calculations is that we find that the coefficient of molecular diffusion is related to the molecular dynamics by means of the expression

$$D = \tfrac{1}{3} v_{\text{ave}} l, \tag{24.35}$$

where v_{ave} is the average velocity and l is the collision mean free path of the molecules. For the coefficient of thermal conduction, we have the relation

$$K = D(\tfrac{3}{2} kn) = \tfrac{1}{2} nk v_{\text{ave}} l. \tag{24.36}$$

Finally, the coefficient of viscosity is expressed by

$$\eta = D(nm) = \tfrac{1}{3} nm v_{\text{ave}} l. \tag{24.37}$$

Expressions (24.35), (24.36), and (24.37) show the close relationship among the three transport phenomena.

The theory of transport phenomena we have sketched is what may be called the *diffusion approximation*. A more refined theory must take into account certain additional factors which result in more complex equations.

When we take the effect of intermolecular forces into account, the measured values of D, K, and η allow us to obtain the parameters which define the intermolecular potential. One immediate result is that we can estimate molecular dimensions. By measuring any one of these coefficients, we can compute the mean free path, and from it we can obtain the cross section σ and the molecular radius. We must consider, however, that the calculated values of the mean free path and the molecular radius indicate only the orders of magnitude. Table 24–1 lists experimental values for some monatomic, diatomic, and polyatomic gases; it also gives their molecular radii, computed from viscosity data.

EXAMPLE 24.7. Estimate the coefficients D and K for hydrogen at STP. Compare with the experimental results.

Tabella 24–1 Valori sperimentali del coefficiente di diffusione D, della conduttività termica K, e della viscosità η, tutti in condizioni standard di temperatura e pressione

Substance = Sostanza

Substance	$D \times 10^5$, $m^2\ s^{-1}$	$K \times 10^2$, $m\ kg\ s^{-3}\ °K^{-1}$	$\eta \times 10^5$, $m^{-1}\ kg\ s^{-1}$	$r \times 10^{10}$,* m
He		14.3	1.86	0.90
Ne	4.52	4.60	2.97	1.06
A	1.57	1.63	2.10	1.50
Xe	0.58	0.52	2.10	2.02
H_2	12.8	16.8	0.84	1.12
O_2	1.81	2.42	1.89	1.51
N_2	1.78	2.37	1.66	1.54
CO_2	0.97	1.49	1.39	1.89
NH_3	2.12	2.60	0.92	1.83
CH_4	2.06	3.04	1.03	1.70

*I raggi molecolari sono stati calcolati partendo dai valori sperimentali della viscosità.

Soluzione: Dobbiamo determinare le quantità v_{med}, l, n, e m per l'idrogeno in tali condizioni. La massa di una molecola di idrogeno è 3.33×10^{-27} kg. Il numero di molecole per unità di volume quando $T = 273°K$ e $p = 1.01 \times 10^5\ N\ m^{-2}$ è, usando la legge dei gas perfetti $pV = NkT$, Eq. (9.62), $n = V/N = p/kT = 2.68 \times 10^{25}\ m^{-3}$. Si può dimostrare che la velocità media di una molecola è data da $v_{med} = \sqrt{8kT/\pi m}$. Nel nostro caso, allora $v_{med} = 1.69 \times 10^3\ m\ s^{-1}$. Infine, se prendiamo il raggio di una molecola di idrogeno uguale a $r = 1.12 \times 10^{-10}$ m, abbiamo per il cammino libero medio il valore $l = 1/\sqrt{2}\, n\sigma = 1.68 \times 10^{-7}$ m.

Con i valori precedenti, usando le Equazioni (24.35) e (24.36), troviamo che

I corrispondenti valori sperimentali sono $D = 12.8 \times 10^{-5}$ e $K = 16.8 \times 10^{-2}$. Quindi possiamo determinare, con la nostra teoria semplificata per lo meno il corretto ordine di grandezza dei parametri considerati. Un'estensione della teoria nella quale si tenga conto anche dell'energia trasportata dai movimenti interni della molecola, come quelli di rotazione e di vibrazione, migliora l'accordo tra valori teorici e sperimentali. In particolare la conduttività termica di un gas biatomico viene diminuita di un fattore 3,3.

24.8 Conclusione

I fenomeni fisici descritti in questo capitolo possono sembrare alquanto lontani da quelli descritti in precedenza nella Parte 3, e quindi un po' lontani dalla linea principale di ragionamento sin qui seguita. In una certa misura ciò è vero. Ma, d'altro canto, a prescindere dall'intrinseca importanza dei fenomeni di trasporto, la nostra discussione di questi fenomeni come una manifestazione dell'agitazione molecolare è stata molto utile in quanto ha posto in luce il fatto che non tutti i campi si propagano necessariamente con onde della tipica forma $f(x \pm vt)$, seguendo l'equazione d'onda (18.11), e che in natura esistono altri tipi di propagazione.

TABLE 24–1 Experimental Values for the Diffusion Coefficient D, Thermal Conductivity K, and Viscosity η, All at STP

* Molecular radii have been computed from experimental data on viscosity.

Solution: We must determine the quantities v_{ave}, l, n, and m for hydrogen under such conditions. The mass of a hydrogen molecule is 3.33×10^{-27} kg. The number of molecules per unit volume at $T = 273°K$ and $p = 1.01 \times 10^5\ N\ m^{-2}$ is, using the ideal gas law $pV = NkT$, Eq. (9.62), $n = V/N = p/kT = 2.68 \times 10^{25}\ m^{-3}$. It can be shown that the average velocity of a molecule is given by $v_{ave} = \sqrt{8kT/\pi m}$. In our case, then, $v_{ave} = 1.69 \times 10^3\ m\ s^{-1}$. Finally, if we take the radius of a hydrogen molecule as $r = 1.12 \times 10^{-10}$ m, we have for the mean free path $l = 1/\sqrt{2}\, n\sigma = 1.68 \times 10^{-7}$ m.

With the above values, using Eqs. (24.35) and (24.36), we find that

$$D = 9.42 \times 10^{-5}\ m^2\ s^{-1},$$
$$K = 5.25 \times 10^{-2}\ m\ kg\ s^{-3}\ °K^{-1}.$$

The corresponding experimental values are $D = 12.8 \times 10^{-5}$ and $K = 16.8 \times 10^{-2}$. And hence at least the correct orders of magnitude can be obtained by our simplified theory, which is based on an ideal monatomic gas. An extension of the theory that considers the energy transported by internal motions, such as rotation and vibration, improves the agreement between the theoretical and experimental values. In particular, the thermal conductivity of a diatomic gas will be increased by a factor of 3.3.

24.8 Conclusion

The physical phenomena described in this chapter may seem somewhat disconnected from those described previously in Part 3, and thus a little off the main trend of reasoning followed so far. To a certain extent this is true. But on the other hand, quite apart from the intrinsic importance of transport phenomena, our discussion of them as a manifestation of molecular agitation has served a very useful purpose, in that it has demonstrated that all fields do not necessarily propagate in the typical wave form $f(x \pm vt)$, following the wave equation (18.11), and that nature exhibits other kinds of propagation.

Bibliografia

References

1. "Density Gradients," G. Oster, *Sci. Am.*, August 1965, page 70
2. "The Conduction of Heat in Solids," R. Sproull, *Sci. Am.*, December 1962, page 92
3. "Measurement of Molecular Diameters and Average Velocities," R. Warner, *Am. J. Phys.* **29,** 736 (1961)
4. "Development of the Kinetic Theory of Gases. VI. Viscosity," S. Brush, *Am. J. Phys.* **30,** 269 (1962)
5. "Heat Waves and Angström's Method," H. Bryant, *Am. J. Phys.* **31,** 325 (1963)
6. "Variation of Air Viscosity with Temperature," M. McInally, *Am. J. Phys.* **31,** 732 (1963)
7. "Transport Properties of a Gas Mixture," E. Desloge, *Am. J. Phys.* **32,** 733 and 742 (1964)
8. "Temperature and Pressure Dependence of the Viscosity of Gases," D. Cronin, *Am. J. Phys.* **33,** 835 (1965)
9. *The Feynman Lectures on Physics*, Volume I, R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1963, Chapter 43
10. *Source Book in Physics*, W. F. Magie. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1963, page 377 (Stefan)
11. *Foundations of Modern Physical Science*, G. Holton and D. H. D. Roller. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1958, Chapter 25

Problemi

24.1 Se il coefficiente di diffusione D dipendesse dalla concentrazione e quindi anche da x, come andrebbe modificata l'Eq. (24.4)?

24.2 Dimostrare che l'equazione che esprime, in tre dimensioni, la conservazione del numero di particelle diviene $\partial n/\partial t = -\text{div}\,\mathbf{j}$. In questo caso come andrebbe scritta l'Eq. (24.4)?

24.3 Il gradiente di temperatura di una sbarra di rame isolata è $-2.5\,°C$ per cm. (a) Calcolare la differenza di temperatura tra due punti distanti 5 cm. (b) Determinare la quantità di calore che passa (al secondo) attraverso l'unità di area perpendicolare alla sbarra. La conduttività termica del rame è

24.4 La conduttività termica dell'argento è circa 1.0 cal $cm^{-1}\ s^{-1}\ °C^{-1}$. Calcolare il flusso di calore al secondo in un disco di argento spesso 0,1 cm, avente un'area di 2 cm^2 se la differenza di temperatura tra le due facce del disco è 10°C.

24.5 Una stanza ha tre finestre con un'area totale di 3 m^2. Lo spessore del vetro è 0,4 cm. La temperatura interna è 20°C e quella esterna 10°C. Calcolare la quantità di calore passante attraverso le finestre in un secondo ed in un'ora. La conduttività termica del vetro è 5.85×10^{-1} m kg $s^{-3}\ °C^{-1}$.

24.6 Due sbarre, una di rame ed una di acciaio, entrambe lunghe 1 m e con sezione trasversale di 1 cm^2, sono saldate ad un estremo comune. L'estremo libero della sbarra di rame è tenuto a 100°C e l'estremo libero della

Problems

24.1 If the diffusion coefficient D were dependent on the concentration and thus also on x, how should Eq. (24.4) be modified?

24.2 Show that in three dimensions the equation expressing the conservation of the number of particles becomes $\partial n/\partial t = -\text{div}\,\mathbf{j}$. How should Eq. (24.4) be written in this case?

24.3 The temperature gradient of an insulated copper rod is $-2.5°C$ per cm. (a) Compute the difference in temperature between two points separated 5 cm. (b) Determine the amount of heat crossing (per second) a unit of area which is perpendicular to the rod. The thermal conductivity of copper is

$$3.84 \times 10^2 \text{ m kg s}^{-3}\ °C^{-1}.$$

24.4 The thermal conductivity of silver is about 1.0 cal $cm^{-1}\ s^{-1}\ °C^{-1}$. Calculate the flow of heat per second through a silver disk 0.1 cm in thickness and having an area of 2 cm^2 if the temperature difference between the two sides of the disk is 10°C.

24.5 A room has three windows with a total area of 3 m^2. The thickness of the glass is 0.4 cm. The indoor temperature is 20°C and the outdoor temperature is 10°C. Compute the amount of heat passing through the windows per second and per hour. The thermal conductivity of glass is 5.85×10^{-1} m kg $s^{-3}\ °C^{-1}$.

24.6 Two rods, one of copper and the other of steel, both 1 m long and with cross sections equal to 1 cm^2, are welded at a common end. The free end of the copper rod is kept at 100°C and the free end of the

sbarra di acciaio è tenuto a 0°C. Calcolare (a) la temperatura dell'estremo comune, (b) il gradiente di temperatura nella sbarra di rame ed in quella di acciaio, (c) la quantità di calore che attraversa una generica sezione della sbarra nell'unità di tempo. (d) Eseguire un diagramma della temperatura lungo la sbarra. Le conduttività termiche del rame e dell'acciaio sono 3.84×10^2 e $0.46 \div 10^2$ m kg s^{-3} $°C^{-1}$, rispettivamente.

24.7 Una sbarra lunga 2 m ha un nucleo centrale in acciaio avente diametro pari a 1 cm ed un rivestimento in rame avente diametro esterno pari a 2 cm. La superficie esterna della sbarra è isolata termicamente ed un estremo è mantenuto a 100°C, mentre l'altro è a 0°C. (a) Calcolare la corrente totale di calore nella sbarra, in condizioni di regime. (b) Quale frazione del calore è portata da ciascun materiale? Le conduttività termiche sono date nel Problema 24.6.

24.8 Una sbarra isolata termicamente ha una temperatura iniziale T_1. Un estremo viene bruscamente portato ad una temperatura più elevato T_0 mentre l'altro è tenuto alla temperatura costante T_1. Mostrare, con una serie di curve, la variazione di temperatura lungo la sbarra fino a che non viene raggiunta la condizione di regime illustrata nella Fig. 24–11.

24.9 Entrambi gli estremi di una sbarra metallica isolata di lunghezza L sono tenuti a 0°C, sebbene la temperatura iniziale della sbarra sia $T = 50 \sin \pi x/L$, dove T è espresso in °C. (a) Mostrare con un diagramma la temperatura iniziale della sbarra come pure alcune curve rappresentanti la distribuzione di temperatura in istanti successivi. Qual'è la distribuzione di temperatura dopo un intervallo di tempo molto lungo? (b) Mostrare la direzione del flusso di calore in posizioni diverse lungo la sbarra. (c) Eseguire un diagramma della densità di corrente di calore iniziale e confrontare con il risultat ottenuto in (b). Indicare anche la corrente termica in alcuni istanti successivi.

24.10 Un condotto per vapore avente raggio 2 cm è circondato da un rivestimento cilindrico di materiale isolante spesso 2 cm. La temperatura del condotto per vapore è 100°C, e quella della superficie esterna del rivestimento è 20°C. La conduttività termica del materiale isolante è 8.4×10^{-2} m kg s^{-3} $°C^{-1}$. (a) Calcolare il gradiente di temperatura dT/dr, sulle superfici interna ed esterna del rivestimento. (b) Schizzare il grafico di T in funzione di r. (c) Calcolare il calore perduto attraverso il rivestimento isolante nell'unità di tempo e per unità di lunghezza del condotto.

24.11 Una sfera cava ha raggio interno R_1 e temperatura interna T_1 e raggio esterno R_2 e temperatura esterna T_2. Dimostrare che la quantità di calore che attraversa ogni superficie sferica concentrica con la sfera ed avente raggio compreso tra R_1 e R_2 è

$$\Phi_Q = \frac{4\pi K(T_1 - T_2)R_1R_2}{R_2 - R_1}.$$

Mostrare anche che la temperatura entro la sfera, in funzione della distanza dal centro, è $T = C/r + C'$, dove

$$C = \frac{(T_1 - T_2)R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

e

$$C' = \frac{2T_1R_2 - T_1R_1 - T_2R_2}{R_2 - R_1}.$$

24.12 La legge di Newton per il raffreddamento (vedere Paragrafo 24.4) può essere espressa come $j_E = h(T - T_m)$, dove T è la temperatura del corpo, T_m quella del mezzo circostante, h un coefficiente chiamato *coefficiente di trasmissione del calore*, e j_E l'energia che attraversa l'unità di area nell'unità di tempo dal corpo verso il mezzo circostante. (a) Ottenere le unità di misura di h. (b) Scrivere un'equazione che esprima la rapidità di variazione dell'energia interna di un corpo, avente superficie S, in seguito al raffreddamento.

24.13 Si consideri un piccolo corpo di superficie S, massa M, e calore specifico c, inizialmente alla temperatura T_0 e circondato da un mezzo alla temperatura T_m. Dimostrare che la temperatura del corpo, in funzione del tempo, è $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-At}$, ove $A = hS/Mc$ e h è il coefficiente di trasmissione del calore (vedere Problema 24.12). Eseguire un diagramma di T in funzione di t per T_0 maggiore, eguale, e minore di T_m.

steel rod is kept at 0°C. Compute (a) the temperature at the common end, (b) the temperature gradient in the copper rod and in the steel rod, (c) the amount of heat crossing any section of the rod per unit time. (d) Make a plot of the temperature along the rod. The thermal conductivities of copper and steel are 3.84×10^2 and 0.46×10^2 m kg s^{-3} $°C^{-1}$, respectively.

24.7 A bar 2 m long has a solid steel core 1 cm in diameter surrounded by a copper casing whose outside diameter is 2 cm. The outer surface of the bar is thermally insulated and one end is maintained at 100°C, the other at 0°C. (a) Compute the total heat current in the bar, in the final steady state. (b) What fraction is carried by each material? The thermal conductivities are given in Problem 24.6.

24.8 A thermally insulated rod has an initial temperature of T_1. One end is suddenly brought to the higher temperature T_0 while the other end is kept at temperature T_1. Show, by a series of curves, the temperature variation along the rod until the final steady state depicted in Fig. 24–11 is reached.

24.9 Both ends of an insulated metal rod of length L are kept at 0°C, although the initial temperature of the rod is $T = 50 \sin \pi x/L$, where T is in °C. (a) By means of a diagram, show the initial temperature of the rod, as well as several curves that represent the temperature distribution at successive times. What is the temperature distribution after a very long time? (b) Show the direction of the flow of heat at different positions in the rod. (c) Plot the initial heat current density and compare with the result obtained in (b). Also indicate the heat current at several successive times.

24.10 A steam pipe with a radius of 2 cm is surrounded by a cylindrical jacket of insulating material 2 cm thick. The temperature of the steam pipe is 100°C, and that of the outer surface of the jacket is 20°C. The thermal conductivity of the insulating material is 8.4×10^{-2} m kg s^{-3} $°C^{-1}$. (a) Compute the temperature gradient dT/dr, at the inner and at the outer surfaces of the jacket. (b) Sketch the graph of T versus r. (c) Compute the heat lost through the insulating jacket per unit time and per meter length of the pipe.

24.11 A hollow sphere has an inner radius R_1 and temperature T_1 and an outer radius R_2 and temperature T_2. Show that the amount of heat crossing any spherical surface concentric with the sphere and having a radius between R_1 and R_2 is

$$\Phi_Q = \frac{4\pi K(T_1 - T_2)R_1R_2}{R_2 - R_1}.$$

Also show that the temperature inside the sphere as a function of the distance from the center is $T = C/r + C'$, where

$$C = \frac{(T_1 - T_2)R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

and

$$C' = \frac{2T_1R_2 - T_1R_1 - T_2R_2}{R_2 - R_1}.$$

24.12 Newton's law of cooling (see Section 24.4) can be expressed as $j_E = h(T - T_m)$, where T is the temperature of the body, T_m that of the surrounding medium, h a coefficient called the *coefficient of thermal transfer*, and j_E the energy crossing per unit area and unit time from the body into the surroundings. (a) Obtain the units of h. (b) Write an equation expressing the rate of change of internal energy of a body of area S as a result of cooling.

24.13 Consider a small body of area S, mass M, and specific heat c, initially at temperature T_0 and surrounded by a medium at temperature T_m. Show that the temperature of the body, as a function of time, is $T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-At}$, where $A = hS/Mc$ and h is the coefficient of thermal transfer (see Problem 24.12). Plot T versus t for T_0 larger than, equal to, and smaller than T_m.

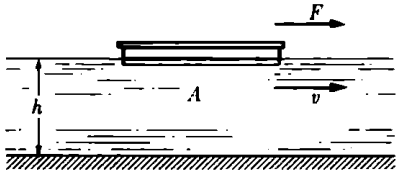


Figura 24–26

Figure 24–26

24.14 Un condotto cilindrico metallico avente raggio interno R_1, raggio esterno R_2, e conduttività termica K è circondato da un rivestimento avente raggio esterno R_3 e conduttività termica K'. Se la temperatura alla superficie interna della sbarra è tenuta al valore T_1 e la temperatura esterna è T_3, mostrare che la temperatura T_2 sulla superficie comune al condotto ed al rivestimento è

24.14 A cylindrical metal pipe of inner radius R_1, outer radius R_2, and thermal conductivity K is surrounded by a jacket having an external radius R_3 and a thermal conductivity K'. If the temperature at the inner surface of the rod is kept at the value T_1 and the outer temperature is T_3, show that the temperature T_2 at the common surface of the pipe and the jacket is

$$\frac{T_1K \ln (R_3/R_2) + T_3K' \ln (R_2/R_1)}{K \ln (R_3/R_2) + K' \ln (R_2/R_1)}.$$

24.15 Dimostrare che la velocità di gruppo dell'onda termica discussa nell'Esempio 24.4 è il doppio della velocità di fase.

24.15 Show that the group velocity of the thermal wave discussed in Example 24.4 is twice the phase velocity.

24.16 Una zattera galleggiante di area A si muove con moto uniforme con velocità v in acqua avente profondità h. Mostrare che per trainarla è necessaria una forza $F = \eta Av/h$ dove η è la viscosità dell'acqua (vedere Fig. 24–26.)

24.16 A floating barge of area A moves with uniform motion of velocity v in water whose depth is h. Show that, in order to pull it, a force $F = \eta Av/h$ is required, where η is the viscosity of water. (See Fig. 24–26.)

24.17 Dimostrare che la quantità di fluido che passa nell'unità di tempo attraverso una superficie perpendicolare ai piani di Fig. 24–20 e di larghezza unitaria lungo l'asse Z è

24.17 Show that the amount of fluid passing per unit time across a surface perpendicular to the planes in Fig. 24–20 and of unit width along the Z-axis is

$$(p_1 - p_2)a^3/12\eta l.$$

24.18 Un fluido viscoso (di viscosità η) si muove in modo stazionario attraverso un tubo orizzontale di raggio R e lunghezza L (Fig. 24–27). La pressione agli estremi è p_1 e p_2, con p_1 maggiore di p_2. Mostrare che (a) la velocità del fluido alla distanza r dall'asse è $v = (p_1 - p_2)\ (R^2 - r^2)/4\eta l$, (b) il volume di fluido che passa per ogni sezione del tubo nell'unità di tempo è

24.18 A viscous fluid (of viscosity η) moves steadily through a horizontal pipe of radius R and length L (Fig. 24–27). The pressure on the ends is p_1 and p_2, with p_1 larger than p_2. Show that (a) the velocity of the fluid at a distance r from the axis is $v = (p_1 - p_2)(R^2 - r^2)/4\eta l$, (b) the volume of fluid crossing any section of the tube per unit time is

$$V = (\pi R^4/8\eta)(p_1 - p_2)/L,$$

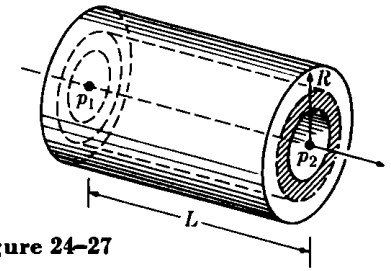


Figura 24–27

Figure 24–27

risultato noto come *formula di Poiseuille*. [*Suggerimento:* Considerare le forze agenti su uno strato cilindrico compreso tra i raggi r e $r + dr$; assumere anche che la velocità del fluido per $r = R$ sia nulla.]

a result known as *Poiseuille's formula*. [*Hint:* Consider the forces acting on a cylindrical shell of radii r and $r + dr$; also assume that the fluid velocity for $r = R$ is zero.]

24.19 Un estremo di un tubo capillare lungo 10 cm e del diametro di 1 mm è collegato ad un alimentatore di acqua che ha la pressione di 2 atm. L'altro estremo del tubo capillare è alla pressione di 1 atm. Il coefficiente di viscosità dell'acqua è 0.01 poise. Quanta acqua trasporta il tubo in 1 sec? (1 atm $\approx 10^5$ N m^{-2}.) [*Suggerimento:* Usare il risultato del Problema 24.18.]

24.19 One end of a capillary tube 10 cm in length and 1 mm in diameter is connected to a water supply which has a pressure of 2 atm. The other end of the capillary tube is at a pressure of 1 atm. The viscosity coefficient of water is 0.01 poise. How much water does the tube deliver in 1 sec? (1 atm $\approx 10^5$ N m^{-2}.) [*Hint:* Use the result of Problem 24.18.]

24.20 Considerare il flusso di un fluido in uno strato cilindrico avente raggio interno R_1 e raggio esterno R_2. La pressione agli estremi vale p_1 e p_2, con p_1 maggiore di p_2. Determinare la velocità del fluido alla distanza r dall'asse ed il volume di fluido che attraversa nell'unità di tempo una sezione generica del tubo. Confrontare il risultato con quello del

24.20 Consider the flow of a fluid through a cylindrical sheath of inner radius R_1 and outer radius R_2. The pressure at the ends is p_1 and p_2, with p_1 larger than p_2. Determine the velocity of the fluid at a distance r from the axis and the volume of fluid crossing any section of the tube per unit time. Compare with the result of

Capillary tube = Tubo capillare

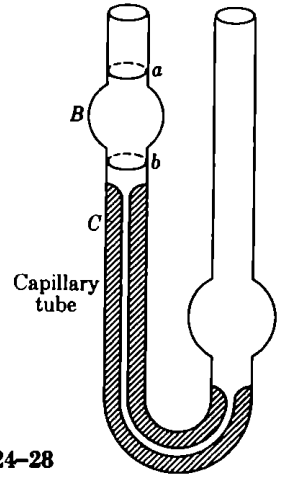


Figura 24–28.

Figure 24–28

Problema 24.18 quando $R_1 = 0$ e $R_2 = R$. [*Suggerimento:* Si noti che la velocità del fluido è nulla per $r = R_1$ e per $r = R_2$.]

24.21 In Fig. 24–28 è illustrato un tipico viscosimetro. Esso consiste di un pallone B cui è collegato un tubo capillare C. Il pallone viene riempito di liquido e viene misurato il tempo necessario affinchè la superficie del liquido passi dalla linea di fede a a quella b. Per liquidi aventi densità ρ_1 e ρ_2, i tempi sono t_1 e t_2; dimostrare che il rapporto tra le due viscosità è $\eta_1/\eta_2 = \rho_1 t_1/\rho_2 t_2$.

24.22 Le densità dell'acetone e dell'acqua a 20°C sono 0.792 e 0.9982 g cm^{-3}, rispettivamente. La viscosità dell'acqua è 1.0050×10^{-2} poise a 20°C. Se l'acqua impiega 120.5 s per passare tra le due linee del viscosimetro e l'acetone ne impiega 49.5, qual'è la viscosità dell'acetone? [*Suggerimento:* Vedere il Problema 24.21.]

24.23 La viscosità dell'acetone ad alcune temperatura è mostrata in tabella:

Problem 24.18 if $R_1 = 0$ and $R_2 = R$. [*Hint:* Note that the velocity of the fluid is zero for $r = R_1$ and $r = R_2$.]

24.21 A typical viscosimeter is illustrated in Fig. 24-28. It consists of a bowl B that continues in a capillary tube C. The bowl is filled with liquid, and the time taken by the liquid surface to pass from mark a to mark b is measured. For liquids of densities ρ_1 and ρ_2, the times are t_1 and t_2; show that the ratio between their viscosities is $\eta_1/\eta_2 = \rho_1 t_1/\rho_2 t_2$.

24.22 The densities of acetone and water at 20°C are 0.792 and 0.9982 g cm^{-3}, respectively. The viscosity of water is 1.0050×10^{-2} poise at 20°C. If water requires 120.5 s to run between the marks on a viscosimeter and acetone requires 49.5 s, what is the viscosity of acetone? [*Hint:* See Problem 24.21.]

24.23 The viscosity of acetone at certain temperatures is shown in the table:

Temp., °C	−60	−30	0	30
$\eta \times 10^2$, poise	0.932	0.575	0.399	0.295

Tracciando un diagramma di ln η in funzione di 1/T, dove T è la temperatura assoluta dell'acetone, dimostrare che $\ln \eta = a + b/T$ rappresenta la variazione di η con T. Trovare le costanti a e b.

By plotting ln η versus $1/T$, where T is the absolute temperature of the acetone, show that $\ln \eta = a + b/T$ represents the variation of η with T. Find constants a and b.

24.24 Determinare, dall'Eq. (24.31). il cammino libero medio delle molecole di un gas ideale in funzione della temperatura e della pressione. Calcolare il cammino libero medio delle molecole di idrogeno a 100°C e a 10^{-6} atm. Qual'è il valore per l'ossigeno? Ripetere il problema per entrambi i gas in condizioni standard di pressione e di temperatura.

24.24 Determine, from Eq. (24.31), the mean free path of the molecules of an ideal gas as a function of temperature and pressure. Calculate the mean free path of hydrogen molecules at 100°C and 10^{-6} atm. What is the value for oxygen? Repeat for both gases at STP.

24.25 Posto che il diametro molecolare dell'H_2 sia 2.2×10^{-10} m, calcolare il numero di collisioni subìte da una molecola di idrogeno in 1 s se (a) $T = 300$°K e $p = 1$ atm, (b) $T = 500$°K e $p = 1$ atm, (c) $T = 300$°K e $p = 10^{-4}$ atm. (d) Calcolare il numero totale di collisioni per secondo che avvengono in 1 cm^3 in ciascuno dei casi (a), (b), e (c).

24.25 Given that the molecular diameter of H_2 is 2.2×10^{-10} m, calculate the number of collisions made by a hydrogen molecule in 1 s if (a) $T = 300$°K and $p = 1$ atm, (b) $T = 500$°K and $p = 1$ atm, (c) $T = 300$°K and $p = 10^{-4}$ atm. (d) Compute the total number of collisions per second occurring in 1 cm^3 for each of the cases in (a), (b), and (c).

24.26 Il diametro molecolare dell'N_2 (azoto) è circa 3.0×10^{-10} m. (a) Calcolare il cammino libero medio dell'N_2 a 300°K e 1 atm e a 0.01 atm. (b) Un impianto a vuoto ragionevolmente buono raggiunge una pressione di circa 10^{-9} atm. Qual'è il libero cammino medio dell'N_2 a questa pressione? (c) Se il diametro di un tubo sotto vuoto alla pressione di 10^{-9} atm è 5 cm, quante volte una molecola di N_2 urta le pareti tra due collisioni successive con le altre molecole del gas N_2?

24.26 The molecular diameter of N_2 (nitrogen) is about 3.0×10^{-10} m. (a) Compute the mean free path of N_2 at 300°K and 1 atm and at 0.01 atm. (b) A reasonably good vacuum system achieves a pressure of about 10^{-9} atm. What is the mean free path of N_2 at this pressure? (c) If the diameter of the evacuated tube at a pressure of 10^{-9} atm is 5 cm, how many times does a molecule of N_2 strike the walls between two successive collisions with other molecules of N_2 gas?

24.27 Si può dimostrare che tra le N_0 molecole di un gas che subiscono una collisione ad un istante assegnato, solo il numero $N = N_0 e^{-x/l}$ percorrerà la distanza x senza subire un'altra collisione (l è il cammino libero medio). Trovare la percentuale di molecole che devono ancora subire la loro collisione successiva a $x = 0.5l$, l, $2l$, e $10l$. Determinare il valore che deve avere x se N deve essere eguale al 50% di N_0.

24.27 It can be shown that of the N_0 molecules in a gas that suffer a collision at a given instant, only the number $N = N_0 e^{-x/l}$ will have moved the distance x without suffering another collision (l is the mean free path). Find the percentage of molecules that have yet to suffer their next collision at $x = 0.5l$, l, $2l$, and $10l$. Determine what value x must have if N is to equal 50% of N_0.

24.28 Un gruppo di molecole di ossigeno ha effettuato una collisione allo stesso istante; il gas si trova alla temperatura di 300°K e ad una pressione tale che il cammino libero medio è 2,0 cm. Dopo un certo intervallo di tempo, metà delle molecole ha subìto una seconda collisione e metà non ancora. Determinare questo intervallo di tempo. Supporre che tutte le molecole si muovano alla velocità media v_{med}. [Vedere l'Esempio 24.7 per il valore di v_{med}.]

24.28 A group of oxygen molecules start their mean free paths at the same time at a temperature of 300°K and a pressure such that the mean free path is 2.0 cm. After a certain time interval, half of the molecules have undergone a second collision, and half have not. Determine this time interval. Assume that all molecules move at the average velocity v_{ave}. [See Example 24.7 for the value of v_{ave}.]

24.29 Come variano con la temperatura e con la pressione i coefficienti D e K per un gas perfetto?

24.29 How do the coefficients D and K for an ideal gas vary with temperature and pressure?

24.30 Studiando l'Eq. (24.37), dimostrare che il coefficiente di viscosità di un gas perfetto dipende solo dalla temperatura. Determinare, se possibile, l'entità e la natura di questa dipendenza.

24.30 By inspection of Eq. (24.37), prove that the coefficient of viscosity of an ideal gas depends only on the temperature. Determine, if possible, the extent and nature of this dependence.

24.31 La viscosità del biossido di carbonio in un certo intervallo di temperatura è data dalla Tabella seguente. Eseguire un grafico di η in funzione di $\sqrt{T}$, dove T è la temperatura assoluta. Calcolare il rapporto $\eta/\sqrt{T}$. Tenendo presente il Problema 24.30, che cosa si può concludere?

24.31 The viscosity of carbon dioxide over a range of temperatures is given in the table below. Make a plot of η versus $\sqrt{T}$, where T is the absolute temperature. Compute the ratio $\eta/\sqrt{T}$. In view of Problem 24.30, what do you conclude?

Temp., °C	−21	0	100	182	302
$\eta \times 10^6$, poise	12.9	13.9	18.6	22.2	26.8

24.32 Calcolare i coefficienti D, K, e η per l'elio e per l'ossigeno in condizioni standard di temperatura e pressione, e confrontare i risultati con quelli sperimentali.

24.33 Ottenere i valori teorici del rapporto K/D e del rapporto η/D per un gas perfetto. Confrontare questi rapporti con i risultati sperimentali per gas reali raccolti nella Tabella 24.1.

24.34 Due lastre parallele distanziate di 0,5 cm sono tenute a 298° e a 301°K. Lo spazio tra le lastre è riempito con H_2. Calcolare il flusso di calore tra le due lastre, espresso in J m^{-2} s^{-1}.

24.32 Compute the coefficients D, K, and η for helium and oxygen at STP, and compare with the experimental results.

24.33 Obtain the theoretical values of the ratio K/D and η/D for an ideal gas. Compare these ratios with the experimental results for real gases which are given in Table 24–1.

24.34 Two parallel plates 0.5 cm apart are maintained at 298° and 301°K. The space between the two plates is filled with H_2. Calculate the flow of heat between the two plates, in J m^{-2} s^{-1}.

24.35 Il coefficiente di viscosità dell'ammoniaca a 0°C è 9.2 × 10^{-5} poise. Calcolare il cammino libero medio e la frequenza di collisione di una molecola di idrogeno in condizioni standard di temperatura e pressione. Stimare anche il valore del raggio.

24.36 Il coefficiente di viscosità del metano a 0°C è 10.3 × 10^{-5} poise. Calcolare il diametro molecolare.

24.37 A 25°C, l'H_2 ha una viscosità di 8.2 × 10^{-5} poise. Se un tubo lungo 1 m permette il passaggio di 1 litro/min sotto una differenza di pressione di 0.3 atm, qual'è il diametro del tubo? [*Suggerimento:* Usare la formula di Poiseuille, data nel Problema 24.18.]

24.38 Confrontare le conduttività termiche dell'0_2 e dell'H_2; trascurare le differenze del diametro molecolare.

24.35 The coefficient of viscosity of ammonia at 0°C is 9.2 × 10^{-5} poise. Compute the mean free path and the collision frequency of a hydrogen molecule at STP. Also estimate its radius.

24.36 The coefficient of viscosity of methane at 0°C is 10.3 × 10^{-5} poise. Calculate the molecular diameter.

24.37 At 25°C, H_2 has a viscosity of 8.2 × 10^{-5} poise. If a tube 1 m long permits the flow of 1 liter/min under a pressure difference of 0.3 atm, what is the diameter of the tube? [*Hint:* Use Poiseuille's formula, given in Problem 24.18.]

24.38 Compare the thermal conductivities of O_2 and H_2; ignore the difference in molecular diameter.

APPENDICE:
RELAZIONI MATEMATICHE
E TABELLE

RISPOSTE AI
PROBLEMI DI NUMERO DISPARI

INDICE ANALITICO

APPENDIX:
MATHEMATICAL RELATIONS
AND TABLES

ANSWERS TO
ODD-NUMBERED PROBLEMS

INDEX

APPENDICE

RELAZIONI MATEMATICHE

Questa appendice, nella quale presentiamo quelle formule matematiche che vengono usate frequentemente nel testo, si propone di costituire un riferimento rapidamente accessibile per lo studente. In alcuni casi abbiamo inserito delle note matematiche nel testo vero e proprio. Le dimostrazioni e la discussione della maggior parte delle formule si possono trovare in qualsiasi comune testo di analisi; per esempio, *Calculus and Analytic Geometry*, terza edizione, di G. B. Thomas (Addison-Wesley, 1963). Una breve introduzione ai concetti fondamentali dell'analisi, sotto forma di manuale, si può trovare in *Quick Calculus: A Short Manual of Self Instruction*, di D. Kelpner e N. Ramsey (John Wiley & Sons, New York, 1963). Lo studente dovrà anche fare riferimento a un certo numero di tabelle raccolte in volumi. Fra queste ci sono le *C.R.C. Standard Mathematical Tables* (Chemical Rubber Company, Cleveland, Ohio, 1963), e le *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, quarta edizione, di H. B. Dwight (Macmillan Company, New York, 1961). Raccomandiamo allo studente di tenere a portata di mano l'*Handbook of Chemistry and Physics*, di cui la Chemical Rubber Company, Cleveland, Ohio, pubblica edizioni annuali. Tale manuale contiene anche un gran numero di dati matematici, chimici, e fisici.

1. Relazioni Trigonometriche

Con riferimento alla Fig. M—1, possiamo definire le relazioni seguenti:

APPENDIX

MATHEMATICAL RELATIONS

This appendix, in which we present certain mathematical formulas that are frequently used in the text, is intended as a quickly available reference for the student. In a few cases we have inserted some mathematical notes in the text proper. Proofs and a discussion of most of the formulas may be found in any standard calculus text; e.g., *Calculus and Analytic Geometry*, third edition, by G. B. Thomas (Addison-Wesley, 1963). A short introduction to the basic concepts of the calculus, in a programmed format, may be found in *Quick Calculus: A Short Manual of Self Instruction*, by D. Kelpner and N. Ramsey (John Wiley & Sons, New York, 1963). The student will also have to refer to a number of tables which are in book form. Among these are the *C.R.C. Standard Mathematical Tables* (Chemical Rubber Company, Cleveland, Ohio, 1963), and *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*, fourth edition, by H. B. Dwight (Macmillan Company, New York, 1961). We recommend that the student have at his disposal the *Handbook of Chemistry and Physics*, yearly editions of which are issued by the Chemical Rubber Company, Cleveland, Ohio. This handbook also contains a wealth of mathematical, chemical, and physical data.

1. Trigonometric Relations

Referring to Fig. M–1, we can define the following relations:

$$\sin\alpha = y/r, \qquad \cos\alpha = x/r, \qquad \tan\alpha = y/x; \tag{M.1}$$

$$\csc\alpha = r/y, \qquad \sec\alpha = r/x, \qquad \cot\alpha = x/y; \tag{M.2}$$

$$\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha; \tag{M.3}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \sec^2\alpha + 1 = \tan^2\alpha; \tag{M.4}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta; \tag{M.5}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta; \tag{M.6}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha \mp \beta); \tag{M.7}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta); \tag{M.8}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta); \tag{M.9}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]; \tag{M.10}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]; \tag{M.11}$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]; \tag{M.12}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \tag{M.13}$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha), \qquad \cos^2\tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\alpha). \tag{M.14}$$

Con riferimento alla Fig. M–2, si possono formulare, per qualsiasi triangolo arbitrario, le:

Referring to Fig. M–2, we can formulate, for any arbitrary triangle:

Legge dei seni:

Law of sines: $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \tag{M.15}$$

Legge dei coseni:

Law of cosines: $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \tag{M.16}$$

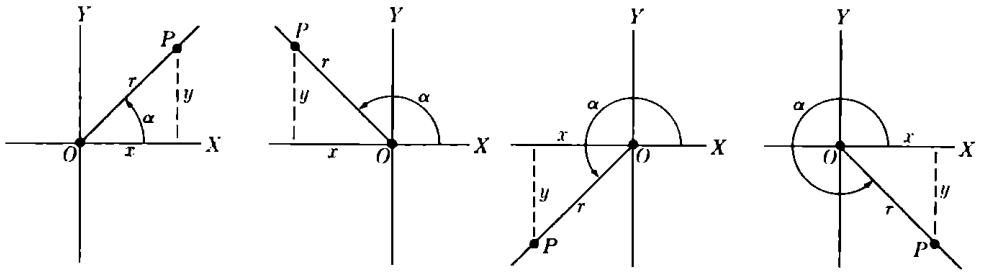


Figura M–1

Figure M–1

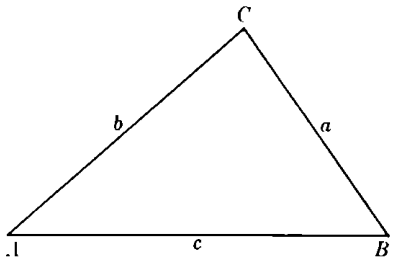


Figura M–2

Figure M–2

2. *Logaritmi*

(i) Definizione di e:

Le funzioni esponenziali $y = e^x$ e $y = e^{-x}$ sono rappresentate in Fig. M–3.

(ii) Logaritmo naturale, in base e (vedere Fig. M–4):

se

Logaritmo comune, in base 10:

se

Il logaritmo naturale e quello comune sono legati dalle

2. *Logarithms*

(i) Definition of e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818\ldots \tag{M.17}$$

The exponential functions $y = e^x$ and $y = e^{-x}$ are plotted in Fig. M–3.

(ii) Natural logarithm, base e (see Fig. M–4):

$$y = \ln x \qquad \text{if } x = e^y. \tag{M.18}$$

Common logarithm, base 10:

$$y = \log x \qquad \text{if } x = 10^y. \tag{M.19}$$

The natural and common logarithms are related by

$$\ln x = 2.303\log x, \qquad \log x = 0.434\ln x. \tag{M.20}$$

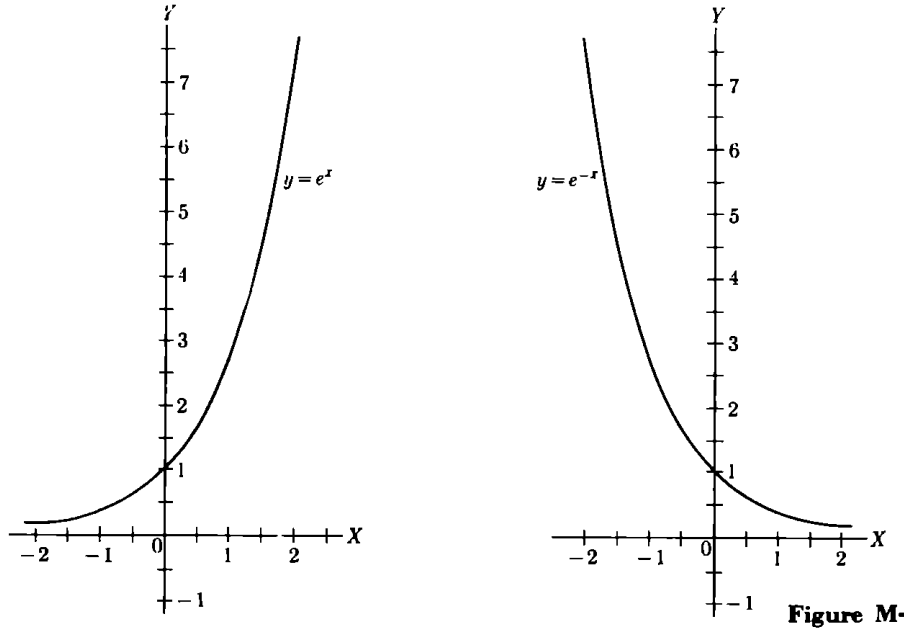


Figura M–3 **Figure M–3**

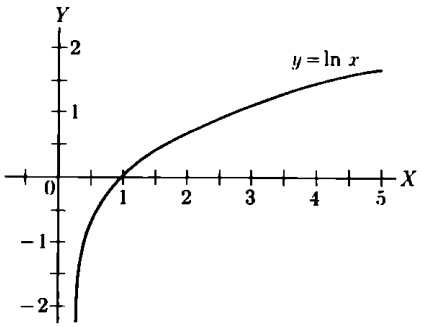


Figura M–4 **Figure M–4**

3. Sviluppi in serie di potenze

(i) Sviluppo binomiale:

Se n è un numero intero positivo, lo sviluppo ha $n + 1$ addendi. In tutti gli altri casi, lo sviluppo ha un numero infinito di termini. Il caso in cui a vale 1 e b è una quantità x viene usato numerose volte nel testo. Lo sviluppo binomiale

3. Power Expansions

(i) The binomial expansion:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p!}a^{n-p}b^p + \cdots \tag{M.21}$$

When n is a positive integer, the expansion has $n + 1$ terms. In all other cases, the expansion has an infinite number of terms. The case for which a is 1 and b is a quantity x is used numerous times in the text. Therefore the binomial expansion

di $(1 + x)^n$ si scrive dunque

(ii) Altri sviluppi in serie utili:

Se $x \ll 1$, risultano soddisfacenti le seguenti approssimazioni:

Si osservi che nelle Equazioni (M.25), (M.26), (M.27), e (M.30), x dev'essere espresso in radianti.

(iii) Sviluppo in serie di Taylor:

Per $x - x_0 \ll 1$, un'approssimazione utile è la

4. *Numeri complessi*

In base alla definizione $i^2 = -1$ cioè $i = \sqrt{-1}$,

of $(1 + x)^n$ is written

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{M.22}$$

(ii) Other useful series expansions:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{M.23}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \tag{M.24}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \tag{M.25}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots \tag{M.26}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \tag{M.27}$$

For $x \ll 1$, the following approximations are satisfactory:

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx, \tag{M.28}$$

$$e^x \approx 1 + x, \qquad \ln(1 + x) \approx x, \tag{M.29}$$

$$\sin x \approx x, \qquad \cos x \approx 1, \qquad \tan x \approx x. \tag{M.30}$$

Note that in Eqs. (M.25), (M.26), (M.27), and (M.30), x must be expressed in radians.

(iii) Taylor series expansion:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_0 + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_0 + \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_0 + \cdots \tag{M.31}$$

If $x - x_0 \ll 1$, a useful approximation is

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{df}{dx}\right)_0. \tag{M.32}$$

4. *Complex Numbers*

With the definition $i^2 = -1$ or $i = \sqrt{-1}$,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \tag{M.33}$$

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \tag{M.34}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}). \tag{M.35}$$

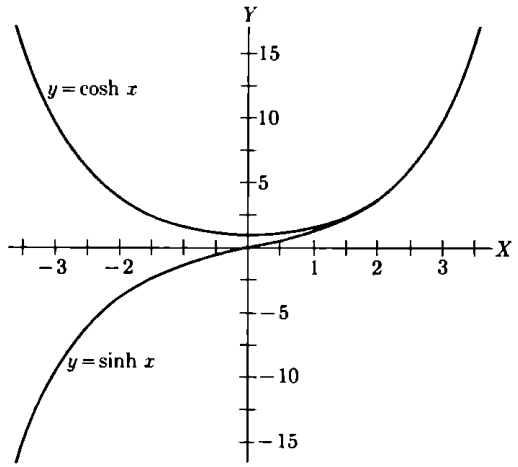


Figura M–5

Figure M–5

5. *Funzioni iperboliche*

Per visualizzare le relazioni seguenti, vedere la Fig. M–5.

5. *Hyperbolic Functions*

In order to visualize the following relations, see Fig. M–5.

$$\cosh\theta = \tfrac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta}), \tag{M.36}$$

$$\sinh\theta = \tfrac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta}), \tag{M.37}$$

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1, \tag{M.38}$$

$$\sinh\theta = -i\sin(i\theta), \qquad \cosh\theta = \cos(i\theta), \tag{M.39}$$

$$\sin\theta = -i\sinh(i\theta), \qquad \cos\theta = \cosh(i\theta). \tag{M.40}$$

6. *Derivate e integrali fondamentali*

6. *Basic Derivatives and Integrals*

$f(u)$	df/dx	$\int f(u)\,du$
u^n	$nu^{n-1}\,du/dx$	$u^{n+1}/(n+1)+C\ (n\neq -1)$
u^{-1}	$-(1/u^2)\,du/dx$	$\ln u + C$
$\ln u$	$(1/u)\,du/dx$	$u\ln u - u + C$
e^u	$e^u\,du/dx$	$e^u + C$
$\sin u$	$\cos u\,du/dx$	$-\cos u + C$
$\cos u$	$-\sin u\,du/dx$	$\sin u + C$
$\tan u$	$\sec^2 u\,du/dx$	$-\ln\cos u + C$
$\cot u$	$-\csc^2 u\,du/dx$	$\ln\sin u + C$
$\arcsin u$	$(du/dx)/\sqrt{1-u^2}$	$u\sin^{-1}u + \sqrt{1-u^2} + C$
$\sinh u$	$\cosh u\,du/dx$	$\cosh u + C$
$\cosh u$	$\sinh u\,du/dx$	$\sinh u + C$

Un'utile regola di integrazione, detta di *integrazione per parti*, è la

A useful rule for integration, called *integration by parts*, is

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{M.41}$$

Tale metodo è usato molto frequentemente per calcolare l'integrale a primo membro servendosi dell'integrale a secondo membro.

7. *Valore medio di una funzione*

La *media* o *valor medio* di una funzione $y = f(x)$ nell'intervallo (a, b) è definita da

$$\text{ave} = \text{med}$$

Analogamente, il valor medio di y^2 è definito da

$$\text{ave} = \text{med}$$

La quantità $\sqrt{(y^2)_{\text{med}}}$ è detta *valore quadratico medio* di $y = f(x)$ nell'intervallo (a, b), e, in generale, è diverso da y_{med}. Esso viene indicato con y_{vgm}.

8. *Formule fondamentali della relatività*

In quanto segue, v indica la velocità del sistema di riferimento S' rispetto al sistema S e gli assi X e X' si assumono entrambi paralleli a v. È anche $k = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

(a) Trasformazione di Lorentz per la posizione e il tempo:

(b) Trasformazione di Lorentz per la quantità di moto e l'energia:

(c) Trasformazione di Lorentz per la forza (la particella è momentaneamente in quiete rispetto a S'):

(d) Definizione di quantità di moto: $\boldsymbol{p} = m_0 v/\sqrt{1 - v^2/c^2} = km_0 v$.

(e) Relazione fra l'energia e la quantità di moto: $E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$.

This method is most frequently used to evaluate the integral on the left by using the integral on the right.

7. *Average Value of a Function*

The *mean* or *average value* of a function $y = f(x)$ in the interval (a, b) is defined by

$$y_{\text{ave}} = \frac{1}{b - a}\int_a^b y\,dx. \tag{M.42}$$

Similarly, the average value of y^2 is defined by

$$(y^2)_{\text{ave}} = \frac{1}{b - a}\int_a^b y^2\,dx. \tag{M.43}$$

The quantity $\sqrt{(y^2)_{\text{ave}}}$ is called the *root mean square* value of $y = f(x)$ in the interval (a, b), and in general is different from y_{ave}. It is designated y_{rms}.

8. *Basic Relativistic Relations*

In the following, v is the velocity of frame S' relative to frame S and axes X and X' are both taken parallel to v. Also $k = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

(a) Lorentz transformation for position and time:

$$\begin{aligned} x' &= k(x - vt), & x &= k(x' + vt'),\\ y' &= y, & y &= y',\\ z' &= z, & z &= z',\\ t' &= k(t - vx/c^2), & t &= k(t' + vx'/c^2). \end{aligned} \tag{M.44}$$

(b) Lorentz transformation for momentum and energy:

$$\begin{aligned} p_x' &= k(p_x - vE/c^2), & p_x &= k(p_x' + vE'/c^2),\\ p_y' &= p_y, & p_y &= p',\\ p_z' &= p_z, & p_z &= p',\\ E' &= k(E - vp_x), & E &= k(E' + vp_x'). \end{aligned} \tag{M.45}$$

(c) Lorentz transformation for force (the particle is momentarily at rest relative to S'):

$$F_x' = F_x, \qquad F_y' = kF_y, \qquad F_z' = kF_z. \tag{M.46}$$

(d) Definition of momentum: $\boldsymbol{p} = m_0 \boldsymbol{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2} = km_0 \boldsymbol{v}$.

(e) Relation between energy and momentum: $E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE NATURALI

Angolo		Seno	Coseno	Tangente
Gradi	Radianti			

NATURAL TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

Angle					Angle				
Degree	Radian	Sine	Cosine	Tangent	Degree	Radian	Sine	Cosine	Tangent
0°	.000	0.000	1.000	0.000					
1°	.017	.018	1.000	.018	46°	0.803	0.719	0.695	1.036
2°	.035	.035	0.999	.035	47°	.820	.731	.682	1.072
3°	.052	.052	.999	.052	48°	.838	.743	.669	1.111
4°	.070	.070	.998	.070	49°	.855	.755	.656	1.150
5°	.087	.087	.996	.088	50°	.873	.766	.643	1.192
6°	.105	.105	.995	.105	51°	.890	.777	.629	1.235
7°	.122	.122	.993	.123	52°	.908	.788	.616	1.280
8°	.140	.139	.990	.141	53°	.925	.799	.602	1.327
9°	.157	.156	.988	.158	54°	.942	.809	.588	1.376
10°	.175	.174	.985	.176	55°	.960	.819	.574	1.428
11°	.192	.191	.982	.194	56°	.977	.829	.559	1.483
12°	.209	.208	.978	.213	57°	.995	.839	.545	1.540
13°	.227	.225	.974	.231	58°	1.012	.848	.530	1.600
14°	.244	.242	.970	.249	59°	1.030	.857	.515	1.664
15°	.262	.259	.966	.268	60°	1.047	.866	.500	1.732
16°	.279	.276	.961	.287	61°	1.065	.875	.485	1.804
17°	.297	.292	.956	.306	62°	1.082	.883	.470	1.881
18°	.314	.309	.951	.325	63°	1.100	.891	.454	1.963
19°	.332	.326	.946	.344	64°	1.117	.899	.438	2.050
20°	.349	.342	.940	.364	65°	1.134	.906	.423	2.145
21°	.367	.358	.934	.384	66°	1.152	.914	.407	2.246
22°	.384	.375	.927	.404	67°	1.169	.921	.391	2.356
23°	.401	.391	.921	.425	68°	1.187	.927	.375	2.475
24°	.419	.407	.914	.445	69°	1.204	.934	.358	2.605
25°	.436	.423	.906	.466	70°	1.222	.940	.342	2.747
26°	.454	.438	.899	.488	71°	1.239	.946	.326	2.904
27°	.471	.454	.891	.510	72°	1.257	.951	.309	3.078
28°	.489	.470	.883	.532	73°	1.274	.956	.292	3.271
29°	.506	.485	.875	.554	74°	1.292	.961	.276	3.487
30°	.524	.500	.866	.577	75°	1.309	.966	.259	3.732
31°	.541	.515	.857	.601	76°	1.326	.970	.242	4.011
32°	.559	.530	.848	.625	77°	1.344	.974	.225	4.331
33°	.576	.545	.839	.649	78°	1.361	.978	.208	4.705
34°	.593	.559	.829	.675	79°	1.379	.982	.191	5.145
35°	.611	.574	.819	.700	80°	1.396	.985	.174	5.671
36°	.628	.588	.809	.727	81°	1.414	.988	.156	6.314
37°	.646	.602	.799	.754	82°	1.431	.990	.139	7.115
38°	.663	.616	.788	.781	83°	1.449	.993	.122	8.144
39°	.681	.629	.777	.810	84°	1.466	.995	.105	9.514
40°	.698	.643	.766	.839	85°	1.484	.996	.087	11.43
41°	.716	.658	.755	.869	86°	1.501	.998	.070	14.30
42°	.733	.669	.743	.900	87°	1.515	.999	.052	19.08
43°	.751	.682	.731	.933	88°	1.536	.999	.035	28.64
44°	.768	.695	.719	.966	89°	1.553	1.000	.018	57.29
45°	.785	.707	.707	1.000	90°	1.571	1.000	.000	∞

LOGARITMI COMUNI

COMMON LOGARITHMS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	....	0000	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5185	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8633	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9685	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	0201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

LOGARITMI COMUNI (*seguito*)

COMMON LOGARITHMS (*continued*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	8689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

CAPITOLO 14

14.1

14.3

14.5

14.7

14.9

14.11

14.13

14.15 . . . (d) la costante è 0.587×10^{-4} e la carica in eccesso è 6, 7, 8, 10, e 13 cariche elettroniche, rispettivamente; (e) 1.6017×10^{-19} C.

14.17

14.19 (a) -4.5×10^{-3} N (attr.), 9×10^{-3} N (diretta verso la carica 3×10^{-7} C), -13.5×10^{-3} N (attr.); (b) 9×10^{-4} J, -45×10^{-4} J, 0 J; (c) -18×10^{-4} J, pari a metà della somma di (b) poichè ciascuna coppia è stata in (b) considerata *due volte*.

14.21

14.23

14.25

14.27 . . . (d) . . . , inclinato verso il basso di un angolo di 19.1° rispetto alla linea congiungente le cariche; (e) lungo la linea congiungente le cariche in una posizione esterna alle cariche e distante 0.445 m dalla carica minore.

14.29

14.33

14.37

CHAPTER 14

14.1 4.21×10^{-8} N; 1.16×10^{36}

14.3 4.14×10^{44}; 1.16×10^{36}

14.5 $(d + 2l \sin\theta)^2 \tan\theta = 9 \times 10^9 (q^2/mg)$

14.7 (a) 4.8×10^{-15} N; (b) 5.28×10^{15} m s^{-2} = $5.38 \times 10^{14} g$

14.9 (a) 1.011×10^3 N C^{-1}; (b) 2.67×10^5 m s^{-1}

14.11 (a) 5.69×10^{-9} s; (b) 1.42×10^{-2} m; (c) 9.86×10^{-2} m

14.13 2

14.15 (a) 2.5×10^{-4} m s^{-1};
(b) 0.984×10^{-4}, 1.571×10^{-4}, 2.159×10^{-4}, 3.333×10^{-4}, 5.095×10^{-4} m s^{-1};
(c) 3.484×10^{-4}, 4.071×10^{-4}, 4.659×10^{-4}, 5.833×10^{-4}, 7.595×10^{-4} m s^{-1};
(d) the constant is 0.587×10^{-4} and the excess charge is 6, 7, 8, 10, and 13, respectively; (e) 1.6017×10^{-19} C.

14.17 951 V

14.19 (a) -4.5×10^{-3} N (attr.), 9×10^{-3} N (toward 3×10^{-7} C charge), -13.5×10^{-3} N (attr.); (b) 9×10^{-4} J, -45×10^{-4} J, 0 J; (c) -18×10^{-4} J, which is one-half the summation in (b) because each pair was considered *twice* in (b).

14.21 8.59×10^{28} m s^{-2}, 4.88×10^{-12} J; (b) 3.82×10^7 m s^{-1}

14.23 2×10^{-7} C, 3 m

14.25 2.88×10^3 V

14.27 (a) -1.8×10^4 V, -3.6×10^5 V; (b) 4.22×10^5 V, 1.123×10^8 N C^{-1}; (c) 1.04×10^6 V, 1.125×10^8 N C^{-1}; (d) -9×10^3 V, 2.38×10^5 N C^{-1}, depressed an angle 19.1° with respect to the line joining the charges; (d) along the line joining the charges, at a point outside the two and 0.445 m from the lesser charge.

14.29 (b) $2q/4\pi\epsilon_0$; (c) $x = \pm\sqrt{4 - a^2}$; (f) $2q/4\pi\epsilon_0 x(a^2 + x^2)^{3/2}$

14.33 (a) $u_x 50$ N C^{-1}; (b) $u_x 10.8$ N C^{-1}

14.37 (a) -4.358×10^{-18} J; (b) 2.179×10^{-18} J; (c) -2.179×10^{-18} J; (d) 6.56×10^{15} Hz

14.39 . . . (b) . . . , dove r è la distanza nucleo-elettrone, R è la distanza elettrone-elettrone, ed R_0 è la distanza internucleare.

14.41 Non-relativisticamente:

e

dove V è in volt.

14.43 Per l'elettrone:
per il protone:

14.45

14.47

14.49

14.51 (nucleus = nucleo)

14.53 . . . (b) appross. 11.5 raggi

14.55

14.57

14.59 . . . (b) . . . , forma un angolo di circa 18° con la direzione del campo; . . .

14.61

14.63

14.65 (a) Una parabola; . . . (c) . . . , dove α è l'angolo iniziale rispetto all'orizzontale ed $a = \sigma/2m\epsilon_0$

14.67

14.69

14.71

14.73

14.77 Rispetto all'asse Y:
rispetto all'asse Z, come sopra, salvo che tutti sono positivi ed y è sostituito da z.

14.79 . . . , dove E_k è l'energia cinetica del protone

14.83

14.85

14.87

14.89 Per l'idrogeno: . . . ; per lo ione elio: . . .

14.39 (a) $(e^2/4\pi\epsilon_0)(-8/r + 1/R)$; (b) $(e^2/4\pi\epsilon_0)(-4/r + 1/R + 1/R_0)$, where r is the nucleus–electron distance, R is the electron–electron distance, and R_0 is the internuclear distance.

14.41 Nonrelativistically:

$$v_e = 5.931 \times 10^5\sqrt{V}\ \text{m s}^{-1} \quad \text{and} \quad v_p = 1.384 \times 10^4\sqrt{V}\ \text{m s}^{-1},$$

where V is in volts.

14.43 For the electron: (a) 4.662×10^4 V; (b) 2.945×10^5 V; (c) 7.86×10^5 V; for the proton: (a) 8.56×10^7 V; (b) 5.407×10^8 V; (c) 1.443×10^9 V.

14.45 $0.215c$

14.47 (b) $(1/\nu)\sqrt{(2e/m)V_0}$; (c) neV_0; (d) $L_1\sqrt{n}[1 + (n\nu^2L_1^2/2c^2)]^{-1/2}$

14.49 1.44 MeV

14.51 16.02 MeV, 1.001 MeV/nucleus; 80.09 MeV, 2.002 MeV/nucleus; 250.0 MeV, 2.747 MeV/nucleus; 486.8 MeV, 3.380 MeV/nucleus; 779.0 MeV, 3.895 MeV/nucleus; 973.7 MeV, 4.091 MeV/nucleus

14.53 (a) 11.5×10^{-14} m; (b) approx. 11.5 radii

14.55 (a) 3.52×10^6 m s^{-1}, 3.52×10^{-3} m; (b) 17.9 cm

14.57 (b) 2.52×10^6 m s^{-1}; (c) 2.29×10^6 m s^{-1}; (d) 6.0×10^3 N C^{-1}, 1.0×10^3 N C^{-1}; (e) 1.056×10^{18} m s^{-2}, 1.76×10^{17} m s^{-2}

14.59 (a) 1.22×10^7 m s^{-1}, 3.783×10^7 m s^{-1}; (b) 3.975×10^7 m s^{-1}, approx. 18° with the direction of the field; (c) 6.10×10^{-1} m, 7.695×10^{-1} m; (d) 7.195×10^{-16} J or 4.49×10^3 eV

14.61 5.57×10^{-16}, 1.02×10^{-15}

14.63 $q\sigma/2m\epsilon_0$; $\sqrt{2az}$; $\sqrt{2z/a}$

14.65 (a) A parabola; (b) $(v_0 \sin\alpha)^2/2a = z_{\max}$; (c) $2v_0 \cos\alpha\sqrt{2z_{\max}/a}$, where α is the initial angle above the horizontal and $a = \sigma/2m\epsilon_0$

14.67 $$(-q^2/\pi\epsilon_0 a)\left\{\ln 2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{8n^2}} + \frac{-1^{n-i}}{\sqrt{n^2+i^2}}\right)\right\} \approx 0.56(-q^2/\pi\epsilon_0 a)$$

14.69 $(\sigma/2\epsilon_0)(\sqrt{R^2 + r^2} - r)$; $(a/4\epsilon_0)\ln(R^2/r^2 + 1)$

14.71 (b) $\mathcal{E}_\perp = (2/4\pi\epsilon_0 R)\sin\theta$; $\mathcal{E}_\parallel = 0$

14.73 $\sigma/2\epsilon_0$; $-\frac{1}{2}(\sigma/\epsilon_0)z$

14.77 With respect to the Y-axis: $Q = -3qa^2$, $V = -Q/12\pi\epsilon_0 y^3$, $\mathcal{E} = -Q/3\pi\epsilon_0 y^4$; with respect to the Z-axis, the same as above, except that all are positive and y is replaced by z.

14.79 $\sin^{-1}(e^2/4\pi\epsilon_0)(1/aE_k)$, where E_k is the proton's kinetic energy

14.83 (b) 4.8×10^{-10} stC; (c) $K_e = 1$ dyn cm^2 stC^{-2}, $\epsilon_0 = (\frac{1}{4}\pi)$ stC^2 dyn^{-1} cm^{-2}; (d) $\frac{1}{3} \times 10^{-4}$ dyn stC^{-1} = 1 N C^{-1}

14.85 $K_e = 9 \times 10^{20}$ dyn cm^2 abcoulomb^{-2}; $\epsilon_0 = (\frac{1}{4}\pi)(\frac{1}{9}) \times 10^{-20}$ dyn^{-1} cm^{-2} abcoulomb^2; 1 abcoulomb = 3×10^{10} stC

14.87 $V = 9 \times 10^9 q/r$; $\mathcal{E} = 9 \times 10^9 q/r^2$

14.89 For hydrogen: −13.598 eV, −3.3995 eV, −1.511 eV, −0.8499 eV; 10.2 eV; for helium ion: −54.392 eV, −13.598 eV, −6.039 eV, −3.3995 eV; 40.794 eV

CAPITOLO 15

15.1

15.3

15.5

15.7

15.9

15.11

15.13 2 × 10^{-1} T nella direzione dell'asse Y e nel verso negativo

15.15

15.17

15.21

15.25 Per il deutone:

Per la particella alfa:

15.27

15.29

15.33 . . . (e) accelerazione costante, rettilinea

15.39

15.41

15.43 . . . (b) il momento di dipolo magnetico ed il campo hanno la stessa direzione; pertanto non agisce nessuna coppia.

15.45

15.47

15.49

15.51

15.59

15.63

15.65 . . . Per punti sull'asse Y, . . .

(where = dove)

15.67

15.69

15.71

15.73

15.75 $F_1' = F_1$, $F_2' = -F_1'$ quando le cariche sono disposte lungo l'asse X; quando le cariche sono disposte lungo l'asse Y', $F_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, F_1'$.

15.77

15.79 (repulsion = repulsione; attraction = attrazione)

CHAPTER 15

15.1 5.68×10^{-5} T; 10^7 s^{-1}

15.3 (a) 3.48×10^{-2} m; (b) 3.79×10^{-1} m; (c) 1.44×10^8 s^{-1}

15.5 (a) 0.528 m, 43.7×10^{-8} s; (b) 1.74 m, 1.43×10^{-6} s

15.7 2.13×10^{-2} m

15.9 (a) 3.2×10^{-3} m; (b) 6.4×10^{-3} m

15.11 $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{u}_z qv\mathfrak{B}$; $\boldsymbol{F}_2 = 0$; $\boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{u}_z qv\mathfrak{B}/\sqrt{2}$; $\boldsymbol{F}_4 = -\boldsymbol{u}_x qv\mathfrak{B}/\sqrt{2}$; $\boldsymbol{F}_5 = -\boldsymbol{u}_x qv\mathfrak{B}$; $\boldsymbol{F}_6 = -\boldsymbol{u}_z qv\mathfrak{B}/\sqrt{3} + \boldsymbol{u}_x qv\mathfrak{B}/\sqrt{3}$

15.13 2×10^{-1} T in the negative Y-direction

15.15 (a) 1.7×10^7 m s^{-1}; (c) 4.83×10^{-2} m

15.17 (a) $1.0206R$; (b) 960 V

15.21 1.24×10^{-3} m

15.25 For the deuteron: (a) 2.087×10^{-1} T; (b) 4×10^6 m s^{-1}; (c) 0.17 MeV; (d) 9 (8.5).

For the alpha particle: (a) 2.074×10^{-1} T; (b) 4×10^6 m s^{-1}; (c) 0.33 MeV; (d) 8 (8.2)

15.27 (a) 0.209 T; (b) 0.136 MeV, 3.2×10^6 m s^{-1}

15.29 1.57 m

15.33 (a) $d^2\boldsymbol{r}/dt^2 = (q/m)(\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\mathfrak{B}})$; (c) $x = (v_0 m/q\mathfrak{B}) \sin (q\mathfrak{B}/m)t$, $y = \frac{1}{2}(q\mathcal{E}/m)t^2$, $z = -(m/q\mathfrak{B}) \cos (q\mathfrak{B}/m)t$;

(e) constant rectilinear acceleration

15.39 3.78×10^8 A m^{-2}

15.41 (a) 4.5×10^{-3} N m; (b) 4×10^{-2} A m^2; (c) 8.07×10^{-2} N m

15.43 (a) $\boldsymbol{u}_y$ (1.32 × 10^{-2}) T; (b) the magnetic dipole moment and the field have the same direction; therefore there is no torque.

15.45 0.3 rad

15.47 (a) $-\boldsymbol{u}_z(10^{-2})$ N; (b) $\boldsymbol{u}_x(-5 \times 10^{-4}) + \boldsymbol{u}_y(10^{-3})$ N m

15.49 (a) 8.804×10^{10} s^{-1}; (b) 1.337×10^8 s^{-1}

15.51 1

15.59 2.403×10^{-20} N

15.63 (a) $\mu_0 I/\pi a$; (b) $\mu_0 I/3\pi a$; (c) 0, $2\mu_0 I/3\pi a$

15.65 (b) $\boldsymbol{u}_x(\mu_0 Ia/\pi r^2)$ where $r^2 = a^2 + x^2$; (d) $x = 0$. For points on the Y-axis, (b) $\boldsymbol{u}_y(\mu_0 Ia/\pi r^2)$ where $r^2 = a^2 - y^2$; (d) $y = \pm a$

15.67 15

15.69 (a) $(\mu_0 j/\pi) \tan^{-1} (w/2d)$; (b) $\frac{1}{2}\mu_0 j$

15.71 1.02×10^{-2} m

15.73 46.26 A

15.75 $F_1' = F_1$, $F_2' = -F_1'$ when the charges are along the X-axis; when the charges are along the Y'-axis, $F_1 = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, F_1'$.

15.77 1; 1.005; 1.15; 2.29

15.79 (a) 2.31×10^{-20} N repulsion, 2.57×10^{-25} N attraction; (b) 2.31×10^{-20} N repulsion; (c) 3.85×10^{-20} N, 2.46×10^{-20} N

CAPITOLO 16

16.1 (a) Per il campo elettrico:

per il potenziale elettrico:

16.3 (which yields = che fornisce)

16.5

16.7 (and = e)

16.9

16.11

16.15

16.17

16.21 (Series = Serie; and = e; parallel = parallelo)

16.23

16.27 . . . Quando il potenziale è mantenuto costante: (a) come sopra; . . .

16.31

16.33 . . . (d) ciascun resistore porta una corrente di 10 A, eccettuato il resistore centrale, ai cui capi non si ha differenza di potenziale.

16.35

16.37

16.41 (a) Raddoppiata; (b) dimezzata; (c) ridotta di un quarto

16.43

16.47

16.49

16.51

16.55

16.59 (For = Per)

16.67

CHAPTER 16

16.1 (a) For the electric field:

$$q/4\pi\epsilon_0 r^2, \quad (q/4\pi\epsilon_0 r^2)\frac{r^3 - R_2^3}{R_1^3 - R_2^3}, \quad 0;$$

for the electric potential:

$$q/4\pi\epsilon_0 r, \quad (q/8\pi\epsilon_0 r)\left(\frac{3R_2^2 r - r^3 - 2R_2^3}{R_1^3 - R_2^3}\right), \quad 0$$

16.3 (a) $-e/\pi a_0^3$; (b) $-0.424\,e$; (c) $(-e/4\pi\epsilon_0 r^2)[1 + e^{-2r/a_0} - 2(1 + r/a_0)^2 e^{-2r/a_0}]$; (d) $x^2 + 4x + 2 = 2 \times 10^{-2} e^x$, which yields $x = r/a_0 = 4.48$

16.5 (a) ca^3, $\epsilon_0 ca^3$, $2\epsilon_0 cx$; (b) 0, 0, 0

16.7 (a) $(10/13) \times 10^{-9}$ C and $(3/13) \times 10^{-9}$ C; (b) 4.5×10^{-9} J; (c) 3.46×10^{-9} J

16.9 (c) $4\pi\epsilon_0\mathcal{E}_0 a^3$; (d) $\mathcal{E}_0 \cos\theta\,(1 + 2a^3/r^3)$; $-\mathcal{E}_0 \sin\theta\,(1 - a^3/r^3)$; (g) $-(6\mathcal{E}_0\epsilon_0/a)\cos\theta$

16.11 (a) 16.5; (b) 15.5

16.15 (a) 0.484 m^2; (b) 10^3 V

16.17 (a) 380 nF; (b) 7.6×10^3 V; (c) 1.443×10^{-3} J; (d) 1.37×10^{-3} J

16.21 Series: (a) $\frac{2}{3}\mu F$; (b) $\frac{4}{3} \times 10^{-5}$ F, 80/9, 60/9, and 40/9 V; (c) $\frac{4}{3} \times 10^{-4}$ J; parallel: (a) 6.5 μF; (b) 3×10^{-5}, 4×10^{-5}, and 6×10^{-5} F, 20 V; (c) 13×10^{-4} J

16.23 (a) C_1: 6×10^{-4} C, 200 V; C_2: 2×10^{-4} C, 100 V; C_3: 4×10^{-4} C, 100 V; (b) 9×10^{-2} J

16.27 (a) $-(\epsilon_0 S/x^2)\,dx$; (b) $\frac{1}{2}(Q^2/\epsilon_0 S)\,dx$; (c) $\frac{1}{2}(Q^2/\epsilon_0 S)$. When the potential is kept constant: (a) as above; (b) $\frac{1}{2}(\epsilon_0 S V^2/x)\,dx$; (c) $\frac{1}{2}(\epsilon_0 S V^2/x)$

16.31 2.06×10^{-14} s

16.33 (a) 9Ω; 3Ω: 48 A, 144 V; 12Ω: 8 A, 96 V; 6Ω: 16 A, 96 V; 4Ω: 24 A, 96 V; 20Ω: 12 A, 240 V; 5Ω: 60 A, 300 V; (b) 10Ω; 7Ω: 24 A, 168 V; 12Ω: 6 A, 72 V; 3Ω: 4 A, 12 V; 6Ω: 2 A, 12 V; 10Ω: 6 A, 60 V; 18Ω: 4 A, 72 V; 9Ω: 8 A, 72 V; (c) 7.5Ω; 4Ω: 9 A, 36 V; 9Ω: 6 A, 54 V; 16Ω: 3 A, 48 V; 3Ω: 2 A, 6 V; 30Ω: 3 A, 90 V; (d) each resistor carries a current of 10 A, except the center resistor, which has no potential difference between its ends.

16.35 (a) 32Ω; (b) 20 V

16.37 90 W

16.41 (a) Doubled; (b) halved; (c) reduced by one-fourth

16.43 (a) No; (b) 1.48Ω; (c) 1.24Ω

16.47 (a) 2.8286 V; (b) 1.33 V

16.49 (a) 1 A; (b) 8 V; (c) 12Ω: $\frac{1}{18}$ A; 6Ω: $\frac{1}{9}$ A; 4Ω: $\frac{1}{6}$ A; 22Ω: $\frac{1}{3}$ A; 8Ω: $\frac{2}{3}$ A; 5Ω: $\frac{8}{15}$ A; 20Ω: $\frac{2}{15}$ A

16.51 (a) $-\frac{2}{9}$ V; (b) $\frac{13}{28}$ A

16.55 (a) 5×10^{-5} Ω; (b) 2.5×10^5 Ω

16.59 For $r < R_1$, $(\mu_0/2\pi)(Ir/R_1^2)$; for $R_1 < r < R_2$, $(\mu_0/2\pi)I/r$; for $R_2 < r < R_3$, $(\mu_0 I/2\pi r)(R_3^2 - r^2)/(R_3^2 - R_2^2)$; for $r > R_3$, 0

16.67 (a) −0.24 Wb; (b) 0; (c) 0.24 Wb

CAPITOLO 17

17.1

17.5 (a) Cerchi concentrici, orientati in senso orario; . . . (e) il concetto di differenza di potenziale è realmente utile solo in condizioni stazionarie; . . .

17.7

17.9 3 V; il terminale a si trova a potenziale più elevato

17.13

17.19 . . . , dove A è la sezione degli avvolgimenti ed R il raggio del toro

17.23

17.27 (where = dove; and = e)

17.31

17.33

17.35

17.39

17.41

17.43

17.45 (circuit = circuito)

17.47 (c) Impedenza infinita

17.53

CAPITOLO 18

18.3

18.9

18.11 (about = circa)

18.13

18.15

18.17 (a) aumenta di un fattore $\sqrt{2}$; (b) diminuisce di un fattore $1/\sqrt{2}$; (c) aumentare di un fattore 4; (d) diminuire di un fattore $\frac{1}{4}$.

18.19

18.21

18.23

18.27

CHAPTER 17

17.1 (a) -16π V; (b) $+16\pi$ V; (c) $+32\pi$ V; (d) 16π V; (e) 32π V

17.5 (a) Concentric circles, pointing clockwise; (b) 5×10^{-3} N C^{-1}, $\pi \times 10^{-3}$ V; (c) 1.57×10^{-3} A; (d) 0; (e) the concept of potential difference is really useful only for steady conditions; (f) 3.14×10^{-3} V

17.7 (a) 2 V; (b) $2t$ V; (c) 0, 0; (d) 1 A, t A

17.9 3 V; end a is at the higher potential

17.13 (a) 7.2×10^{-2} Wb A^{-1}; (b) 2.9×10^{-1} Wb; (c) 4.8×10^{-1} V

17.19 $\mu_0 NA/2\pi R$, where A is the cross-sectional area of the coils and R is the toroid radius

17.23 $\mu_0 Iabv/2\pi(r + vt)(r + a + vt)$

17.27 (b) $q = (B/A)(e^{At/R} - 1)$, $I = (B/R)e^{At/R}$, where $A = (C_2 - C_1)/C_1C_2$ and $B = q_0/C_2$

17.31 (a) $I = C\omega_f V_{\varepsilon 0} \cos \omega_f t$

17.33 (a) 5×10^{-4} A; (b) 5×10^{-2} A; (c) 5 A

17.35 (a) 5×10^{-2} A; (b) 5×10^{-3} A; (c) 5×10^{-4} A

17.39 (a) $0.38\pi \sin 20\pi t$ V; (b) $0.19\pi \sin (20\pi t - \pi \times 10^{-2})$ A

17.41 (a) 98.21 A, 10.9°; (b) 98.21 sin $(120\pi t - 10.9°)$ V, 35.35π sin $(120\pi t - 79.1°)$ V, $(409.2/\pi)$ sin $(120\pi t - 100.9°)$ V

17.43 (a) 0 A; (b) 1 A; (c) 9.804 A; (d) 50 A; (e) 9.804 A; (f) 1 A

17.45 Circuit 1: $1/Z = \sqrt{1/R^2 + \omega_f^2/C^2}$, $\tan^{-1}(-\omega_f R/C)$; circuit 2: $1/Z = (1/\omega_f L) - \omega_f/C$, 90°; circuit 3: $1/Z = \sqrt{1/R^2 + (1/\omega_f L - \omega_f/C)^2}$, $\tan^{-1}(R/\omega_f LC)(C - \omega_f^2 L)$

17.47 (c) Infinite impedance

17.53 q/ϵ_0

CHAPTER 18

18.3 (a) 10 m; (b) 0.5 m; (c) 100 Hz; (d) 50 m s^{-1}

18.9 (a) 8.86×10^{-3} m, 1.69×10^{-2} m, 2.35×10^{-2} m; (b) 8.86×10^{-3} m, 2.99×10^{-3} m, -2.99×10^{-3} m; (c) $-0.06 \cos(3x - 2t)$, 6×10^{-2} m s^{-1}; (d) 0.667 m s^{-1}

18.11 (a) $\xi = 10^{-4} \sin 2\pi (1.98 \times 10^{-3}x - 10t)$; (b) $1.56\pi^2 \times 10^{-2}$ J m^{-2}; (c) $3.16\pi^3 \times 10^{-5}$ W; (d) about 1 mW

18.13 15.6 m s^{-1}

18.15 3.20×10^3 m s^{-1}

18.17 (a) $\sqrt{2}$ increase; (b) $1/\sqrt{2}$ decrease; (c) times 4; (d) times $\frac{1}{4}$

18.19 99 m s^{-1}

18.21 (a) 12.8 m s^{-1}; (b) 0.268 m s^{-1}; (c) $\xi = 10^{-3} \sin 2\pi (\frac{1}{3}x - 4.3t)$; (d) 5.5×10^{-2} W

18.23 (a) 1.25×10^{-2} m; (b) 6.25×10^{-3} m, 4.9×10^2 N; (c) 5.06×10^3 m s^{-1}, 1.60×10^5 m s^{-1}

18.27 0.579 m s^{-1} °K^{-1}

18.29

18.31 Per il suono più debole: . . . ; per il suono più forte: . . .

18.33 (a) Aumenta di un fattore 4; (b) aumenta di un fattore $\sqrt{10}$

18.35

18.37

18.41

18.43

18.47

18.49

18.55

18.57

18.59 (a) . . .(ω è immaginaria); (b) no; (c) no

CAPITOLO 19

19.1 (a) 3 m, polarizzata rettilineamente nel piano XY, si propaga nella direzione $+X$;

19.3

19.5 (a) Polarizzata circolarmente destrogira; (b) polarizzata rettilineamente, ad un angolo di 315° rispetto al piano XY; (c) polarizzata ellitticamente destrogira, coll'asse maggiore formante un angolo di 315° col piano XY; (d) polarizzata ellitticamente levogira, con l'asse maggiore formante un angolo di 45° col piano XY; in ciascun caso $\mathcal{B}_y = -\mathcal{E}_z/c$ e $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_y/c$.

19.7

19.9

19.11

19.13

19.21

19.23 . . . (b) 4.95×10^{11} molecole (circa 8×10^{-11}% di una mole)

19.27 (a) . . . per rivoluzione; (classicamente, quindi, il moto orbitale dell'elettrone dovrebbe durare circa solo 10^{-11} s); . . .

19.31 . . . confrontati con cirva $10^{25}/m^3$

19.33

19.35

19.37

19.39 Per l'elettrone: . . . , per il protone: . . . (in direzione opposta), 2.8 eV.

18.29 (a) $\rho = \rho_0[1 + (\mathcal{P}_0/\kappa) \sin 2\pi(x/\lambda - t/P)]$; $\xi = (\mathcal{P}_0\lambda/\kappa 2\pi) \cos 2\pi(x/\lambda - t/P)$

18.31 For the faintest sound: 4.49×10^{-13} W m^{-2}, −3.5 db, 1.43×10^{-11} m; for the loudest sound: 0.881 W m^{-2}, 119 db, 2.00×10^{-5} m

18.33 (a) It is increased by a factor of 4; (b) it is increased by a factor of $\sqrt{10}$

18.35 (a) 57.9; (b) 2.98×10^{-2}

18.37 (a) 1.869×10^2 m s^{-1}; (b) 18.75 m s^{-1}; (c) 7.342 m s^{-1}; (d) 7.089 m s^{-1}

18.41 $\xi = \xi_0\{2 \cos \frac{1}{2}[(k - k')x - (\omega - \omega')t] + 1\} \sin (kx - \omega t)$

18.43 $3v_p - 2\sqrt{Y/\rho}$; $\sqrt{Y/\rho}$

18.47 (a) 529.2 Hz; (b) 470.4 Hz

18.49 (a) 1.088×10^3 Hz; (b) 9.117×10^2 Hz

18.55 $\sigma = \frac{1}{2}(1 - Y/3\kappa)$

18.57 0.2902, 2.54×10^{10} N m^{-2}; −0.1007, 1.44×10^{10} N m^{-2}

18.59 (a) $v = k\sqrt{-a}$ (ω is imaginary); (b) no; (c) no

CHAPTER 19

19.1 (a) 3 m, linearly polarized in the XY plane, propagates in the $+X$ direction; (b) $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_y = 0, \mathcal{B}_z = \frac{1}{6} \times 10^{-8} \cos [2\pi \times 10^8(t - x/c)]$; (c) 3.316×10^{-4} W m^{-2}

19.3 (a) $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin (kx - \omega t)$, $\mathcal{B}_x = 0$, $\mathcal{B}_y = -\mathcal{E}_z/c$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_z/c$; (b) $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_0 \sin (kx - \omega t)$, $\mathcal{E}_z = (\sqrt{3}/2)\mathcal{E}_0 \sin (kx - \omega t)$, $\mathcal{B}_x = 0$, $\mathcal{B}_y = -\mathcal{E}_z/c$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_y/c$; (c) $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos (kx - \omega t)$, $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_0 \sin (kx - \omega t)$, $\mathcal{B}_x = 0$, $\mathcal{B}_y = -\mathcal{E}_z/c$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_y/c$; (d) $\mathcal{E}_x = 0$, $\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_0 \cos (kx - \omega t)$, $\mathcal{E}_z = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0 \sin (kx - \omega t)$, $\mathcal{B}_x = 0$, $\mathcal{B}_y = -\mathcal{E}_z/c$, $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_y/c$

19.5 (a) Right-hand circularly polarized; (b) linearly polarized, at 315° with the XY plane; (c) right-hand elliptically polarized, with the major axis at 315° with the XY plane; (d) left-hand elliptically polarized, with the major axis at 45° with the XY plane; in each case $\mathcal{B}_y = -\mathcal{E}_z/c$ and $\mathcal{B}_z = \mathcal{E}_y/c$.

19.7 $\mathcal{E}_y = \sqrt{24\pi} \cos [4\pi \times 10^6(x - ct)]$ N C^{-1}; $\mathcal{B}_z = (\mathcal{E}_y/c)$ T

19.9 1.15×10^3 N C^{-1}, 3.84×10^{-6} T

19.11 $\frac{1}{3} \times 10^{-7}$ T, 133 W

19.13 (a) $\frac{1}{3} \times 10^{-9}$ T; (b) 1.33×10^{-6} W m^{-2}; (c) 4.42×10^{-15} J m^{-3}; (d) 167 W

19.21 (a) 796 W m^{-2}; (b) 7.75×10^2 N C^{-1}, 2.58×10^{-6} T; (c) 2.652×10^{-6} J m^{-3}, 8.84×10^{-15} m^{-2} kg s^{-1}

19.23 (a) 2.02×10^{-12} W; (b) 4.95×10^{11} molecules (about 8×10^{-11} % of a mole)

19.27 (a) 4.01×10^{11} eV s^{-1}, 0.563 eV per revolution; (classically then, the electron orbit would last only 10^{-11} s or so); (b) 1.10×10^{-2} eV s^{-1}, 5.22×10^{-10} eV rev^{-1}; (c) 3.26×10^{-9} eV s^{-1}, 6.63×10^{-15} eV rev^{-1}

19.31 2.11×10^{16} s^{-1}; 3.80×10^{25}, compared with approximately 10^{25} per m^3

19.33 1.82×10^{16} s^{-1}; $n = 1 + 6.05 \times 10^{28}/(3.29 \times 10^{32} - \omega^2)$; 1.00019, 1.00018

19.35 (a) 1.24×10^{-9} m; (b) 1.24×10^{-6} m; (c) 1.24×10^{-4} m

19.37 (a) 274 MeV; (b) 40 MeV

19.39 For the electron: 5.402×10^{-23} kg m s^{-1}, 10^4 eV; for the proton: 4.868×10^{-23} kg m s^{-1} (in opposite direction), 2.8 eV.

19.41

19.43 (electrons = elettroni)

19.45

19.47

CAPITOLO 20

20.3 Dal rame all'acciaio: . . . Dall'acciaio al rame: . . .

20.5 (and = e)

20.7 . . . (c) l'unico cambiamento di fase si ha nella riflessione dal vetro all'aria

20.9

20.11 . . . (b) perpendicolare al piano di incidenza

20.15 (case = caso; primo = first; second = secondo; third = terzo; fourth = quarto)

20.17 Per il fascio riflesso, . . .; il fascio è polarizzato ellitticamente con senso di rotazione opposto a quello del fascio incidente; per il fascio rifratto, . . . ; il fascio è polarizzato ellitticamente nel medesimo verso del fascio incidente.

20.21

20.23

20.27 In (2) la luce è polarizzata rettilineamente nella direzione dell'asse di trasmissione di A; in (3) la luce è, in generale, polarizzata ellitticamente, come discusso nell'Esempio 20.4; in (4) la luce è polarizzata rettilineamente nella direzione dell'asse di trasmissione di C.

20.29 (a) 45° in senso antiorario rispetto all'asse Y; (b) 45° in senso orario rispetto all'asse Y; . . .

20.31 (a) Sì; (b) illuminato; (c) scuro

20.33

20.35 (a) . . . , dove p_0 e T_0 rappresentano le condizioni standard; (b) 1 minuto di arco

20.37

CAPITOLO 21

21.3 (for a virtual object = per un oggetto virtuale)

21.5 (convergent = convergente; divergent = divergente)

21.7

19.41 (a) 4.555×10^{14} Hz; (b) 1.88 eV; (c) 4.1274×10^{-15} J s C^{-1}

19.43 (a) 1.704×10^{10} electrons $m^{-2}\ s^{-1}$; (b) 3.0×10^{-9} W m^{-2}

19.45 (a) 98.81 eV, 2.39×10^{16} Hz, 1.21×10^{-12} m; (b) 98.81 eV, 5.37×10^{-24} kg m s^{-1}, 60.5°

19.47 (a) 1.012×10^{-10} m, 59°; (b) 143.2 eV

CHAPTER 20

20.3 From copper to steel: 1.0327 and 0.3269; $\xi_i = 2 \sin 20\pi(t - x/42.31)$ cm, $\xi_r = 2.0654 \sin 20\pi(t - x/45.17)$ cm, $\xi_{r'} = 0.6538 \sin 20\pi(t - x/42.31)$ cm. From steel to copper: 0.9673 and −0.3269, $\xi_i = 2 \sin 20\pi(t - x/45.17)$ cm, $\xi_r = 1.9346 \sin 20\pi(t - x/42.31)$ cm, $\xi_{r'} = -0.6538 \sin 20(t - x/45.17)$ cm.

20.5 (a) −0.0791 and 0.7194; (b) −0.3033 and 0.6966

20.7 (a) $\mathbf{R}_\pi = \mathbf{R}_\sigma = -0.2$, $\mathbf{T}_\pi = \mathbf{T}_\sigma = 0.2$; (b) $\mathbf{R}_\pi = \mathbf{R}_\sigma = 0.2$, $\mathbf{T}_\pi = \mathbf{T}_\sigma = 0.3$; (c) the only phase change is on reflection from glass in air

20.9 56.4°, 33.6°

20.11 (a) 36.9°; (b) perpendicular to the plane of incidence

20.15 First case: $\mathbf{R}_\pi = -0.1289$, $\mathbf{R}_\sigma = 0$; $\mathbf{T}_\pi = 0.8468$, $\mathbf{T}_\sigma = 0$; second case: $\mathbf{R}_\pi = 0$, $\mathbf{R}_\sigma = -0.1567$; $\mathbf{T}_\pi = 0$, $\mathbf{T}_\sigma = 0.8433$; third case: $\mathbf{R}_\pi = 0.3311$, $\mathbf{R}_\sigma = 0$; $\mathbf{T}_\pi = 0.4980$, $\mathbf{T}_\sigma = 0$; fourth case: $\mathbf{R}_\pi = 0$, $\mathbf{R}_\sigma = -0.5604$; $\mathbf{T}_\pi = 0$, $\mathbf{T}_\sigma = 0.4395$

20.17 For the reflected beam, $\mathbf{R}_\pi = -0.1033$, $\mathbf{R}_\sigma = -0.3046$; the beam is elliptically polarized with the sense of rotation opposite to the incident beam; for the refracted beam, $\mathbf{T}_\pi = 0.7259$, $\mathbf{T}_\sigma = 0.7050$; the beam is elliptically polarized in the same sense as the incident beam.

20.21 3.82×10^{-7} m, 3.80×10^{-7} m, 5.085×10^{14} Hz

20.23 (a) 8.726×10^{-7} m; (b) 1.7452×10^{-6} m; (c) 3.490×10^{-6} m

20.27 At (2) the light is plane polarized in the direction of the transmission axis of A; at (3) the light is, in general, elliptically polarized, as discussed in Example 20.4; at (4) the light is plane polarized in the direction of the transmission axis of C.

20.29 (a) 45° counterclockwise with respect to the Y-axis; (b) 45° clockwise with respect to the Y-axis; (c) 5.828:1

20.31 (a) Yes; (b) bright; (c) dark

20.33 1.194 g

20.35 (a) $\Delta\theta = 2.4 \times 10^{-4}(pT/p_0T_0) \tan\theta$, where p_0 and T_0 are STP; (b) 1 minute of arc

20.37 $n(y) = n_0\sqrt{[B^2 + A^2\cos^2(y/B)]/(B^2 + A^2)}$

CHAPTER 21

21.3 (a) 0.778 m, −0.556; (b) 1 m, −1.0; (c) 1.33 m, −1.67; (d) ∞, ∞; for a virtual object, 0.270 m, −0.901

21.5 (a) 0.48 m, convergent; (b) 1.92 m, convergent; (c) 1.2 m, divergent; (d) 0.80 m, convergent; (e) 2.4 m, convergent; (f) 0.3 m, convergent; (g) 0.60 m, divergent

21.7 8 cm, 2.1

21.9 40 cm oppure 37.5 cm

21.11 3.2 cm, confrontata con la distanza focale di 5 cm

21.19 Dal lato vicino: 0.4 cm dalla superficie, 0.8; dal lato lontano: 2 cm dalla superficie, 1.33

21.21 (a) . . . , alla sinistra della faccia piana . . .

21.23 (a) 20 cm; (b) virtuale e diritta; (c) 1 mm

21.25 20 cm all'interno della lente a partire dal lato avente raggio di 20 cm; 5 cm all'esterno a partire dal lato avente raggio di 10 cm

21.27

21.35

21.37

21.39 (real = reale; virtual = virtuale)

21.41 (convergent = convergente; divergent = divergente)

21.43

21.47

21.51

21.55 54°; il raggio è riflesso totalmente; 63.2°, raggio deviato di 24.4°

21.57

21.59

21.61

21.9 Either 40 cm or 37.5 cm

21.11 3.2 cm, compared with the 5-cm focal length

21.19 From the close side: 0.4 cm from the surface, 0.8; from the far side: 2 cm from the the surface, 1.33

21.21 (a) 43.8 cm, to the left of the flat face; (b) 1.71

21.23 (a) 20 cm; (b) virtual and erect; (c) 1 mm

21.25 20 cm inside the lens measured from the 20-cm side; 5 cm outside the lens on the 10-cm side

21.27 $2R$

21.35 (a) 0.24 m; (b) −1.2 m, 6; (b) 0.15 m, 0.375; (d) 0.109 m, 0.545

21.37 5.38 cm

21.39 (a) 1.07 m, real; (b) 0.67 m, real; (c) 0.8 m, real; (d) 0.27 m, virtual; (e) −0.1 m, real

21.41 (a) 0.48 m, convergent; (b) 1.92 m, convergent; (c) 1.2 m, divergent; (d) 0.8 m, convergent; (e) 2.4 m, convergent; (f) 0.3 m, convergent; (g) 0.6 m, divergent

21.43 −18 cm, −60 cm; (a) 10 cm; (b) 11.7 cm

21.47 4.84 cm; 5.16 cm; −4.84 cm; −5.16 cm

21.51 1.521, 40°

21.55 54°; ray suffers total reflection; 63.2°, ray deviated 24.4°

21.57 1.19×10^{-2} rad = 41′

21.59 $F_i = 4.17$ cm; $F_o = -1.67$ cm

21.61 21.1°

CAPITOLO 22

22.1

22.3

22.5

22.7 (a) Partendo dal punto intermedio tra le sorgenti, i primi minimi sono posti a 0.25 m su ciascun lato, poi ogni 0.5 m; (b) lungo le iperboli: . . .; (c) ancora iperboli, descritte dalla medesima equazione; (d) no

22.9 . . . secondi di arco

22.11 Circa 4 secondi di arco

22.13

22.19

22.21 . . . per luce incidente a 30°: . . .

22.23 (For the reflected light = Per la luce riflessa; for the transmitted light = per la luce trasmessa)

22.27

22.29

22.31

22.33

CHAPTER 22

22.1 (a) 0.64 mm; (b) 1.62 mm, 3.25 mm

22.3 0.286 mm

22.5 9×10^{-5} m = 0.09 mm

22.7 (a) Starting at the point midway between the sources, the first minima are 0.25 m on either side, then every 0.5 m; (b) along the hyperbolas: $r_1 - r_2 = \pm\frac{1}{4}n$ m; (c) again hyperbolas, same equation; (d) no

22.9 1.122×10^{-7} rad = 0.024 second of arc

22.11 Approximately 4 seconds of arc

22.13 −12 db

22.19 2.95×10^{-4} rad

22.21 (a) 5.6; (b) 0.2π; for light incident at 30°: (a) 6.0; (b) π

22.23 For the reflected light: (a) 20.3°; (b) 37.7°; for the transmitted light: (a) 37.7°; (b) 20.3°

22.27 (a) $2.19\sqrt{N} \times 10^{-3}$ m; (b) 182

22.29 (a) 299.2 Hz, 598.4 Hz, 899.6 Hz; (b) 2 m, 1 m, 0.67 m; (d) $\xi_1 = 2\xi_0 \sin \pi x \cos 600\pi t$, $\xi_2 = 2\xi_0 \sin 2\pi x \cos 1200\pi t$, $\xi_3 = 2\xi_0 \sin 3\pi x \cos 1800\pi t$.

22.31 (a) 289.6 Hz, 579.2 Hz; (b) 145.8 Hz, 437.4 Hz

22.33 24.43 Hz

22.37 Per la fondamentale: 1,0 e 0,1; doppiamente degenere; per la prima frequenza superiore: 1,1; per la seconda: 2,0 e 0,2; doppiamente degenere; per la terza: 2,1 e 1,2; per la quarta: 2,2; per la quinta: 3,0 e 0,3; per la sesta: 3,1 e 1,3; per la settima: 3,2 e 2,3. Si noti che la dodicesima frequenza superiore, $\nu = 5\nu_0$, è quattro volte degenere essendo possibili le combinazioni 4,3, 3,4, 5,0 e 0,5.

22.41

CAPITOLO 23

23.1

23.3

23.7

23.9

23.11

23.13

23.15

23.17

23.19 (a) 1.5 volte l'ampiezza sensa schermo e 2.25 l'intensità; . . .

23.21

23.23

23.25

23.27

23.29 16,000; sì; approssimativamente 7°; $4.11 \times 10^5\ \text{m}^{-1}$

23.33

23.35

CAPITOLO 24

24.1 Aggiungere il termine $(\partial D/\partial n)(\partial n/\partial x)^2$ al secondo membro dell'Eq. (24.4)

24.3

24.5

24.7 . . . ; (b) 96% nel rame, 4% nell'acciaio

24.19

24.23

24.25

24.27

24.29

24.31

24.33

24.35

24.37

22.37 For the fundamental: 1, 0 and 0, 1; doubly degenerate; for first overtone: 1, 1; for second overtone: 2, 0 and 0, 2; doubly degenerate; for third: 2, 1 and 1, 2; for fourth: 2, 2; for fifth: 3, 0 and 0, 3; for sixth: 3, 1 and 1, 3; for seventh: 3, 2 and 2, 3. Note that the twelfth overtone, $\nu = 5\nu_0$, is fourfold degenerate from 4, 3 and 3, 4 as well as 5, 0 and 0, 5.

22.41 $k^2 = k_1^2 + k_2^2$

CHAPTER 23

23.1 0.56 mm

23.3 2×10^3 ft

23.7 (b) 0.48 mm × 0.24 mm

23.9 (a) 2.05×10^{-6} m; (b) 7.03×10^{-6} m

23.11 1.25×10^{-5} m, 5×10^{-5} m

23.13 2.4×10^{-5} m

23.15 (b) $1.22\lambda/D$, $2.233\lambda/D$, $3.239\lambda/D$; (c) $(1.22\lambda/D)f$, $(2.233\lambda/D)f$, $(3.239\lambda/D)f$

23.17 2.24×10^{-4} m

23.19 (a) 1.5 times the unblocked amplitude and 2.25 times the unblocked intensity; (b) $\frac{5}{4}\pi$

23.21 (a) $(800/n)$ m; (b) 400 m

23.23 17.5°, 36.9°, 64.2°

23.25 (a) 5.70×10^{-7} m; (b) 43.1°

23.27 12.0°, 28.5°

23.29 16,000; yes; approximately 7°; $4.11 \times 10^5\ \text{m}^{-1}$

23.33 (a) 9.791×10^{-11} m; (b) 20.3°

23.35 1.3°

CHAPTER 24

24.1 Add the term $(\partial D/\partial n)(\partial n/\partial x)^2$ to the right-hand side of Eq. (24.4)

24.3 (a) −12.5 °C; (b) $9.6 \times 10^2\ \text{J m}^{-2}\ \text{s}^{-1}$

24.5 $4.38 \times 10^3\ \text{J s}^{-1}$ (4.38 KW) or $15.8 \times 10^6\ \text{J hr}^{-1}$

24.7 (a) $1.5\pi\ \text{J s}^{-1}$ or $1.125\ \text{cal s}^{-1}$; (b) 96% in the copper, 4% in the steel

24.19 $2.45 \times 10^{-5}\ \text{m}^3\ \text{s}^{-1}$

24.23 $a = -8.520$; $b = 815$

24.25 (a) 6.00×10^9; (b) 4.65×10^9; (c) 6.00×10^5; 1.46×10^{29}, 6.80×10^{28}, 1.46×10^{21}

24.27 60.6%, 36.8%, 13.5%, 4.5×10^{-3}%; $x = l \ln 2$

24.29 $D \propto T/p$; $K \propto \sqrt{T}$

24.31 $1.76 \times 10^{-6}\ \text{P °K}^{-1/2}$

24.33 $K/D = \frac{3}{2}p/T = 555$ at STP; $\eta/D = pm/kT = 4.45 \times 10^{-2}m$ at STP (m in amu)

24.35 6.25×10^{-8} m, $9.321 \times 10^9\ \text{s}^{-1}$; 1.83×10^{-10} m

24.37 0.654 mm

Abcoulomb, 490
Aberrazione, 762
  cromatica, 842
    longitudinale, 844
    trasversale, 844
  sferica, 821, 831, 850, 854
Acceleratore elettrostatico, 464
  lineare, 486
  Van de Graaff, 465
Acromatico, sistema, 844
Acustica, 709
Adiabatico, 685
Alfa, particella, 454
Ampère, 470
Ampère, A. M. (1775—1836), 470
Ampère-Laplace, legge di, 518
Ampère, legge di, 596
Ampère-Maxwell, legge di, 652
Analizzatore, 802
  di energia, 448
Anastigmatico, 821
Anderson, Carl (1905—), 499
Angolo limite, 781
Anioni, 452
Anisotropo, 699
Anodo, 452
Antiferromagnetico, 608
Antinodali, superfici, 859
Anti-riflessione, rivestimento, 897
Antirisonanza, 664
Armonica, frequenza, 871
Assorbimento, 948
  cammino libero medio, 956
  sezione d'urto macroscopica, 956
Atomico, modello, 454
Atomico, numero, 454
Atomo, struttura dell', 454
Autoenergia dell'elettrone, 640
Autoinduttanza, 634
Autoinduzione, 634
Avogadro, numero di, 452

Babinet, compensatore di, 813
Balmer, J. (1825—1898), 750
Balmer, formula di, 750
Bastoncelli, 764
Batteria, 593
Bessel, funzione di, 929
Beta, raggi, 448
Betatrone, 625
Biot-Savart, formula di, 520
Birifrangenti, sostanze, 799
Bohr, Niels (1885—1962), 750
Bohr, formula di, 750
  raggio di, 468
Bragg, equazione di, 924
Bremsstrahlung, 738
Brewster, legge di, 791
Buckling, 949
Buco elettronico, 497

Calore, 942
Camera a nebbia, 498
Cammino libero medio, 954
  di assorbimento, 956
Campo elettrico, 442
  intensità del, 443
  uniforme, 442
Campo magnetico, 494
Cannocchiale, 836
Capacità elettrica, 578
Caratteristica, frequenza, 642
Carica, elementare, 450
  elettrica, 439
  elettronica, 451
  principio di conservazione della, 440

Abcoulomb, 490
Aberration, 762
  chromatic, 842
    longitudinal, 844
    transverse, 844
  spherical, 821, 831, 850, 854
Absorption, 948
  cross section, macroscopic, 956
  mean free path, 956
Accelerator, electrostatic, 464
  linear, 486
  Van de Graaff, 465
Achromatic system, 844
Acoustics, 709
Adiabatic, 685
Alpha particle, 454
Ampere, 470
Ampère, A. M. (1775–1836), 470
Ampère-Laplace law, 518
Ampère's law, 596
Ampère-Maxwell law, 652
Analyzer, 802
  energy, 448
Anastigmatic, 821
Anderson, Carl (1905–), 499
Angular momentum, of radiation, 724
  quantum number, 517
Anions, 452
Anisotropic, 699
Anode, 452
Antiferromagnetic, 608
Antinodal surface, 859
Antinode, 871
Antireflection coating, 897
Antiresonance, 664
Atomic model, 454
Atomic number, 454
Atomic photoelectric effect, 754
Atomic structure, 454
Attenuated wave, 710
Avogadro's constant, 452

Babinet compensator, 813
Balmer, J. (1825–1898), 750
Balmer formula, 750
Battery, 593
Bessel function, 929
Beta ray, 448
Betatron, 625
Biot-Savart formula, 520
Birefringent substance, 799
Blackbody radiation, 748
Bohr, Niels (1885–1962), 750
Bohr formula, 750
Bohr radius, 468
Boundary conditions, 775
Bragg equation, 924
Bremsstrahlung, 738
Brewster's law, 791
Broadside array, 866
Buckling, 949
Bulk modulus, 684

Capacitor, 579
Capillary wave, 692
Cathode, 452
Cathode rays, 505
Cations, 452
Cauchy formula, 841
Caustic, 783
  reflection, 821
  refraction, 831
Cavendish torsion balance, 441
Cavity, resonating, 884
Cerenkov detector, 757
Cerenkov radiation, 757

Cationi, 452
Catodici, raggi, 505
Catodo, 452
Cauchy, formula di, 841
Caustica, 783
  di riflessione, 821
  di rifrazione, 831
Cavendish, bilancia di torsione di, 441
Cavità risonante, 884
Cerenkov, radiazione di, 757
  rivelatore di, 757
Ciclotrone, 506
  frequenza di, 498
Cilindriche, onde, 699
Circuitazione, 590
Coefficiente di trasmissione del calore, 962
Coefficiente di viscosità, 950
Coerenza, 860
Collisione, cammino libero medio di, 954
  frequenza di, 954
Colore, 764
Compton, A. H. (1892–1962), 746
Compton, effetto, 746
  lunghezza d'onda, 747
Concentrazione, 935
Condensatore, 579
Conduttività elettrica, 585
Conduttività termica, 942
  tabella della, 960
Conduttore, 568
Conduzione termica, 941
  in condizioni stazionarie, 944
Coni, 764
Coniche, onde, 709
Conservazione della carica, principio di, 440, 649
Contorno, condizioni al, 775
Convergenti, sistemi, 826
Corpo nero, radiazione del, 748
Corrente elettrica, 470
Corrente, bilancio di, 511
Corrente, densità di, 511
  di energia, 942
  di quantità di moto, 950
  di particelle, 936
Corrente di spostamento, 655
Cosmici, raggi, 502
Cotton-Mouton, effetto, 796
Coulomb, 441
Coulomb, C. de (1738–1806), 441
Coulomb, legge di, 440
Cristallo, biassico, 795
  cubico, 793
  uniassico, 793
Curie, temperatura di, 608

Debye-Scherrer, spettrogramma di, 926
Decibel, 697
Degenerazione dei modi, 899
Dente di sega, curva, 715
Derivazione, regola di, di una funzione di funzione, 678
Descartes, formula di, per la riflessione, 819
  per la rifrazione, 825
  per le lenti sottili, 829
Deuterio, 458
Diamagnetismo, 606
Dicroismo, 798
Dielettrica, costante, 571
Dielettrico, 567
Diffrazione, di Fraunhofer, 901
  di Fresnel, 902
  ordine di, 912
  dei raggi x, 922
Diffrazione, reticolo di, 931
  per riflessione, 931
  per trasmissione, 913
Diffuse, onde, 744
Diffusione, 744, 902, 922, 934
  approssimazione della, 959
  in condizioni stazionarie, 938
  Coulombiana, 458
  equazione della, 938
  lunghezza di, 958
  di neutroni, 956
  di Rutherford, 455
Diffusione, coefficiente di, 937
  tabella dei, 960
Dilatazione, laterale, 715
  lineare, 715
  normale, 680
  tangenziale, 689
  volumica, 715
Dipoli, interazione tra, 477
Dipolo elettrico, 471
  momento di, 471
  radiazione di, 726
  tabella dei, 475
Dipolo, linee di forza del, 473
Dipolo magnetico, 526
  momento di, 513
  radiazione di un, 731
Dirac, Paul (1902–), 499
Dispersione, 692, 839
  anomala, 757
  normale, 757

Chain rule, 678
Characteristic frequency, 642
Charge, electric, 439
  elementary, 450
  principle of conservation of, 440
Circulation, 590
Cloud chamber, 498
Coefficient of thermal transfer, 962
Coefficient of viscosity, 950
Coherence, 860
Collision cross section, 954
  macroscopic, 954
  microscopic, 955
Collision frequency, 954
Collision mean free path, 954
Color, 764
Compton, A. H. (1892–1962), 746
Compton effect, 746
Compton wavelength, 747
Concentration, 935
Conductivity, thermal, 942
Conductor, 568
Cones, 764
Conical wave, 709
Conservation of charge, principle of, 440, 649
Convergent system, 826
Cosmic ray, 502
Cotton-Mouton effect, 796
Coulomb, 441
Coulomb, C. de (1738–1806), 441
Coulomb's law, 440
Critical angle, 781
Cross section, 459
  collision, 954
  differential, 459
  macroscopic absorption, 956
Crystal, biaxial, 795
  cubic, 793
  uniaxial, 793
Curie temperature, 608
Curl, 600
Current, electric, 470
Current balance, 523
Current density, 511
  energy, 942
  momentum, 950
  particle, 936
Cyclotron, 506
Cyclotron frequency, 498
Cylindrical wave, 699

Debye-Scherrer pattern, 926
Degeneracy, of modes, 899
Descartes' formula, for reflection, 819
  for refraction, 825
  for a thin lens, 829
Deceleration radiation, 738
Decibel, 697
Derivative chain rule, 678
Deuterium, 458
Diamagnetism, 606
Dichroism, 798
Dielectric, 567
Dielectric constant, 571
Diffraction, Fraunhofer, 901
  Fresnel, 902
  order of, 912
  x-ray, 922
Diffraction grating, reflection, 931
  transmission, 913
Diffusion, 934
  neutron, 956
  steady state, 938
Diffusion approximation, 959
Diffusion coefficient, 937
  table of, 960
Diffusion equation, 938
Diffusion length, 958
Dipole, electric, 471
Dipole interaction, 477
Dipole lines of force, 473
Dipole moment, electric, 471
  magnetic, 513
Dirac, Paul (1902–), 499
Dispersion, 692, 839
  anomalous, 757
  of a grating, 913
  normal, 757
  of a prism, 841
Dispersive power, 844
Displacement current, 655
Dissociation, 452
Divergence, 563
Divergent system, 826
Domains, magnetic, 608
Doppler, C. J. (1803–1853), 706
Doppler effect, 706, 758
Double refraction, 793, 799

Electric capacity, 578
Electric charge, 439
Electric conductivity, 585
Electric current, 470
Electric dipole, 471
Electric dipole moment, table, 475
  radiation, 726
Electric displacement, 567

di un prisma, 841
di un reticolo, 913
Dispersivo, potere, 844
Disposizione, "broadside", 866
"end fire", 896
Dissociazione, 452
Divergenti, sistemi, 826
Divergenza, 563
Domini magnetici, 608
Doppia rifrazione, 793, 799
Doppler, C. J. (1803–1853), 706
Doppler, effetto, 706, 758

Eccitato, stato, 743
Elettricità, 438
Elettrizzazione, negativa, 438
positiva, 438
Elettrodo, 452
Elettrolisi, 451
Elettrometro, 615
Elettromotrice, forza, 591
Elettrone, 451, 506
autoenergia dell', 640
massa dell', 451
raggio dell', 584
Elettronvolt, 466
Elettro-ottico, effetto, 796
Elettrostatica, 440
Emissione, spettro di, 730
Enantiomorfismo, 807
Energetico, livello, 750
Energia, analizzatore di, 448
Energia di ionizzazione, 467
correzione relativistica all', 469
Energia, risonanza di, 644
Energia, densità di, elettrica, 583
elettromagnetica, 723
magnetica, 638
Equipotenziale, superfice, 444, 462

Farad, 579
Faraday, M. (1791–1867), 579
Faraday, costante di, 452
effetto, 807
Faraday-Henry, legge di, 623
Fase, velocità di, 671, 704
Fermat, P. de (1601–1665), 846
Fermat, principio di, 846
Ferrimagnetismo, 608
Ferroelettricità, 576
Ferromagnetismo, 607
Feynman, diagramma di, 751
Fick, A. (1829–1901), 937
Fick, legge di, 937
Fissione, 948
Fluorescenza, 744
Flusso, 556
di un campo vettoriale, 556
Flusso tagliato, fem dovuta al, 630
Focale, distanza, 819
prima distanza, 825, 830
seconda distanza, 826
Focale, punto, primo, 825
secondo, 826
Fondamentale, frequenza, 871
stato, 457
Forze nucleari, 457
Fosforescenza, 744
Fotoelasticità, 803
Fotoelettrico, effetto, 752
atomico, 754
Fotoelettroni, 753
Fotone, 749
Fotonucleare, effetto, 754
Fotopica, visione, 765
Fourier, J. (1768–1830), 942
Fourier, legge di, 942
teorema di, 675
Fresnel, biprisma di, 860
elissoide di, 793
zona di, 916
Frequenza, armonica, 871
fondamentale, 871
Fuoco, 819
immagine, 826, 830
messa a, 835
oggetto, 825, 830

Galvanometro, 514
della tangente, 526
Gamma, raggi, 766
Gauss, 550
Gauss, legge di, 559
Generatore elettrico, 592
Giromagnetico, rapporto, 515

Hall, E. C. (1855–1929), 496
Hall, effetto, 496
Helmholtz, bobine di, 553
Helmholtz, legge di, per la
rifrazione, 853
Henry, 634
Henry, J. (1797–1878), 634
Hertz, H. (1857–1894), 718
Hertz, oscillatore di, 878
Hooke, legge di, 680
Huygens, C. (1629–1695), 774
Huygens, costruzione di, 775

Electric field, 442
intensity of, 443
Electric generator, 592
Electric mass, 439
Electric multipole, 478
Electric potential, 460
Electric quadrupole, linear, 478
Electricity, 438
Electrification, negative, 438
positive, 438
Electrode, 452
Electrolysis, 451
Electromagnetic induction, 622
Electromagnetic interaction, 494
Electromagnetic spectrum, 766
Electrometer, 615
Electromotive force, 591
Electro-optic effect, 796
Electron, 451, 506
Electron charge, 451
Electron hole, 497
Electron mass, 451
Electron radius, 584
Electron self energy, 640
Electron volt, 466
Electrostatic accelerator, 464
Electrostatics, 440
Elementary charge, 450
Emission spectrum, 730
Enantiomorphism, 807
End-fire array, 896
Energy, ionization, 467
relativistic correction, 469
Energy analyzer, 448
Energy density, electric, 583
electromagnetic, 723
magnetic, 638
Energy level, 750
Energy resonance, 644
Energy wave, 695
Equipotential surface, 444, 462
Exchange integral, 607
Excited state, 743
Extraordinary wave, 794
Eyepiece, 835

Farad, 579
Faraday, M. (1791–1867), 579
Faraday constant, 452
Faraday effect, 807
Faraday-Henry law, 623
Fermat, P. de (1601–1665), 846
Fermat's principle, 846
Ferrimagnetism, 608
Ferroelectricity, 576
Ferromagnetism, 607
Feynman diagram, 751
Fick, A. (1829–1901), 937
Fick's law, 937
Field, electric, 442
uniform, 442
magnetic, 494
Fission, 948
Flexural wave, 714
Fluorescence, 744
Flux, 556
of a vector field, 556
Focal length, 819
image, 826
object, 825, 830
Focal point, first, 825
second, 826
Focus, 819
image, 826, 830
object, 825, 830
Focusing, 835
Force, nuclear, 457
Fourier, J. (1768–1830), 942
Fourier's law, 942
Fourier's theorem, 675
Fresnel biprism, 860
Fresnel ellipsoid, 793
Fresnel zone, 916
Fundamental frequency, 871
Fundamental particle, 450

Galvanometer, 514
tangent, 526
Gamma ray, 766
Gauss, 550
Gauss' law, 559
Geometrical optics, 817
Grating, diffraction, 913
Gravity wave, 692
Ground state, 457
Group velocity, 704, 758
Gyromagnetic ratio, 515

Half-wave plate, 797
Hall, E. C. (1855–1929), 496
Hall effect, 496
Harmonic frequency, 871
Hearing, 709
Heat, 942
Helmholtz coils, 553
Helmholtz' law, for refraction, 853
Henry, 634
Henry, J. (1797–1878), 634

Immagine, 783, 820
Impedenza, 643
Impulso, 676, 704
Incoerenza, 860
Increspature, 692
Indice di rifrazione, assoluto, 755
  relativo, 778
Induzione, elettromagnetica, 622
  magnetica, 494
  mutua, 647
Infrarosso, 764
Ingrandimento, 824
  delle lenti, 832
  visuale, 837
Integrale di linea, 590
Integrale di scambio, 607
Intensità, 696
  del campo elettrico, 443
  del campo magnetico, 494
  di corrente elettrica, 470
  di un'onda elettromagnetica, 723
  di un'onda sferica, 703
  di oscillatore, 573
Interazione, elettromagnetica, 494
  di spin-orbita, 538
Interferenza, costruttiva, 859
  distruttiva, 859
  in pellicole sottili, 866
Ioni, 440
Ionico, legame, 453
Ionizzazione, energia di, 467
Ionosfera, 765, 809
Irrotazionali, onde, 703
Isotopi, 458, 505
Isotropo, 699

Joule, effetto, 587

Kerr, effetto, 796
Kirchhoff, leggi di, 593

Lacuna elettronica, 497
Lamina, mezz'onda, 797
  quarto d'onda, 797
Langevin, formula di, 576
Laplace, equazione di, 564
Laplaciano, 564
Larmor, formula di, 737
  frequenza di, 609
Laue, equazioni di, 932
  spettrogramma di, 925
Lavoro di estrazione, 753
Lawrence, E. O. (1901–1958), 506
Legge, ... *vedi sotto il nome specifico*
Lente di ingrandimento, 835
Lenti, 828
  convergenti, 830
  divergenti, 830
  equazione dei costruttori di, 830
  magnetiche, 547
Lienard, formula di, 740
Linea, integrale di, 590
Lineare, acceleratore, 486
Linee di forza del campo elettrico, 444
Livello di intensità del suono, 697
Lloyd, specchio di, 893
Longitudinali, onde, 682
Lorentz, forza di, 495

Mach, onda di, 709
Magnete, 493
Magnetica, induzione, 494
Magnetica, permeabilità, 519
Magnetiche, lenti, 547
Magnetico, dipolo, 526
Magnetico, focheggiamento, 546
Magnetico, intensità del campo, 494
Magnetico, momento di dipolo, 513
Magnetico, numero quantico, 517
Magnetico, potenziale, 528
Magnetico, specchio, 502
Magnetismo, 493
Magnetizzante, campo, 603
Magnetizzazione, 601
Magneto-ottico, effetto, 796
Malus, legge di, 802
  teorema di, 778
Massa elettrica, 439
Massa, numero di, 457
Maxwell, 659
Maxwell, J. C. (1831–1879), 652
Maxwell, equazioni di, 656
Membrana, modi di vibrazione di una,
  circolare, 883
  rettangolare, 882
Mezz'onda, lamina, 797
Microonde, 763
Microscopio, 834
  composto, 835
Millikan, R. A. (1868–1953), 449
Millikan, esperimento della goccia d'olio di, 449
Modello, nucleare, 454
  a plasma, 454
Moderatore, 948
Modi degeneri, 899
Modulo, di contrazione, 684
  tangenziale, 690

Hertz, H. (1857–1894), 718
Hertz' oscillator, 878
Hole, electron, 497
Hooke's law, 680
Huygens, C. (1629–1695), 774
Huygens' construction, 775

Image, 783, 820
Image focus, 826, 830
Impact parameter, 455
Impedance, 643
Incoherence, 860
Index of refraction, absolute, 755
  relative, 778
Induction, magnetic, 494
Infrared, 764
Intensity, 696
  of electric current, 470
  of the electric field, 443
  electromagnetic, 723
  spherical wave, 703
Intensity level of sound, 697
Interaction, electromagnetic, 494
  spin-orbit, 538
Interference, constructive, 859
  destructive, 859
  thin film, 866
Ion, 440
Ionic binding, 453
Ionization energy, 467
Ionosphere, 765, 809
Irrotational wave, 703
Isotope, 458, 505
Isotropic, 699

Joule effect, 587

Kerr effect, 796
Kirchhoff's laws, 593

Langevin formula, 576
Laplace equation, 564
Laplacian, 564
Larmor formula, 737
Larmor frequency, 609
Laue equations, 932
Laue pattern, 925
Lawrence, E. O. (1901–1958), 506
Lens, 828
  convergent, 830
  divergent, 830
Lensmaker's equation, 830
Lienard formula, 740
Line integral, 590

Linear accelerator, 486
Lines of force, electric, 444
Lloyd's mirror, 893
Longitudinal wave, 682
Lorentz force, 495

Mach wave, 709
Magnet, 493
Magnetic dipole, 526
Magnetic dipole moment, 513
  orbital and spin, 516
Magnetic dipole radiation, 731
Magnetic field strength, 494
Magnetic focusing, 546
Magnetic induction, 494
Magnetic lens, 547
Magnetic mirror, 502
Magnetic permeability, 519
Magnetic potential, 528
Magnetic quantum number, 517
Magnetism, 493
Magnetization, 601
Magnetizing field, 603
Magneto-optic effect, 796
Magnification, 824
  angular, 837
  lens, 832
Magnifying glass, 835
Malus' law, 802
Malus' theorem, 778
Mass number, 457
Mass spectrometer, 504
  Bainbridge, 545
  Dempster, 504
Maxwell, 659
Maxwell, J. C. (1831–1879), 652
Maxwell's equations, 656
Mean free path, 954
  absorption, 956
Membrane, modes of vibration, circular, 883
  rectangular, 882
Microscope, 834
  compound, 835
Microwave, 763
Millikan, R. A. (1868–1953), 449
Millikan's oil-drop experiment, 449
Mode degeneracy, 899
Model, nuclear, 454
  plasma, 454
Moderator, 948
Monochromatic wave, 764
Motional emf, 630
Mutual inductance, 647

Momento magnetico orbitale e di spin, 516
Momento della quantità di moto della radiazione elettromagnetica, 724
Monocromatiche, onde, 764
Multipolo elettrico, 478
Mutua induttanza, 647

Neutrone, 451
Newton, anelli di, 868
Newton, equazione di, per le lenti sottili, 850
Newton, legge di, del raffreddamento, 950
Nicol, prisma di, 800
Nodali, superfici, 859
Nodi, 870
Nucleari, forze, 457
Nucleo, 454

Obiettivo, 835
Oculare, 855
Oersted, 619
Oersted, Hans (1777–1851), 518
Oggetto, 820
Ohm, 586
Ohm, Georg (1787–1854), 586
Ohm, legge di, 585
Onda, attenuata, 710
  capillare, 692
  cilindrica, 699
  conica, 709
  diffusa, 744
  d'energia, 695
  di flessione, 714
  gravitazionale, 692
  irrotazionale, 703
  longitudinale, 682
  di Mach, 709
  ordinaria, 794
  piana, 698
  di pressione, 685
  secondaria, 775
  sferica, 699
  solenoidale, 703
  stazionaria, 872
  straordinaria, 794
  tangenziale, 690
  termica, 946
  torsionale, 690
  trasversale, 688
  d'urto, 709
Onda, fronte d', 774
Onda, guida d', 887
  acustica, 890
  elettromagnetica, 890
Onda, lunghezza d', 672
Onda, numero d', 672
Onda, superficie d', 774
Ondoso, moto, 670
Ordinaria, onda, 794
Ordine di diffrazione, 912
Organo, canna d', 873
Oscillatore, forza dell', 573
    intensità di, 573
Oscillografo, 449
Ottica, 764
  geometrica, 817
Ottica, attività, 804
Ottiche, fibre, 890
Ottico, asse, 793
Ottico, centro, 829

Paramagnetismo, 606
Parametro d'urto, 455
Particelle, alfa, 454
  fondamentali, 450
Pellicole sottili, interferenza in, 866
Permeabilità, 605
  magnetica, 519
  relativa, 605
Permettività, 571
  relativa, 571
  del vuoto, 442
Piana, onda, 698
Planck, Max (1858–1947), 748
Planck, costante di, 467, 748
Pohl, interferometro di, 894
Poise, 951
Poiseuille, formula di, 963
Poisson, equazione di, 564
  rapporto di, 715
Polari, molecole, 474
Polarizzabilità, 572
Polarizzante, angolo, 791
Polarizzazione, 443, 476, 567, 774
  circolare, 688
  cromatica, 802
  rettilinea, 688
Polaroide, 798
Poli magnetici, 493
Positrone, 499
Potenziale elettrico, 460
Potenziometro, 617
Potere separatore, 836, 905
  di un'apertura circolare, 908
  di una fenditura, 906
  dell'occhio, 836
  di un reticolo, 915
Poynting, vettore di, 723

Neutron, 451
Newton's equation, for a thin lens, 850
Newton's law of cooling, 950
Newton's rings, 868
Nicol prism, 800
Nodal surface, 859
Node, 870
Nuclear force, 457
Nucleus, 454

Object, 820
Object focus, 825, 830
Objective, 835
Ocular, 855
Oersted, 619
Oersted, Hans (1777–1851), 518
Ohm, 586
Ohm, Georg (1787–1854), 586
Ohm's law, 585
Open-closed tube, 874
Open-open tube, 874
Optical activity, 804
Optical axis, 793
Optical center, 829
Optical fiber, 890
Optics, 764
  geometrical, 817
Order of diffraction, 912
Ordinary wave, 794
Organ pipe, 873
Oscillator strength, 573
Oscilloscope, 449

Paramagnetism, 606
Particle, fundamental, 450
Permeability, 605
  magnetic, 519
  relative, 605
Permittivity, 571
  relative, 571
  vacuum, 442
Phase velocity, 671, 704
Phosphorescence, 744
Photoelasticity, 803
Photoelectric effect, 752
Photoelectrons, 753
Photon, 749
Photonuclear effect, 754
Photopic, 765
Pinhole camera, 817
Planck, Max (1858–1947), 748
Planck's constant, 467, 748
Plane wave, 698
Pohl interferometer, 894

Pole, magnetic, 493
Poise, 951
Poiseuille's formula, 963
Poisson's equation, 564
Poisson's ratio, 715
Polarizability, 572
Polarization, 443, 476, 567, 774
  chromatic, 802
  circular, 688
  linear, 688
Polarizing angle, 791
Polar molecules, 474
Polaroid, 798
Positron, 499
Potential, electric, 460
Potentiometer, 617
Poynting vector, 723
Principal axis, 818
Principal ray, 820
Principle of conservation of charge, 649
Prism, 838
  Nicol, 800
  Wollaston, 814
Production, 948
Propagation, 670
Propagation vector, 698
Proton, 451
Proton-synchrotron, 509
Pressure wave, 685
Pulse, 676, 704

Quadrupole, electric, 478
  magnetic, 528
Quadrupole moment, electric, 479
Quantization, energy, 457, 467
  frequency, 871
  space, 457
  wavelength, 871
Quantum electrodynamics, 658
Quantum mechanics, 750
Quantum number, angular momentum, 517
  magnetic, 517
  spin, 517
Quarter-wave plate, 797

Radiation absorption, 742
Radiation pressure, 724
Radiation resistance, 731
Radiofrequency, 763
Radio interferometer, 896
Radiotelescope, 821
Ray, 776
Rayleigh rule, 906

Pressione, onda di, 685
Principale, asse, 818
Principali, raggi, 820
Principio di conservazione della carica, 649
Prisma, 838
  di Nicol, 800
  di Wollaston, 814
Produzione, 948
Propagazione, 670
Protone, 451
Protosincrotrone, 509

Quadrupolo, elettrico, 478
  magnetico, 528
Quadrupolo, momento di, elettrico, 479
Quantico, numero, angolare, 517
  angolare, 517
  magnetico, 517
  di spin, 517
Quantistica, elettrodinamica, 658
  meccanica, 750
Quantizzazione, dell'energia, 457, 467
  delle frequenze, 871
  delle lunghezze d'onda, 871
  spaziale, 457
Quarto d'onda, lamina, 797

Radiazione, assorbimento della, 742
  pressione di, 724
Radiazione, del corpo nero, 748
  di frenamento, 738
Radiofrequenza, 763
Radiointerferometro, 896
Radiotelescopio, 821
Raggio, 776
Rayleigh, criterio di, 906
Reale, 820
Reattanza, 643
Resistenza di radiazione, 731
Resistore, 588
Reticolo di diffrazione, 913
Retina, 764
Ricevitore, 648
Riflessione, 774
  caustica di, 821
  coefficiente di, 787
  di onde elettromagnetiche, 789
  di onde sferiche, 782
  totale, 781
Rifrazione, 774
  caustica di, 831
  coefficiente di, 787
  di onde elettromagnetiche, 789
  di onde sferiche, 782
Rifrazione, doppia, 793, 799
Rilassamento, tempo di, 588, 636
Risonante, cavità, 884
Risonanza di energia, 644
Ritardo, effetto di, 540
Roentgen, W. (1845–1923), 765
Rotore, 600
Rowland, dispositivo di, 931
Rutherford, E. (1871–1937), 456
Rutherford, diffusione di, 455
Rydberg, costante di, 491, 750

Scalare, potenziale, 632
Scambio, integrale di, 607
Scotopica, visione, 765
Secondaria, onda, 775
Sezione d'urto, 459, 954
  differenziale, 459
  macroscopica, 954
  macroscopica di assorbimento, 956
  microscopica, 955
Sferica, aberrazione, 821, 831
Sferiche, onde, 699
Sforzo tangenziale, 951
Sincrociclotrone, 509
Sincrotrone, 509
  radiazione di, 738
Snell, legge di, 778
Soglia, frequenza di, 754
  della sensazione, dolorosa, 697
  sonora, 697
Solenoidale, campo, 526
Solenoidale, onda, 703
Solenoide, 598
Spaziale, quantizzazione, 457
Specifico, calore, 943
Spettro, 840, 913
Spettro elettromagnetico, 766
Spettrometro a cristallo, 924
Spettrometro di massa, 504
  di Bainbridge, 545
  di Dempster, 504
Spettroscopio, a prisma, 840
  a reticolo, 913
Spin, 515, 724
  numero quantico di, 517
Spin-orbita, interazione, 538
Spostamento elettrico, 570
Spostamento verso il rosso, 761
Statampere, 619
Statcoulomb, 490
Statfarad, 613
Stato, eccitato, 743
  fondamentale, 457

Reactance, 643
Real, 820
Receiver, 648
Red shift, 761
Reflection, 774
  coefficient of, 787
  electromagnetic, 789
  spherical wave, 782
  total, 781
Reflection caustic, 821
Refraction, 774
  coefficient of, 787
  electromagnetic, 789
  spherical wave, 782
Refraction caustic, 831
Relaxation time, 588, 636
Resistor, 588
Resolving power, 836, 905
  of a circular opening, 908
  of the eye, 836
  of a grating, 915
  of a slit, 906
Resonating cavity, 884
Retardation, 540
Retina, 764
Ripple, 692
Rods, 764
Roentgen, W. (1845–1923), 765
Rowland mounting, 931
Rutherford, E. (1871–1937), 456
Rutherford scattering, 455
Rydberg constant, 491, 750

Sawtooth curve, 715
Scalar potential, 632
Scattered wave, 744
Scattering, 744, 902, 922
  Coulomb, 458
  Rutherford, 455
Scotopic, 765
Secondary wave, 775
Self inductance, 634
Self induction, 634
Shear modulus, 690
Shear stress, 951
Shear wave, 690
Shock wave, 709
Snell's law, 778
Solenoid, 598
Solenoidal field, 526
Solenoidal wave, 703
Sound, 709
Space quantization, 457
Specific heat, 943

Spectrometer, crystal, 924
  grating, 913
  prism, 840
Spectrum, 840, 913
Spherical aberration, 821, 831
Spherical wave, 699
Spin, 515, 724
Spin-orbit interaction, 538
Spin quantum number, 517
Standing wave, 872
Statampere, 619
Statcoulomb, 490
State, excited, 743
  ground, 457
  stationary, 457
Statfarad, 613
Stationary state, 457
Statvolt, 490
Stereoisomerism, 807
Stokes' relations, 813
Strain, lateral, 715
  linear, 715
  normal, 680
  shear, 689
  volume, 715
Stress, normal, 679
  shear, 689, 951
Surface, equipotential, 462
Surface integral, 556
Susceptibility, electric, 567
  magnetic, 604
  paramagnetic, 607
Synchrocyclotron, 509
Synchrotron, 509
Synchrotron radiation, 738

Table, diffusion coefficient, 960
  elastic constants, 680
  electrical conductivities, 586
  electric dipole moments, 475
  electric susceptibilities, 574
  gyromagnetic ratio, 516
  indexes of refraction and dispersive power, 844
  indexes of refraction, average, 791
    of crystals, 796
  magnetic susceptibilities, 606
  Maxwell's equations, 656
  sign conventions, for spherical mirrors, 821
    for spherical refraction surfaces, 826
  thermal conductivity, 960
  velocity of sound, 710
  viscosity, 960
  visible region, 764

stazionario, 457
Statvolt, 490
Stazionarie, onde, 872
Stazionario, stato, 457
Stenoscopio, 817
Stereoisomerismo, 807
Stokes, relazione di, 813
Straordinaria, onda, 794
Superfici equipotenziali, 462
Superficie, integrale di, 556
Suscettibilità, elettrica, 567
magnetica, 604
paramagnetica, 607
Suono, 709

Tabella, coefficienti di diffusione, 960
conducibilità termiche, 960
conduttività elettriche, 586
convenzioni sui segni, per gli specchi sferici, 821
per una superficie rifrangente sferica, 826
costanti elastiche, 680
equazioni di Maxwell, 656
indici di rifrazione e potere dispersivo, 844
indici di rifrazione, medi, 791
dei cristalli, 796
momenti di dipolo elettrico, 475
rapporto giromagnetico, 516
regione visibile, 764
suscettibilità elettriche, 574
suscettibilità magnetiche, 606
velocità del suono, 710
viscosità, 960
Taylor, sviluppo in serie, 684
TE, modo, 891
Telescopio, a riflessione, 838
a rifrazione, 836
Tensione, normale, 679
tangenziale, 689, 951
Termica, conducibilità, 942
Termica, conduzione, 941
in condizioni stazionarie, 944
tabella della, 960
Termiche, onde, 946
Termici, neutroni, 948
Termoelettroni, 753
Termoionica, emissione, 451
Tesla, 495
Tesla, N. (1856–1943), 495
Thomson, J. J. (1856–1940), 506
TM, modo, 892
Tormalina, 798
Toroidale, avvolgimento, 597
Torsionali, onde, 690
Torsione, bilancia di, di Cavendish, 441
Totale, riflessione, 781
Trasformatore, 648
Trasmettitore, 648
Trasporto, fenomeni di, 934
Trasversale elettrico, modo, 891
Trasversale magnetico, modo, 892
Trasversali, onde, 688
Trizio, 458
Tubo, aperto alle due estremità, 874
aperto ad una estremità e chiuso all'altra, 874
Tyndall, effetto, 744

Udito, 709
UHF, 763
Ultrasuoni, 709
Ultravioletto, 765
Urto, onda d', 709

Vacanza elettronica, 497
Valenza chimica, 453
Van Allen, fasce di radiazione di, 503
Van de Graaf, acceleratore di, 465
Velocità di gruppo, 704, 758
Ventrali, superfici, 859
Ventri, 871
Vettore d'onda, 698
Vettore, potenziale, 620, 632
Virtuale, 820
Viscosimetro, 964
Viscosità, 950
tabella della, 960
Visibile, spettro, 764
Volt, 460
Volta, A. (1745–1827), 460
Vuoto, permettività del, 442

Weber, 601
Weber, W. (1804–1891), 601
Wheatstone, ponte di, 617
Wollaston, prisma di, 814

X, raggi, 765
X, diffrazione dei raggi, 922

Young, T. (1773–1829), 861
Young, esperimento di, della doppia fenditura, 860
modulo di, 680

Taylor's expansion, 684
Telescope, reflecting, 838
refracting, 836
TE mode, 891
Tesla, 495
Tesla, N. (1856–1943), 495
Thermal conduction, 941
steady state, 944
Thermal conductivity, 942
table of, 960
Thermal neutron, 948
Thermal wave, 946
Thermionic emission, 451
Thermoelectron, 753
Thin-film interference, 866
Thomson, J. J. (1856–1940), 506
Threshold frequency, 754
of feeling, 697
of hearing, 697
TM mode, 892
Toroid, 597
Torsion balance, Cavendish, 441
Torsional wave, 690
Total reflection, 781
Tourmaline, 798
Transformer, 648
Transmitter, 648
Transport phenomena, 934
Transverse electric mode, 891
Transverse magnetic mode, 892
Transverse wave, 688
Tritium, 458
Tyndall effect, 744

UHF, 763
Ultrasonics, 709
Ultraviolet, 765

Vacuum permittivity, 442
Valence, chemical, 453
Van Allen radiation belts, 503
Van de Graaff accelerator, 465
Vector potential, 620, 632
Ventral surface, 859
Virtual, 820
Visible spectrum, 764
Volt, 460
Volta, A. (1745–1827), 460
Viscosimeter, 964
Viscosity, 950
table of, 960

Wave, attenuated, 710
capillary, 692
conical, 709
cylindrical, 699
energy, 695
extraordinary, 794
flexural, 714
gravity, 692
irrotational, 703
longitudinal, 682
Mach, 709
ordinary, 794
plane, 698
pressure, 685
scattered, 744
secondary, 775
shear, 690
shock, 709
solenoidal, 703
spherical, 699
standing, 872
thermal, 946
torsional, 690
transverse, 688
Wave front, 774
Wave guide, 887
acoustic, 890
electromagnetic, 890
Wave motion, 670
Wave number, 672
Wave packet, 676
Wave surface, 774
Wavelength, 672
Weber, 601
Weber, W. (1804–1891), 601
Wheatstone bridge, 617
Wollaston prism, 814
Work function, 753

X-ray, 765
X-ray diffraction, 922

Young, T. (1773–1829), 861
Young's double-slit experiment, 860
Young's modulus, 680

Tabella A—1 Tabella Periodica degli Elementi

Le masse atomiche, basate sul numero esatto 12.00000 assunto come massa del principale isotopo del carbonio, ^{12}C, sono i valori più recenti (1961) adottati dall'Unione Internazionale di Chimica Pura e Applicata. L'unità di massa usata in questa tabella è chiamata *unità di massa atomica* (amu): 1 amu = 1.6604×10^{-27} kg. La massa atomica del carbonio in questa scale vale 12.01115 perchè è la media dei diversi isotopi presenti in natura nel carbonio. (Per gli elementi prodotti artificialmente, è data tra parentesi la massa atomica approssimata dell'isotopo più stabile.)

Gruppo→		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			0
Periodo	Serie											
1	1	1 H 1.00797										2 He 4.0026
2	2	3 Li 6.939	4 Be 9.0122	5 B 10.811	6 C 12.01115	7 N 14.0067	8 O 15.9994	9 F 18.9984				10 Ne 20.183
3	3	11 Na 22.9898	12 Mg 24.312	13 Al 26.9815	14 Si 28.086	15 P 30.9738	16 S 32.064	17 Cl 35.453				18 A 39.948
4	4	19 K 39.102	20 Ca 40.08	21 Sc 44.956	22 Ti 47.90	23 V 50.942	24 Cr 51.996	25 Mn 54.9380	26 Fe 55.847	27 Co 58.9332	28 Ni 58.71	
	5	29 Cu 63.54	30 Zn 65.37	31 Ga 69.72	32 Ge 72.59	33 As 74.9216	34 Se 78.96	35 Br 79.909				36 Kr 83.80
5	6	37 Rb 85.47	38 Sr 87.62	39 Y 88.905	40 Zr 91.22	41 Nb 92.906	42 Mo 95.94	43 Tc [99]	44 Ru 101.07	45 Rh 102.905	46 Pd 106.4	
	7	47 Ag 107.870	48 Cd 112.40	49 In 114.82	50 Sn 118.69	51 Sb 121.75	52 Te 127.60	53 I 126.9044				54 Xe 131.30
6	8	55 Cs 132.905	56 Ba 137.34	57–71 Serie dei Lantanidi*	72 Hf 178.49	73 Ta 180.948	74 W 183.85	75 Re 186.2	76 Os 190.2	77 Ir 192.2	78 Pt 195.09	
	9	79 Au 196.967	80 Hg 200.59	81 Tl 204.37	82 Pb 207.19	83 Bi 208.980	84 Po [210]	85 At [210]				86 Rn [222]
7	10	87 Fr [223]	88 Ra [226.05]	89–Serie degli Attinidi**								

* Serie dei Lantanidi	57 La 138.91	58 Ce 140.12	59 Pr 140.907	60 Nd 144.24	61 Pm [147]	62 Sm 150.35	63 Eu 151.96	64 Gd 157.25	65 Tb 158.924	66 Dy 162.50	67 Ho 164.930	68 Er 167.26	69 Tm 168.934	70 Yb 173.04	71 Lu 174.97
** Serie degli Attinidi	89 Ac [227]	90 Th 232.038	91 Pa [231]	92 U 238.03	93 Np [237]	94 Pu [242]	95 Am [243]	96 Cm [245]	97 Bk [249]	98 Cf [249]	99 Es [253]	100 Fm [255]	101 Md [256]	102 No	103

Tabella A—2 Costanti Fondamentali

Costante	Simbolo	Valore
Velocità della luce	c	2.9979×10^{8} m s^{-1}
Carica elementare	e	1.6021×10^{-19} C
Massa a riposo dell'elettrone	m_e	9.1091×10^{-31} kg
Massa a riposo del protone	m_p	1.6725×10^{-27} kg
Massa a riposo del neutrone	m_n	1.6748×10^{-27} kg
Costante de Planck	h	6.6256×10^{-34} J s
	$\hbar = h/2\pi$	1.0545×10^{-34} J s
Rapporto carica-massa dell'elettrone	e/m_e	1.7588×10^{11} kg^{-1} C
Rapporto quanto-carica	h/e	4.1356×10^{-15} J s C^{-1}
Raggio di Bohr	a_0	5.2917×10^{-11} m
Lunghezza d'onde Compton:		
dell'elettrone	$\lambda_{C,e}$	2.4262×10^{-12} m
del protone	$\lambda_{C,p}$	1.3214×10^{-15} m
Costante di Rydberg	R	1.0974×10^{7} m^{-1}

Costante	Simbolo	Valore
Magnetone di Bohr	μ_B	9.2732×10^{-24} J T^{-1}
Numero di Avogadro	N_A	6.0225×10^{23} mol^{-1}
Costante di Boltzmann	k	1.3805×10^{-23} J °K^{-1}
Costante dei gas	R	8.3143 J °K^{-1} mol^{-1}
Volume normale di un gas perfetto (CN)	V_0	2.2414×10^{-2} m^3 mol^{-1}
Costante di Faraday	F	9.6487×10^{4} C mol^{-1}
Costante di Coulomb	K_e	8.9874×10^{9} N m^2 C^{-2}
Costante dielettrica del vuoto	ϵ_0	8.8544×10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^2
Costante magnetica	K_m	1.0000×10^{-7} m kg C^{-2}
Permeabilità del vuoto	μ_0	1.3566×10^{-6} m kg C^{-2}
Costante gravitazionale	γ	6.670×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
Accelerazione di gravità al livello del mare e all'equatore	g	9.7805 m s^{-2}

Costanti numeriche: $\pi = 3.1416$; $e = 2.7183$; $\sqrt{2} = 1.4142$; $\sqrt{3} = 1.7320$

Table A–1 Periodic Table of the Elements

The atomic masses, based on the exact number 12.00000 as the assigned atomic mass of the principal isotope of carbon, ^{12}C, are the most recent (1961) values adopted by the International Union of Pure and Applied Chemistry. The unit of mass used in this table is called *atomic mass unit* (amu): 1 amu = 1.6604×10^{-27} kg. The atomic mass of carbon is 12.01115 on this scale because it is the average of the different isotopes naturally present in carbon. (For artificially produced elements, the approximate atomic mass of the most stable isotope is given in brackets.)

Group→		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII			0
Period	Series											
1	1	1 H 1.00797										2 He 4.0026
2	2	3 Li 6.939	4 Be 9.0122	5 B 10.811	6 C 12.01115	7 N 14.0067	8 O 15.9994	9 F 18.9984				10 Ne 20.183
3	3	11 Na 22.9898	12 Mg 24.312	13 Al 26.9815	14 Si 28.086	15 P 30.9738	16 S 32.064	17 Cl 35.453				18 A 39.948
4	4	19 K 39.102	20 Ca 40.08	21 Sc 44.956	22 Ti 47.90	23 V 50.942	24 Cr 51.996	25 Mn 54.9380	26 Fe 55.847	27 Co 58.9332	28 Ni 58.71	
	5	29 Cu 63.54	30 Zn 65.37	31 Ga 69.72	32 Ge 72.59	33 As 74.9216	34 Se 78.96	35 Br 79.909				36 Kr 83.80
5	6	37 Rb 85.47	38 Sr 87.62	39 Y 88.905	40 Zr 91.22	41 Nb 92.906	42 Mo 95.94	43 Tc [99]	44 Ru 101.07	45 Rh 102.905	46 Pd 106.4	
	7	47 Ag 107.870	48 Cd 112.40	49 In 114.82	50 Sn 118.69	51 Sb 121.75	52 Te 127.60	53 I 126.9044				54 Xe 131.30
6	8	55 Cs 132.905	56 Ba 137.34	57–71 Lanthanide series*	72 Hf 178.49	73 Ta 180.948	74 W 183.85	75 Re 186.2	76 Os 190.2	77 Ir 192.2	78 Pt 195.09	
	9	79 Au 196.967	80 Hg 200.59	81 Tl 204.37	82 Pb 207.19	83 Bi 208.980	84 Po [210]	85 At [210]				86 Rn [222]
7	10	87 Fr [223]	88 Ra [226.05]	89–Actinide series**								

* Lanthanide series:	57 La 138.91	58 Ce 140.12	59 Pr 140.907	60 Nd 144.24	61 Pm [147]	62 Sm 150.35	63 Eu 151.96	64 Gd 157.25	65 Tb 158.924	66 Dy 162.50	67 Ho 164.930	68 Er 167.26	69 Tm 168.934	70 Yb 173.04	71 Lu 174.97
** Actinide series:	89 Ac [227]	90 Th 232.038	91 Pa [231]	92 U 238.03	93 Np [237]	94 Pu [242]	95 Am [243]	96 Cm [245]	97 Bk [249]	98 Cf [249]	99 Es [253]	100 Fm [255]	101 Md [256]	102 No	103

Table A–2 Fundamental Constants

Constant	Symbol	Value
Velocity of light	c	2.9979×10^{8} m s^{-1}
Elementary charge	e	1.6021×10^{-19} C
Electron rest mass	m_e	9.1091×10^{-31} kg
Proton rest mass	m_p	1.6725×10^{-27} kg
Neutron rest mass	m_n	1.6748×10^{-27} kg
Planck constant	h	6.6256×10^{-34} J s
	$\hbar = h/2\pi$	1.0545×10^{-34} J s
Charge-to-mass ratio for electron	e/m_e	1.7588×10^{11} kg^{-1} C
Quantum charge ratio	h/e	4.1356×10^{-15} J s C^{-1}
Bohr radius	a_0	5.2917×10^{-11} m
Compton wavelength:		
of electron	$\lambda_{C,e}$	2.4262×10^{-12} m
of proton	$\lambda_{C,p}$	1.3214×10^{-15} m
Rydberg constant	R	1.0974×10^{7} m^{-1}

Constant	Symbol	Value
Bohr magneton	μ_B	9.2732×10^{-24} J T^{-1}
Avogadro constant	N_A	6.0225×10^{23} mol^{-1}
Boltzmann constant	k	1.3805×10^{-23} J °K^{-1}
Gas constant	R	8.3143 J °K^{-1} mol^{-1}
Ideal gas normal volume (STP)	V_0	2.2414×10^{-2} m^3 mol^{-1}
Faraday constant	F	9.6487×10^{4} C mol^{-1}
Coulomb constant	K_e	8.9874×10^{9} N m^2 C^{-2}
Vacuum permittivity	ϵ_0	8.8544×10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^2
Magnetic constant	K_m	1.0000×10^{-7} m kg C^{-2}
Vacuum permeability	μ_0	1.3566×10^{-6} m kg C^{-2}
Gravitational constant	γ	6.670×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
Acceleration of gravity at sea level and at equator	g	9.7805 m s^{-2}

Numerical constants: $\pi = 3.1416$; $e = 2.7183$; $\sqrt{2} = 1.4142$; $\sqrt{3} = 1.7320$

Tabella A–3 Unità e Simboli

Grandezza	Simbolo	Nome dell'unità	Relazione con le unità fondamentali MKSC	MKSA
Lunghezza	l, s	metro	m	
Massa	m	kilogrammo	kg	
Tempo	t	secondo	s	
Velocità	v		$m\ s^{-1}$	
Accelerazione	a		$m\ s^{-2}$	
Velocità angolare	ω		s^{-1}	
Frequenza angolare	ω		s^{-1}	
Frequenza	ν	hertz (Hz)	s^{-1}	
Quantità di moto	p		$m\ kg\ s^{-1}$	
Forza	F	newton (N)	$m\ kg\ s^{-2}$	
Momento della quantità di moto	L		$m^2\ kg\ s^{-1}$	
Momento d'una forza	τ		$m^2\ kg\ s^{-2}$	
Lavoro	W	joule (J)	$m^2\ kg\ s^{-2}$	
Potenza	P	watt (W)	$m^2\ kg\ s^{-3}$	
Energia	E_k, E_p, U, E	joule (J)	$m^2\ kg\ s^{-2}$	
Temperatura	T	°K	$m^2\ kg\ s^{-2}$/particella	
Coefficiente di diffusione D	D		$m^2\ s^{-1}$	
Coefficiente di conducibilità termica	K		$m\ kg\ s^{-3}\ °K^{-1}$	
Coefficiente di viscosità	η		$m^{-1}\ kg\ s^{-1}$	
Modulo di Young	Y		$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$	
Modulo di compressibilità	κ		$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$	
Modulo di taglio	G		$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$	
Momento di inerzia	I		$m^2\ kg$	
Campo gravitazionale	$\mathcal{G}$		$m\ s^{-2}$	
Potenziale gravitazionale	V_g		$m^2\ s^{-2}$	
Carica	q, Q	coulomb (C)	C	A s
Corrente elettrica	I	ampere (A)	$s^{-1}\ C$	A
Campo elettrico	$\mathcal{E}$		$m\ kg\ s^{-2}\ C^{-1}$	$m\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
Potenziale elettrico	V	volt (V)	$m^2\ kg\ s^{-2}\ C^{-1}$	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
Densità di corrente	j		$m^{-2}\ s^{-1}\ C$	$m^{-2}\ A$
Resistenza elettrica	R	ohm (Ω)	$m^2\ kg\ s^{-1}\ C^{-2}$	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-2}$
Induttanza	L	henry (H)	$m^2\ kg\ C^{-2}$	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
Costante dielettrica	ϵ_0		$m^{-3}\ kg^{-1}\ s^2\ C^2$	$m^{-3}\ kg^{-1}\ s\ A^2$
Polarizzazione	$\mathcal{P}$		$m^{-2}\ C$	$m^{-2}\ s\ A$
Induzione dielettrica	$\mathcal{D}$		$m^{-2}\ C$	$m^{-2}\ s\ A$
Induzione magnetica	$\mathcal{B}$	tesla (T)	$kg\ s^{-1}\ C^{-1}$	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
Permeabilità magnetica	μ_0		$m\ kg\ C^{-2}$	$m\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
Magnetizzazione	$\mathfrak{M}$		$m^{-1}\ s^{-1}\ C$	$m^{-1}\ A$
Campo magnetico	$\mathcal{H}$		$m^{-1}\ s^{-1}\ C$	$m^{-1}\ A$
Flusso magnetico	$\Phi_\mathcal{B}$	weber (Wb)	$m^2\ kg\ s^{-1}\ C^{-1}$	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
Momento elettrico di dipolo	p		$m\ C$	$m\ s\ A$
Momento elettrico di quadrupolo	Q		$m^2\ C$	$m^2\ s\ A$
Momento magnetico di dipolo	M		$m^2\ s^{-1}\ C$	$m^2\ A$
Momento magnetico di quadrupolo	Q		$m^3\ s^{-1}\ C$	$m^3\ A$
Capacità	C	farad (F)	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^2\ C^2$	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$

Table A-3 Units and Symbols

Quantity	Symbol	Name of unit	Relation to fundamental units MKSC	MKSA
Length	l, s	meter	m	
Mass	m	kilogram	kg	
Time	t	second	s	
Velocity	v		$m\ s^{-1}$	
Acceleration	a		$m\ s^{-2}$	
Angular velocity	ω		s^{-1}	
Angular frequency	ω		s^{-1}	
Frequency	ν	hertz (Hz)	s^{-1}	
Momentum	p		$m\ kg\ s^{-1}$	
Force	F	newton (N)	$m\ kg\ s^{-2}$	
Angular momentum	L		$m^2\ kg\ s^{-1}$	
Torque	τ		$m^2\ kg\ s^{-2}$	
Work	W	joule (J)	$m^2\ kg\ s^{-2}$	
Power	P	watt (W)	$m^2\ kg\ s^{-3}$	
Energy	E_k, E_p, U, E	joule (J)	$m^2\ kg\ s^{-2}$	
Temperature	T	°K	$m^2\ kg\ s^{-2}$/particle	
Coefficient of diffusion	D		$m^2\ s^{-1}$	
Coefficient of thermal conductivity	K		$m\ kg\ s^{-3}\ °K^{-1}$	
Coefficient of viscosity	η		$m^{-1}\ kg\ s^{-1}$	
Young's modulus	Y		$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$	
Bulk modulus	κ		$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$	
Shear modulus	G		$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$	
Moment of inertia	I		$m^2\ kg$	
Gravitational field	$\mathcal{G}$		$m\ s^{-2}$	
Gravitational potential	V_g		$m^2\ s^{-2}$	
Charge	q, Q	coulomb	C	A s
Electric current	I	ampere	$s^{-1}\ C$	A
Electric field	$\mathcal{E}$		$m\ kg\ s^{-2}\ C^{-1}$	$m\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
Electric potential	V	volt (V)	$m^2\ kg\ s^{-2}\ C^{-1}$	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
Current density	j		$m^{-2}\ s^{-1}\ C$	$m^{-2}\ A$
Electric resistance	R	ohm (Ω)	$m^2\ kg\ s^{-1}\ C^{-2}$	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-2}$
Inductance	L	henry (H)	$m^2\ kg\ C^{-2}$	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
Electric permittivity	ϵ_0		$m^{-3}\ kg^{-1}\ s^2\ C^2$	$m^{-3}\ kg^{-1}\ s\ A^2$
Polarization	$\mathcal{P}$		$m^{-2}\ C$	$m^{-2}\ s\ A$
Dielectric displacement	$\mathcal{D}$		$m^{-2}\ C$	$m^{-2}\ s\ A$
Magnetic field	$\mathcal{B}$	tesla (T)	$kg\ s^{-1}\ C^{-1}$	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
Magnetic permeability	μ_0		$m\ kg\ C^{-2}$	$m\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
Magnetization	$\mathfrak{M}$		$m^{-1}\ s^{-1}\ C$	$m^{-1}\ A$
Magnetizing field	$\mathcal{H}$		$m^{-1}\ s^{-1}\ C$	$m^{-1}\ A$
Magnetic flux	$\Phi_\mathcal{B}$	weber (Wb)	$m^2\ kg\ s^{-1}\ C^{-1}$	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
Electric dipole moment	p		$m\ C$	$m\ s\ A$
Electric quadrupole moment	Q		$m^2\ C$	$m^2\ s\ A$
Magnetic dipole moment	M		$m^2\ s^{-1}\ C$	$m^2\ A$
Magnetic quadrupole moment	Q		$m^3\ s^{-1}\ C$	$m^3\ A$
Capacity	C	farad (F)	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^2\ C^2$	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$

Tabella A–4 Fattori di Conversione

Tempo:

1 s = 1.667×10^{-2} min = 2.778×10^{-4} h
= 3.169×10^{-8} anni
1 min = 60 s = 1.667×10^{-2} h
= 1.901×10^{-6} anni
1 h = 3600 s = 60 min = 1.141×10^{-4} anni
1 anno = 3.156×10^{7} s = 5.259×10^{5} min
= 8.766×10^{3} h

Lunghezza:

1 m = 10^{2} cm = 39.37 in (pollici)
= 6.214×10^{-4} mi (miglia)
1 mi = 5280 ft (piedi) = 1.609 km
1 in = 2.540 cm
1 Å (angstrom) = 10^{-8} cm = 10^{-10} m
= 10^{-4} μ (micron)
1 μ = 10^{-6} m
1 AU (unità astronomica) = 1.496×10^{11} m
1 anno luce = 9.46×10^{15} m
1 parsec = 3.084×10^{16} m

Angoli:

1 radiante = 57.3°
1° = 1.74×10^{-2} rad
1′ = 2.91×10^{-4} rad
1″ = 4.85×10^{-6} rad

Area:

1 m^2 = 10^{4} cm^2 = 1.55×10^{-5} in^2
= 10.76 ft^2
1 in^2 = 6.452 cm^2
1 ft^2 = 144 in^2 = 9.29×10^{-2} m^2

Volume:

1 m^3 = 10^{6} cm^3 = 10^{3} litri
= 35.3 ft^3 = 6.1×10^{4} in^3
1 ft^3 = 2.83×10^{-2} m^3 = 28.32 litri
1 in^3 = 16.39 cm^3

Velocità:

1 m s^{-1} = 10^{2} cm s^{-1} = 3.281 ft s^{-1}
1 ft s^{-1} = 30.48 cm s^{-1}
1 mi min^{-1} = 60 mi h^{-1} = 88 ft s^{-1}

Accelerazione:

1 m s^{-2} = 10^{2} cm s^{-2} = 3.281 ft s^{-2}
1 ft s^{-2} = 30.48 cm s^{-2}

Massa:

1 kg = 10^{3} g = 2.205 lb
1 lb = 453.6 g = 0.4536 kg
1 amu = 1.6604×10^{-27} kg

Forza:

1 N = 10^{5} dine = 0.2248 lbf = 0.102 kgf
1 dina = 10^{-5} N = 2.248×10^{-6} lbf
1 lbf = 4.448 N = 4.448×10^{5} dine
1 kgf = 9.81 N

Pressione:

1 N m^{-2} = 9.265×10^{-6} atm
= 1.450×10^{-4} lbf in^{-2}
= 10 dine cm^{-2}
1 atm = 14.7 lbf in^{-2} = 1.013×10^{5} N m^{-2}
1 bar = 10^{6} dine cm^{-2}

Energia:

1 J = 10^{7} erg = 0.239 cal
= 6.242×10^{18} eV
1 eV = 10^{-6} MeV = 1.60×10^{-12} erg
= 1.07×10^{-9} amu
1 cal = 4.186 J = 2.613×10^{19} eV
= 2.807×10^{10} amu
1 amu = 1.492×10^{-10} J
= 3.564×10^{-11} cal = 931.0 MeV

Temperatura:

°K = 273.1 + °C
°C = $\frac{5}{9}$ (°F − 32)
°F = $\frac{9}{5}$ (°C + 32)

Potenza:

1 W = 1.341×10^{-3} hp
1 hp = 745.7 W

Carica elettrica:*

1 C = 3×10^{9} $stC^{N.T}$
1 stC = $\frac{1}{3} \times 10^{-9}$ C

Corrente:*

1 A = 3×10^{9} stA
1 stA = $\frac{1}{3} \times 10^{-9}$ A
1 μA = 10^{-6} A, 1 mA = 10^{-3} A

Campo elettrico:

1 N C^{-1} = 1 V m^{-1} = 10^{-2} V cm^{-1}
= $\frac{1}{3} \times 10^{-4}$ stV cm^{-1}

Potenziale elettrico:*

1 V = $\frac{1}{3} \times 10^{-2}$ stV
1 stV = 3×10^{2} V

Resistenza:

1 Ω = 10^{6} $\mu\Omega$
1 MΩ = 10^{6} Ω

Capacità:*

1 F = 9×10^{11} stF
1 stF = $\frac{1}{9} \times 10^{-11}$ F
1 μF = 10^{-6} F, 1 pF = 10^{-12} F

Induzione magnetica:

1 T = 10^{4} gauss, 1 gauss = 10^{-4} T

Flusso magnetico:

1 Wb = 10^{8} maxwell, 1 maxwell = 10^{-8} Wb

Campo magnetico:

1 A m^{-1} = $4\pi \times 10^{-3}$ oersted
1 oersted = $1/4\pi \times 10^{3}$ A m^{-1}

*In tutti i casi 3 sta per 2.998 e 9 sta per 8.987.

N.T. Le unità precedute dal prefisso st–, quali stC, stA, stV e stF, che si leggono rispettivamente statcoulomb, statampere, statvolt e statfarad, indicano le corrispondenti nel sistema elettrostatico del coulomb, dell'ampere, del volt e del farad.

Table A–4 Conversion Factors

Time:

1 s = 1.667×10^{-2} min = 2.778×10^{-4} hr
= 3.169×10^{-8} yr
1 min = 60 s = 1.667×10^{-2} hr
= 1.901×10^{-6} yr
1 hr = 3600 s = 60 min = 1.141×10^{-4} yr
1 yr = 3.156×10^{7} s = 5.259×10^{5} min
= 8.766×10^{3} hr

Length:

1 m = 10^{2} cm = 39.37 in. = 6.214×10^{-4} mi
1 mi = 5280 ft = 1.609 km
1 in. = 2.540 cm
1 Å (angstrom) = 10^{-8} cm = 10^{-10} m
= 10^{-4} μ (micron)
1 μ (micron) = 10^{-6} m
1 AU (astronomical unit) = 1.496×10^{11} m
1 light year = 9.46×10^{15} m
1 parsec = 3.084×10^{16} m

Angle:

1 radian = 57.3°
1° = 1.74×10^{-2} rad
1′ = 2.91×10^{-4} rad
1″ = 4.85×10^{-6} rad

Area:

1 m^2 = 10^{4} cm^2 = 1.55×10^{-5} in^2
= 10.76 ft^2
1 in^2 = 6.452 cm^2
1 ft^2 = 144 in^2 = 9.29×10^{-2} m^2

Volume:

1 m^3 = 10^{6} cm^3 = 10^{3} liters
= 35.3 ft^3 = 6.1×10^{4} in^3
1 ft^3 = 2.83×10^{-2} m^3 = 28.32 liters
1 in^3 = 16.39 cm^3

Velocity:

1 m s^{-1} = 10^{2} cm s^{-1} = 3.281 ft s^{-1}
1 ft s^{-1} = 30.48 cm s^{-1}
1 mi min^{-1} = 60 mi hr^{-1} = 88 ft s^{-1}

Acceleration:

1 m s^{-2} = 10^{2} cm s^{-2} = 3.281 ft s^{-2}
1 ft s^{-2} = 30.48 cm s^{-2}

Mass:

1 kg = 10^{3} g = 2.205 lb
1 lb = 453.6 g = 0.4536 kg
1 amu = 1.6604×10^{-27} kg

Force:

1 N = 10^{5} dyn = 0.2248 lbf = 0.102 kgf
1 dyn = 10^{-5} N = 2.248×10^{-6} lbf
1 lbf = 4.448 N = 4.448×10^{5} dyn
1 kgf = 9.81 N

Pressure:

1 N m^{-2} = 9.265×10^{-6} atm
= 1.450×10^{-4} lbf in^{-2}
= 10 dyn cm^{-2}
1 atm = 14.7 lbf in^{-2} = 1.013×10^{5} N m^{-2}
1 bar = 10^{6} dyn cm^{-2}

Energy:

1 J = 10^{7} ergs = 0.239 cal
= 6.242×10^{18} eV
1 eV = 10^{-6} MeV = 1.60×10^{-12} erg
= 1.07×10^{-9} amu
1 cal = 4.186 J = 2.613×10^{19} eV
= 2.807×10^{10} amu
1 amu = 1.492×10^{-10} J
= 3.564×10^{-11} cal = 931.0 MeV

Temperature:

°K = 273.1 + °C
°C = $\frac{5}{9}$ (°F − 32)
°F = $\frac{9}{5}$ °C + 32

Power:

1 W = 1.341×10^{-3} hp
1 hp = 745.7 W

Electric Charge:*

1 C = 3×10^{9} stC
1 stC = $\frac{1}{3} \times 10^{-9}$ C

Current:*

1 A = 3×10^{9} stA
1 stA = $\frac{1}{3} \times 10^{-9}$ A
1 μA = 10^{-6} A, 1 mA = 10^{-3} A

Electric Field:*

1 N C^{-1} = 1 V m^{-1} = 10^{-2} V cm^{-1}
= $\frac{1}{3} \times 10^{-4}$ stV cm^{-1}

Electric Potential:*

1 V = $\frac{1}{3} \times 10^{-2}$ stV
1 stV = 3×10^{2} V

Resistance:

1 Ω = 10^{6} $\mu\Omega$
1 MΩ = 10^{6} Ω

Capacity:*

1 F = 9×10^{11} stF
1 stF = $\frac{1}{9} \times 10^{-11}$ F
1 μF = 10^{-6} F, 1 pF = 10^{-12} F

Magnetic Field:

1 T = 10^{4} gauss, 1 gauss = 10^{-4} T

Magnetic Flux:

1 Wb = 10^{8} maxwell, 1 maxwell = 10^{-8} Wb

Magnetizing Field:

1 A m^{-1} = $4\pi \times 10^{-3}$ oersted
1 oersted = $1/4\pi \times 10^{3}$ A m^{-1}

*In all cases, 3 actually means 2.998 and 9 means 8.987.

Made and printed in England by A. Wheaton & Co., Exeter. CDE7987654321

Addison-Wesley Publishing Company